M1 Physique Fondamentale et Appliquée (PF) 2004-2005
Magistère de Physique Fondamentale

Problème d'Optique n^o 3

Ce problème est à rendre en TD avant le 28 octobre

Exercice -I- Influence des turbulences atmosphériques sur l'observation d'une étoile
Une lunette astronomique est modélisée par une lentille mince de centre optique O, axe z, distance focale $f = 5$ m et rayon $R = 30$ cm entourée d'un cache opaque. L'axe Oz pointe une étoile (E_1).

1. On néglige pour l'instant tout effet de turbulence atmosphérique. L'étoile (E_1) produit au niveau de O (juste avant l'entrée de la lentille) une onde plane d'amplitude complexe $\mathcal{A}_1$. Préciser l'amplitude complexe $\mathcal{A}(X, Y, 0)$ en tout point du plan $z = 0^-$ (juste avant la lentille) et $z = 0^+$ (juste après la lentille).
2. Où se situe, pour ce dispositif, le plan de Fraunhofer ? Pour la suite, on mesurera la lumière obtenue dans ce plan.
3. Calculer l'amplitude complexe $\mathcal{A}_1(x, y, z)$ et l'intensité lumineuse $I_1(x, y, z)$ observée en tout point du plan de Fraunhofer. Calculer numériquement la largeur à mi-hauteur de la tache observée pour $\lambda = 500$ nm.
4. Une seconde étoile (E_2) est observée dans une direction formant dans le plan Oxz un angle ϵ petit par rapport à la direction de (E_1). Elle produit au niveau de O l'amplitude complexe $\mathcal{A}_2$. Évaluer la distance séparant les images géométriques de (E_1) et (E_2) par la lentille. En déduire sans nouveau calcul l'intensité totale $I_2(x, y, z)$ observée dans le plan de Fraunhofer. Les deux étoiles sont-elles observées distinctement pour $\epsilon = 3,5\ 10^{-4}$ degrés ?
5. La turbulence atmosphérique a pour effet de déformer la surface d'onde des ondes incidentes ; au niveau du point $P(X, Y)$ du plan d'entrée de la lentille, l'onde arrivant de (E_1) possède en réalité une amplitude complexe

$$\mathcal{A}(X, Y, 0) = \mathcal{A}_1 \exp i\psi(X, Y, t)$$

   où $\psi(X, Y, t)$ est une fonction avec un temps caractéristique de variation de l'ordre de la milliseconde. La variation spatiale de $\psi(X, Y, t)$ est relativement faible à l'échelle de la dimension de la lentille et on peut en écrire le développement limité sous la forme

$$\psi(X, Y, t) = \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha(t)\ X + \beta(t)\ Y)$$

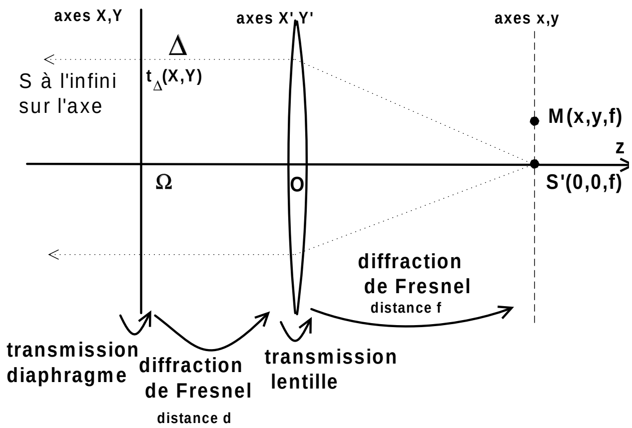
   (a) À un instant t donné, décrire la distribution de l'intensité dans le plan de Fraunhofer
   (b) On modélise les turbulences atmosphériques par des variations aléatoires de $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ entre -10^{-4} et 10^{-4} radians, qualitativement toutes les 5 millisecondes. Une caméra CCD est placée dans le plan de Fraunhofer et enregistre une image de l'intensité lumineuse dans ce plan. Décrire l'image obtenue (a) pour un temps de pose de 1 milliseconde (b) pour un temps de pose de 10 seconde.

La déformation de front d'onde produite par la turbulence atmosphérique est corrigée dans les télescopes de nouvelle génération par une technique appelée optique adaptative : au niveau du point X, Y du miroir, la phase $\psi(X, Y, t)$ de l'onde arrivant de (E_1) est distordue et correspond à un rayon qui n'est pas correctement renvoyé vers F'. Le miroir est localement déformé de manière à réfléchir correctement ce rayon vers F' et retrouver une image (E_1') de largeur limité par la diffraction 1,22 $\frac{\lambda f}{2R}$. La déformation de la phase est la même pour une autre étoile (E_2) donc la correction faite pour une étoile brillante est valable également pour toutes les autres du champ d'observation.

