Neutronique

7–8. Diffusion des Neutrons, Théorie à un groupe, théorie multi-groupe

1. Pile "nue" parallélépipédique

On considère un réacteur constitué d'un matériau multiplicateur de neutrons en forme de parallélépipède rectangle de dimensions $a \times b \times c$. Ce réacteur est supposé entouré d'un matériau qui absorbe totalement les neutrons.

1.1 — Dans l'approximation de la diffusion, et en considérant les neutrons comme monocinétiques (*théorie de la diffusion à un groupe*), écrivez l'équation à laquelle obéit le flux des neutrons $\phi(\mathbf{r})$. On se placera dans l'hypothèse d'un réacteur stationnaire et donc critique.

On pose :

$$M^2 = \frac{1}{\kappa^2} = \frac{D}{\Sigma_a} \qquad \textit{Aire de Migration}$$

$$\chi^2 = \frac{\bar{\nu}\Sigma_f - \Sigma_a}{D} = \frac{k_\infty - 1}{M^2}$$

1.2 — Explicitez les conditions aux limites du réacteur, et l'approximation à la *frontière extrapolée* du réacteur.

1.3 — Résolvez l'équation et exprimez le flux $\phi(\mathbf{r})$. On aura intérêt à factoriser le flux sur les trois axes x, y et z.

1.4 — Écrivez la condition de criticité pour ce réacteur. Déduisez-en la probabilité de non-fuite et de fuite du réacteur.

2. Pile "nue" cylindrique

On considère une pile cylindrique de rayon R et de hauteur H constitué d'un matériau multiplicateur, entouré d'un matériau absorbant totalement les neutrons ("corps noir").

2.1 — Dans l'approximation de la diffusion, et en considérant les neutrons comme monocinétiques (*théorie de la diffusion à un groupe*), écrivez l'équation à laquelle obéit le flux des neutrons $\phi(\mathbf{r})$. On se placera dans le régime stationnaire.

2.2 — Quelles sont les symétries de ce système ? Écrivez l'équation précédente en factorisant le flux sous la forme :

$$\phi(\mathbf{r}) = f(\rho) \times g(z)$$

Montrez que l'on aboutit à deux équations différentielles indépendantes pour f et g.

2.3 — Résolvez l'équation sur g. Explicitez les conditions aux limites. On choisira l'origine $z = 0$ à l'extrémité inférieure du cylindre.

2.4 — En faisant le changement de variable adéquat, montrez que f est solution d'une équation de Bessel d'ordre ν :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} \pm \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$

En discutant la forme des solutions possibles (fonctions de Bessel), montrez que la solution est nécessairement de la forme :

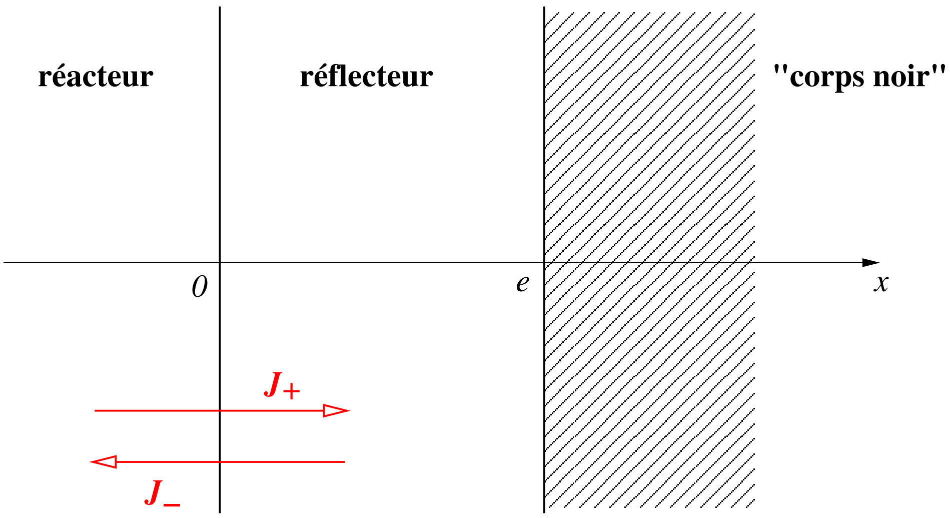
$$f(\rho) = A \times J_0(\mu\rho)$$

Déterminez μ.

2.5 — Écrivez la condition de criticité pour ce réacteur cylindrique, et déduisez-en l'expression de la probabilité de non-fuite.

3. Réflecteur de neutrons : notion d'*albédo*

On considère un réacteur plan infini, formé d'un matériau multiplicateur, suivi d'un matériau réflecteur d'épaisseur e, et enfin d'un matériau absorbant totalement les neutrons.



3.1 — Écrivez l'équation que vérifie le flux des neutrons dans la région du matériau réflecteur. Explicitez la condition à la limite $x = e$ en considérant qu'il s'agit de la position de la surface extrapolée.

3.2 — À la frontière en $x = 0$, il y a continuité du flux ϕ, et du courant $\mathbf{J}$, ou encore de la dérivée $d\phi/dx$. On appellera $\phi(0) = \phi(x = 0)$ le flux (non nul) en $x = 0$.

