
UPMC – M2 Ingénierie pour le Nucléaire

Neutronique

06. – Transport des Neutrons : Équation de Boltzmann

Laurent Le Guillou
UPMC / LPNHE

llg@lpnhe.in2p3.fr

Plan général du cours

1. – Introduction générale, rappels
2. – Cinétique ponctuelle des réacteurs (*équations de Nordheim*)
3. – Ralentissement des neutrons
4. – Absorption résonante
5. – Thermalisation des neutrons
6. – Transport des neutrons : équation de Boltzmann
7. – Diffusion des neutrons
8. – Théorie multi-groupe
9. – Evolution du combustible (*équations de Bateman*)
10. – Effets de température
11. – Contrôle de la réactivité, contrôle de la puissance

Plan

- Introduction
- Equation de Boltzmann : 1^{ère} forme
- Equation de Boltzmann : 2^{nde} forme
- Approximations et simplifications
- Calcul numérique
- Approche par Monte Carlo

Population des neutrons dans le réacteur

- **Population neutronique** dans un réacteur :
 - Nombreuse : 10^7 à 10^8 neutrons / cm^3
 - **Faible comparée aux atomes** : 10^{21} à 10^{22} atomes / cm^3
 - Interactions neutron-neutron négligeables :
 - « **gaz parfait** » de neutrons
- **Limites de l'analogie** avec un gaz parfait :
 - Chocs sur les parois : chocs **sur des noyaux** (plus complexe)
 - Population **non permanente** : « équilibre » statistique
- Application aux neutrons de l'**équation de Boltzmann**, approche héritée des travaux théoriques sur les gaz parfaits

Caractéristiques d'une population neutronique

- Repérage dans l'**espace des phases** :
 - **Position** spatiale : $\mathbf{r} = [x, y, z]$ *3 variables*
 - **Vitesse** de chaque neutron : $\mathbf{v} = v\Omega$
 - Norme v , direction angulaire de \mathbf{v} : $\Omega = \frac{\mathbf{v}}{v}$ *3 variables*
(vitesse v ou énergie $E = mv^2/2$)
 - Temps t *1 variable*
- **Densité neutronique** dans l'espace des phases : $n(\mathbf{r}, v, \Omega, t)$
 - neutrons dans d^3r autour du point \mathbf{r} , de vitesse entre v et $v+dv$, de direction dans l'angle solide $d\Omega$ autour de Ω :
$$n(\mathbf{r}, v, \Omega, t) d^3r dv d\Omega$$
- **Densité de flux neutronique, « flux en phase »** : $\phi(\mathbf{r}, v, \Omega, t)$
$$\phi(\mathbf{r}, v, \Omega, t) = v \times n(\mathbf{r}, v, \Omega, t)$$

Caractéristiques d'une population neutronique

- De nombreuses grandeurs ne dépendent pas de la direction $\Omega = \frac{\mathbf{v}}{v}$, mais seulement de l'énergie E ou la vitesse v des neutrons.

- **Intégration sur toutes les directions :**

$$n(\mathbf{r}, v, t) = \int_{4\pi} n(\mathbf{r}, v, \Omega, t) d\Omega$$

$$\phi(\mathbf{r}, v, t) = \int_{4\pi} \phi(\mathbf{r}, v, \Omega, t) d\Omega$$

- **Intégration sur la gamme d'énergie ou de vitesse :**

$$n(\mathbf{r}, t) = \int_0^{+\infty} n(\mathbf{r}, v, t) dv$$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int_0^{+\infty} \phi(\mathbf{r}, v, t) dv$$

Caractéristiques d'une population neutronique

- **Densité de courant** neutronique :

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t) = \boldsymbol{\Omega} \times \phi(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t)$$

- Nombre de neutrons de vitesse v dans la direction $\boldsymbol{\Omega}$ traversant une surface élémentaire dS de normale \mathbf{N} pendant un temps dt :

$$\begin{aligned} n(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t) \times v dt \cos \theta dS &= \phi(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t) \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{N} dS dt \\ &= \mathbf{J}(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t) \cdot \mathbf{N} dS dt \end{aligned}$$

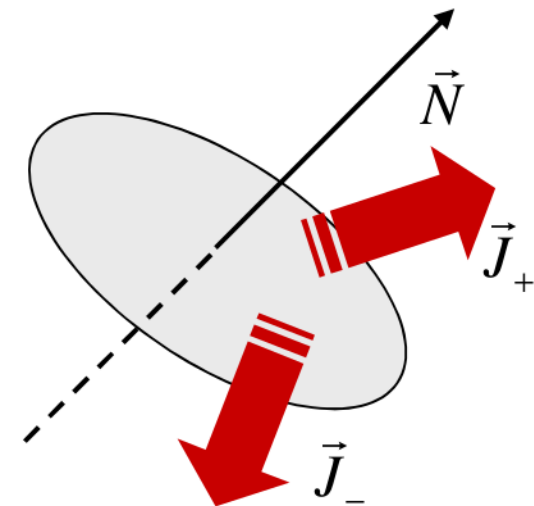
- **Courants** : courants relatifs à un élément de surface $dS = dS \mathbf{N}$

$$J_+(\mathbf{r}, v, t) = \int_{\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{N} > 0} \mathbf{J}(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t) \cdot \mathbf{N} d^2\Omega$$

$$J_-(\mathbf{r}, v, t) = \int_{\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{N} < 0} \mathbf{J}(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t) \cdot \mathbf{N} d^2\Omega$$

- Neutrons traversant dS par unité de temps :

$$J(\mathbf{r}, v, t) dS = (J_+(\mathbf{r}, v, t) - J_-(\mathbf{r}, v, t)) dS$$



Plan

- Introduction
- Equation de Boltzmann : 1^{ère} forme
- Equation de Boltzmann : 2^{nde} forme
- Approximations et simplifications
- Calcul numérique
- Approche par Monte Carlo

Bilan dans un élément de volume $dV = d^3r$

- Bilan des neutrons dans un élément $dV = d^3r$
 - Neutrons **produits par la fission** et les **sources autonomes**
 - **Arrivées** de neutrons dans $dV = d^3r$ par diffusion (chocs)
 - **Disparitions** de neutron par **absorption** ou **diffusion**
 - **Départs par déplacement** (transport)
- Égal à la variation du nombre de neutrons dans d^3r (1^{er} membre) :

$$\begin{aligned} [n(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t + dt) - n(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t)] d^3r dv d^2\Omega &= \frac{\partial n(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t)}{\partial t} dt d^3r dv d^2\Omega \\ &= \frac{1}{v} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t)}{\partial t} dt d^3r dv d^2\Omega \end{aligned}$$



L. Boltzmann (1844-1906)

Sources de neutrons

- Neutrons émis par fission des noyaux fissiles :