Exercice -II- Diffraction de Fraunhofer pour un objet non accolé à la lentille.
Remarque : cet exercice vise à démontrer une propriété de la diffraction de Fraunhofer qui a été admise en cours. Les questions 1 à 4 constituent un bon entraînement pour l'utilisation des concepts et des outils de base de la diffraction. Les questions 5 et 6 mettent en oeuvre **des calculs allant au delà de ce qui sera au programme** *du partiel ou de l'examen d'optique, ces deux questions sont donc facultatives.*

On évalue l'amplitude complexe diffractée dans le plan de formation de l'image géométrique d'une source ponctuelle, dans le cas où le diaphragme diffractant et la lentille de projection sont distants de d.

La lentille mince est définie par son centre optique O, son axe et sa distance focale f. Le diaphragme est un plan perpendiculaire à cet axe en Ω, qui possède le facteur de transmission $t_\Delta(X,Y)$. On note $\overline{\Omega O} = d$. Le diaphragme est éclairé en incidence normale par une onde plane : la source de lumière est à l'infini sur l'axe, son image géométrique S' par la lentille seule serait au point focal image de la lentille. L'amplitude complexe de l'onde incidente au niveau du diaphragme est notée $\mathcal{A}_0$. Le principe du calcul réalisé dans cet exercice est illustré ci contre.



1. Indiquer l'amplitude complexe $\mathcal{A}(X,Y,-d)$ de l'onde dans le plan de sortie du diaphragme
2. A l'aide de la formule de Fresnel (forme II), donner sous la forme d'un produit de convolution l'amplitude complexe $\mathcal{A}(X',Y',0^-)$ dans le plan d'entrée de la lentille. On notera $\mathcal{C} = \frac{i}{\lambda d}\exp -ikd$
3. En déduire l'amplitude complexe $\mathcal{A}_e(X',Y',0^+)$ dans le plan de sortie de la lentille.
4. On évalue l'amplitude dans le plan de formation de l'image géométrique de la source ($z = f$), en considérant que l'amplitude complexe $\mathcal{A}(x,y,f)$ dans ce plan résulte de la diffraction de Fresnel de l'amplitude $\mathcal{A}_e(X',Y',0^+)$ émergeant de la lentille en $z = 0$. Utiliser la formule de Fresnel (Forme I) pour exprimer l'amplitude complexe $\mathcal{A}(x,y,f)$ dans le plan $z = f$ sous la forme d'une intégrale **faisant apparaître** $\mathcal{A}(X',Y',0^-)$. On notera $\mathcal{C}'(x,y) = \frac{i}{\lambda f}\exp -ikr_0$ avec $r_0 = (f + \frac{x^2+y^2}{2f})$
5. Vérifier que l'expression précédente s'identifie à
$$\mathcal{C}'(x,y)\ \ \mathcal{C}\ \ \overline{\mathcal{F}}_{\left[\left\{(\mathcal{A}_0 t_\Delta(X,Y))*\exp -ik(\frac{X^2+Y^2}{2d})\right\}\right]}\left(\frac{x}{\lambda f},\frac{y}{\lambda f}\right)$$
6. On rappelle pour deux fonctions $f(r,s)$ et $g(r,s)$ la propriété $\overline{\mathcal{F}}_{[\{f*g\}]}(u,v) = \overline{\mathcal{F}}_{[f]}(u,v)\cdot\overline{\mathcal{F}}_{[g]}(u,v)$. On peut calculer par ailleurs $\overline{\mathcal{F}}_{\left[\exp -ik(\frac{X^2+Y^2}{2d})\right]}(\frac{x}{\lambda f},\frac{y}{\lambda f}) = -i\lambda d \ \ \exp(ikd\frac{x^2+y^2}{2f^2})$

   En déduire l'expression de $\mathcal{A}(x,y,f)$ en fonction de $\overline{\mathcal{F}}_{[\mathcal{A}_0 t_\Delta(X,Y)]}(\frac{x}{\lambda f},\frac{y}{\lambda f})$, λ, f et k. Pour quelle valeur de d le coefficient facteur de $\overline{\mathcal{F}}_{[\mathcal{A}_0 t_\Delta(X,Y)]}(\frac{x}{\lambda f},\frac{y}{\lambda f})$ devient-il indépendant de x et y ? Comparer l'intensité obtenue ici à celle qu'on aurait avec le diaphragme accolé à la lentille.