Neutronique

1. Rappels de Physique Nucléaire

Rappels de physique nucléaire, fonctionnement des réacteurs.

1. Radioactivité. Décroissance. Activité

Loi de décroissance. On considère un élément radioactif donné X et on note $N(t)$ le nombre d'atomes X présents dans un échantillon à l'instant t. La probabilité de désintégration d'un noyau X étant indépendante de t et de son environnement, le nombre de désintégrations par unité de temps est simplement proportionnel au nombre $N(t)$ d'atomes X présents au même instant. Déduisez-en la loi de décroissance radioactive $N(t)$, ainsi que celle de l'*activité* $A(t)$ de l'échantillon (le nombre de désintégration par seconde). Tracez la fonction $N(t)$.

On appelle *demi-vie* $t_{1/2}$ le temps nécessaire pour que la moitié des noyaux de l'échantillon se soient désintégrés : $N(t + T_{1/2}) = N(t)/2$. Exprimez $t_{1/2}$.

De même, on appelle *vie moyenne* (*mean life*) le temps τ tel que $N(t + \tau) = N(t)/e$. Exprimez τ.

Radium. Un gramme de radium 226 perd 3.7×10^{10} atomes chaque seconde. Quelle est son activité ? Calculez sa constante radioactive rapportée à la seconde, puis à l'année. Déduisez-en sa demi-vie. Combien d'atomes de radium reste-t-il après 1000 ans ? Le radium se désintègre par émission alpha. Ecrivez le bilan de réaction et identifiez le noyau produit.

2. Sections efficaces, libre parcours moyen

Vitesses des neutrons Calculez la vitesse d'un neutron thermique ($E = 0.025\,\mathrm{eV}$). Faites de même pour un neutron de 2 MeV. Commentez.

Libre parcours moyen : démonstration Montrez que dans un matériau où la section efficace d'interaction avec les noyaux vaut σ, l'intensité $I(x)$ d'un faisceau de neutrons décroît comme :

$$I(x) = I(0)\, e^{-\Sigma x} \qquad \text{avec} \quad \Sigma = \sigma \times \frac{\rho \mathcal{N}_A}{M}$$

où ρ et M sont respectivement la masse volumique et la masse molaire du matériau.

Déduisez-en la probabilité $P(\lambda > x)$ pour un neutron de ne subir aucune interaction jusqu'à l'abscisse x (probabilité de survivre au moins jusqu'en x), puis la probabilité $f(x)\,\mathrm{d}x$ d'interagir entre x et $x+dx$ ($f(x)$ est une *densité de probabilité*).

Montrez alors que le libre parcours moyen $\bar{\lambda}$ s'écrit simplement

$$\bar{\lambda} = <x> = \int_0^{+\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\Sigma} = \frac{M}{\sigma \rho \mathcal{N}_A}$$

Sections efficaces macroscopiques Calculez la densité nucléaire de l'uranium-235 pur ; déduisez-en la section efficace macroscopique d'absorption Σ_a dans un bloc d'uranium-235 pur pour des neutrons thermiques, et le libre parcours moyen λ_a correspondant.

Données : $\sigma_a^5 = 690\,\text{barns}$; $\rho(^{235}\text{U}) = 18.7\,\text{g/cm}^3$.

Libre parcours moyen des neutrons dans l'eau Pour le fluide primaire d'un REP, calculez Σ_a de l'eau légère ($^1_1\text{H}_2\text{O}$) pour des neutrons thermiques. Comparez avec la section macroscopique de diffusion Σ_s. En déduire le libre parcours moyen total dans l'eau.

Données : $\rho = 1\,\text{g/cm}^3$; $\sigma_a(H) = 0.33\,\text{b}$; $\sigma_a(O) = 2.7 \times 10^{-4}\,\text{b}$; $\sigma_s(H) = 20.5\,\text{b}$; $\sigma_s(O) = 3.8\,\text{b}$.

Libre parcours moyen dans le combustible Le combustible des REP est de l'UO_2 enrichi. Sachant que la densité du dioxyde d'uranium UO_2 est de $10.6\,\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$ et que pour des neutrons thermiques, on a :

Noyau	σ_a (barns)	σ_f (barns)	σ_s (barns)
^{235}U	690	582	13.8
^{238}U	2.7	0	8.9
^{16}O	2.7×10^{-4}	0	3.8

Calculer les sections efficaces macroscopiques Σ_s, Σ_a et Σ_f de l'UO_2 correspondant à un enrichissement de 4.5% en noyaux d'^{235}U. En déduire le libre parcours moyen total d'un neutron thermique dans cet UO_2 enrichi.

