
UPMC – M2 Ingénierie pour le Nucléaire

Neutronique

02. – Cinétique des Réacteurs

Laurent Le Guillou
UPMC / LPNHE

llg@lpnhe.in2p3.fr

Plan général du cours

1. – Introduction générale, rappels
2. – Cinétique ponctuelle des réacteurs (*équations de Nordheim*)
3. – Ralentissement des neutrons
4. – Absorption résonnante
5. – Thermalisation des neutrons
6. – Transport des neutrons : équation de Boltzmann
7. – Diffusion des neutrons
8. – Théorie multi-groupe
9. – Evolution du combustible (*équations de Bateman*)
10. – Effets de température
11. – Contrôle de la réactivité, contrôle de la puissance

Plan

- Formule des 4 facteurs, réactivité (*rappels*)
- Durée de vie moyenne et « temps moyen de génération »
- Neutrons « retardés »
- Cinétique des neutrons prompts
- Cinétique avec neutrons retardés : équations de Nordheim
- Résolution pour un groupe de précurseurs
- Résolution pour m groupes de précurseurs
- Créneau de réactivité : pilotage
- Un peu d'histoire : cinétique de la pile de Fermi

Formule « des 4 facteurs », réactivité

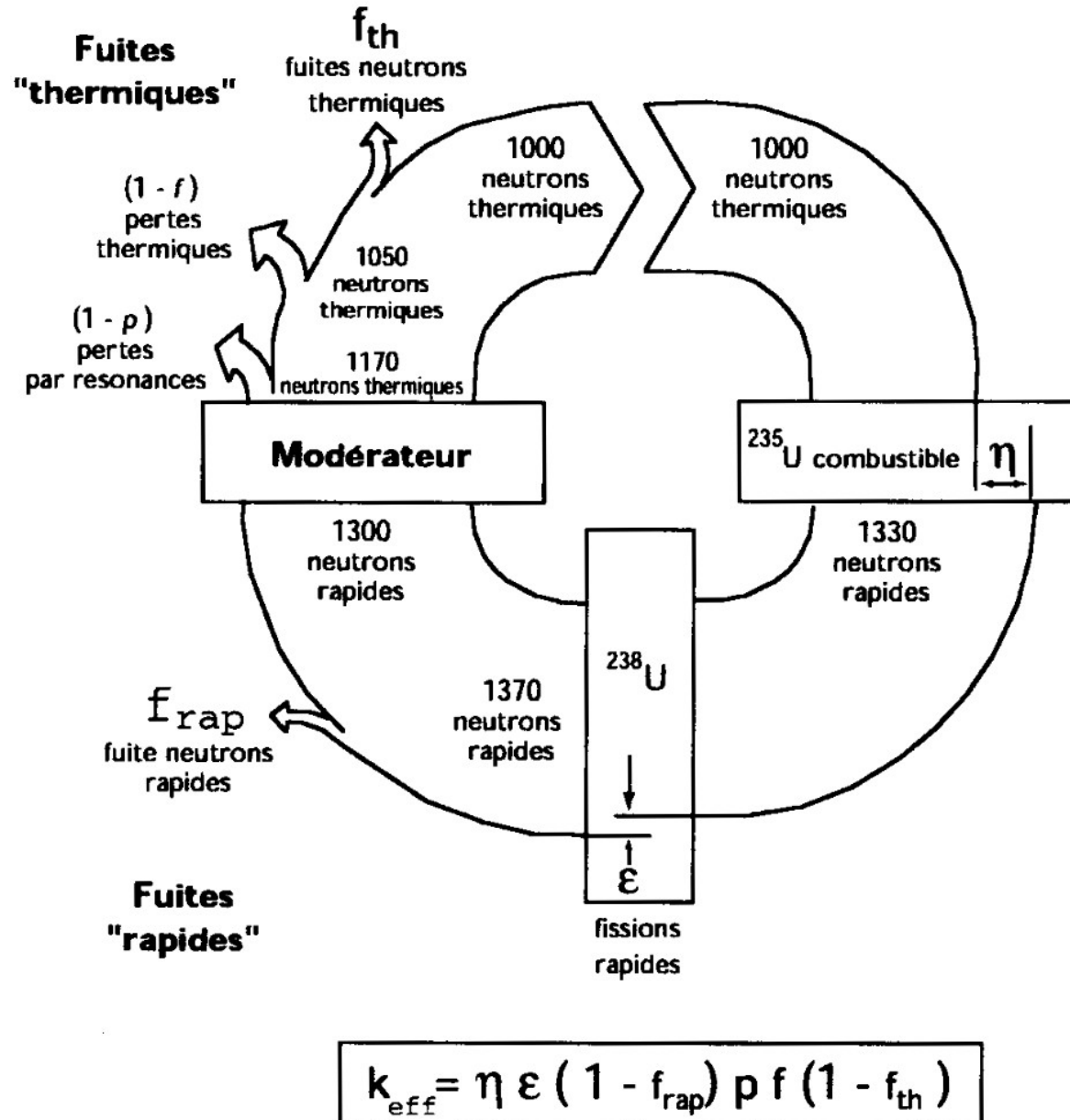
$$k_{\infty} = \eta \epsilon p f = \bar{\nu} \frac{\sum f}{\sum a}$$

$$k_{\text{eff}} = k_{\infty} P_{\text{nf}}$$

- Réactivité du réacteur

$$\rho = \frac{k_{\text{eff}} - 1}{k_{\text{eff}}}$$

(en pcm = 10^{-5})



Durée de vie et temps moyen de génération

- **Durée de vie moyenne** ℓ : temps moyen entre l'apparition d'un neutron et sa disparition par **fuite** ou **absorption**

→ correspond à la durée moyenne d'une **génération**

$$\ell = \frac{1}{v} \frac{1}{\bar{\Sigma}_a} P_{\text{nf}} \quad (n. \text{ monocinétiques})$$

→ *Pilotable* : peut être modifié par l'opérateur (action sur $\bar{\Sigma}_a$)

- **Temps moyen de génération** : temps que met en moyenne un neutron **pour en produire un autre** :

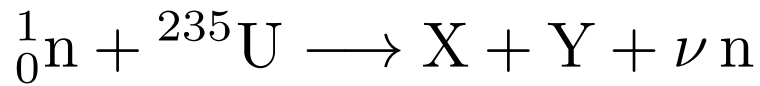
$$\ell^* = \frac{1}{\bar{v}} \frac{1}{v} \frac{1}{\bar{\Sigma}_f}$$

$$\frac{\ell}{\ell^*} = \bar{v} \frac{\bar{\Sigma}_f}{\bar{\Sigma}_a} P_{\text{nf}} = K_{\infty} P_{\text{nf}} = K_{\text{eff}}$$

$$\ell = K_{\text{eff}} \ell^*$$

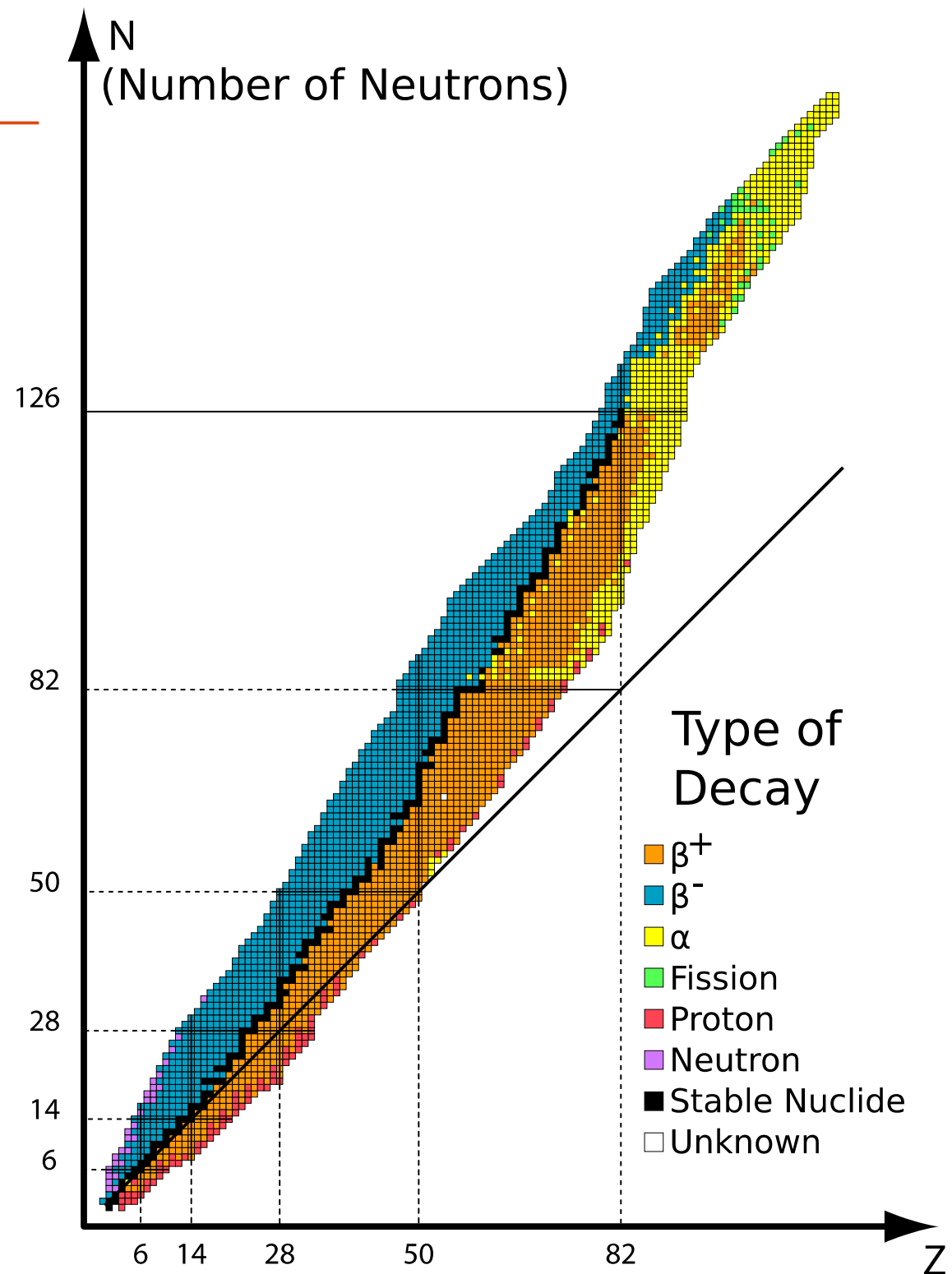
→ *Evolue par vieillissement du combustible*

Produits de fission



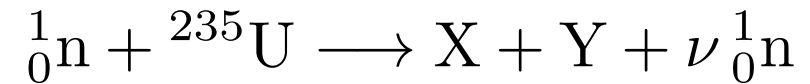
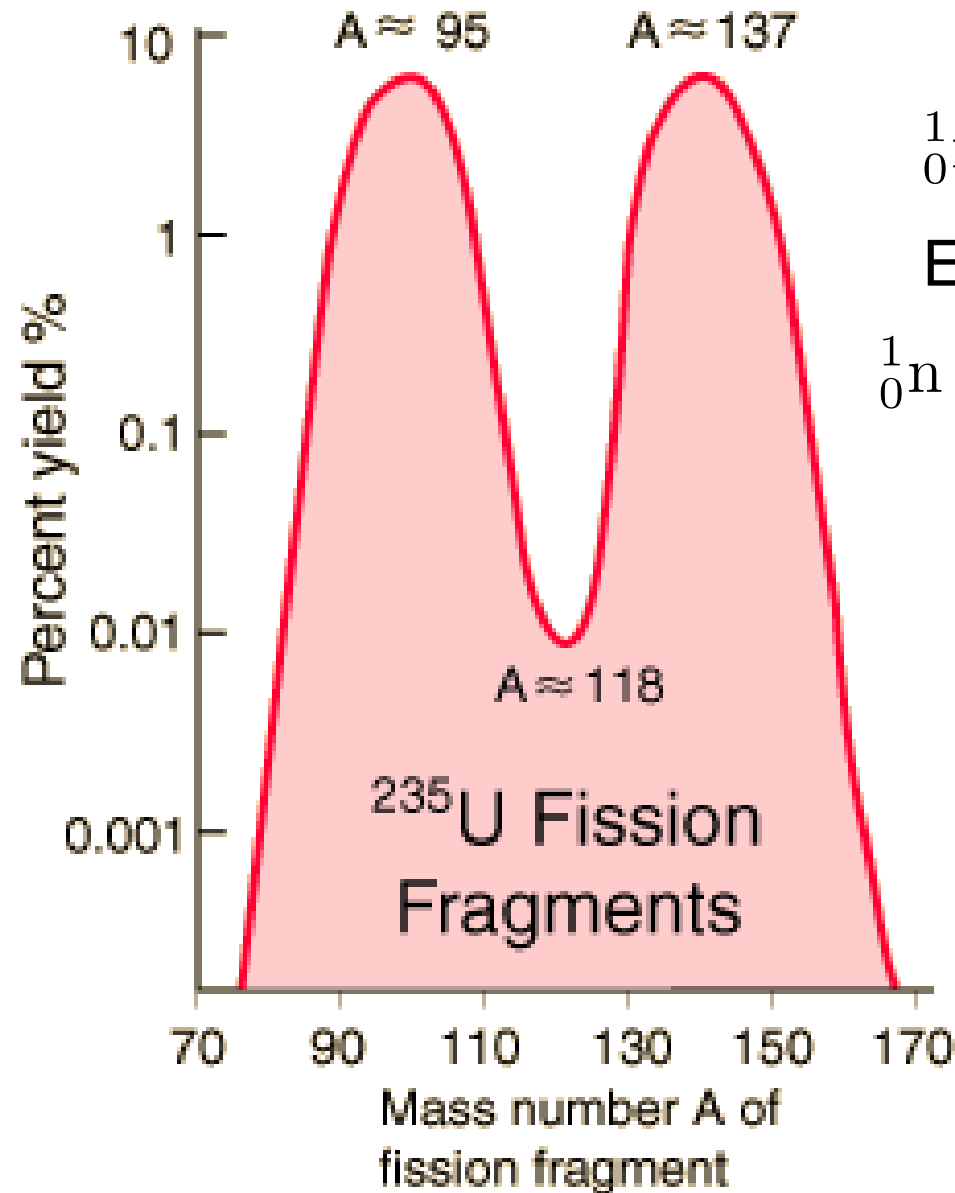
- Les noyaux lourds ont une plus grande proportion de neutrons
- Les fragments de fission sont donc trop riches en neutrons
- Fragments émetteurs β^-

