
UPMC – M2 Ingénierie pour le Nucléaire

Neutronique

07. – Diffusion des Neutrons

Laurent Le Guillou
UPMC / LPNHE

llg@lpnhe.in2p3.fr

Plan général du cours

1. – Introduction générale, rappels
2. – Cinétique ponctuelle des réacteurs (*équations de Nordheim*)
3. – Ralentissement des neutrons
4. – Absorption résonante
5. – Thermalisation des neutrons
6. – Transport des neutrons : équation de Boltzmann
7. – Diffusion des neutrons
8. – Théorie multi-groupe
9. – Evolution du combustible (*équations de Bateman*)
10. – Effets de température
11. – Contrôle de la réactivité, contrôle de la puissance

Plan

- Introduction
- Bilan neutronique, loi de Fick
- Conditions aux limites, aux interfaces
- Solutions : noyaux de l'équation
- Valeurs propres et fonctions propres du laplacien
- Condition critique en milieu multiplicateur

Equation de Boltzmann : 1^{ère} forme

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t)}{\partial t} &= + \chi(v) \int_0^{+\infty} dv' \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} d^2\Omega' \bar{v} \Sigma_f(\mathbf{r}, v') \phi(\mathbf{r}, v', \boldsymbol{\Omega}', t) \\ &+ \int_{4\pi} d^2\Omega' \int_0^{+\infty} dv' [\Sigma_s(\mathbf{r}, v' \rightarrow v, \boldsymbol{\Omega}' \rightarrow \boldsymbol{\Omega}, t) \phi(\mathbf{r}, v', \boldsymbol{\Omega}', t)] \\ &+ S_a(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t) \\ &- \Sigma_t(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t) \phi(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t) \\ &- \text{div} [\boldsymbol{\Omega} \phi(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t)] \end{aligned}$$

- Résolution à l'échelle d'un coeur difficile, nécessité d'approximations supplémentaires
- Approximation de la diffusion (terme de transport)

Approximations

- Diffusion des neutrons décrits par la **loi de Fick** :

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = -D(\mathbf{r}) \text{grad } \phi(\mathbf{r}, t)$$

$$D(\mathbf{r}) = \frac{1}{3\Sigma_t(\mathbf{r})} = \frac{\lambda(\mathbf{r})}{3}$$

- Hypothèse supplémentaire : **neutrons monocinétiques**

~~$$+ \int_{4\pi} d^2\Omega' \int_0^{+\infty} dv' [\Sigma_s(\mathbf{r}, v' \rightarrow v, \Omega' \rightarrow \Omega, t) \phi(\mathbf{r}, v', \Omega', t)]$$~~

Pas de transfert d'une énergie (vitesse) à une autre.

- Variables : **densité et flux intégrés** : $n(\mathbf{r}, t)$ et $\phi(\mathbf{r}, t)$

Bilan neutronique

- **Variation** du nombre de neutrons dans d^3r :

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} d^3r dt = \frac{1}{v} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} d^3r dt$$

- **Apparitions** de neutrons (sources, incluant les fissions) :

$$S(\mathbf{r}, t) d^3r dt$$

- **Disparitions** :

- Absorptions : $-\Sigma_a(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}, t) d^3r dt$

- Transport : $-\text{div } \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) d^3r dt$

- Pas de disparitions par transfert d'énergie (mono-groupe)

Bilan neutronique

- Bilan neutronique :

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{v} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}, t) + S(\mathbf{r}, t)$$

- **Apparitions** de neutrons (sources, incluant les fissions) :

$$S(\mathbf{r}, t) d^3r dt$$

- **Disparitions** :

- Absorptions : $-\Sigma_a(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}, t) d^3r dt$

- Transport : $-\operatorname{div} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) d^3r dt$

- Pas de disparitions par transfert d'énergie (« mono-groupe »)

Approximation : loi de Fick

- **Transport des neutrons** décrit par la loi de Fick :