3. Flux neutronique dans un réacteur

Le premier navire marchand à propulsion nucléaire fut le brise-glace "Lénine", lancé en 1957 en Union Soviétique. Sa chaufferie nucléaire comprenait 3 réacteurs à eau pressurisée d'une puissance thermique de 90 MW chacun. Chaque réacteur était équipé d'un coeur cylindrique de diamètre $D = 1\,\text{m}$ et de hauteur $H = 1\,\text{m}$. Le combustible utilisé était de l'Uranium enrichi à 5% sous forme d'Oxyde UO_2. La charge de combustible était de $1700\,\text{kg}$ par réacteur.

Calculez la puissance volumique P_v en W/cm^3. Sachant que la section efficace macroscopique moyenne de fission $\bar{\Sigma}_f$ pour ce type de réacteur est de $0.087\,\text{cm}^{-1}$, Déduisez-en le flux neutronique ϕ dans un réacteur (on supposera le flux homogène dans tout le réacteur).

4. Réaction en chaîne : équation des *quatre facteurs*

Facteur de multiplication du combustible. On définit le *facteur de multiplication du combustible* η comme étant le rapport :

$$\eta = \frac{\text{neutrons produits par fission}}{\text{neutrons consommés par fission et capture}}$$

Exprimez le facteur de multiplication η en fonction des sections efficaces microscopiques d'absorption $\sigma_a = \sigma_f + \sigma_\gamma$ (σ_γ est aussi noté σ_c) et de fission σ_f ; écrivez η en fonction des sections efficaces macroscopiques.

Retrouvez les facteurs η des isotopes du tableau suivant.

	σ_f	σ_γ	$\bar{\nu}$	η
Neutrons thermiques				
^{233}U	524	69	2,51	2,29
^{235}U	582	108	2,47	2,08
^{238}U	0	2,7	0	0
^{239}Pu	750	300	2,91	2,08
Neutrons rapides ($\sim$2 MeV)				
^{235}U	1,27	0,10	2,46	2,28
^{238}U	0,52	2,36	2,88	0,52
^{239}Pu	2	0,10	2,88	2,74

Quel est le facteur η de l'uranium naturel (0.7% de ^{235}U) ? Peut-on faire fonctionner un réacteur uniquement constitué d'uranium 238 ? d'uranium naturel ? de plutonium 239 ?

Que vaut le facteur η pour de l'uranium enrichi à 3% ? Quel est l'intérêt d'enrichir le combustible en uranium-235 ?

Anti-réactivité. Un réacteur présente une anti-réactivité de 1000 pcm. Que vaut K_{eff} ? Sachant que $K_\infty = 1.2$, quelle est la probabilité de non-fuite des neutrons pour ce réacteur ? Quel pourcentage de fuites de neutrons peut-on admettre pour que le réacteur soit juste critique ?

Réactivité, probabilité de fuite. Un réacteur présente un facteur K_{eff} de 0.995. Quelle est son anti-réactivité ? Sachant que toutes les fissions sont thermiques, que le facteur anti-trappe p vaut 1 ; que $\nu = 2.47$; sachant de plus que sur 100 neutrons thermiques absorbés 51 provoquent une fission. Que vaut K_∞ ? Quelle est la probabilité de fuite ?

5. Taille critique, masse critique

Lorsqu'on assemble une quantité suffisante de matériau fissile, une réaction en chaîne peut s'établir et s'emballer de manière explosive : c'est le principe de la bombe atomique. Dans cet exercice, nous chercherons à établir de façon approchée la masse critique du plutonium $^{239}_{94}$Pu dans une configuration géométrique simple. *On négligera les processus de capture stérile des neutrons dans le plutonium, et on fera quelques approximations pour simplifier le calcul.*

5.1 — La fission d'un noyau de ^{239}Pu libère en moyenne 207 MeV. Quelle serait l'énergie libérée par la fission de tous les noyaux d'un kilogramme de ^{239}Pu ? L'explosion d'une tonne de TNT (trinitrotoluène) dégage 4.2×10^9 J. Exprimez l'énergie calculée précédemment en équivalent de tonnes de TNT. Commentez.

Neutronique

On appellera $n(\mathbf{r}, t)$ le nombre de neutrons par unité de volume dans le matériau, et $\mathbf{J}$ le vecteur densité de courant de neutrons.

On notera $\phi(\mathbf{r}, t) = \bar{v}\, n(\mathbf{r}, t)$ le "flux" (flux au sens des neutroniciens, ou "fluence"), où v est la vitesse moyenne des neutrons.