Noyaux fils parfois émetteurs de neutrons :
→ neutrons « retardés »

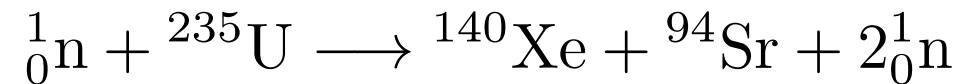


Produits de fission : distribution

Les fragments de fission ont trop de neutrons \rightarrow désintégration β^-

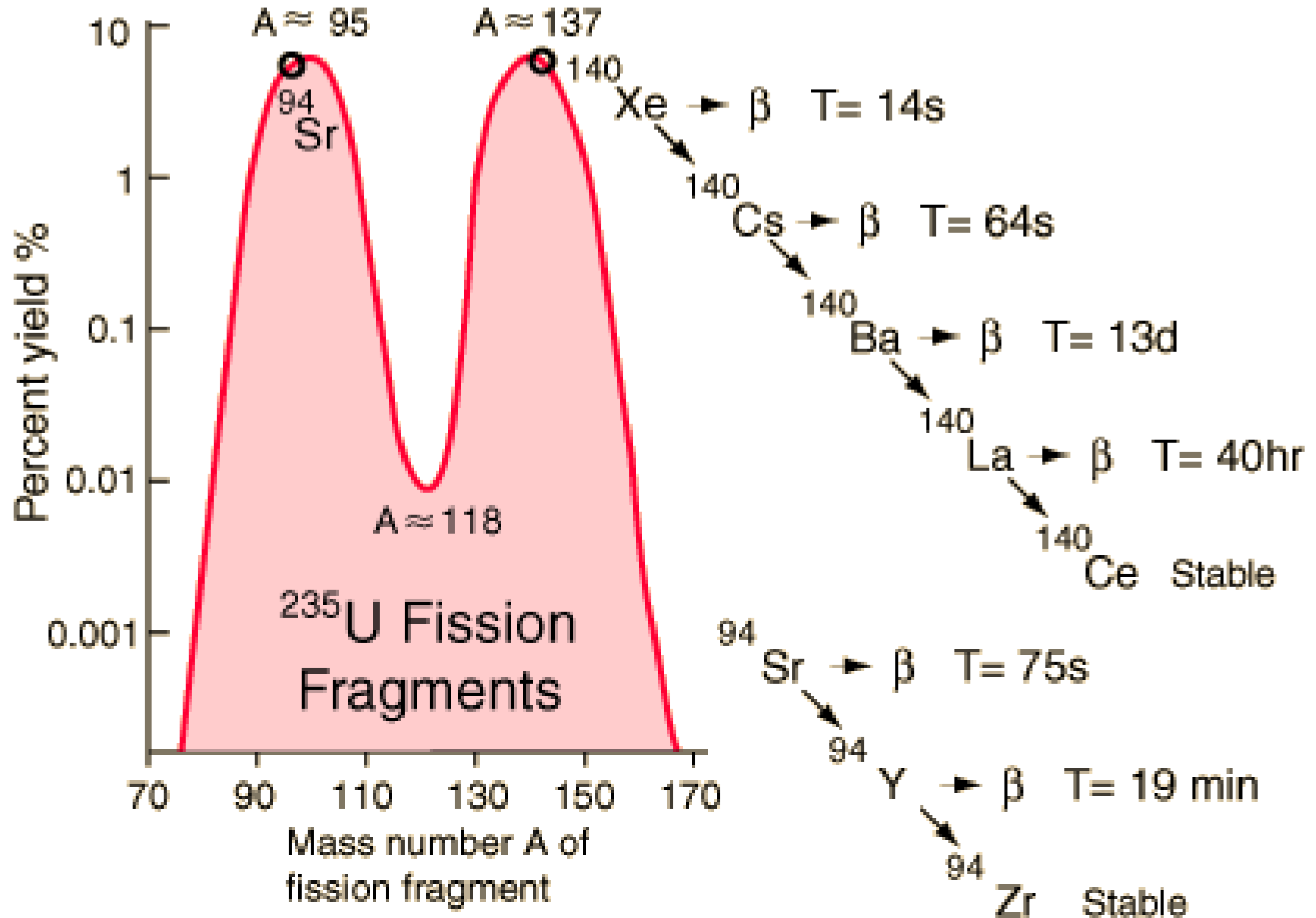


Ex :



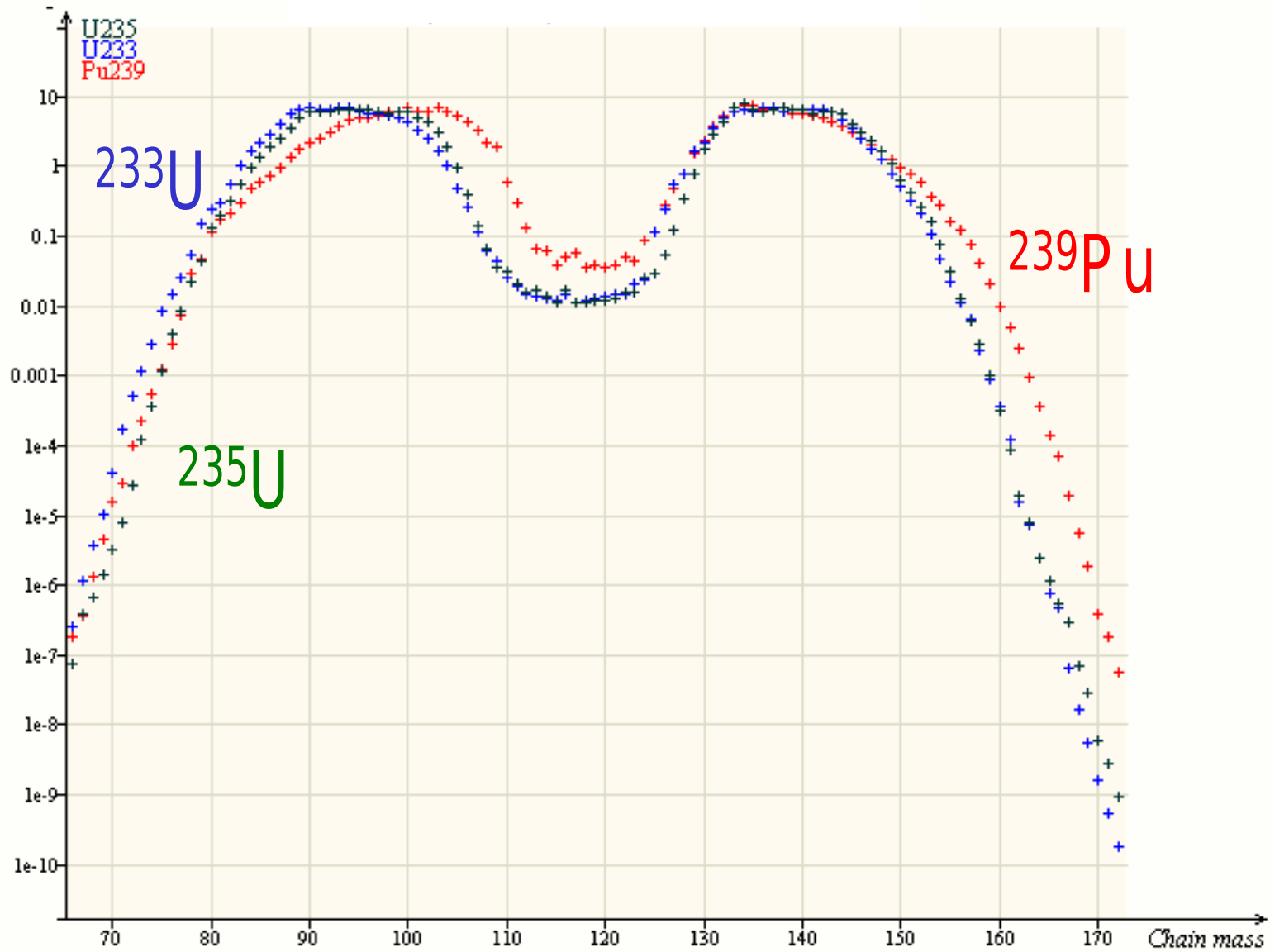
Produits de fission : distribution

Les fragments de fission ont trop de neutrons \rightarrow désintégration β^-



Produits de fission : distribution

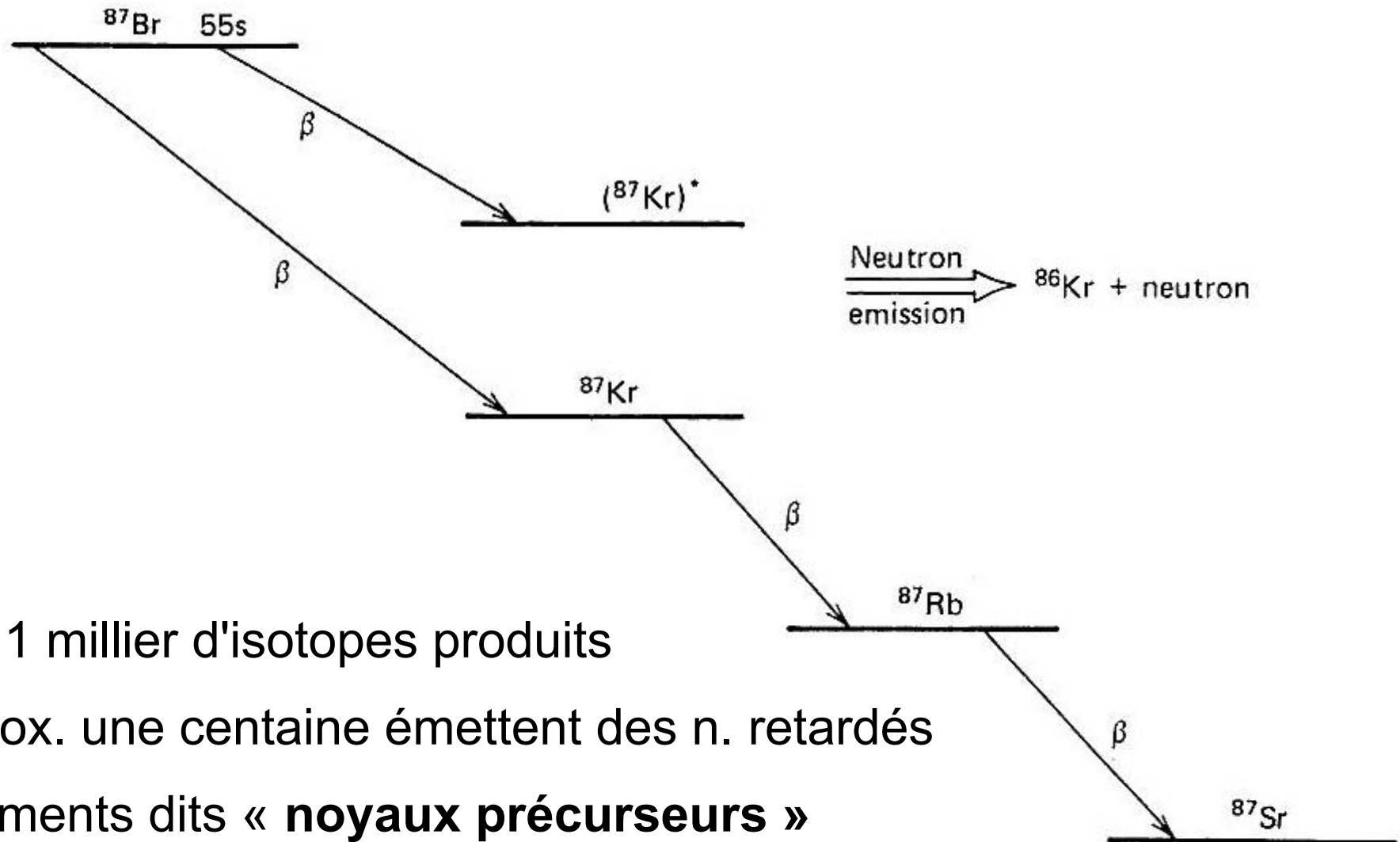
fission products mass yield (%)



mass number

Neutrons retardés : exemple du ^{87}Br

Désintégration bêta d'un fragment de fission, suivie de l'émission d'un neutron → **neutrons libérés progressivement** (0.2 s à 55 s)



Env. 1 millier d'isotopes produits

Approx. une centaine émettent des n. retardés

Fragments dits « **noyaux précurseurs** »