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = -D(\mathbf{r}) \mathbf{grad} \phi(\mathbf{r}, t) \quad D(\mathbf{r}) = \frac{1}{3\Sigma_t(\mathbf{r})} = \frac{\lambda(\mathbf{r})}{3}$$

- L'équation devient :

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \text{div} [D(\mathbf{r}) \mathbf{grad} \phi(\mathbf{r}, t)] - \Sigma_a(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}, t) + S(\mathbf{r}, t)$$

- Dans un **milieu homogène** : $D(\mathbf{r}) = D$

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D\Delta\phi(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}, t) + S(\mathbf{r}, t)$$

- La résolution nécessite :
 - **Conditions aux limites** pour le flux et le courant
 - La connaissance des **conditions initiales**

Conditions aux limites

- **Transport des neutrons** décrit par la loi de Fick :

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = -D(\mathbf{r}) \text{grad } \phi(\mathbf{r}, t) \quad D(\mathbf{r}) = \frac{1}{3\Sigma_t(\mathbf{r})} = \frac{\lambda(\mathbf{r})}{3}$$

- L'équation devient :

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \text{div} [D(\mathbf{r}) \text{grad } \phi(\mathbf{r}, t)] - \Sigma_a(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}, t) + S(\mathbf{r}, t)$$

- Dans un **milieu homogène** : $D(\mathbf{r}) = D$

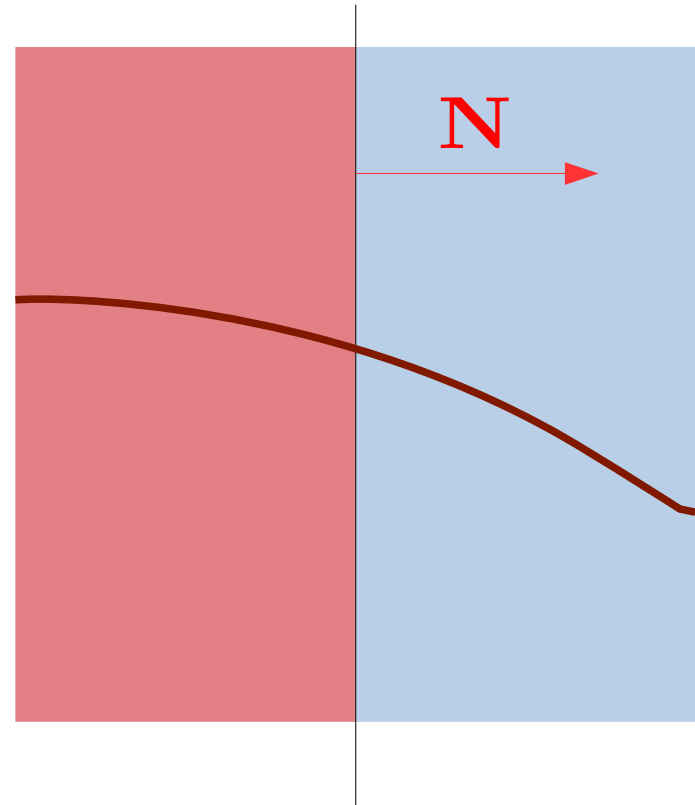
$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D\Delta\phi(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}, t) + S(\mathbf{r}, t)$$

- La résolution nécessite :
 - **Conditions aux limites** pour le flux et le courant
 - La connaissance des **conditions initiales**

Continuité aux interfaces

- Aux **interfaces** entre milieux : **continuité du flux et du courant**, qui peut encore s'écrire :

$$\phi \quad \text{continu}$$
$$D \frac{\partial \phi}{\partial N} \quad \text{continu}$$



Conditions aux limites

- À la **frontière** du réacteur :
les neutrons sortant sont perdus
(milieu ext. « noir »)