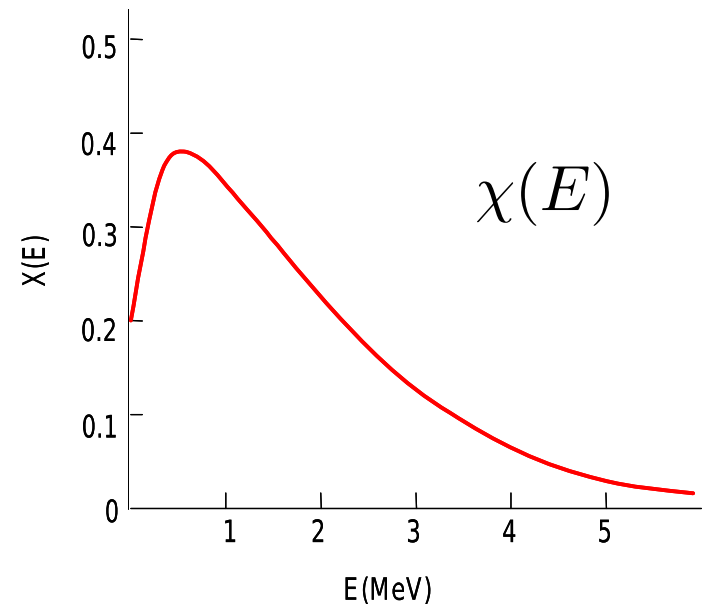
$$+ d^3r dv d^2\Omega dt \chi(v) \int_0^{+\infty} dv' \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} d^2\Omega' \bar{\nu} \Sigma_f(\mathbf{r}, v') \phi(\mathbf{r}, v', \boldsymbol{\Omega}', t)$$

- Emission **isotrope** par fission

$$\rightarrow 1/4\pi$$

- **Spectre d'émission**

$$\chi(v) dv = \chi(E) dE$$



- Neutrons produits par une éventuelle **source autonome** S_a

$$+ S_a(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t) d^3r dv d^2\Omega dt$$

Arrivées de neutrons par diffusion

- **Arrivées depuis un autre point de l'espace des phases :**

$$+ d^3r dv d^2\Omega dt \int_{4\pi} d^2\Omega' \int_0^{+\infty} dv' [\Sigma_s(\mathbf{r}, v' \rightarrow v, \Omega' \rightarrow \Omega, t) \phi(\mathbf{r}, v', \Omega', t)]$$

- Section efficace différentielle de diffusion : neutrons de vitesse v' , Ω' transférés à la vitesse v , Ω :

$$\Sigma_s(\mathbf{r}, v' \rightarrow v, \Omega' \rightarrow \Omega, t)$$

Départs par diffusions et absorptions

- Départs du volume d^3r par **diffusion** ou **absorption** par un noyau
→ Tous les processus : diffusion, absorption :

$$\Sigma_t = \Sigma_a + \Sigma_s$$

- Neutrons de vitesse entre v et $v + dv$, de direction Ω comprise dans $d^2\Omega$, quittant le volume d^3r pendant dt :

$$-\Sigma_t(\mathbf{r}, v, \Omega, t) \phi(\mathbf{r}, v, \Omega, t) d^3r dv d^2\Omega dt$$

Départs par déplacement (transport)

- Neutrons **quittant le volume élémentaire sans choc**, par simple déplacement :
 - **divergence du courant** (théorème d'Ostrogradsky)

$$- \operatorname{div} \left[\vec{J}(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t) \right] d^3 r dv d^2 \Omega dt = - \operatorname{div} \left[\vec{\Omega} \phi(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t) \right] d^3 r dv d^2 \Omega dt$$

Equation de Boltzmann : 1^{ère} forme

- Bilan : 1^{ère} forme de l'équation de Boltzmann :

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t)}{\partial t} &= + \chi(v) \int_0^{+\infty} dv' \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} d^2\Omega' \bar{v} \Sigma_f(\mathbf{r}, v') \phi(\mathbf{r}, v', \boldsymbol{\Omega}', t) \\ &+ \int_{4\pi} d^2\Omega' \int_0^{+\infty} dv' [\Sigma_s(\mathbf{r}, v' \rightarrow v, \boldsymbol{\Omega}' \rightarrow \boldsymbol{\Omega}, t) \phi(\mathbf{r}, v', \boldsymbol{\Omega}', t)] \\ &+ S_a(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t) \\ &- \Sigma_t(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t) \phi(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t) \\ &- \operatorname{div} [\boldsymbol{\Omega} \phi(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t)] \end{aligned}$$

- Forme dite « **intégro-différentielle** » : intégrale en v et en *angle*, différentielle en position et en temps.

Plan

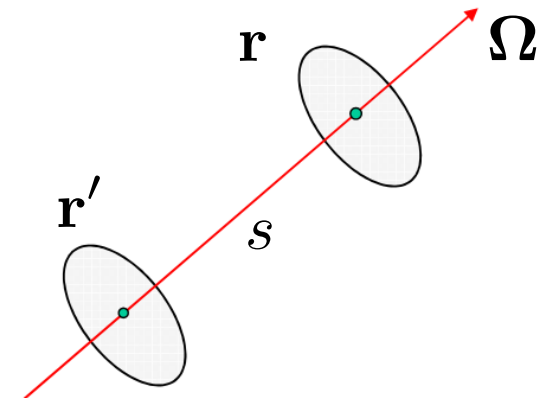
- Introduction
- Equation de Boltzmann : 1^{ère} forme
- Equation de Boltzmann : 2^{nde} forme
- Approximations et simplifications
- Calcul numérique
- Approche par Monte Carlo

Equation de Boltzmann : 2^{nde} forme

- Bilan relatif à un élément de surface infinitésimal
- Sections efficaces prises indép. du temps
- Neutrons traversant un élément de surface dS , dans la direction Ω , pendant un instant dt , à la vitesse v :

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, v, \Omega, t) \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{J}(\mathbf{r}, v, \Omega, t) \cdot \Omega dS = \phi(\mathbf{r}, v, \Omega, t) dS$$

- Départs depuis un élément dS autour d'un autre point r' , à cette même vitesse v , et dans la même direction Ω ,



$$q(\mathbf{r}, v, \Omega, t) dS =$$

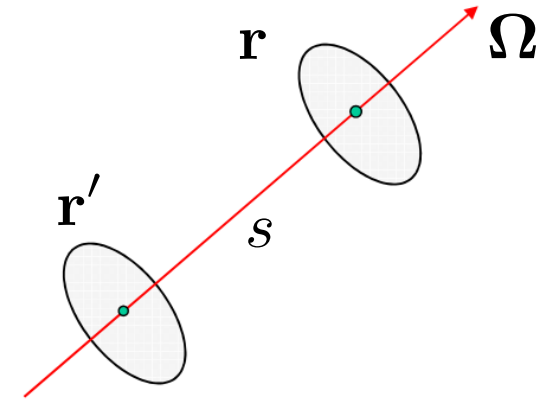
$$\left[\int_0^{+\infty} \int_{4\pi} \Sigma_s(\mathbf{r}', v' \rightarrow v, \Omega' \rightarrow \Omega) \phi(\mathbf{r}', v', \Omega', t') d^2\Omega' dv' + S(\mathbf{r}', v, \Omega, t') \right] dS$$