Neutrons retardés : noyaux précurseurs

- Les noyaux précurseurs sont groupés en **6 groupes** ($i = 1 \dots 6$) ou parfois un seul.
- **Fraction de neutrons retardés** β_i : rapport entre le nombre de neutrons émis par le groupe i de précurseurs et le nombre total de neutrons de fission.
- Fraction totale de neutrons retardés $\beta = \sum_i \beta_i$
- **Constante radioactive** des précurseurs du groupe i : λ_i
- Vie moyenne τ_i et demi-vie $T_{1/2}$:

$$\tau_i = \frac{1}{\lambda_i} \quad T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda_i}$$

- Simplification à 1 groupe : $\beta = \sum_i \beta_i$ $\frac{1}{\lambda} = \tau = \frac{\sum_i \beta_i \tau_i}{\beta}$

Fraction de neutrons retardés (^{235}U)

- Calcul : 6 groupes de précurseurs de neutrons retardés

Groupe i	Isotopes	λ (s^{-1})	τ (s)	$T_{1/2}$ (s^{-1})	β (pcm)
1	^{87}Br	0.0127	78.6	54.5	24
2	$^{88}\text{Br}, ^{137}\text{I}$	0.0317	31.5	21.8	123
3	$^{138}\text{I}, ^{89}\text{Br}...$	0.116	8.62	5.98	117
4	$^{139}\text{I}, ...$	0.311	3.22	2.23	262
5	$^{140}\text{I}, ...$	1.400	0.714	0.495	108
6	Br, Rb ...	3.876	0.258	0.179	45
Moyenne		0.0882	11.34	7.84	679

$$\beta = \sum_i \beta_i$$

$$\bar{\tau} = \frac{\sum_i \beta_i \tau_i}{\beta}$$

- Varie d'un noyau fissile à l'autre :

$$\beta(^{235}\text{U}) = 679 \text{ pcm} \quad \beta(^{239}\text{Pu}) = 224 \text{ pcm}$$

→ *vieillissement, pilotage plus difficile avec ^{239}Pu*

Fraction de neutrons retardés (^{235}U)

- Différente selon l'isotope fissile :

Noyau	Fission	β (pcm)
^{232}Th	rapide	2433
^{233}U	thermique	296
^{235}U	thermique	679
^{238}U	rapide	1828
^{239}Pu	thermique	224
^{240}Pu	rapide	292
^{241}Pu	thermique	535

$$\beta = \sum_i \beta_i$$

→ *vieillessement du combustible, pilotage plus difficile avec ^{239}Pu*

→ *la présence de MOX abaisse β*

Cinétique des neutrons prompts (seuls)

- Calcul en **négligeant les neutrons retardés**

- Pendant un temps dt

- **Disparitions** : $-\frac{dt}{\ell} n(t)$

- **Apparitions** : $+\frac{dt}{\ell} k_{\text{eff}} n(t)$

- **Comportement exponentiel** de la densité de neutrons :

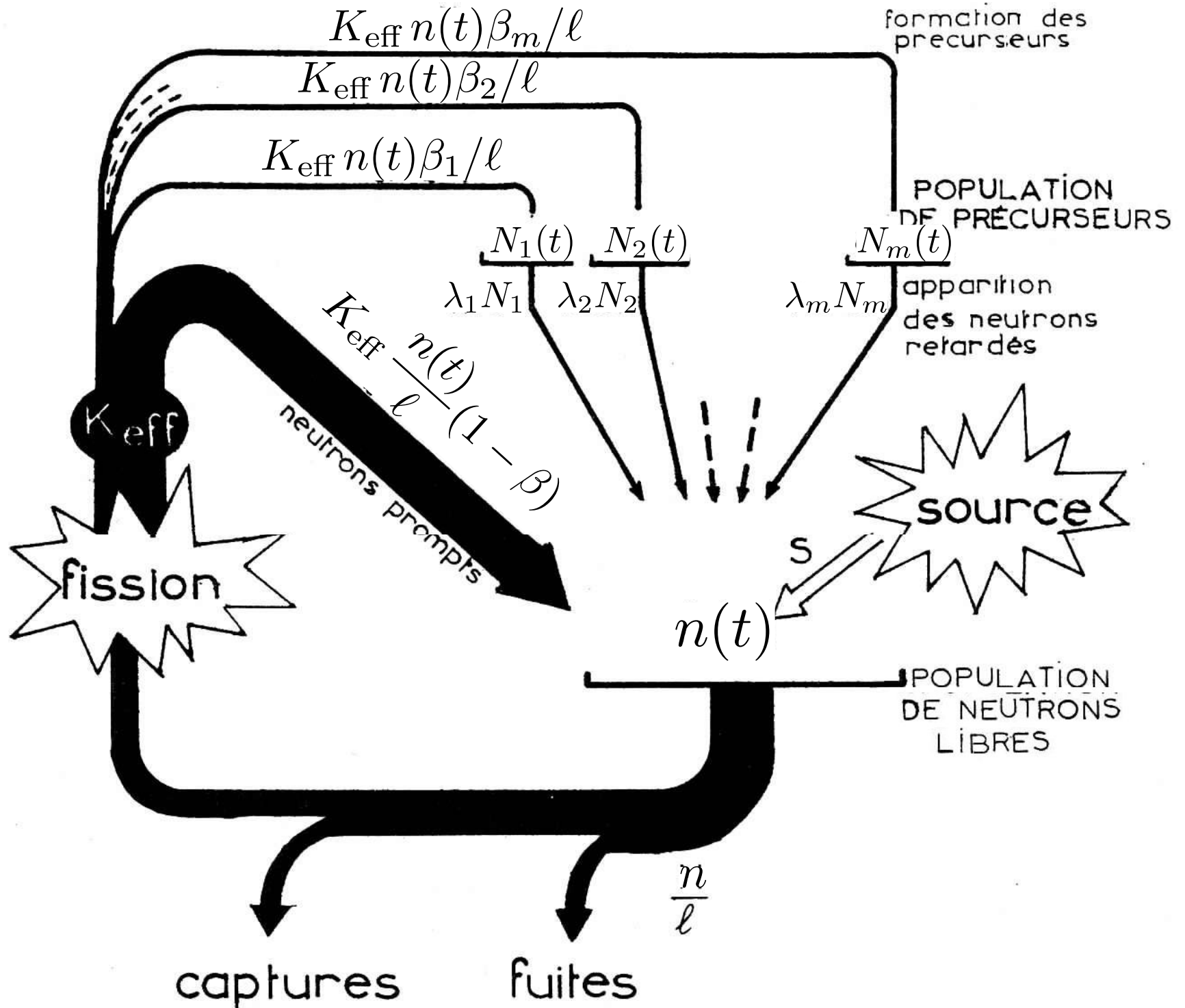
$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{(k_{\text{eff}} - 1)}{\ell} n(t) \quad n(t) = n(0) e^{(k_{\text{eff}} - 1)t/\ell} = n(0) e^{\rho t/\ell^*}$$

- **Période et temps de doublement** de la densité neutronique (*octavemètre*) :

$$\omega = \frac{k_{\text{eff}} - 1}{\ell} = \frac{\rho}{\ell^*} \quad T = \frac{1}{\omega} \quad T_d = \frac{\ln 2}{\omega}$$

- Ex : $\rho = 100 \text{ pcm}, \ell^* \simeq 25 \mu\text{s} \quad T_d = 0.017 \text{ s} \quad 57 \text{ doubl. en } 1 \text{ s}$

→ **pilotage humain impossible !**



Bilan neutronique (avec neutrons retardés)

- Populations de **noyaux précurseurs** : $N_i(t)$ $i = 1 \dots m$
→ libèrent les neutrons avec retard (après désintégration β -)
- Pendant un temps dt
 - **Disparitions** : $-\frac{dt}{\ell} n(t)$
 - **Apparitions promptes** : $+\frac{dt}{\ell} k_{\text{eff}}(1 - \beta) n(t)$
 - **Désintégration précurseurs i** : $+\sum_i \lambda_i N_i dt$
 - **Eventuelle source de neutrons** : $+S(t) dt$
- **Equation d'évolution** de la densité de neutrons :

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{k_{\text{eff}}(1 - \beta) - 1}{\ell} n(t) + \sum_i \lambda_i N_i + S(t)$$

Bilan des noyaux précurseurs

- Populations de **noyaux précurseurs** : $N_i(t)$ $i = 1 \dots m$
- Pour chaque précurseur i , pendant un temps dt
 - **Disparitions** : $-\lambda_i N_i dt$
 - **Apparition des précurseurs i** : $+k_{\text{eff}} \times \beta_i \frac{dt}{\ell} n(t)$
- **Equation d'évolution** de la densité de précurseurs i :

$$\frac{dN_i(t)}{dt} = \beta_i \frac{k_{\text{eff}}}{\ell} n(t) - \lambda_i N_i \quad (m \text{ équations})$$

- Système de **$m + 1$ équations différentielles couplées** à résoudre
- Il existe une **solution stationnaire**.

Equations de Nordheim

- Système à résoudre :

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{k_{\text{eff}}(1 - \beta) - 1}{\ell} n(t) + \sum_i \lambda_i N_i(t) + S(t)$$

$$\frac{dN_i(t)}{dt} = \beta_i \frac{k_{\text{eff}}}{\ell} n(t) - \lambda_i N_i(t) \quad (i = 1 \dots m)$$

- En faisant apparaître la réactivité, et en utilisant $\ell = k_{\text{eff}} \ell^*$

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\ell^*} n(t) + \sum_i \lambda_i N_i(t) + S(t)$$

$$\frac{dN_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{\ell^*} n(t) - \lambda_i N_i(t) \quad (i = 1 \dots m)$$

Equation de Nordheim (1 groupe)

- En ne considérant qu'un **seul groupe de précurseurs** :

$$\beta = \sum_i \beta_i \quad \frac{1}{\lambda} = \bar{\tau} = \frac{\sum_i \beta_i \tau_i}{\beta}$$

Deux équations couplées :

$$\begin{aligned} \frac{dn(t)}{dt} &= \frac{k_{\text{eff}}(1 - \beta) - 1}{\ell} n(t) + \lambda N(t) + S(t) \\ \frac{dN(t)}{dt} &= \beta \frac{k_{\text{eff}}}{\ell} n(t) - \lambda N(t) \end{aligned}$$

Ou encore :

$$\begin{aligned} \frac{dn(t)}{dt} &= \frac{\rho - \beta}{\ell^*} n(t) + \lambda N(t) + S(t) \\ \frac{dN(t)}{dt} &= \frac{\beta}{\ell^*} n(t) - \lambda N(t) \end{aligned}$$

Equation de Nordheim (1 groupe) : solutions

- 2 équations : **superposition de deux solutions** de la forme :

$$n(t) = A e^{\omega t} \quad N(t) = B e^{\omega t}$$

- Le paramètre ω est **solution de l'équation** :

$$\rho = \ell^* \omega + \beta - \frac{\lambda \beta}{\omega + \lambda} = \ell^* \omega + \frac{\beta \omega}{\omega + \lambda} \quad (1)$$

Qu'on peut encore écrire (équation du 2nd degré) :

$$\omega^2 + \left(\lambda - \frac{\rho - \beta}{\ell^*} \right) \omega - \frac{\lambda \rho}{\ell^*} = 0$$

Sous la forme (1), l'équation peut être résolue graphiquement.

- **Evolution de la densité de neutrons et de précurseurs** :

$$n(t) = A_0 e^{\omega_0 t} + A_1 e^{\omega_1 t} \quad N(t) = B_0 e^{\omega_0 t} + B_1 e^{\omega_1 t}$$

Solution graphique (1 groupe)

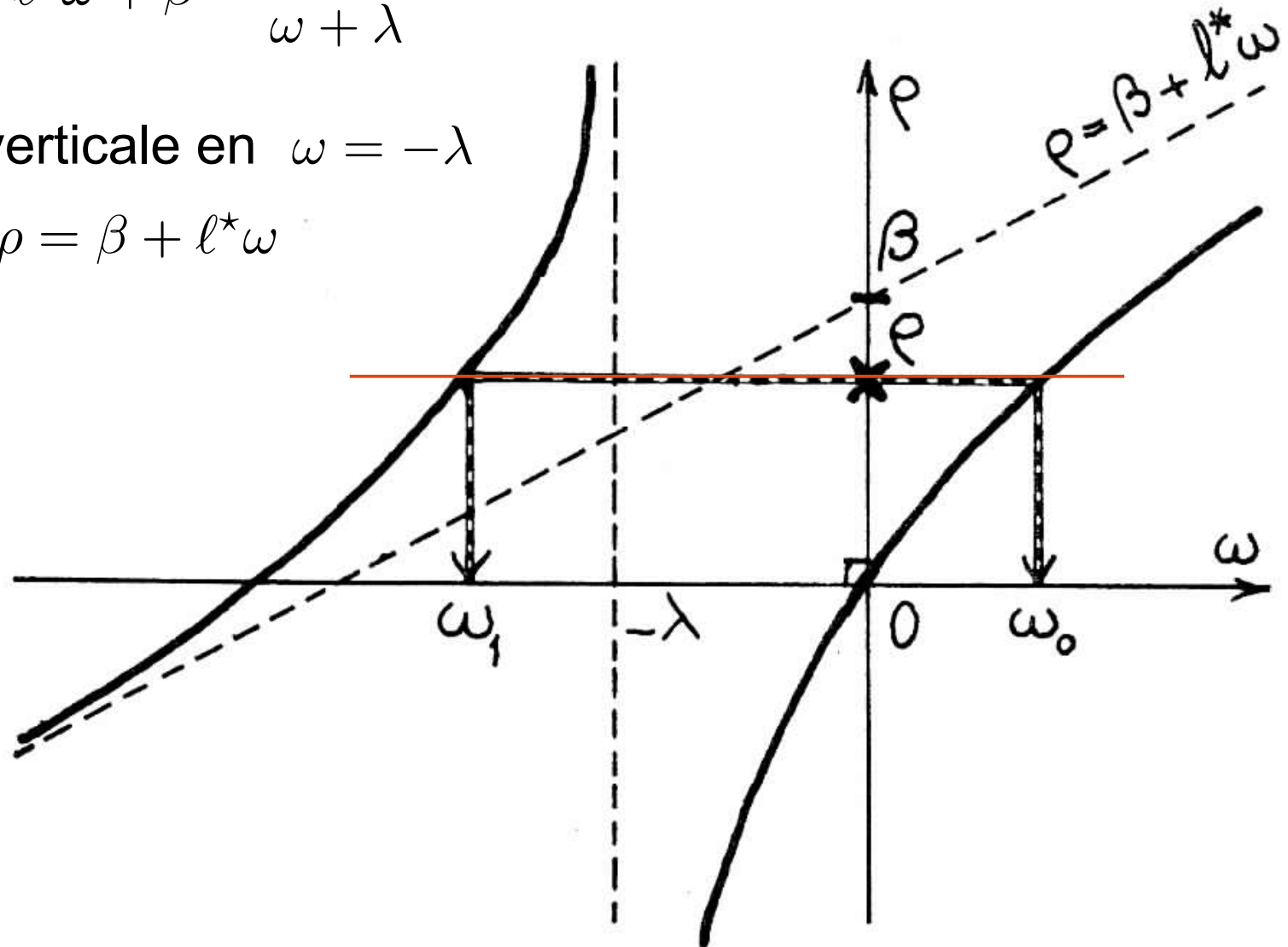
- On résout graphiquement :

$$\rho = f(\omega) = l^* \omega + \beta - \frac{\lambda \beta}{\omega + \lambda}$$