Le **courant entrant** est nul :

$$J_-(\mathbf{r}_f) = 0$$

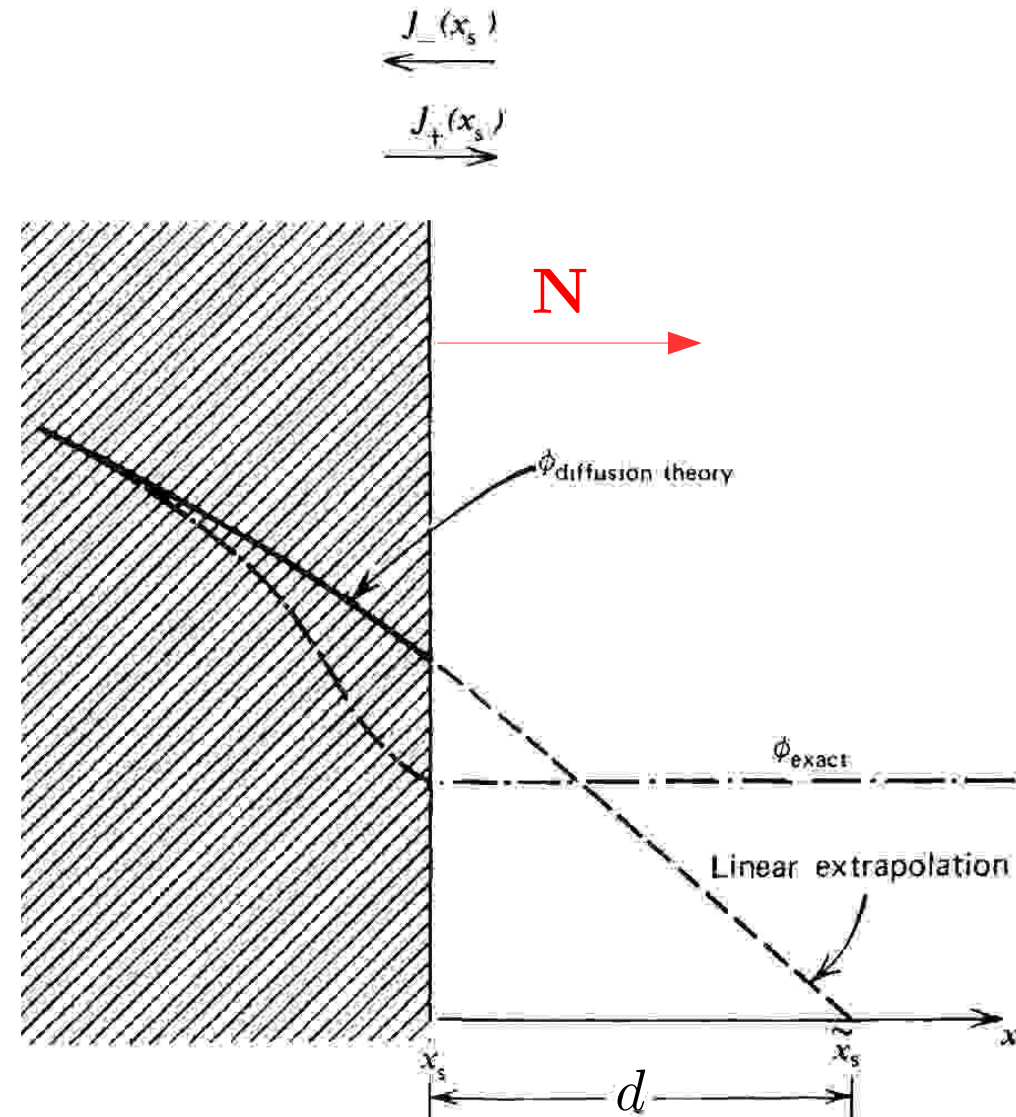
$$\frac{\phi(\mathbf{r}_f)}{4} + \frac{D}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial N} \right)_{\mathbf{r}_f} = 0$$