Equation de Boltzmann : 2^{nde} forme

- Ces neutrons contribuent au flux seulement si :

- Le choc a eu lieu à l'instant précédent t'

$$t' = t - \frac{s}{v} \quad \text{avec} \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - s\boldsymbol{\Omega}$$



- Le neutron, émis à la vitesse et dans la direction désirées, parvient au point r sans collision : la probabilité est :

$$\exp [-\bar{\Sigma}_t \times s] = \exp \left[- \int_0^s \Sigma_t (\mathbf{r} - s'\boldsymbol{\Omega}, v, \boldsymbol{\Omega}) ds' \right]$$

- En sommant sur tous les points r' :

$$\phi(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t) = \int_0^{+\infty} \exp [-\bar{\Sigma}_t \times s] q \left(\mathbf{r} - s\boldsymbol{\Omega}, v, \boldsymbol{\Omega}, t - \frac{s}{v} \right) ds$$

Equation de Boltzmann : 2^{nde} forme

$$q(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t) dS =$$

$$\left[\int_0^{+\infty} \int_{4\pi} \Sigma_s(\mathbf{r}', v' \rightarrow v, \boldsymbol{\Omega}' \rightarrow \boldsymbol{\Omega}) \phi(\mathbf{r}', v', \boldsymbol{\Omega}', t') d^2\Omega' dv' + S(\mathbf{r}', v, \boldsymbol{\Omega}, t') \right] dS$$

$$\phi(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t) = \int_0^{+\infty} \exp[-\bar{\Sigma}_t \times s] q\left(\mathbf{r} - s\boldsymbol{\Omega}, v, \boldsymbol{\Omega}, t - \frac{s}{v}\right) ds$$

- Forme dite « **intégrale** » de l'équation de Boltzmann.

Plan

- Introduction
- Equation de Boltzmann : 1^{ère} forme
- Equation de Boltzmann : 2^{nde} forme
- **Approximations et simplifications**
- Calcul numérique
- Approche par Monte Carlo

Isotropie

- **Milieux isotropes :**

- Vrai pour les liquides, les gaz et les solides désordonnés
- Solides cristallins : approx. vrai si le libre parcours moyen grand devant la maille cristalline

- **Simplifications :**

- **Sections efficaces indép. de la direction** du neutron :

$$\Sigma_t(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t) = \Sigma_t(\mathbf{r}, v, t)$$

- **Section efficace de diffusion ne dépendent que de l'angle de diffusion :**

$$\Sigma_s(\mathbf{r}, v \rightarrow v', \boldsymbol{\Omega} \rightarrow \boldsymbol{\Omega}', t) = \Sigma_s(\mathbf{r}, v \rightarrow v', \mu, t)$$

$$\mu = \cos \theta = \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}'$$

- **Si la diffusion est isotrope**, la diffusion ne dépend plus de $\boldsymbol{\Omega}$

Milieux, diffusion et sources isotropes

- Dans ce cas particulier, on peut intégrer sur **toutes les directions**, et obtenir une nouvelle formulation de la seconde forme :

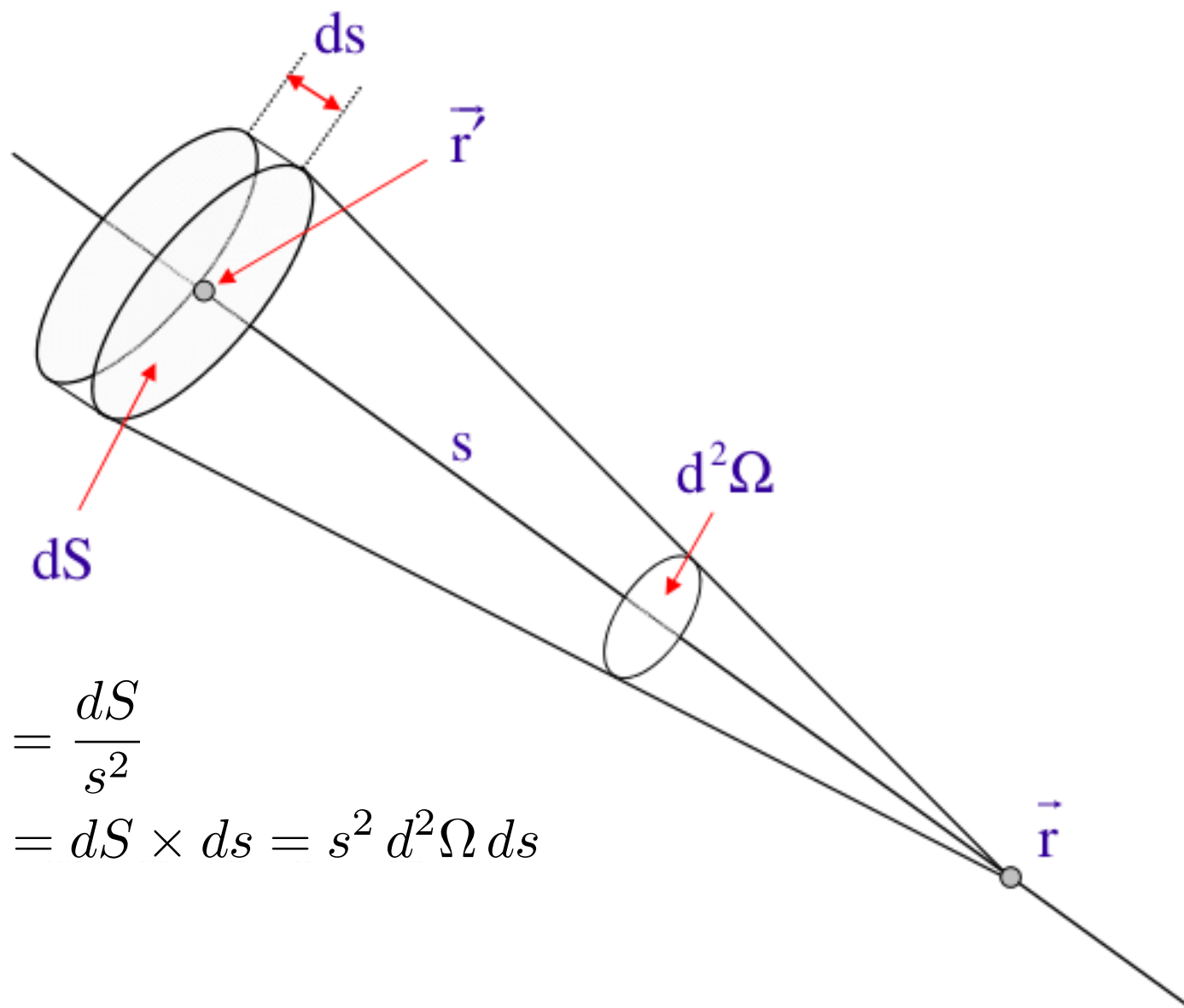
$$\phi(\mathbf{r}, v, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{réacteur}} \frac{1}{s^2} \exp[-\bar{\Sigma}_t \times s] q\left(\mathbf{r}', v, t - \frac{s}{v}\right) d^3 r'$$