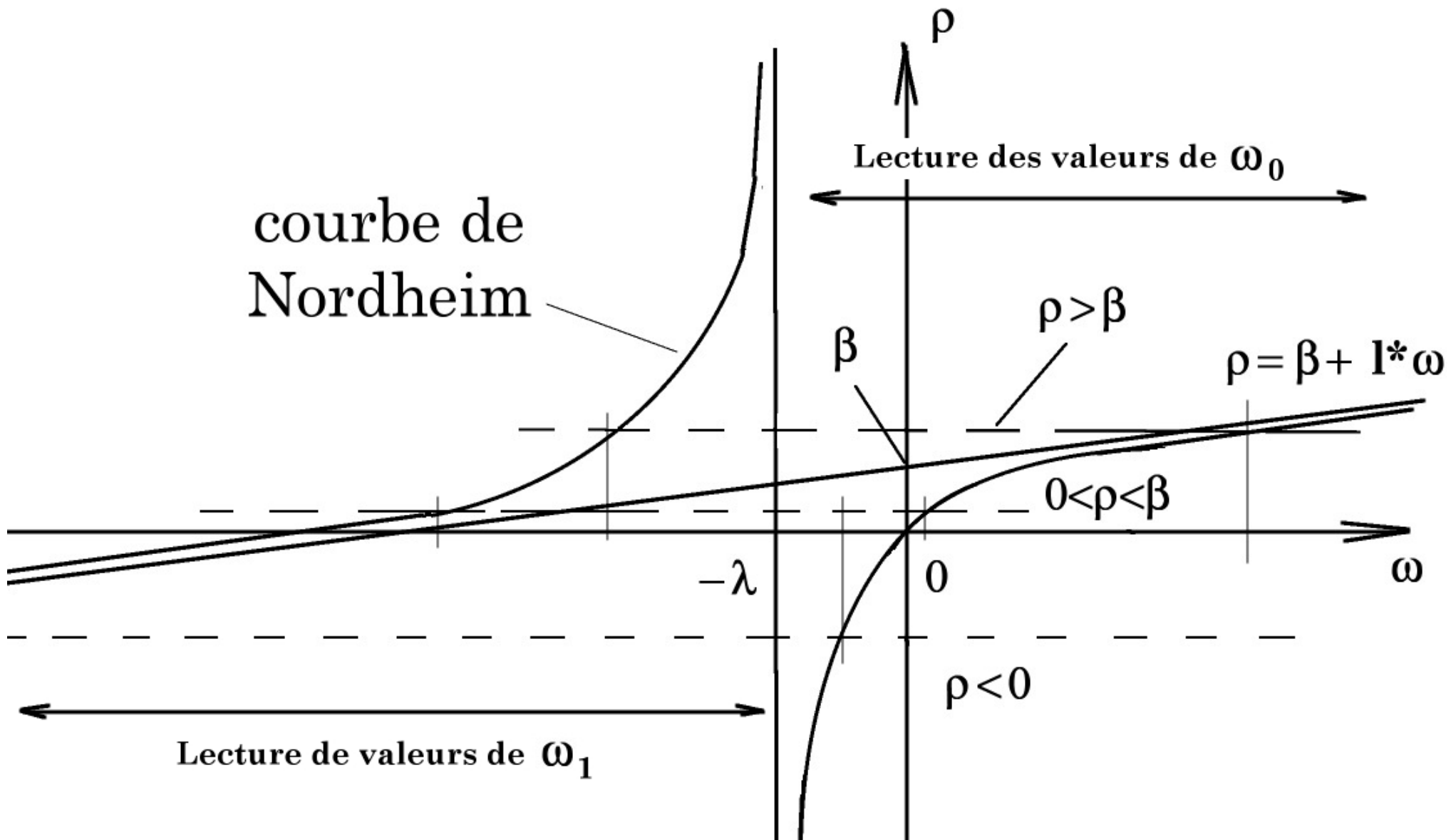
Asymptote verticale en $\omega = -\lambda$

Asymptote $\rho = \beta + l^* \omega$

$$f(\omega = 0) = 0$$



Solution graphique (1 groupe)



Grandes réactivités $\rho > \beta$: « prompt-critique »

- Les solutions sont alors :

$$\omega_0 \approx \frac{\rho - \beta}{l^*} > 0 \quad \omega_1 \approx -\lambda < 0 \quad n(t) \approx n_0 e^{\omega_0 t}$$

- Les neutrons retardés ne jouent quasiment aucun rôle :

→ **divergence exponentielle rapide**

réacteur « prompt-critique »

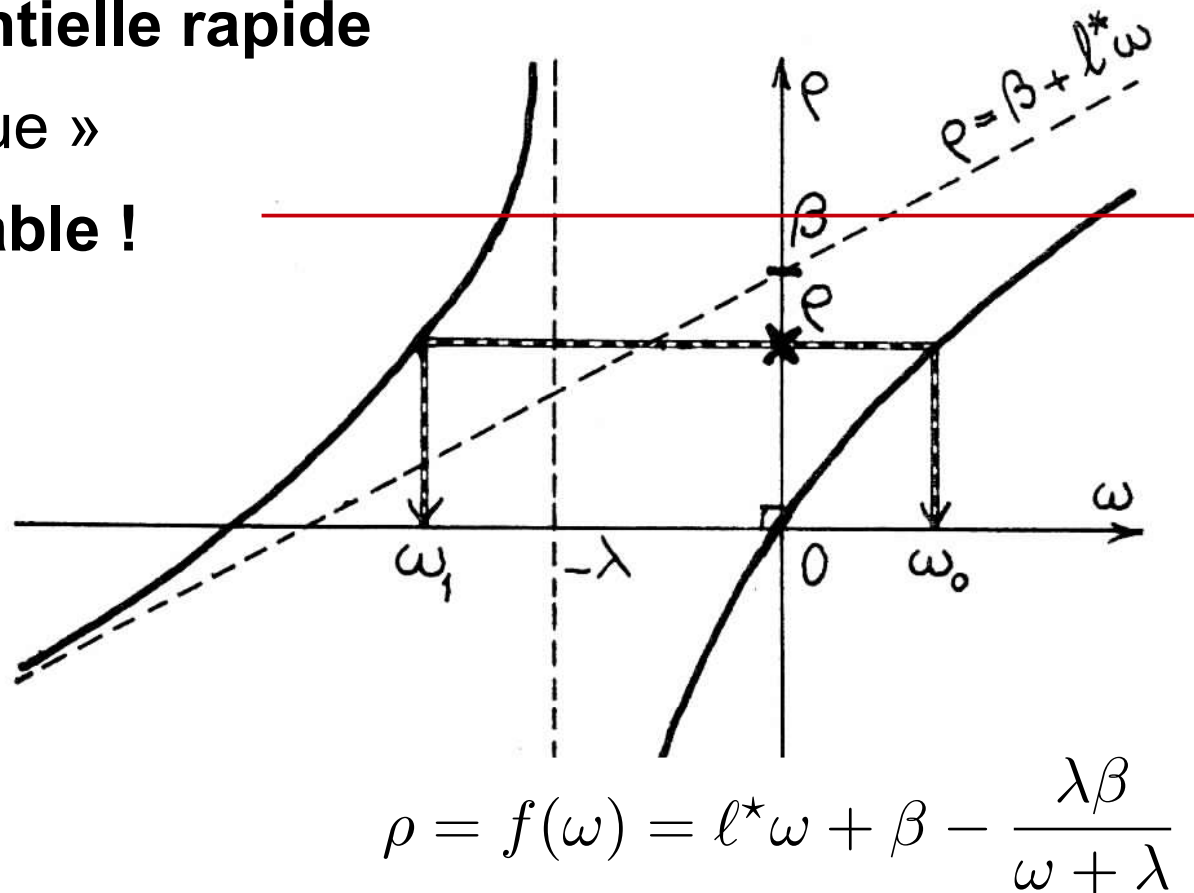
- Le réacteur est incontrôlable !**

Danger !

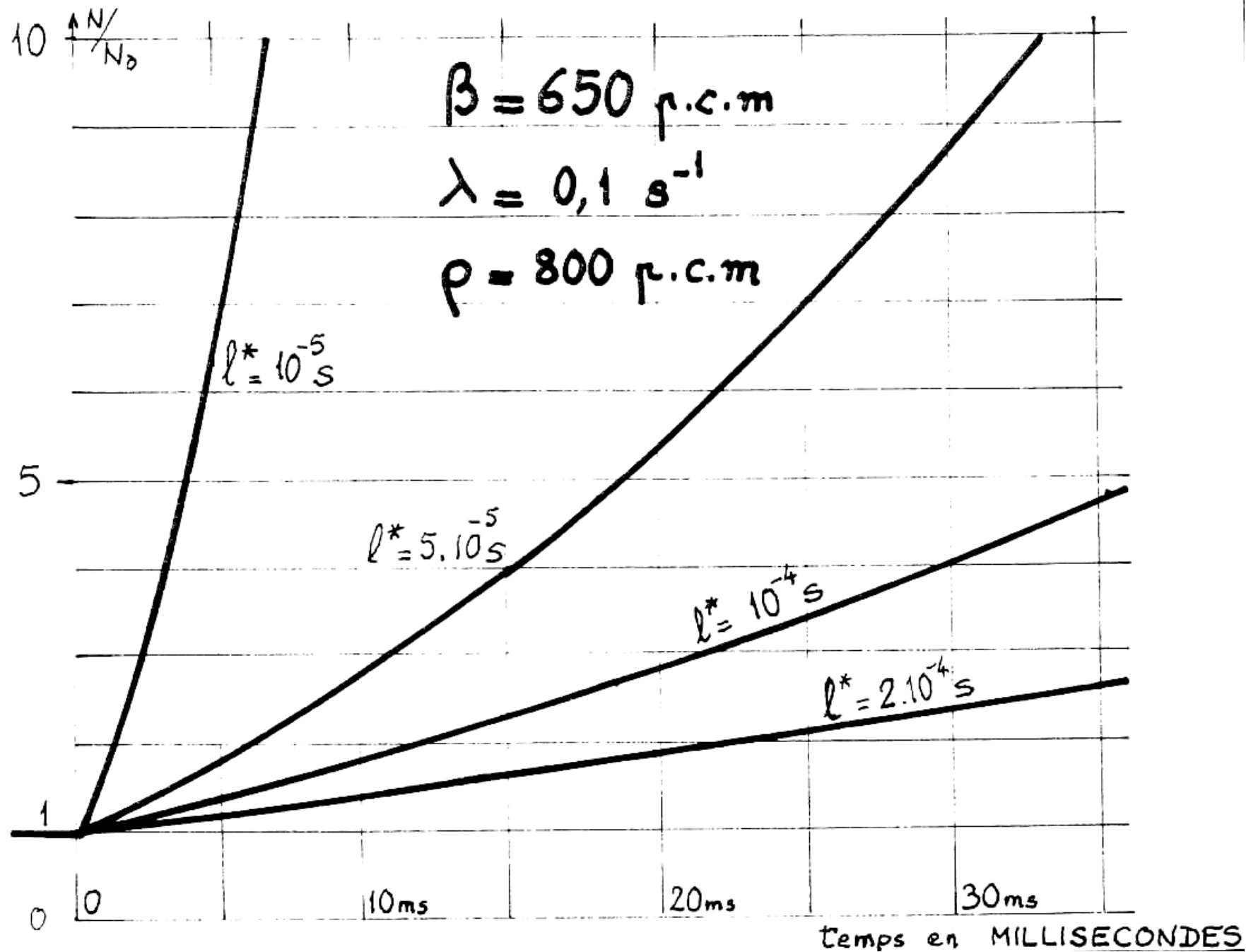
- Règle de sécurité :**

$$0 < \rho < \beta$$

En pratique, $\rho < \beta/2$



Grandes réactivités $\rho > \beta$: « prompt-critique »