Le flux s'annule à la distance :

$$d \approx 2D = \frac{2}{3\Sigma_t} \quad d = \frac{0.7104}{\Sigma_t}$$

- Concept de « **surface extrapolée** » :

Le flux y est considéré comme nul : à quelques cm de la surf. réelle



Validité de l'approximation de la diffusion

- Valide si **variations lentes du flux** (spatiales et temporelles)
 - Peu d'hétérogénéités
 - **Loin des interfaces** et des sources « concentrées » (qq lpm)
 - Si $\Sigma_a \ll \Sigma_s$
- On suppose l'**isotropie de la diffusion** dans le référentiel du réacteur : hypothèse peu valide.
 - **Correction dite « de transport »** : on corrige le coefficient de diffusion D pour prendre en compte l'anisotropie des diffusions :

$$D = \frac{1}{3\Sigma_{tr}} \quad \Sigma_{tr} = \Sigma_t - \bar{\mu}\Sigma_s \quad \bar{\mu} = \overline{\cos \psi}$$

où $\bar{\mu}$ est le cosinus moyen de l'angle de diffusion des neutrons

(cf. cours ralentissement)

Résolution dans des cas simples : « noyaux »

- Equation en **régime stationnaire** :

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D \Delta \phi(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}, t) + S(\mathbf{r}, t)$$

$$D \Delta \phi(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}, t) + S(\mathbf{r}, t) = 0$$

- Résolutions dans un **milieu homogène et infini**, avec une source localisée de géométrie simple :
 - Source **ponctuelle**
 - Source **linéaire** « fil infini »
 - Source **plane** infinie
- **Milieu infini**, pas de conditions aux limites

Noyau ponctuel

- **Source ponctuelle à l'origine**, émettant un neutron par seconde :

$$S(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r})$$

- **Symétrie sphérique**, laplacien se réduit à :

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) \quad D \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) - \Sigma_a \phi + \delta(\mathbf{r}) = 0$$

- **Solution de la forme** :

$$\phi(r) = \frac{e^{-\kappa r}}{4\pi D r} \quad \kappa^2 = \frac{\Sigma_a}{D} \quad M^2 = \frac{1}{\kappa^2} = \frac{D}{\Sigma_a}$$

- **Utile** :

$$\delta(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \Delta \left(\frac{1}{r} \right)$$

Noyau plan

- **Source plane infinie** en $x = 0$:

$$S(\mathbf{r}, t) = \delta(x)$$

- **Coordonnées cartésiennes**, dépendance en x uniquement :

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \quad D \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \Sigma_a\phi + \delta(x) = 0$$

- Solution de la forme :

$$\phi(x) = \frac{e^{-\kappa x}}{2\kappa D} \quad \kappa^2 = \frac{\Sigma_a}{D} \quad M^2 = \frac{1}{\kappa^2} = \frac{D}{\Sigma_a}$$

- Utile :

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{d^2}{dx^2} \left| \frac{x}{2} \right|$$

Noyau linéaire

- **Source linéaire infinie** le long de l'axe Oz :

$$S(\mathbf{r}, t) = \delta(x)\delta(y) = \delta(\rho)$$

- **Coordonnées cylindriques**, dépendance en ρ uniquement :

$$\Delta\phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) \quad D \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) - \Sigma_a \phi + \delta(\rho) = 0$$

- Solution de la forme :

$$\phi(x) = \frac{K_0(\kappa\rho)}{2\pi D} \quad \kappa^2 = \frac{\Sigma_a}{D} \quad M^2 = \frac{1}{\kappa^2} = \frac{D}{\Sigma_a}$$

K_0 fonction de Bessel

- Utile : $\delta(\rho) = \frac{1}{2\pi} \Delta(\ln \rho)$

Noyaux de l'équation

- Source ponctuelle, plane infinie, linéaire infinie :

$$\phi(r) = S_0 \frac{e^{-\kappa r}}{4\pi D r} \quad \phi(x) = S_0 \frac{e^{-\kappa x}}{2\kappa D} \quad \phi(x) = S_0 \frac{K_0(\kappa \rho)}{2\pi D}$$