Résolvez l'équation dans la région du réflecteur.

3.3 — On appelle "albédo" le rapport β entre le courant sortant intégré J_+ et le courant entrant intégré J_- à la frontière entre le coeur et le réflecteur. On pose ainsi :

$$\beta = \frac{J_-}{J_+}$$

L'albédo caractérise la capacité du matériau réflecteur à renvoyer les neutrons dans le réacteur.

On rappelle les expressions de J_+ et J_- :

$$J_+ = \frac{\phi}{4} - \frac{D}{2}\frac{d\phi}{dx} \qquad J_- = \frac{\phi}{4} + \frac{D}{2}\frac{d\phi}{dx}$$

Déterminez l'albédo β en fonction de κ, e et D. Quelle est la limite β_∞ pour une plaque telle que $e \gg 1/\kappa$?

Matériau	D (cm)	Σ_a (cm^{-1})	$M = 1/\kappa$ (cm)	β_∞
Eau ordinaire	0.2	0.021	3	0.8
Eau lourde	0.8	5×10^{-5}	130	0.9
Graphite	0.8	2.7×10^{-4}	55	0.94

TABLE 1 – *Caractéristiques de quelques matériaux réflecteurs pour des neutrons thermiques.*

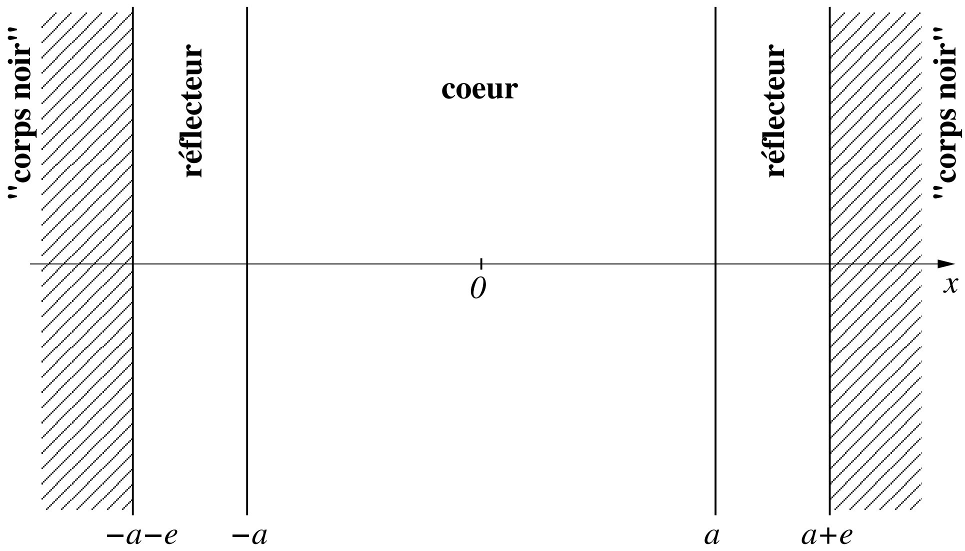
3.4 — La connaissance de l'albedo du matériau réflecteur fournit une condition à la limite du coeur sur le flux ϕ. Montrez que cela se traduit par une condition à la limite sur le flux ϕ de la forme :

$$\left(\frac{1}{\phi}\frac{d\phi}{dx}\right)_{x=0} = -\frac{1}{2D}\frac{1-\beta}{1+\beta}$$

4. Notion d'"économie" de réflecteur

On considère un réacteur plaque infini d'épaisseur $2a$ (figure ci-après), entouré d'un réflecteur d'albédo β_∞ connu d'épaisseur $e \gg 1/\kappa$.

4.1 — Résolvez l'équation de la diffusion et donnez l'expression du flux dans la région du coeur et dans le réflecteur.



4.2 — Exprimez la condition de criticité de ce réacteur à partir des conditions aux limites en $x = \pm a$. Montrez que les conditions aux limites ne permettent pas de déterminer le niveau général du flux neutronique.

4.3 — Résolvez le même problème pour un réacteur plan infini d'épaisseur $2a'$ sans réflecteur (réacteur "nu").

4.4 — Comparez les deux configurations. Exprimez la différence $\delta = a' - a$ qui représente l'économie faite sur l'épaisseur du coeur grâce à la présence du réflecteur, qu'on nomme souvent "économie de réflecteur". En prenant l'expression asymptotique de l'albédo, et en confondant la tangente avec son argument, montrez que $\delta \approx (D_c/D_r)/\kappa_r$.

5. Pile réfléchie : théorie à deux groupes

On s'intéresse à un réacteur plaque infini, d'épaisseur $2a$, entouré d'un réflecteur d'épaisseur e, puis d'un matériau totalement absorbant.

On souhaite traiter le calcul du flux neutronique dans le formalisme multigroupes, avec deux groupes :

— groupe 1 : neutrons rapides et épithermiques ;

— groupe 2 : neutrons thermiques.

5.1 — Dans l'approximation de la diffusion, écrivez les équations différentielles qui régissent les flux $\phi_1(\mathbf{r})$ et $\phi_2(\mathbf{r})$.