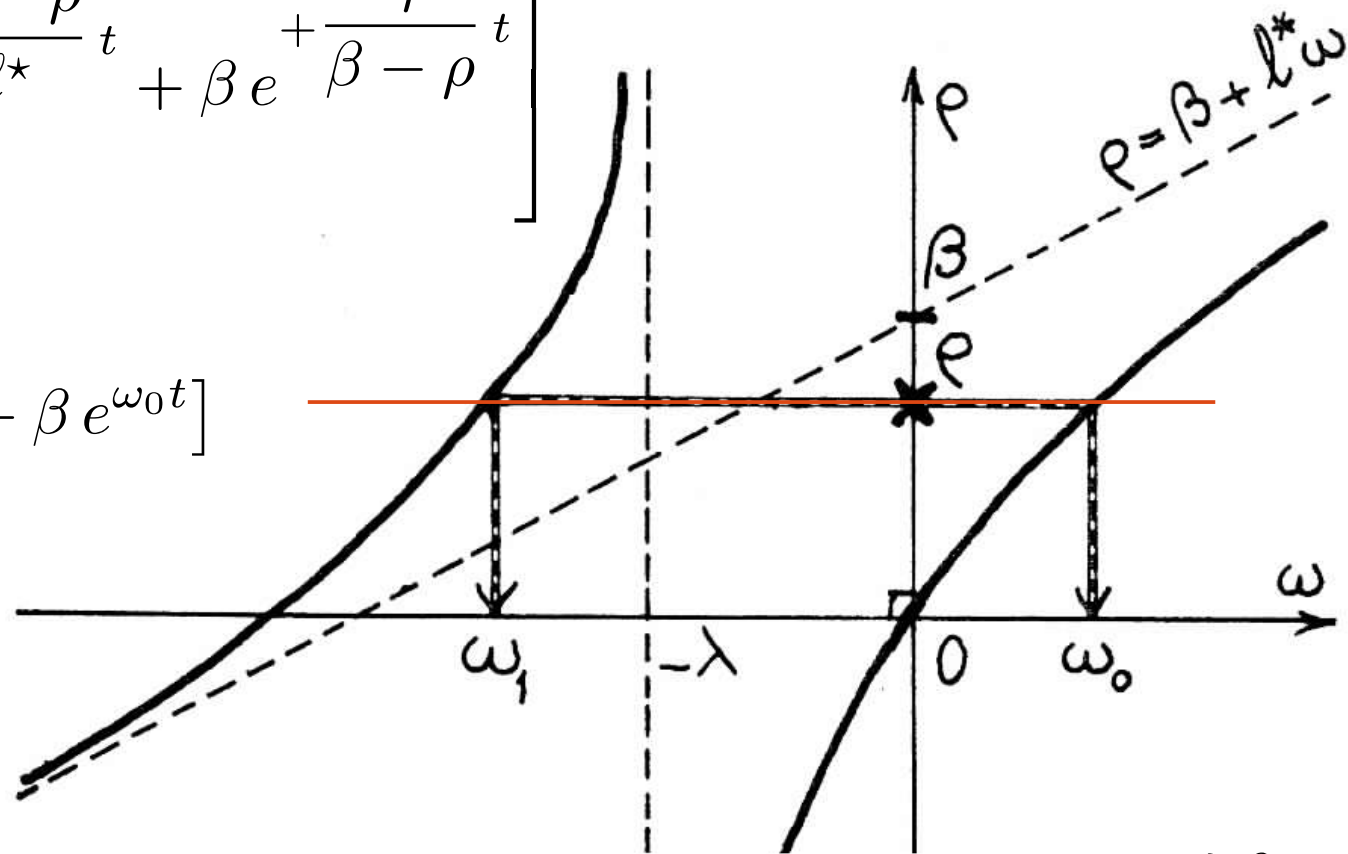
Faibles réactivités positives $0 < \rho < \beta$

- Solutions (approx.) :

$$\omega_0 \approx \frac{\rho\lambda}{\beta - \rho} > 0 \quad \omega_1 \approx -\frac{\beta - \rho}{l^*} < 0 \quad |\omega_0| \ll |\omega_1|$$

$$n(t) = \frac{n_0}{\beta - \rho} \left[-\rho e^{-\frac{\beta - \rho}{l^*} t} + \beta e^{+\frac{\lambda\rho}{\beta - \rho} t} \right]$$

$$n(t) = \frac{n_0}{\beta - \rho} \left[-\rho e^{\omega_1 t} + \beta e^{\omega_0 t} \right]$$



$$\rho = f(\omega) = l^* \omega + \beta - \frac{\lambda\beta}{\omega + \lambda}$$

Faibles réactivités positives $0 < \rho < \beta$

- Saut « **prompt** », suivi d'une croissance **exponentielle lente** :

$$\omega_0 \approx \frac{\rho\lambda}{\beta - \rho} > 0 \quad \omega_1 \approx -\frac{\beta - \rho}{\ell^*} < 0 \quad |\omega_0| \ll |\omega_1|$$

$$n(t) = \frac{n_0}{\beta - \rho} [-\rho e^{\omega_1 t} + \beta e^{\omega_0 t}]$$

$$n(t) = \frac{n_0}{\beta - \rho} \left[-\rho e^{-\frac{\beta - \rho}{\ell^*} t} + \beta e^{\frac{\lambda\rho}{\beta - \rho} t} \right]$$

- Premier terme : **transitoire rapide** (saut « prompt »)
- Second terme : croissance **exponentielle lente**

$$\omega_0 \approx \frac{\rho\lambda}{\beta - \rho} > 0$$

$$\omega_1 \approx -\frac{\beta - \rho}{l^*} < 0$$

$$n(t) = \frac{n_0}{\beta - \rho} [-\rho e^{\omega_1 t} + \beta e^{\omega_0 t}]$$

• Saut « prompt » :

$$n_1 = \frac{\beta}{\beta - \rho} n_0$$

REACTIVITE

$$\rho_i \leq 0$$

POPULATIONS
DE NEUTRONS
ET DE
PRECURSEURS

$$n_1 = \frac{\beta}{\beta - \rho} n_0$$

$n_1 e^{\omega_0 t}$ Evolution
avec taux de croissance
stable: $\omega(t) = \omega_0$

PROMPT
-JUMP

n_0
 N_0

initialement: $\frac{dc}{dt} = 0$

$$N_0 e^{\omega_0 t}$$

TAUX DE
CROISSANCE

discontinuité

l^* grand

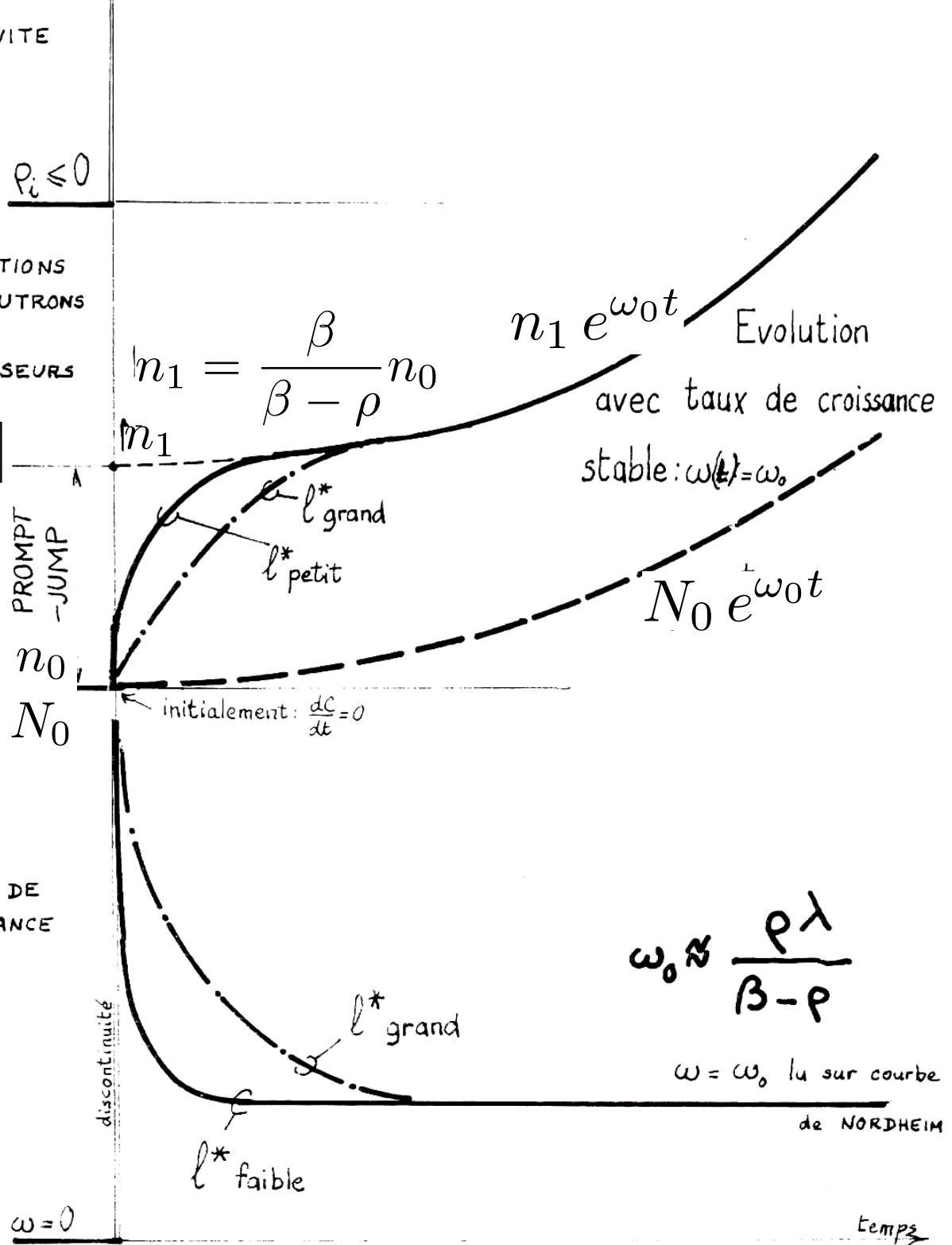
l^* faible

$$\omega_0 \approx \frac{\rho\lambda}{\beta - \rho}$$

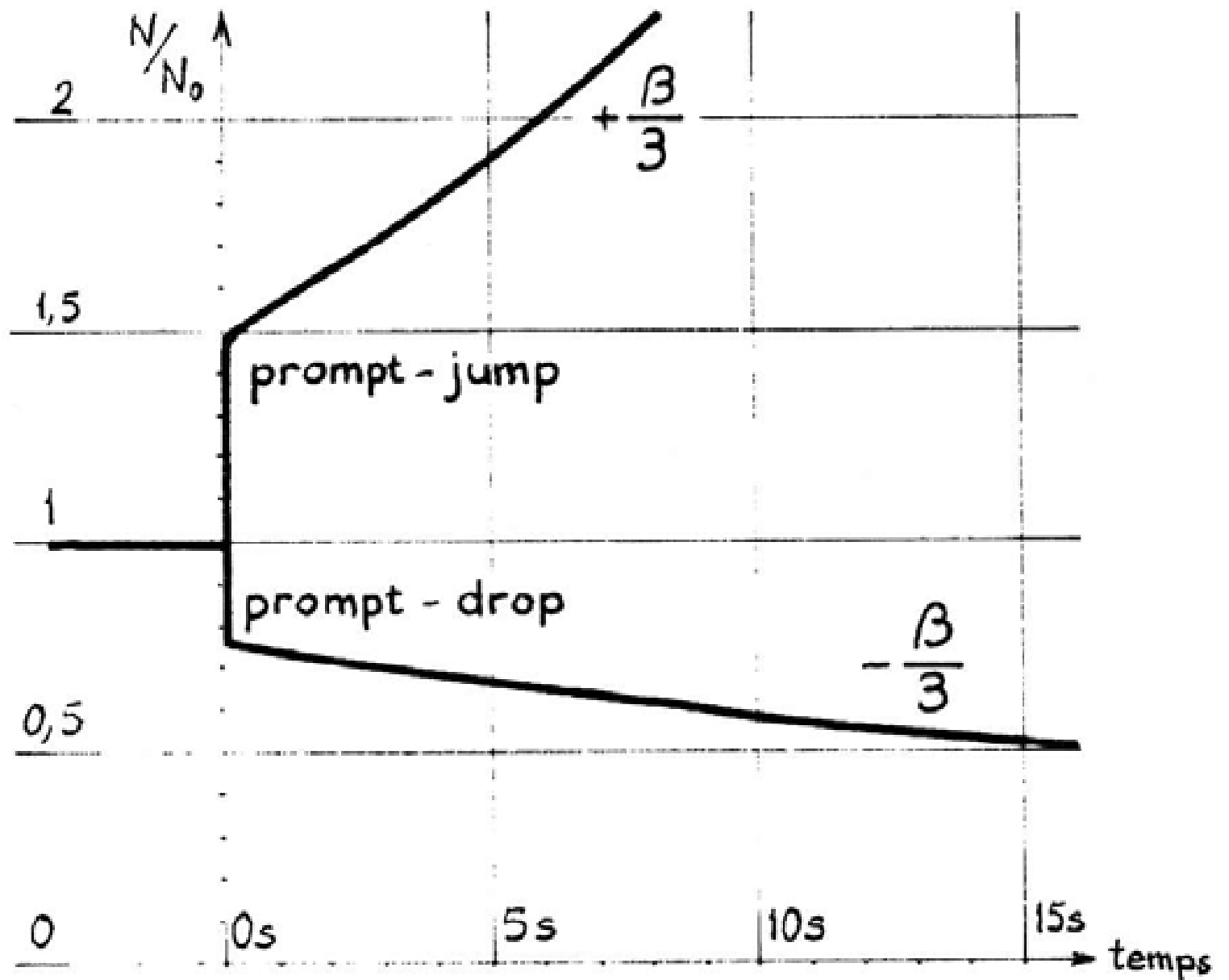
$\omega = \omega_0$ la sur courbe
de NORDHEIM