(S_0 en n/s)

(S_0 en n/cm²/s)

(S_0 en n/cm/s)

- **Longueur caractéristique d'atténuation :**

$$L = \frac{1}{\kappa} = \sqrt{\frac{D}{\Sigma_a}} \quad L^2 = \frac{\overline{r^2}}{6}$$

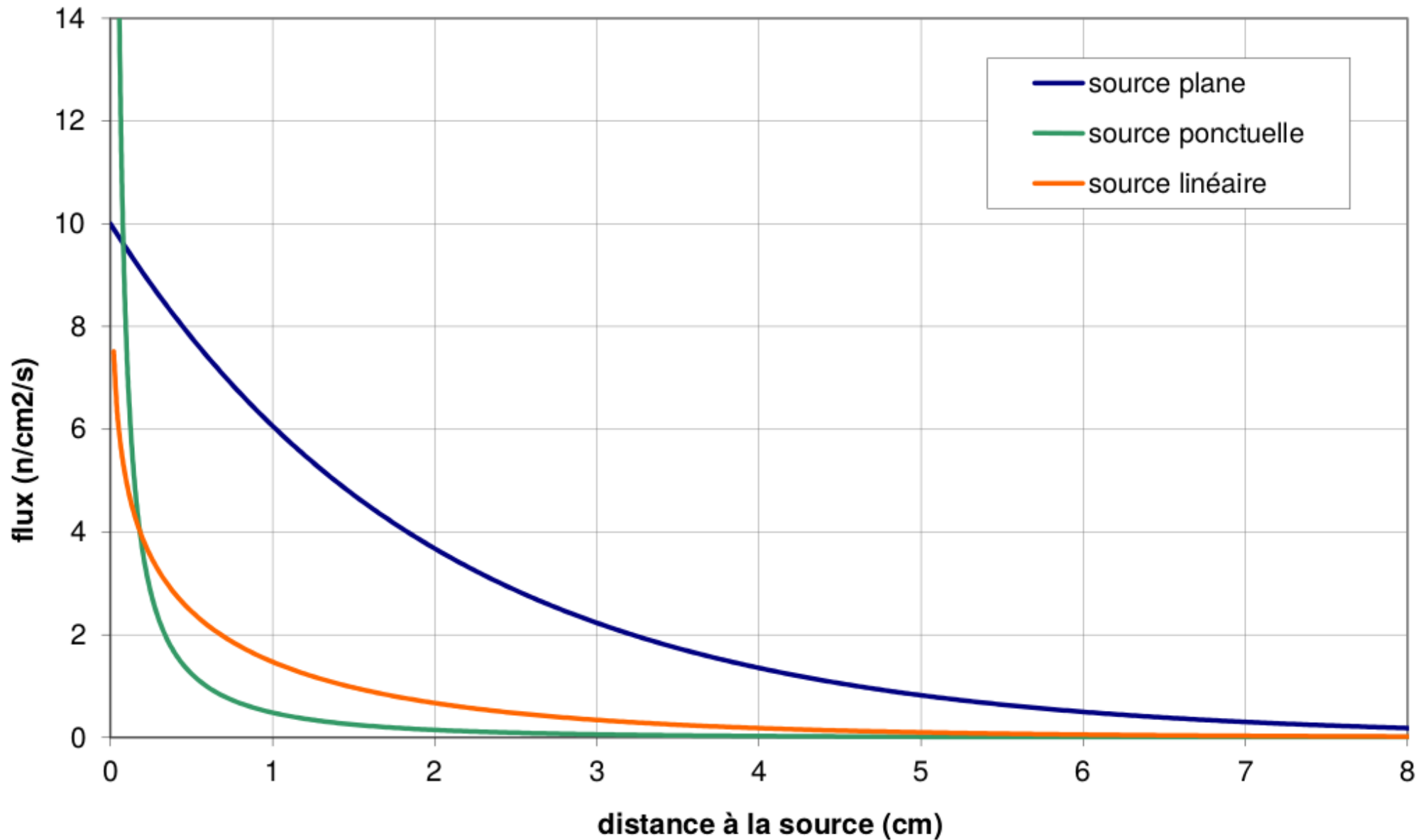
on montre que L est le 1/6^e de la **distance quadratique moyenne** parcourue par les neutrons avant absorption.