On posera :

$$\Sigma_r = \Sigma_{1\to 2} \qquad \Sigma_1 = \Sigma_{a,1} + \Sigma_{1\to 2} \qquad \Sigma_2 = \Sigma_{a,1}$$

5.2 — Faites apparaître le facteur de fissions rapides ε, le produit $f\eta$ ainsi que le facteur anti-trappes p dans le système d'équations différentielles obtenues. Vous pourrez ainsi faire apparaître k_∞.

5.3 — Avec deux groupes, la solution générale est la combinaison linéaire de $2 \times 2 = 4$ solutions. On cherchera des solutions proportionnelles à la même fonction propre du laplacien :

$$\begin{aligned} \phi_1(\mathbf{r}) &= \phi_1(x) \\ \phi_2(\mathbf{r}) &= s\,\phi_1(x) \end{aligned}$$

Avec

$$\Delta\phi_1(\mathbf{r}) + \lambda\phi_1(\mathbf{r}) = 0$$

En distinguant les différents cas pour $k_\infty > 1$, $k_\infty < 1$ et $k_\infty = 0$ (région du réflecteur), exprimez les différentes valeurs propres λ et les valeurs associées du coefficient s.

On posera :

$$L_1^2 = \frac{D_1}{\Sigma_1} \qquad L_2^2 = \frac{D_2}{\Sigma_2} \qquad M^2 = L_1^2 + L_2^2$$

En considérant que le réacteur est de grande taille, on fera l'approximation k_∞ très peu différent de 1.

5.4 — Résolvez les équations dans le coeur et dans le réflecteur, pour ϕ_1 et ϕ_2.

5.5 — La continuité des flux et des courants en $x = a$ et en $x = -a$ permet d'écrire un système d'équations linéaires qui fournit toutes les constantes sauf une. La condition de criticité s'exprime à travers la nullité du déterminant de ce système d'équations. Écrivez ce système et la condition de criticité (c'est un peu long et fastidieux...).

6. Pile cylindrique réfléchie : théorie à deux groupes

Reprenez le calcul précédent, mais cette fois pour une pile cylindrique de rayon a et de hauteur infinie, entourée d'un matériau réflecteur d'épaisseur e.

Fonctions de Bessel

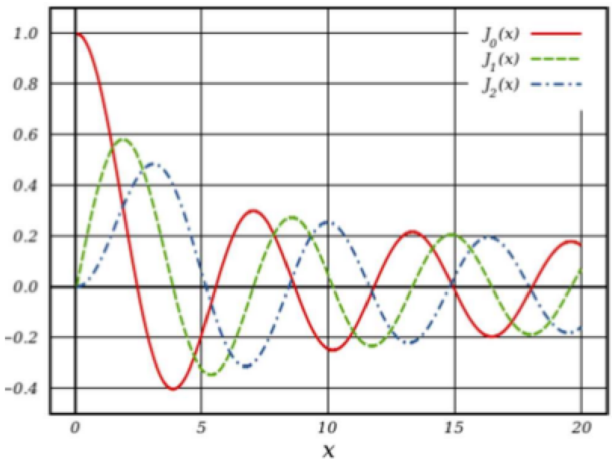
Équation de Bessel d'ordre ν : $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx} + \left(1 - \dfrac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$

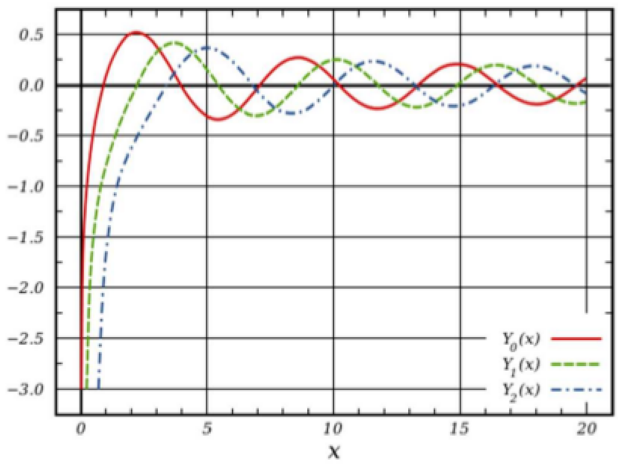
Solutions régulières à l'origine : $J_\nu(x)$.

Zéros $j_{0,i}$ de $J_0(x)$: $j_{0,1} = 2.40483$, $j_{0,2} = 5.52008$, $j_{0,3} = 8.65373, \ldots$

Zéros $j_{1,i}$ de $J_1(x)$: $j_{1,1} = 3.83171$, $j_{1,2} = 7.01559$, $j_{1,3} = 10.17347, \ldots$

Solutions singulières à l'origine : $Y_\nu(x) = N_\nu(x) = \dfrac{\cos \pi\nu \; J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu}$





Équation de Bessel modifiée d'ordre ν : $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx} - \left(1 - \dfrac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$

Solutions régulières à l'origine : $I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(x)$

Solutions singulières à l'origine : $K_\nu(x) = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \pi\nu}$