$\omega = 0$

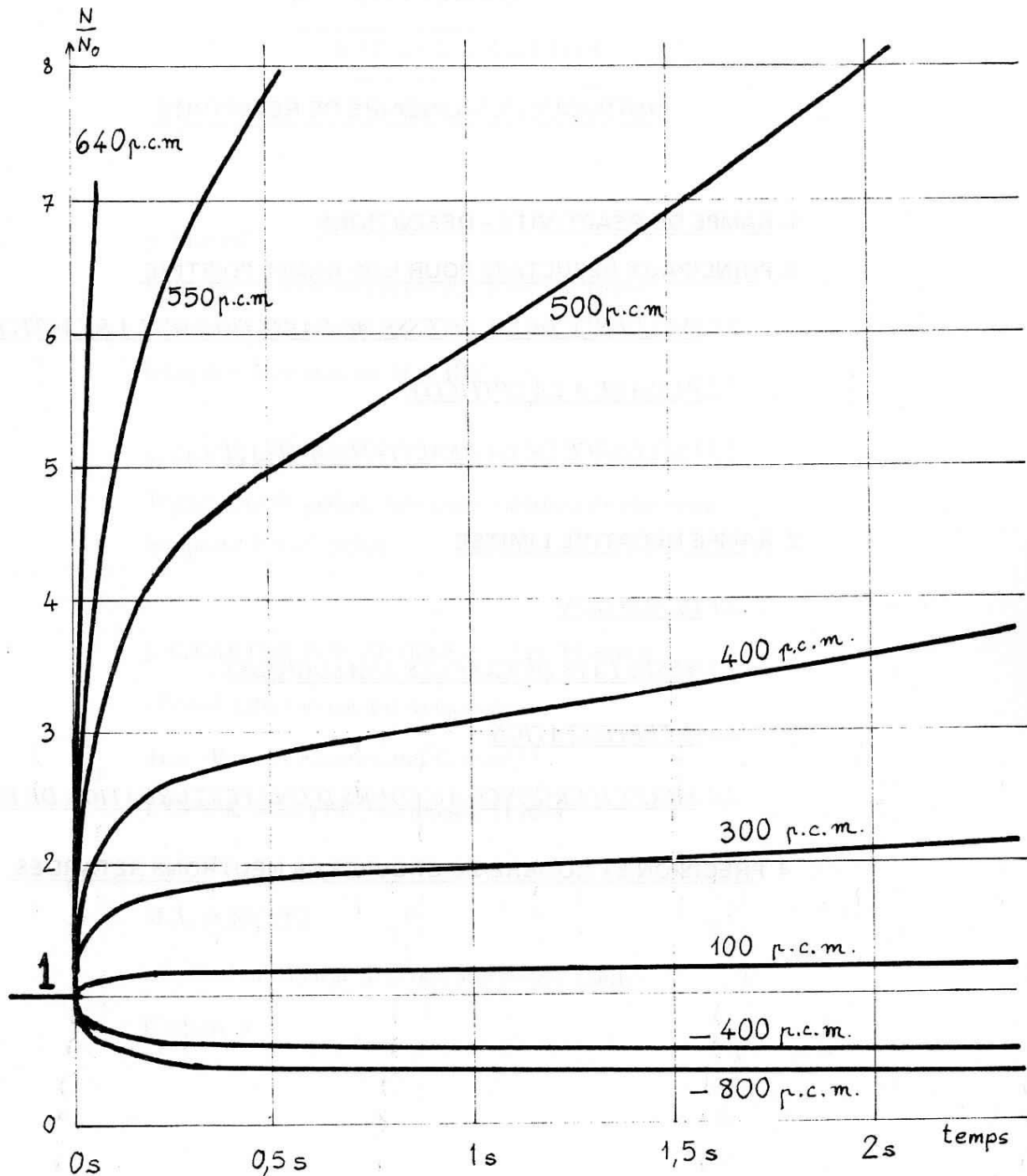
Temps



Saut prompt (« prompt-jump ») $\rho < \beta$

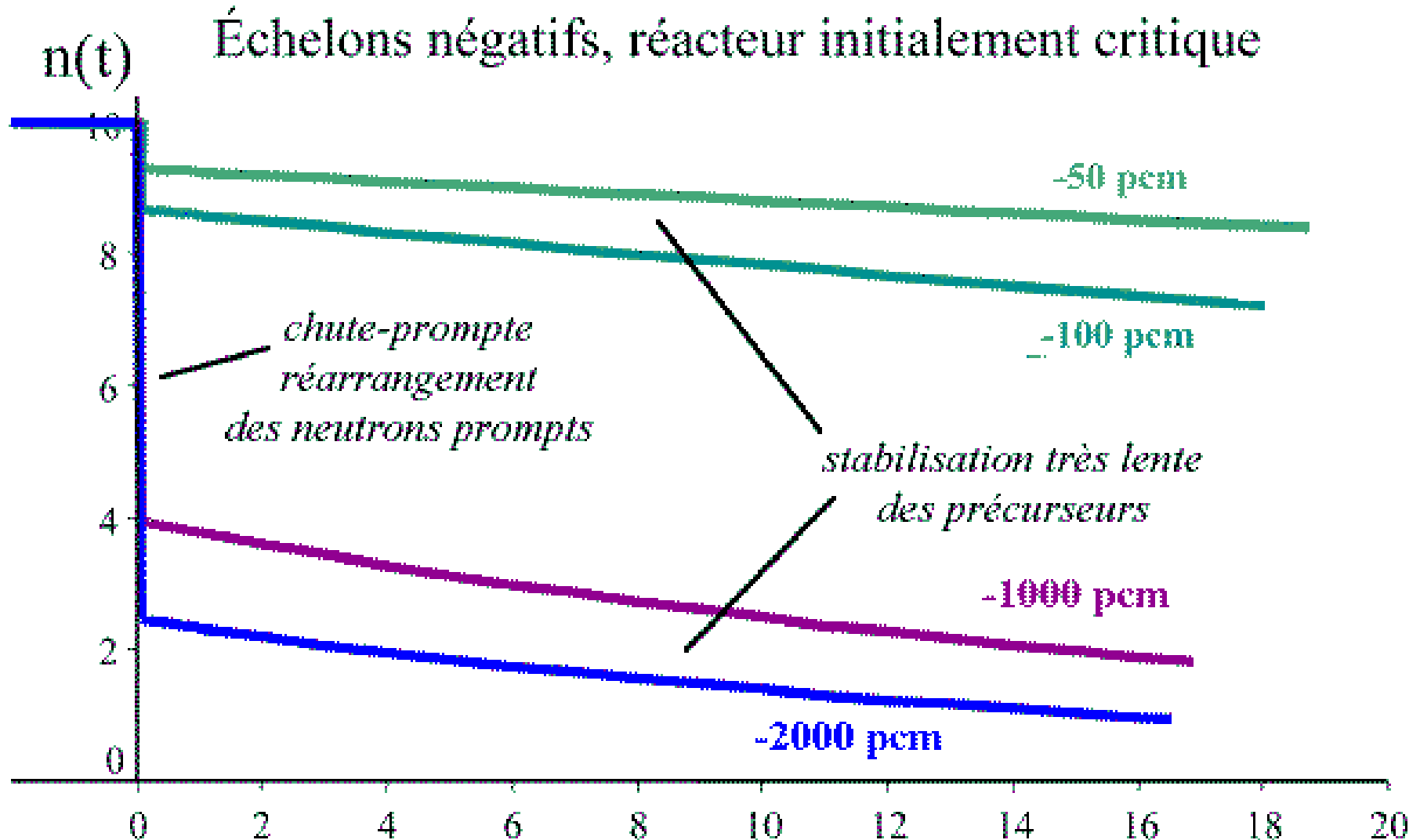


Saut prompt (« prompt-jump ») $\rho < \beta$



- Saut « prompt » :
on se limite en général
à $\rho < \beta/2$

Chute prompt (« prompt-drop ») $\rho < 0$



- Les précurseurs disparaissent lentement...
→ A ne pas négliger lors de l'arrêt du réacteur

Equations de Nordheim (plusieurs groupes)

- Système à résoudre pour plusieurs groupes de précurseurs :

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{k_{\text{eff}}(1 - \beta) - 1}{\ell} n(t) + \sum_i \lambda_i N_i(t) + S(t)$$

$$\frac{dN_i(t)}{dt} = \beta_i \frac{k_{\text{eff}}}{\ell} n(t) - \lambda_i N_i(t) \quad (i = 1 \dots m)$$

- En faisant apparaître la réactivité, et en utilisant $\ell = k_{\text{eff}} \ell^*$

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\ell^*} n(t) + \sum_i \lambda_i N_i(t) + S(t)$$

$$\frac{dN_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{\ell^*} n(t) - \lambda_i N_i(t) \quad (i = 1 \dots m)$$

Equation de Nordheim (m groupes) : solutions

- ($m + 1$) équations : **superposition de $m + 1$ solutions** de la forme :

$$n(t) = A e^{\omega t} \quad N(t) = B e^{\omega t}$$

- Le paramètre ω est **solution de l'équation ($m + 1$ racines)** :

$$\rho = l^* \omega + \sum_i \frac{\beta_i \omega}{\omega + \lambda_i}$$

L'équation peut être résolue graphiquement.

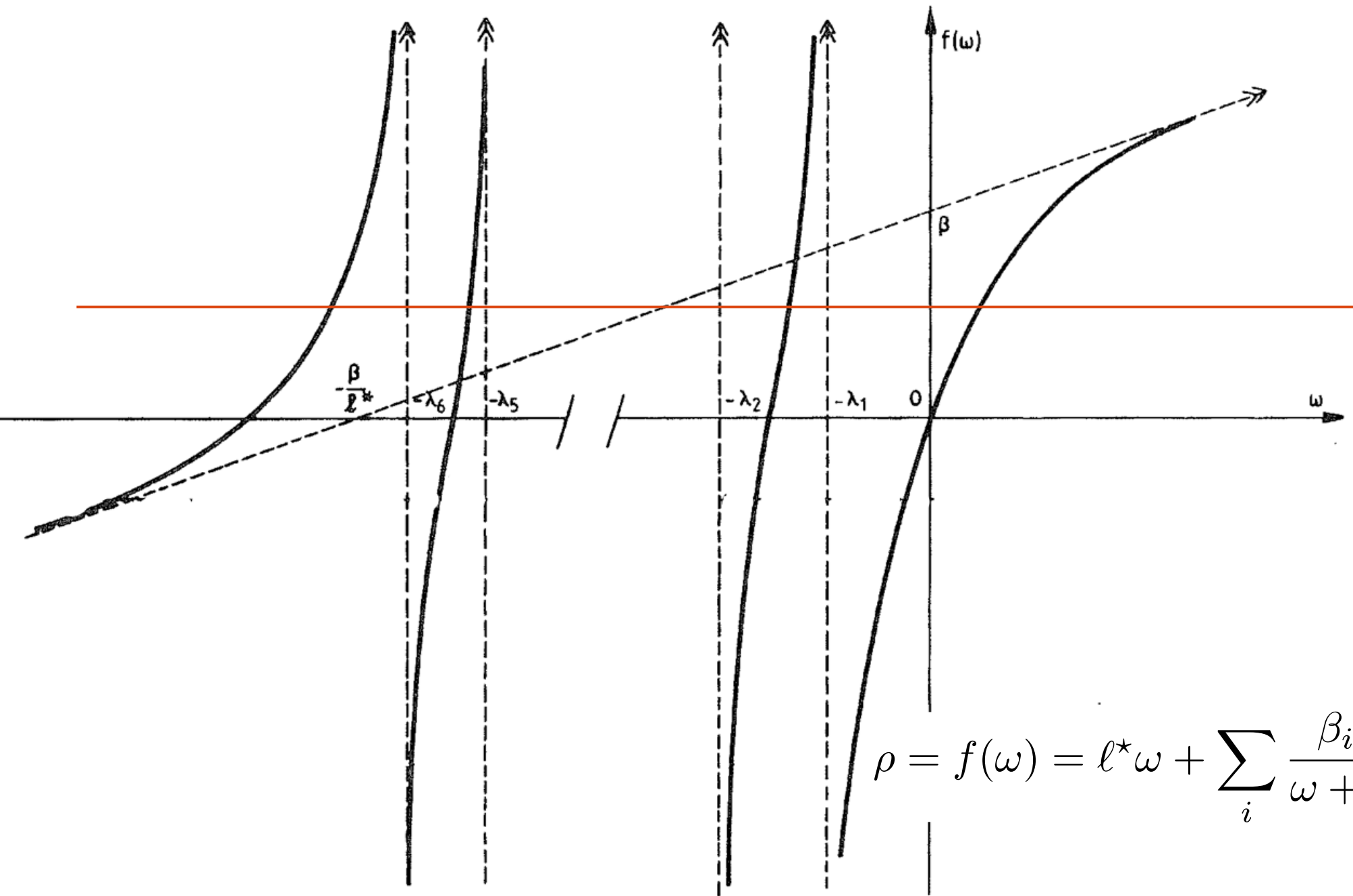
- **Evolution de la densité de neutrons et de précurseurs :**