- Le noyau ponctuel permet, par **superposition**, de calculer le flux dû à une **source quelconque** en milieu infini :

$$\phi(\mathbf{r}) = \iiint S(\mathbf{r}') \frac{1}{4\pi D} \frac{e^{-\kappa \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d^3 r'$$

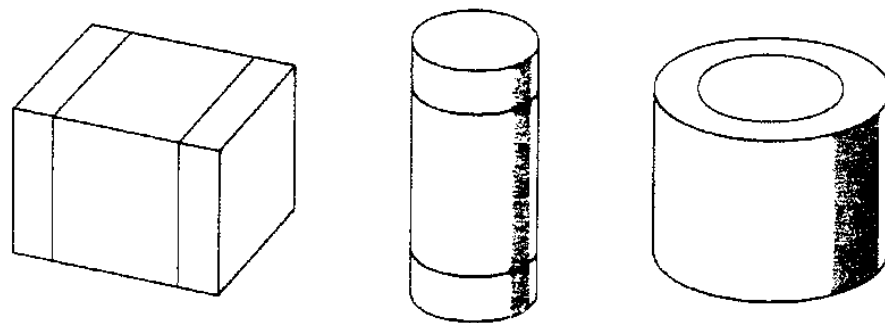
Noyaux de l'équation

Flux en milieu infini du à une source unitaire localisée



Systemes finis : solutions analytiques

- Réacteurs réels **finis hétérogènes**: résolution analytique complexe
 - Problèmes **symétriques** à 1 variable spatiale : 1 éq. 2nd ordre
 - Solution analytique dans chaque zone homogène :
 - 1 solution particulière** avec 2nd membre (source)
 - + combinaison linéaire de **2 solutions g^{ales}** sans 2nd membre
 - Constantes obtenues par les **conditions aux limites**
 - Problèmes **2D et 3D** : équations aux dérivées partielles
 - **Factorisation du flux** si possible : $\phi(\mathbf{r}) = f(x) \times g(y) \times h(z)$



- Sinon, approche numérique : discrétisation du volume...

Solutions stationnaires (sources de fission)

- **Sources : réactions de fission**

$$S = \bar{\nu}\Sigma_f\phi \quad D\Delta\phi - \Sigma_a\phi + S = 0$$

$$D\Delta\phi - (\Sigma_a - \bar{\nu}\Sigma_f)\phi = 0$$

- On pose :

$$\chi^2 = \frac{\bar{\nu}\Sigma_f - \Sigma_a}{D} = \frac{k_\infty - 1}{M^2} \quad M^2 = \frac{D}{\Sigma_a} \quad \text{« Aire de migration »}$$

$$\Delta\phi + \chi^2\phi = 0$$

$$\chi^2 = \frac{k_\infty - 1}{M^2} \quad \text{« Laplacien matière »}$$

- Si $k_\infty > 1$ alors $\chi^2 > 0$: milieu multiplicateur
- Si $k_\infty < 1$ alors $\chi^2 < 0$: pas de solution stationnaire
→ **condition sur les valeurs propres μ_i du laplacien !**

Piles « nues » homogènes

- **Equation générale** (source = neutrons de fission) :

$$D\Delta\phi - (\Sigma_a - \bar{\nu}\Sigma_f)\phi = 0 \quad \phi = 0 \quad \text{frontière extrapolée}$$