avec

$$q(\mathbf{r}, v, t) = \int_0^{+\infty} \Sigma_s(\mathbf{r}, v' \rightarrow v) \phi(\mathbf{r}, v', t) dv' + S(\mathbf{r}, v, t)$$

$$\exp[-\bar{\Sigma}_t \times s] = \exp\left[-\int_0^s \Sigma_t(\mathbf{r} - s'\boldsymbol{\Omega}, v, \boldsymbol{\Omega}) ds'\right]$$

on utilise : $d^3 r' = s^2 ds d\Omega$



$$d^2\Omega = \frac{dS}{s^2}$$

$$d^3r' = dS \times ds = s^2 d^2\Omega ds$$

Plan

- Introduction
- Equation de Boltzmann : 1^{ère} forme
- Equation de Boltzmann : 2^{nde} forme
- Approximations et simplifications
- **Calcul numérique**
- Approche par Monte Carlo

Résolution des équations à l'échelle d'un coeur

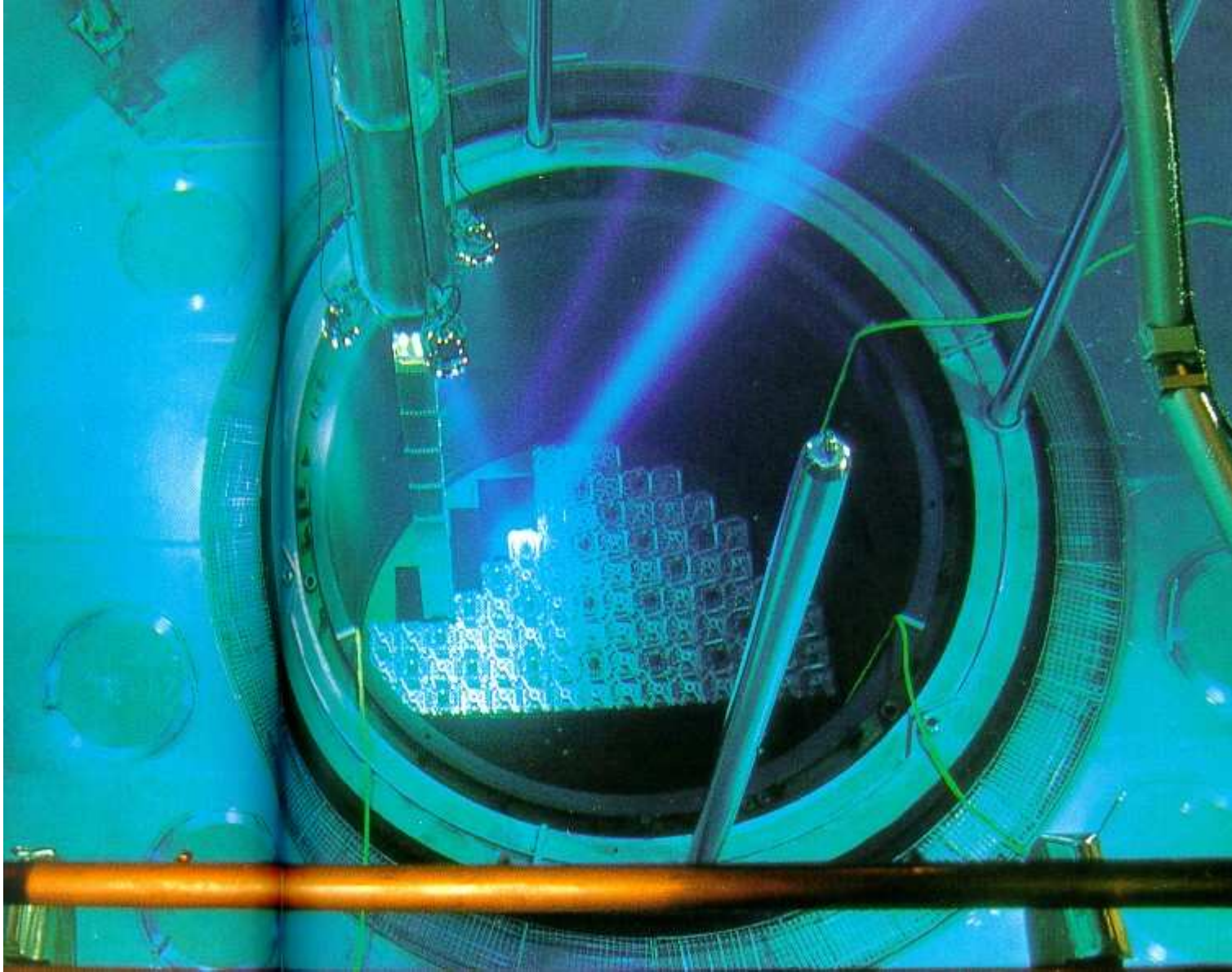
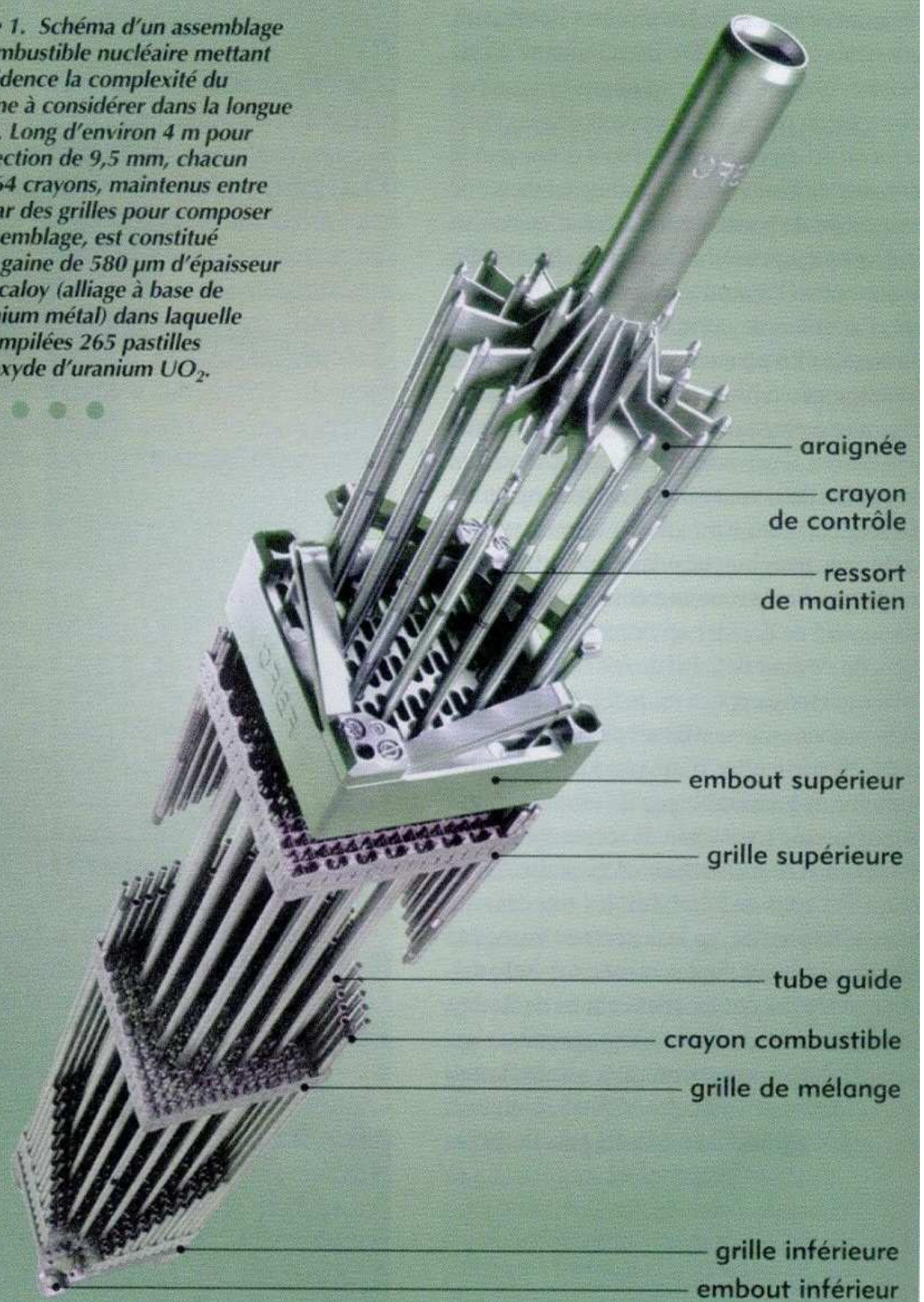
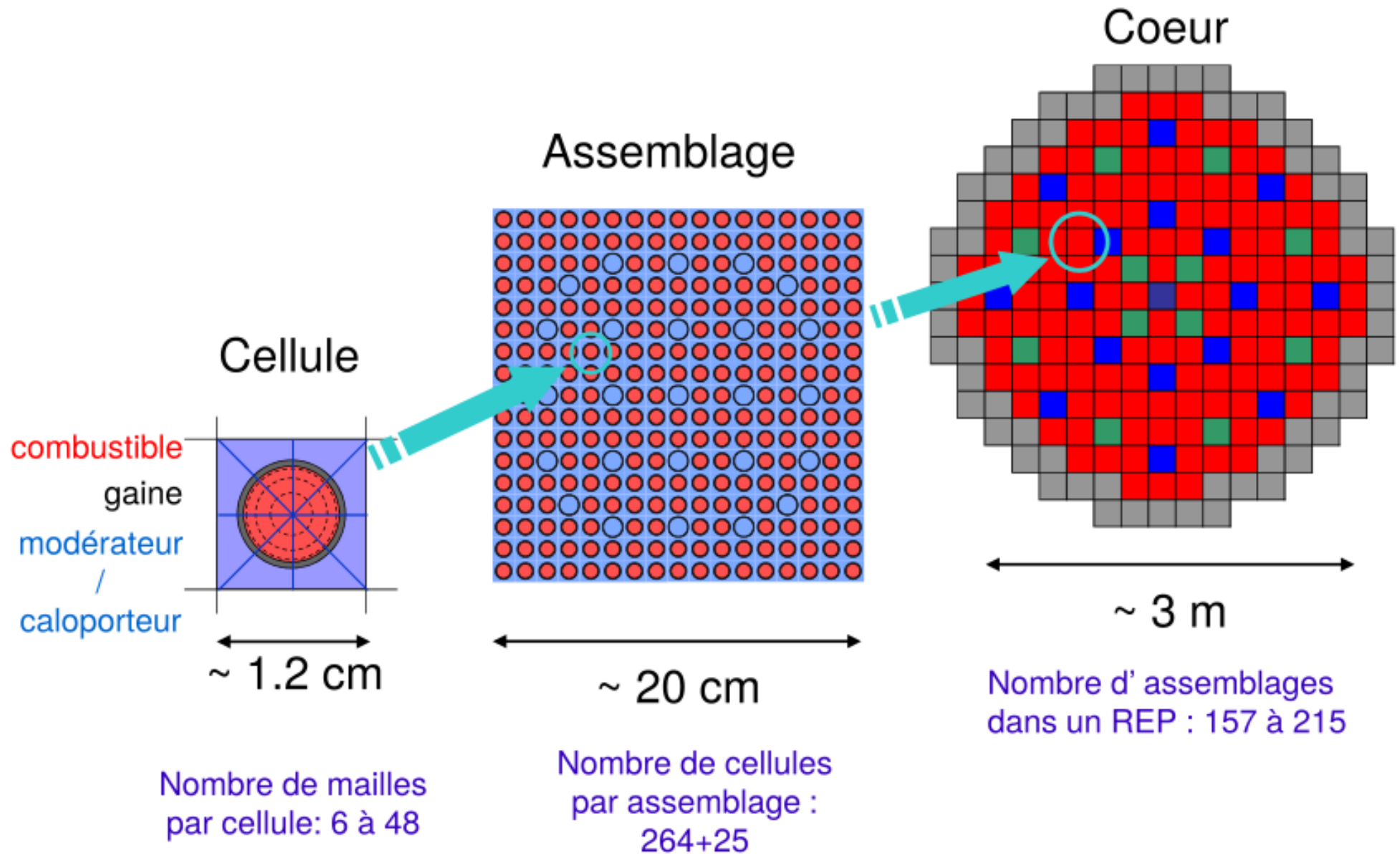




Figure 1. Schéma d'un assemblage de combustible nucléaire mettant en évidence la complexité du système à considérer dans la longue durée. Long d'environ 4 m pour une section de 9,5 mm, chacun des 264 crayons, maintenus entre eux par des grilles pour composer un assemblage, est constitué d'une gaine de 580 μm d'épaisseur en Zircaloy (alliage à base de zirconium métal) dans laquelle sont empilées 265 pastilles de dioxyde d'uranium UO_2 .