Le vecteur densité de courant $\mathbf{J}$ de neutrons vérifie la loi de Fick, écrite traditionnellement en neutronique sous la forme :

$$\mathbf{J} = -D\, \mathbf{grad}\, \phi(\mathbf{r}, t) = -D\, \mathbf{grad}\, [\bar{v}\, n(\mathbf{r}, t)]$$

où D est un coefficient effectif de diffusion des neutrons dans le plutonium.

Afin d'établir l'équation à laquelle obéit le flux de neutrons $\phi(\mathbf{r},t)$, on raisonne sur un petit élément de volume $\mathrm{d}V = \mathrm{d}^3r$ de plutonium pendant un intervalle de temps infinitésimal $\mathrm{d}t$, et on établit le bilan des neutrons.

5.2 — Combien y a-t-il de noyaux de plutonium dans ce volume d^3r ?

Donnez l'expression du nombre $\mathrm{d}^2N_{\text{fission}}$ de réactions de fission se produisant dans le volume d^3r pendant un intervalle $\mathrm{d}t$, en fonction de σ_f, ρ_{Pu}, M_{Pu}, $\phi(\mathbf{r},t)$. Montrez que cette expression peut se mettre sous la forme $\mathrm{d}^2N_{\text{fission}} = A\phi\,\mathrm{d}^3r\,\mathrm{d}t = A\bar{v}n\,\mathrm{d}^3r\,\mathrm{d}t$, et donnez l'expression de A.

5.3 — Chaque fission du plutonium produit en moyenne $\bar{\nu}$ neutrons. Combien de neutrons apparaissent et disparaissent du fait des réaction de fission dans un volume d^3r pendant un temps $\mathrm{d}t$? Établissez l'expression du nombre d^2N_f de neutrons produits **en excès** dans un volume d^3r pendant un temps $\mathrm{d}t$, en fonction de $n(\mathbf{r},t)$, puis de $\phi(\mathbf{r},t)$.

5.4 — Dans un volume d^3r, pendant un intervalle de temps $\mathrm{d}t$, la variation du nombre de neutrons présents s'écrit :

$$\mathrm{d}^2N = \frac{\partial n(\mathbf{r},t)}{\partial t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3r = \frac{1}{\bar{v}}\frac{\partial \phi(\mathbf{r},t)}{\partial t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3r$$

Cette variation est égale à la somme des neutrons d^2N_f produits par fission, auquel il faut soustraire le nombre de neutrons qui sont sortis par diffusion du volume d^3r pendant $\mathrm{d}t$, qui s'écrit $\operatorname{div}\mathbf{J} \times \mathrm{d}^3r\,\mathrm{d}t$.

Montrez que le flux $\phi(\mathbf{r},t)$ vérifie une équation de la forme :

$$\frac{1}{\bar{v}}\frac{\partial \phi(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{J} = (\bar{\nu}-1)\Sigma_f\phi(\mathbf{r},t) \tag{1}$$

5.5 — En se rappelant que $\operatorname{div}\mathbf{grad}\,f = \Delta f$ où Δ est l'opérateur laplacien, montrez que l'équation (1) peut s'écrire :

$$\frac{1}{\bar{v}}\frac{\partial \phi(\mathbf{r},t)}{\partial t} - D\Delta\phi(\mathbf{r},t) = (\bar{\nu}-1)\Sigma_f\phi(\mathbf{r},t) \tag{2}$$

Rayon critique et masse critique

5.6 — Pour simplifier les calculs, on suppose le problème à symétrie sphérique (boule de plutonium), et on admettra que l'on peut séparer les variables et écrire la densité de neutrons $n(\mathbf{r},t)$ comme le produit d'une fonction du temps $g(t)$ et d'une fonction $h(r)$ où $r = |\mathbf{r}|$ est le rayon mesuré à partir du centre de la boule. On aura donc $\phi(\mathbf{r},t) = g(t)\times h(r)$. Montrez qu'on peut mettre l'équation (2) sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\bar{v}}\frac{1}{g(t)}\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} = D\frac{\Delta h(r)}{h(r)} + (\bar{\nu}-1)\Sigma_f \tag{3}$$

Dans l'équation (3), le terme de gauche ne dépend que du temps, et celui de droite que de r. Ces deux termes sont donc nécessairement constants et égaux à une certaine constante B.

5.7 — Quelle est la dimension de B ?

5.8 — Montrez que par conséquent, la fonction $g(t)$ est solution de :

$$\frac{1}{g(t)}\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} = B\bar{v} \tag{4}$$

Résolvez cette équation et donnez l'expression de $g(t)$. On prendra $g(t=0)=1$.