$$n(t) = \sum_j A_j e^{\omega_j t} \quad n(t) = \sum_j B_j e^{\omega_j t}$$

→ Le terme asymptotique (plus grande racine ω_0) domine

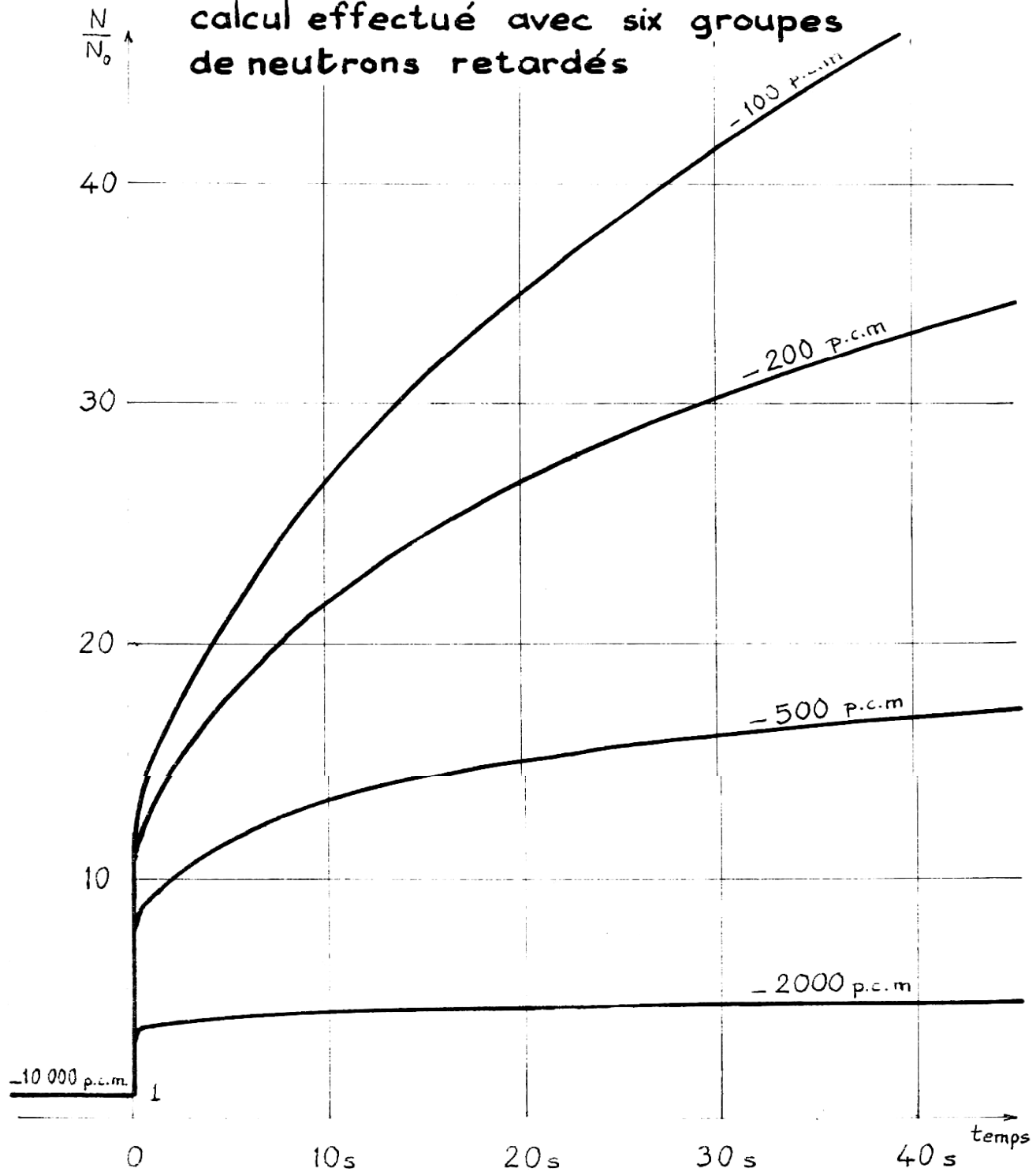
→ les autres termes sont des transitoires

Equation de Nordheim (plusieurs groupes)



$$\rho = f(\omega) = l^* \omega + \sum_i \frac{\beta_i \omega}{\omega + \lambda_i}$$

Transitoires en milieu sous-critique
calcul effectué avec six groupes
de neutrons retardés



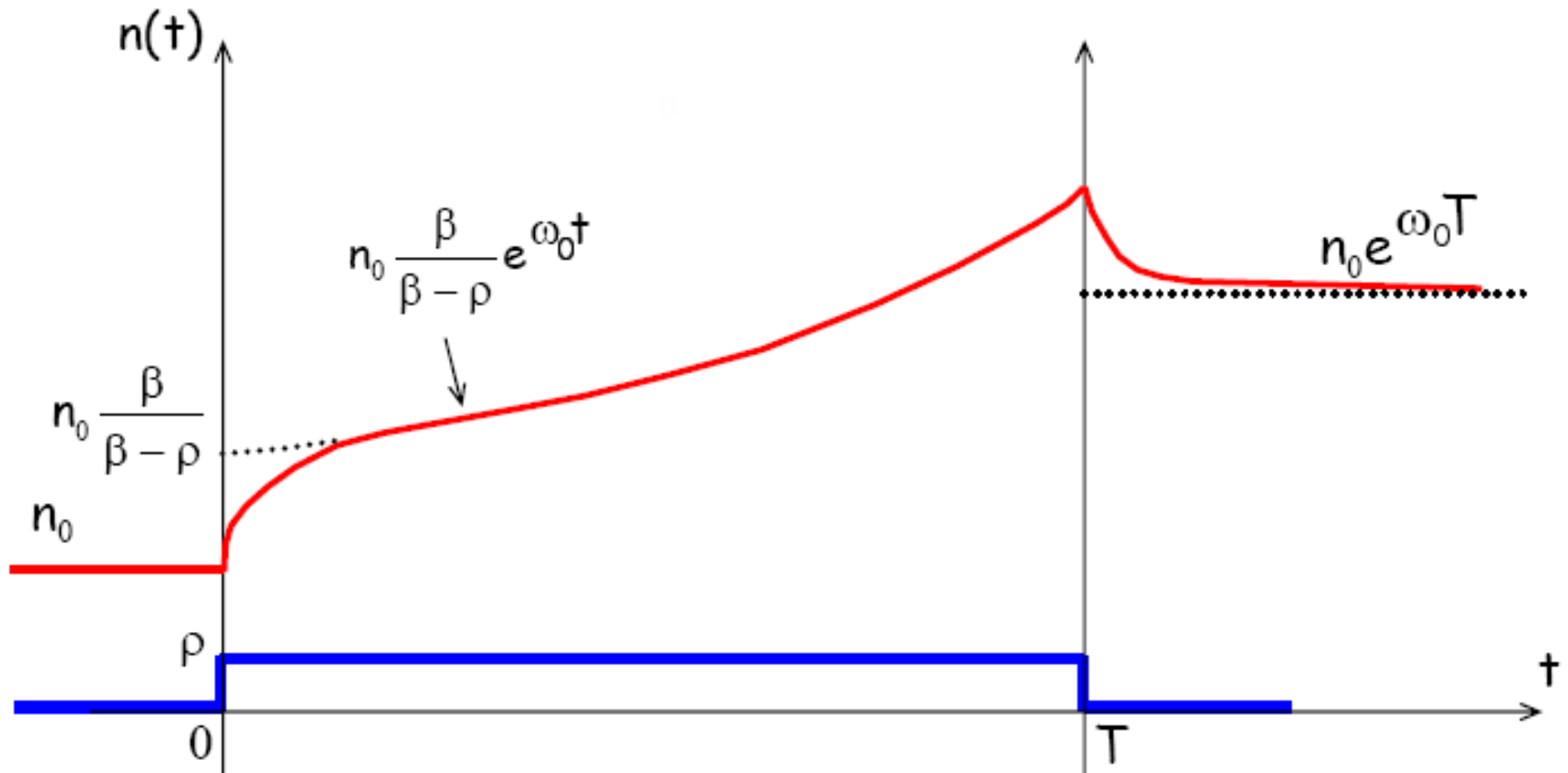
Créneau de réactivité

$$n(t) = \frac{n_0}{\beta - \rho} \left[-\rho e^{-\frac{\beta - \rho}{\ell^*} t} + \beta e^{\frac{\lambda \rho}{\beta - \rho} t} \right]$$

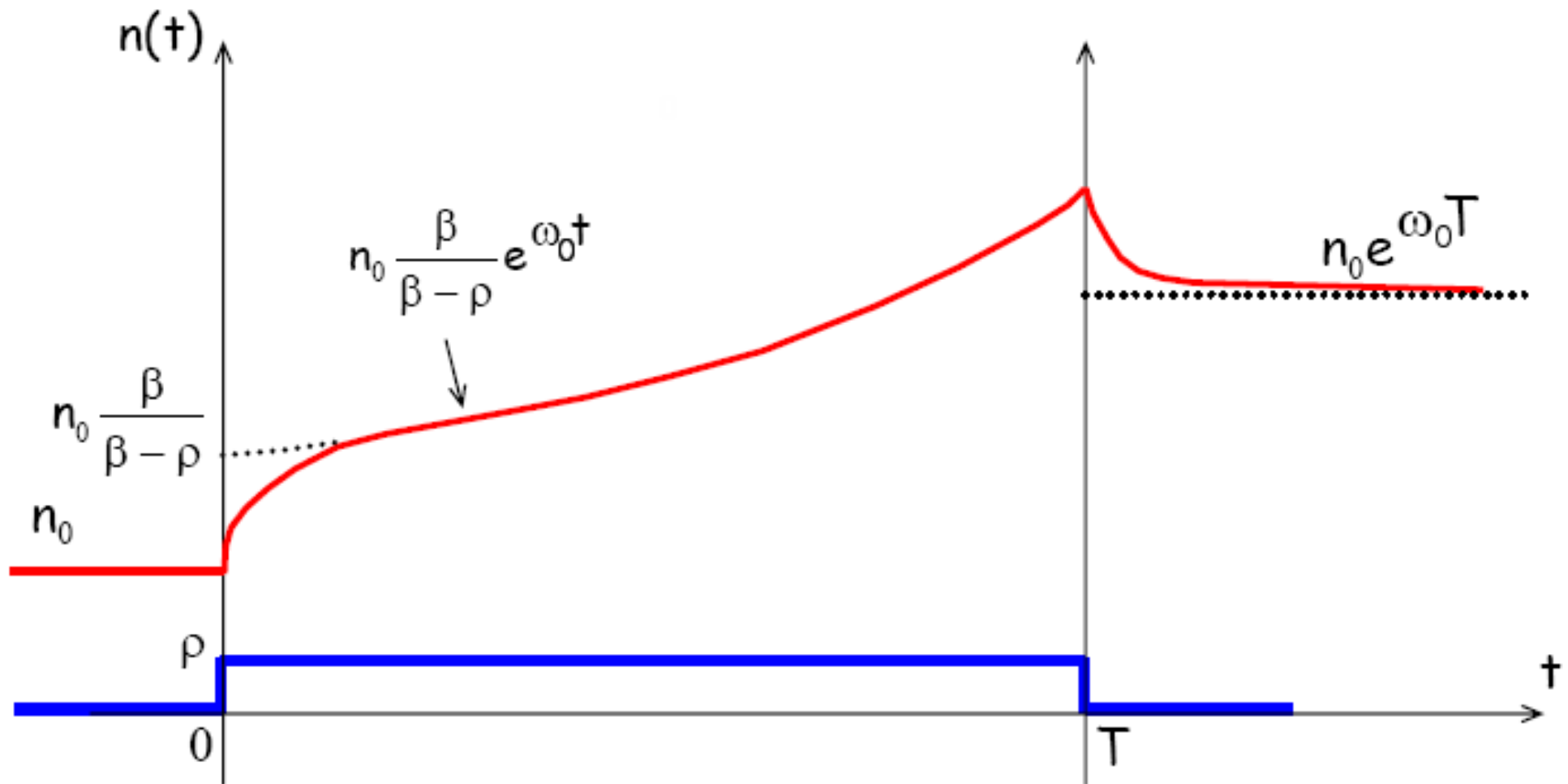
$$\omega_0 \approx \frac{\rho \lambda}{\beta - \rho} > 0$$