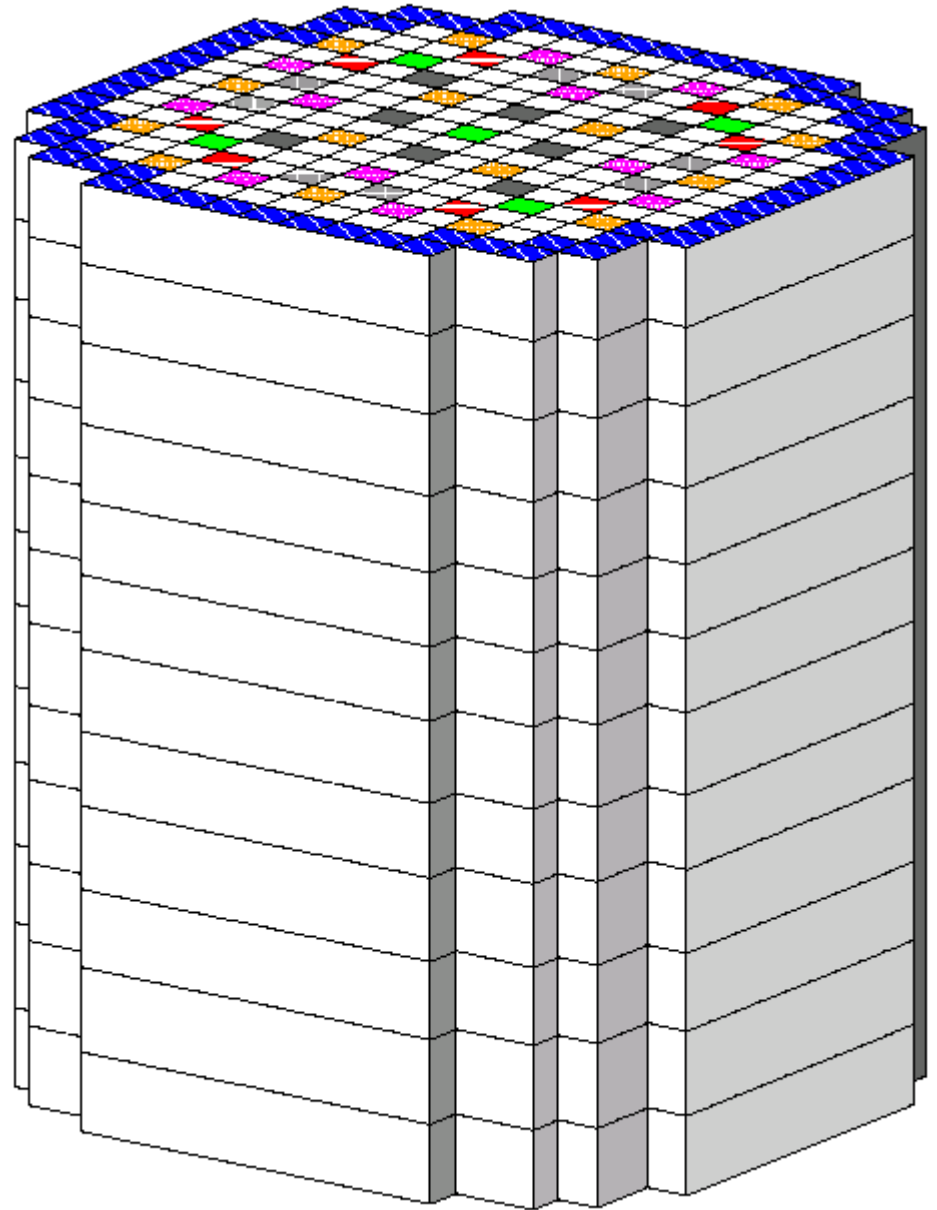
Discrétisation spatiale du réacteur



➔ $10 \times 289 \times 200 =$ environ 0,6 millions de mailles radiales

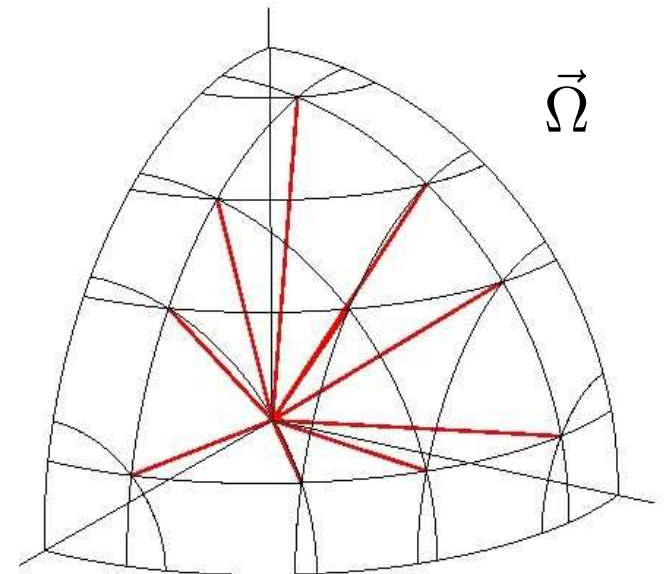
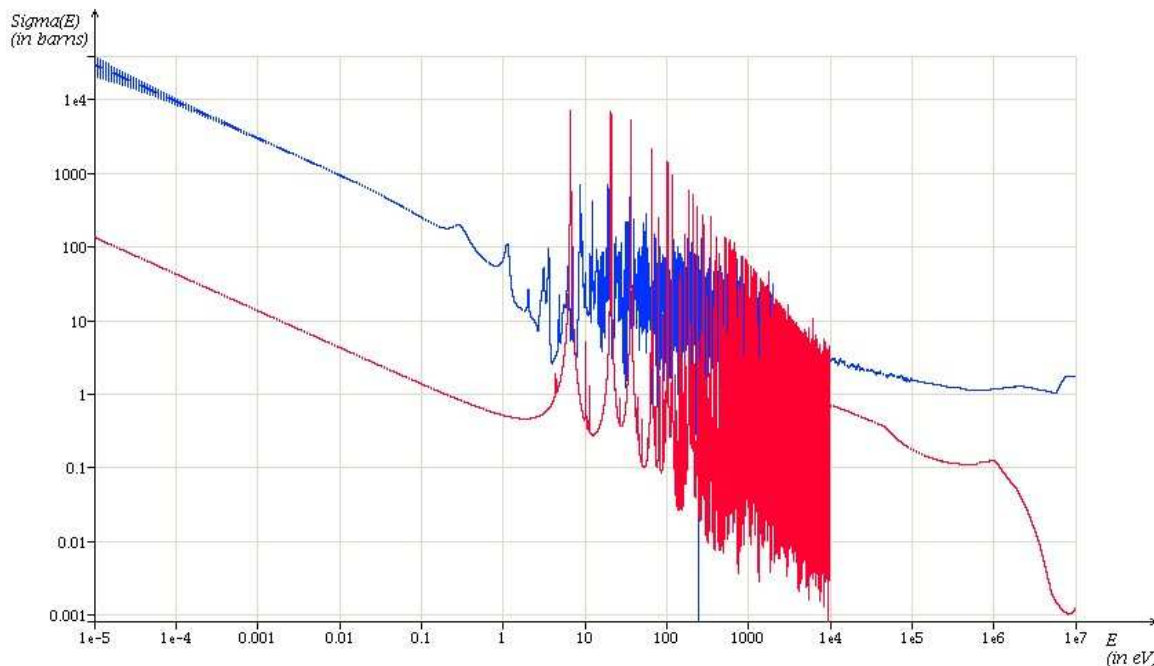
Discrétisation (hauteur)