5.9 — Montrez que la fonction $h(r)$ vérifie l'équation

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{B-(\bar{\nu}-1)\Sigma_f}{D} \tag{5}$$

Dans le cas des coordonnées sphériques, le laplacien d'une fonction dépendant seulement de r s'écrit :

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\right)$$

Vérifiez qu'une solution de la forme :

$$h(r) = H\frac{\sin(Cr)}{r} \tag{6}$$

convient. Exprimez la constante C en fonction de $\bar{\nu}$, Σ_f, H et D.

5.10 — La densité de neutrons au centre de la boule ($r = 0$) doit être finie mais non nulle. Est-ce bien le cas ? Que vaut $n(\mathbf{0}, t)$?

5.11 — La densité de neutrons $n(r, t)$ doit être positive à l'intérieur de la boule, et s'annuler à la surface de la boule de plutonium de rayon R. Déduisez-en l'expression de C en fonction de R.

5.12 — Montrez que l'expression obtenue pour $n(r, t)$ diverge exponentiellement avec le temps si le rayon R de la boule est supérieur à un rayon critique R_c. Déterminez la valeur du rayon critique R_c de la boule de plutonium, et déduisez-en la masse critique M_c correspondante pour le plutonium.

5.13 — Comment pourrait-on constituer un assemblage sur-critique en utilisant une masse inférieure à M_c ? Justifiez.

5.14 — Pour des raisons évidentes, on ne peut pas stocker une masse de plutonium supérieure à la masse critique de manière compacte. Comment faut-il procéder pour stocker les éléments d'une arme nucléaire ? Comment pourrait-on déclencher l'explosion ?

5.15 — Ce concept de masse critique s'applique aux autres matériaux fissiles comme l'uranium. Dans le réacteur d'une centrale nucléaire, comment évite-t-on de former un assemblage de combustible sur-critique ? Commentez.

Données : $\rho_{\mathrm{Pu}} = 19.8 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$ $\quad \dfrac{D}{(\bar{\nu}-1)\Sigma_f} = 2.6 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$ $\quad \mathcal{N}_A = 6.02 \times 10^{23}$

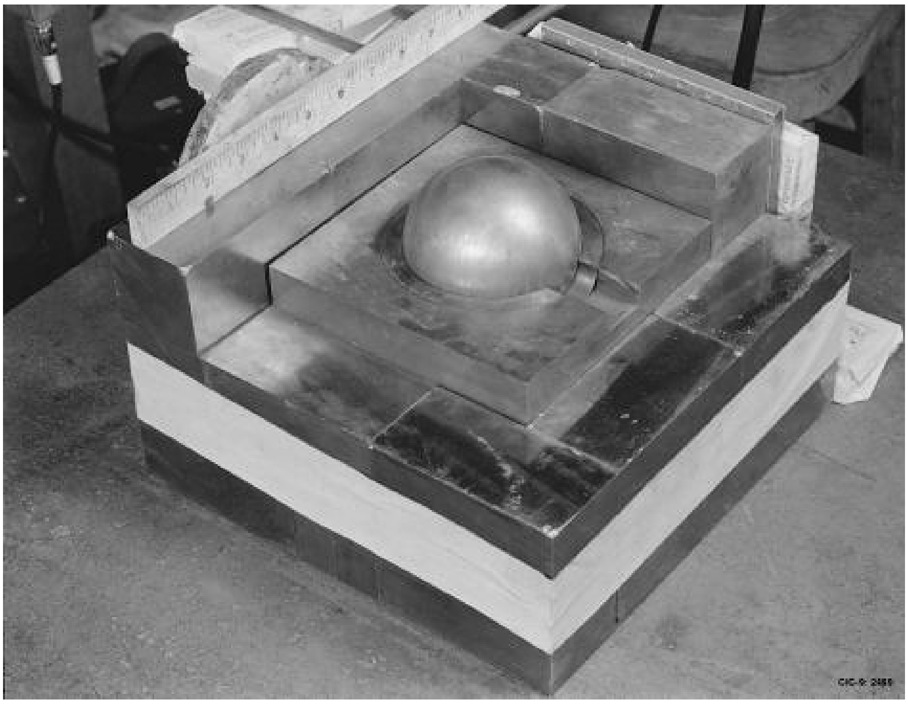

FIGURE 1 – *"The Demon Core" : masse sous-critique de plutonium utilisée à Los Alamos pour les expériences liées au programme atomique US. Cette masse de plutonium devint brièvement critique à deux reprises au cours d'expériences utilisant des réflecteurs de neutrons, entraînant à chaque fois l'irradiation intense et le décès très rapide d'un physicien du projet. Cette masse de plutonium fut finalement utilisée lors d'un essai atomique sur l'Atoll de Bikini le 1er juillet 1946.*