$$\omega_1 \approx -\frac{\beta - \rho}{\ell^*} < 0$$

$$|\omega_0| \ll |\omega_1|$$

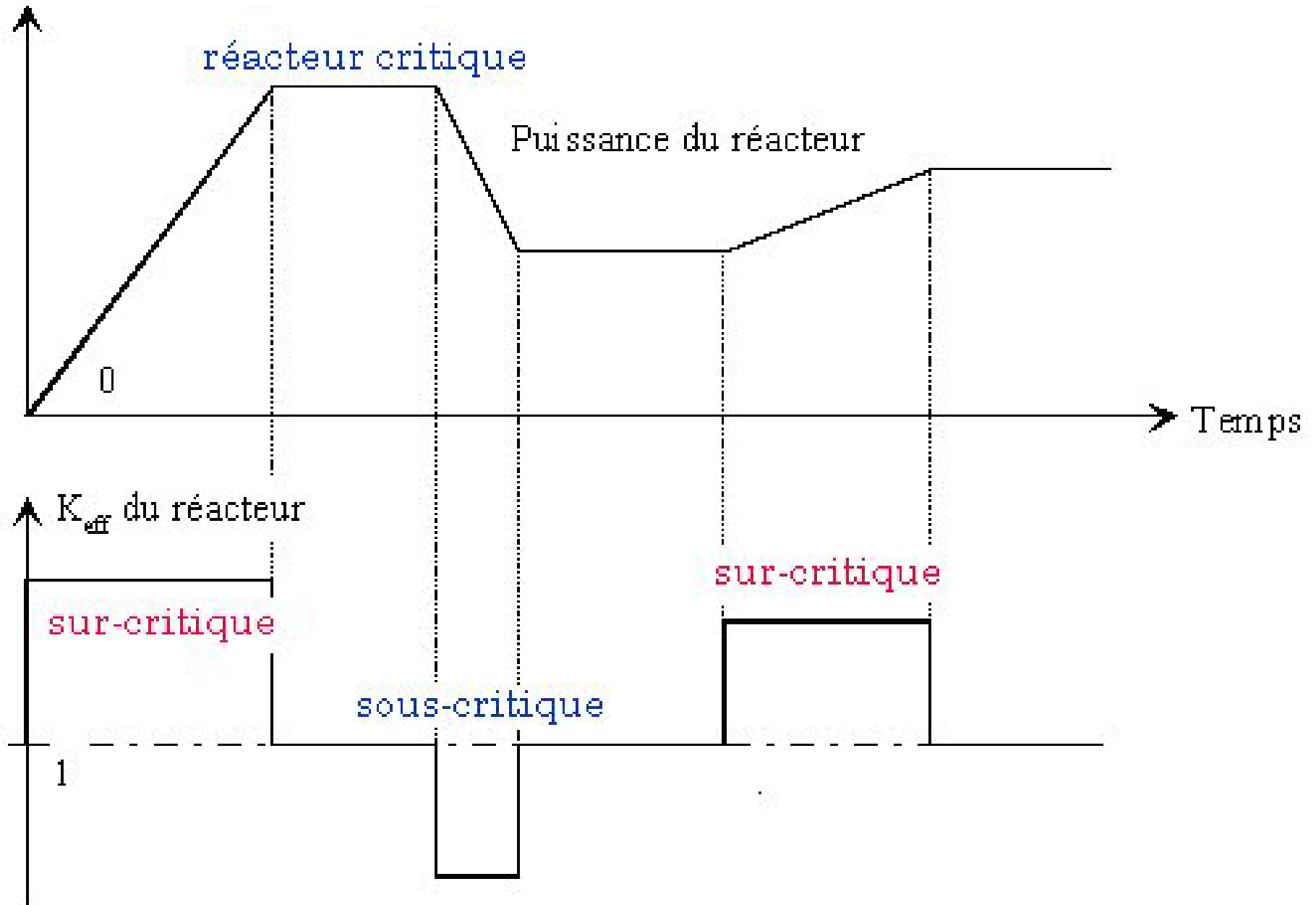


Créneau de réactivité



- La puissance du réacteur se contrôle en effectuant des créneaux de réactivité (positif ou négatif), puis en revenant à la criticité.

Créneaux de réactivité : modif. de la puissance



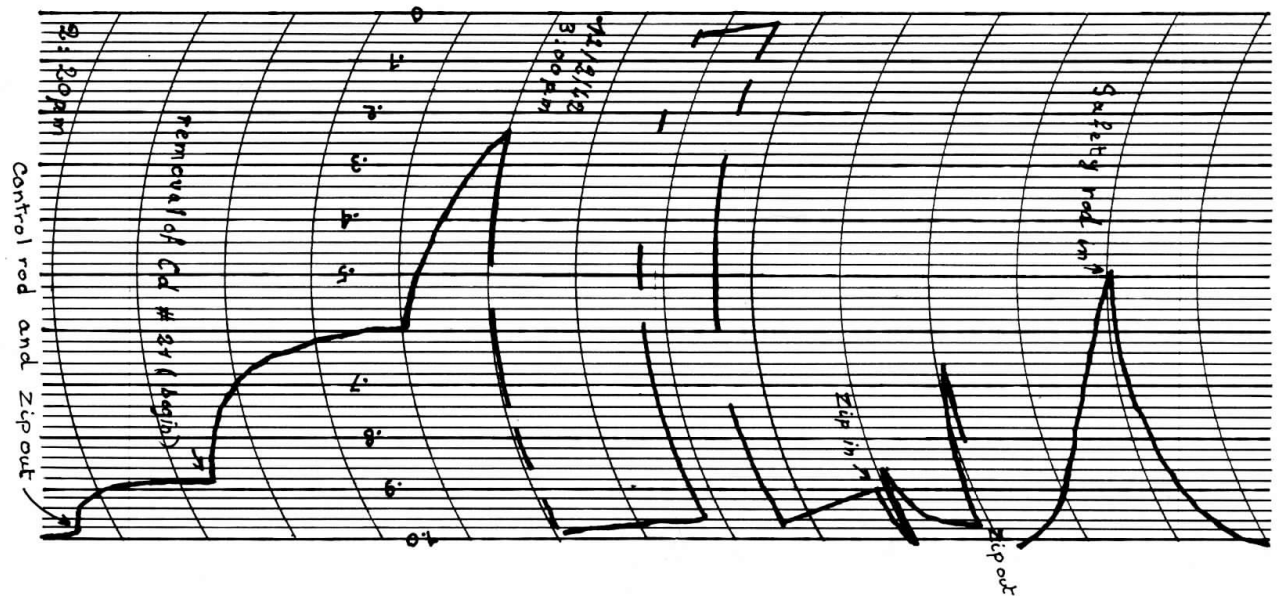
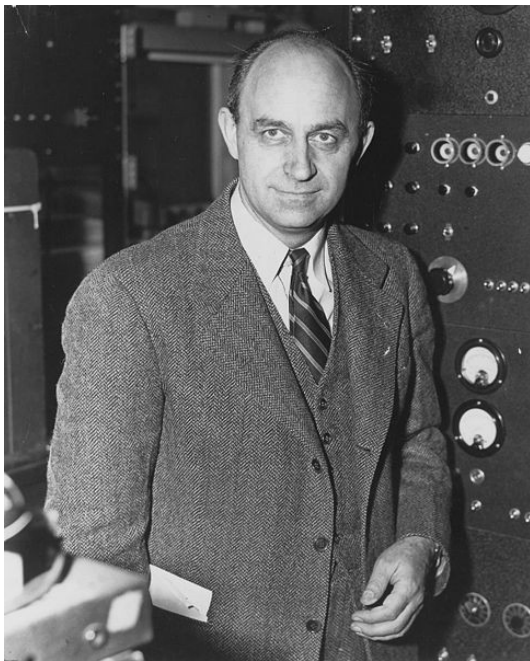
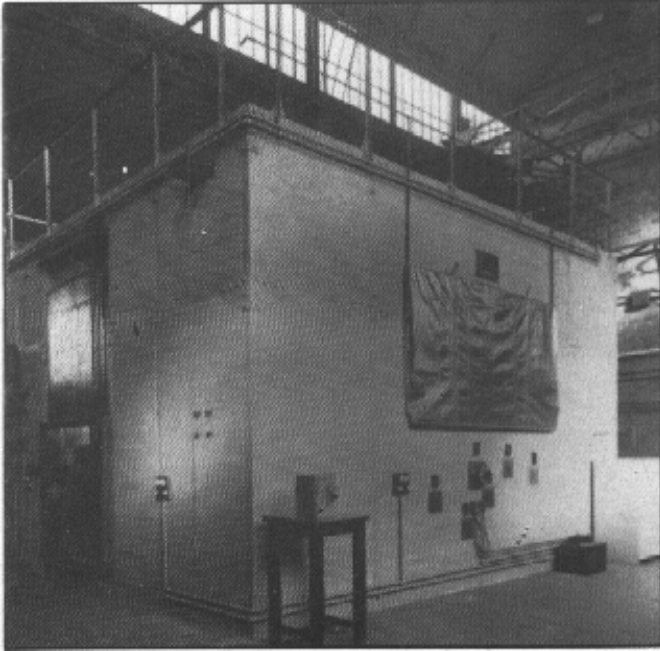
Exemples d'actions de pilotage

Réactivité <i>en pcm</i>	Temps caractéristiques		T doublement <i>Td secondes</i>	Octavemètre <i>Doublement / minute</i>	
	$1 / \omega_0$ <i>secondes</i>	$1 / \omega_1$ <i>secondes</i>			
-1000	-16,5	-0,006		5,2	<i>Situation sous-critique</i>
-500	-23,0	-0,009		3,8	<i>Réacteur à l'arrêt</i>
-200	-42,5	-0,012		2,0	
-100	-75	-0,013		1,2	<i>Approche de la divergence</i>
-50	-140	-0,014		0,6	
-10	-661	-0,015		0,1	<i>Oscillations autour</i>
10	641	-0,016	444	0,1	<i>de la criticité</i>
20	316	-0,016	219	0,3	<i>Zone de fonctionnement</i>
50	120	-0,017	83	0,7	<i>normale</i>
120	44,3	-0,019	31	2,0	<i>Divergence normale</i>
300	11,7	-0,028	8,1	7,4	<i>Limites contrôle commande</i>
400	6,31	-0,040	4,4	13,7	<u><i>Zone interdite alarme</i></u>
600	1,01	-0,164	0,70	85,3	
800	0,06	-1,927	0,04	1334,7	

- Mesure du flux neutronique, et **octavemètre** estimant le **temps de doublement** T_d de la population neutronique (doubl./min)

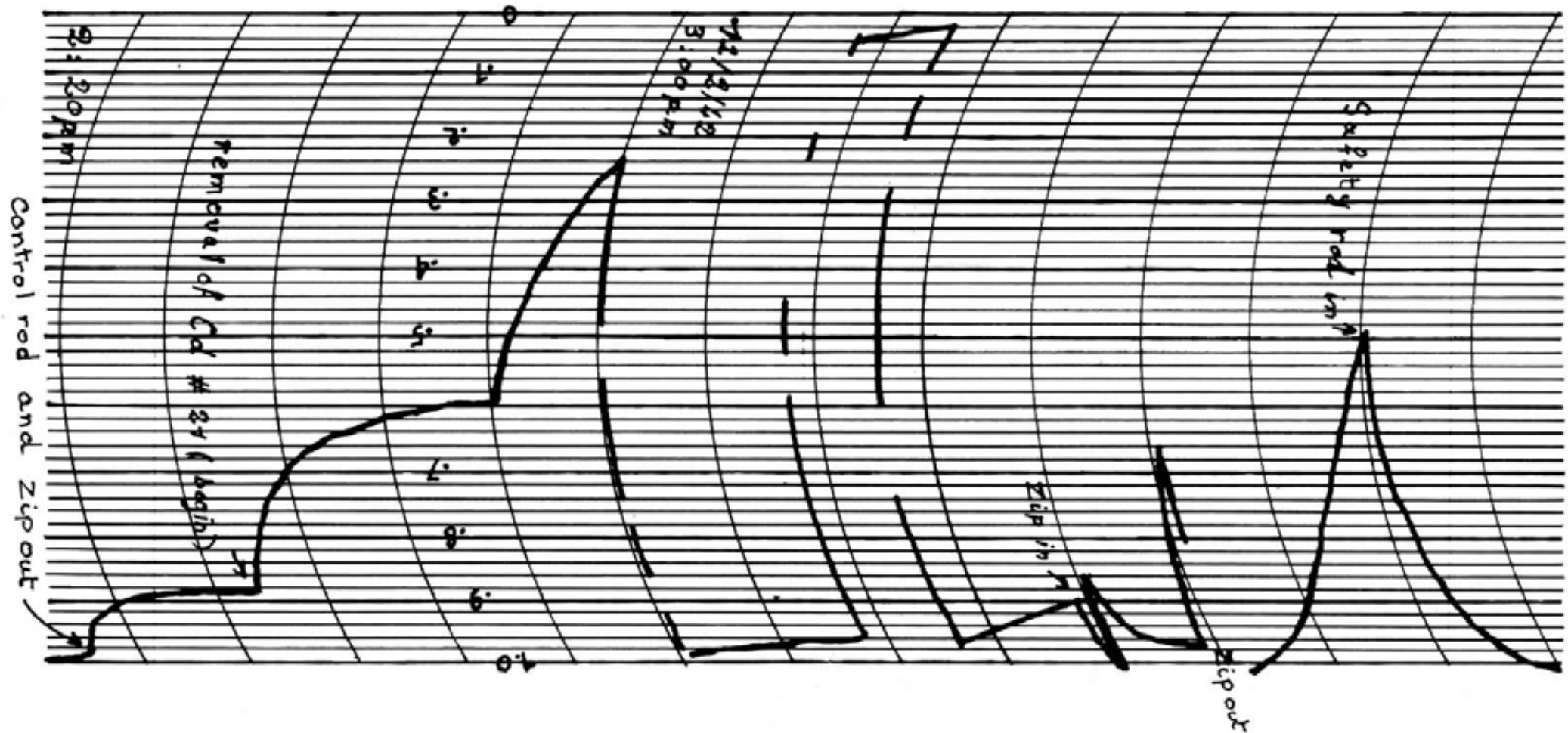
$$T_d = \ln 2 / \omega_0 \quad \Omega = 60 \text{ s} / T_d$$

Cinétique de la pile de Fermi



Enregistrement de la première divergence du réacteur CP1 (Chicago Pile n° 1)
le mercredi 2 décembre 1942.

Cinétique de la pile de Fermi



Enregistrement de la première divergence du réacteur CP1 (Chicago Pile n° 1)
le mercredi 2 décembre 1942.

Cinétique de la pile de Fermi