- Hauteur des assemblages :
 - REP 900 MWe : 3.65 m
 - REP 1300 MWe : 4.26 m
- **Découpage selon z :**
 - environ 50 mailles selon z



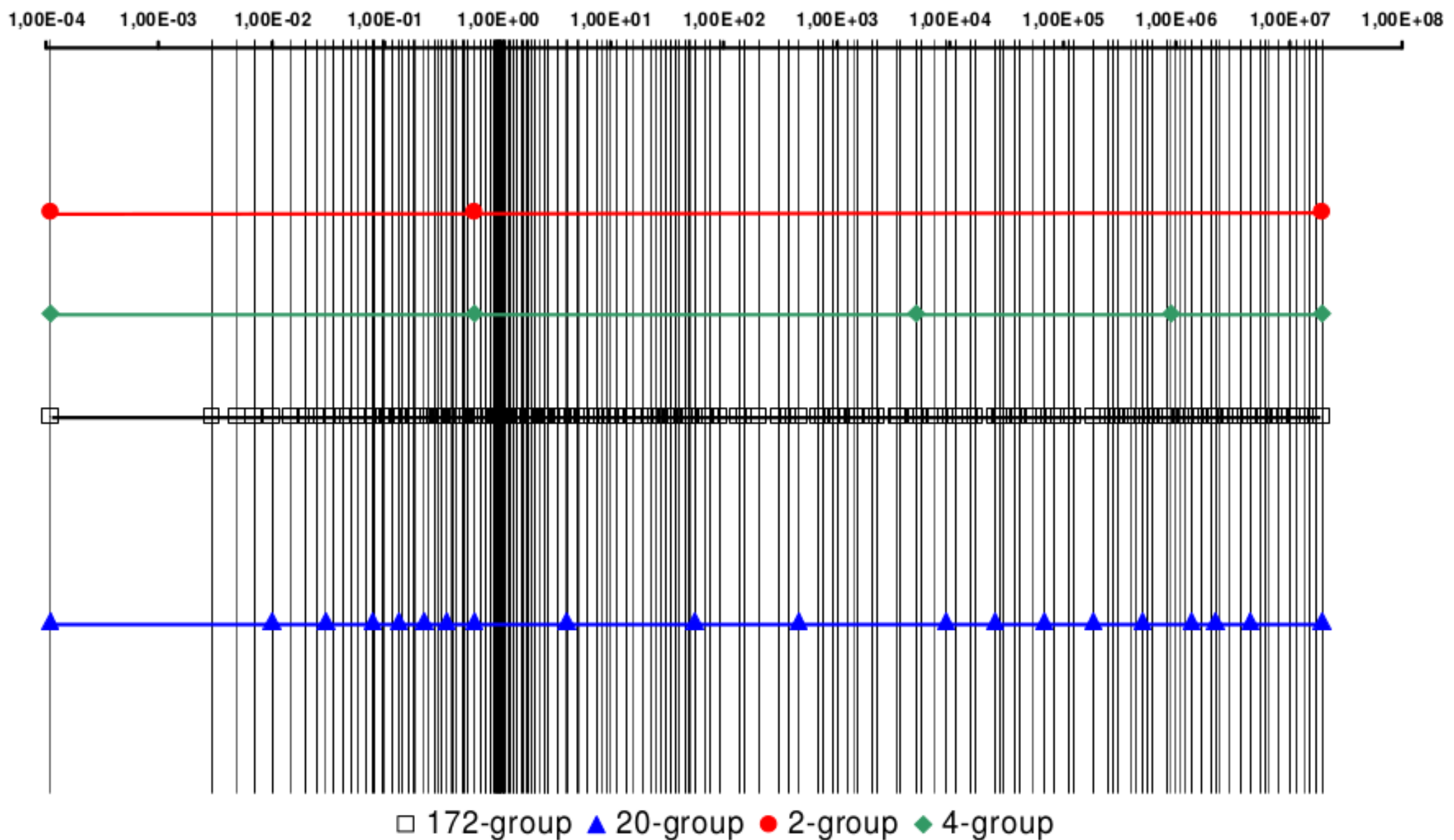
Discrétisation angulaire et en « groupes » d'énergie

- Variations selon l'énergie :
 - Des **sections efficaces** de diffusion, et surtout **d'absorption**
 - Discrétisation sur E : formalisme « **multi-groupes** »
 - Environ 10000 groupes avec peu d'approximation
 - De 2 à 200 groupes d'énergie pour des calculs usuels
- Discrétisation selon la **direction angulaire**



Approche « multi-groupe » en énergie

Multigroup energy meshes



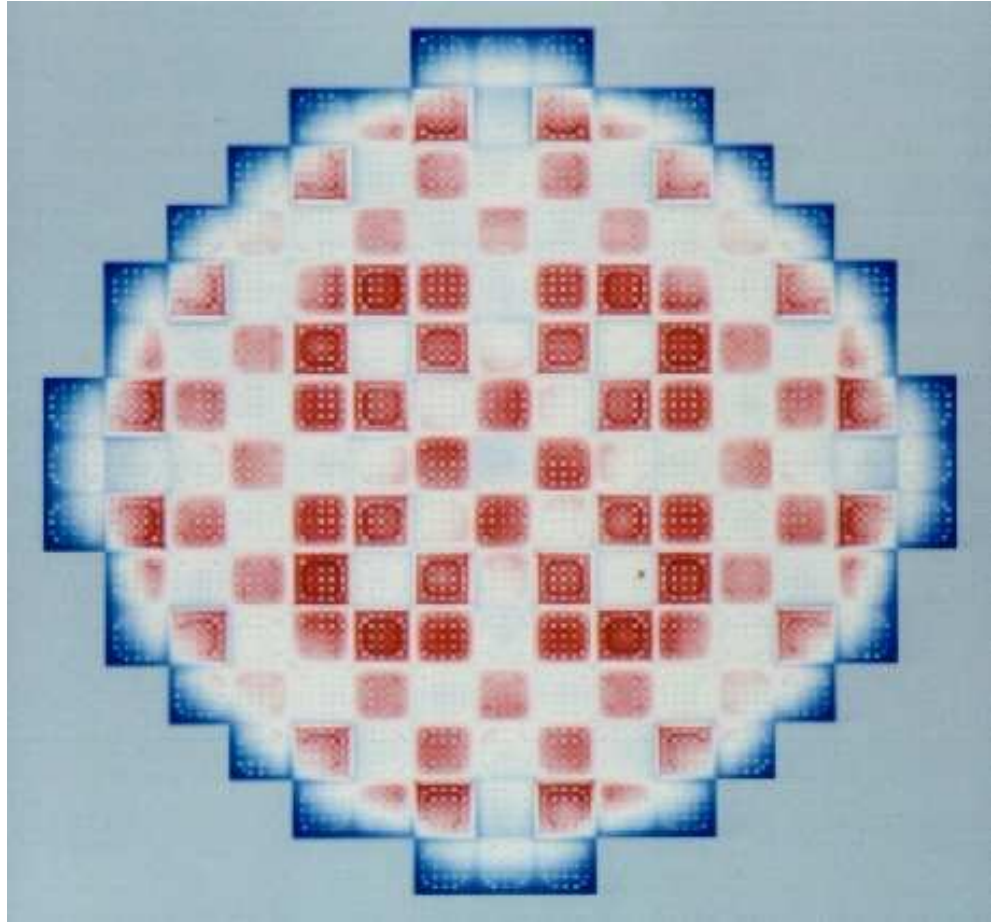
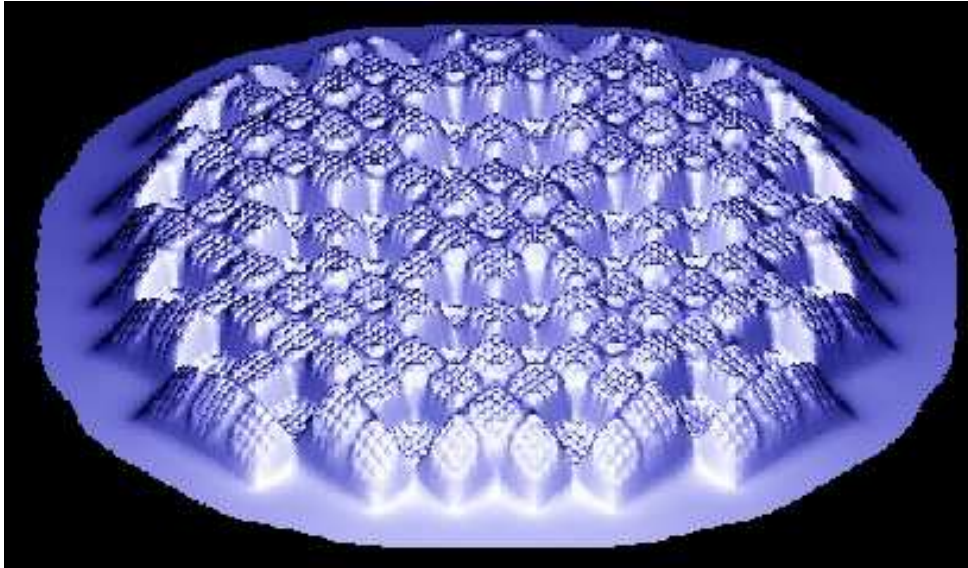
Variables du modèle : schéma de calcul

- Variables :
 - **30 000 000** de mailles spatiales
 - **100 groupes d'énergie**
 - **200 directions angulaires**

→ **600 milliards d'inconnues !**

→ à chaque **pas de temps** de la simulation...
- Approches du problème :
 - **Simplifications** basées sur des **modèles physiques** : modèle de la diffusion des neutrons, auto-protection des résonances, etc.
 - **Homogénéisation** du réacteur ou de parties du réacteur ;
 - **Résolution par étapes** : cellule, assemblage, coeur.
- **Validation du schéma de calcul** par des mesures sur réacteur

Calculs de flux neutronique



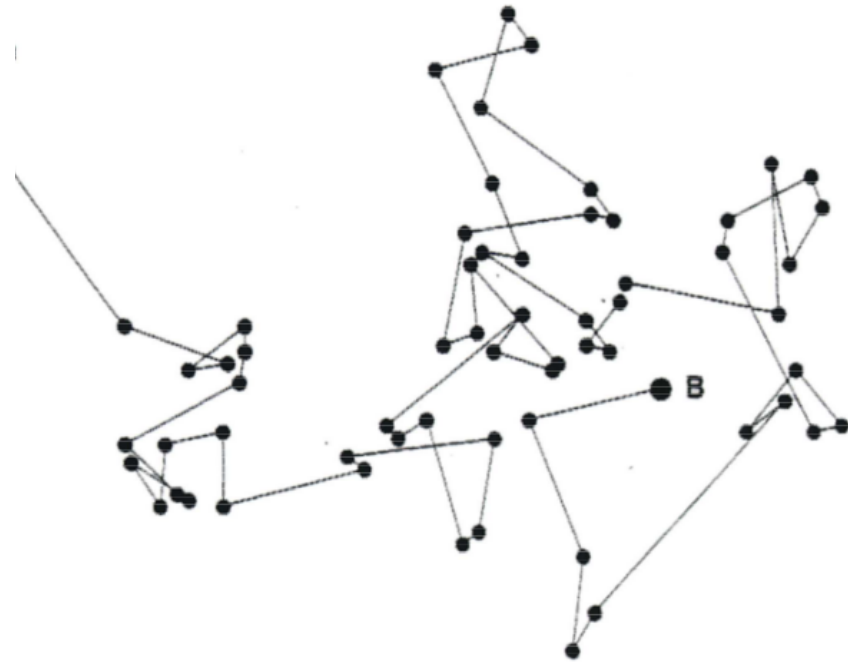
Codes de calcul : APOLLO2, CRONOS2, DARWIN2, APOLLO3, etc...

Plan

- Introduction
- Equation de Boltzmann : 1^{ère} forme
- Equation de Boltzmann : 2^{nde} forme
- Approximations et simplifications
- Calcul numérique
- Approche par Monte Carlo

Approche alternative : Monte Carlo

- On simule la trajectoire d'un **grand nombre de neutrons, individuellement**, de leur émission à leur absorption
 - Moins d'approximations
 - Pas de maillage : détails spatiaux
 - **Résonances résolues**
- Inconvénients :
 - **Convergence lente** : $1/\sqrt{N}$
 - Coût en **temps de calcul**
 - Millions de particules / heure
 - 10^8 n/cm³ : combien pour une précision suffisante ?
- **Méthode de référence** en régime stationnaire : **calibration** des autres méthodes de calcul.



Codes de calcul : TRIPOLI-4, etc...