- **Condition d'existence** d'une solution stationnaire :

- Pile sphérique :

$$\mu_0 = \frac{\pi^2}{R^2} \quad \phi(r) = A \frac{\sin(\pi r/R)}{r}$$

- Pile cylindrique :

$$\mu_0 = \frac{j^2}{R^2} + \frac{\pi^2}{H^2} \quad \phi(\rho, z) = A J_0 \left(j \frac{\rho}{R} \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{H} \right)$$

- Pile parallélépipédique :

$$\mu_0 = \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{c^2} \quad \phi(x, y, z) = A \sin \left(\pi \frac{x}{a} \right) \sin \left(\pi \frac{y}{b} \right) \sin \left(\pi \frac{z}{c} \right)$$

Solutions stationnaires : criticité

- Relation **fondamentale** entre **criticité** et condition sur la **valeur propre μ_0 de l'opérateur laplacien** (déterminé par la géométrie du réacteur) :

$$\text{Solution stationnaire si : } \mu_0 = B_g^2 = \frac{k_\infty - 1}{M^2}$$

$$k_\infty = 1 + M^2 B_g^2 > 1$$

- On remarque :

$$k_{\text{eff}} = k_\infty P_{\text{nf}} = (1 + M^2 B_g^2) P_{\text{nf}}$$

- Réacteur **critique** :

$$k_{\text{eff}} = 1 \quad P_{\text{nf}} = \frac{1}{1 + M^2 B_g^2} < 1$$

- Criticité : **relation entre la géométrie réacteur et le taux de fuite**




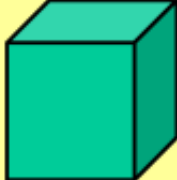
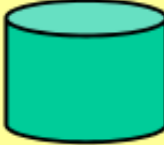
Fonctions propres 1D

$$D\Delta\phi - \Sigma_a\phi + \bar{\nu}\Sigma_f\phi = 0$$

Équation	$\bar{\nu}\Sigma_f > \Sigma_a \Rightarrow \Delta\Phi + \chi^2\Phi = 0$	$\bar{\nu}\Sigma_f < \Sigma_a \Rightarrow \Delta\Phi - \kappa^2\Phi = 0$
Géométrie plane	$\cos(\chi x)$ et $\sin(\chi x)$	$\exp(\kappa x)$ et $\exp(-\kappa x)$ $\text{ch}(\kappa x)$ et $\text{sh}(\kappa x)$
Géométrie cylindrique	$J_0(\chi\rho)$ et $Y_0(\chi\rho)$	$I_0(\kappa\rho)$ et $K_0(\kappa\rho)$
Géométrie sphérique	$\left(\frac{\sin(\chi r)}{\chi r}\right)$ et $\left(\frac{\cos(\chi r)}{\chi r}\right)$	$\left(\frac{\exp(\kappa r)}{r}\right)$ et $\left(\frac{\exp(-\kappa r)}{r}\right)$ $\left(\frac{\text{sh}(\kappa r)}{r}\right)$ et $\left(\frac{\text{ch}(\kappa r)}{r}\right)$

Solutions pour des géométries simples

Réacteurs « nus », critiques

	Forme du réacteur		B_g^2	Forme du flux
1D	Plaque infinie (épaisseur a)		$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2$	$\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)$
1D	Cylindre infini (rayon R)		$\left(\frac{v_0}{R}\right)^2$	$J_0\left(\frac{v_0 r}{R}\right)$
1D	Sphère (rayon R)		$\left(\frac{\pi}{R}\right)^2$	$\frac{1}{r} \cos\left(\frac{\pi r}{R}\right)$
3D	Parallélépipède (a, b, c)		$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{c}\right)^2$	$\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{c}\right)$
3D	Cylindre fini (rayon R, hauteur H)		$\left(\frac{v_0}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2$	$J_0\left(\frac{v_0 r}{R}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right)$

Rappels d'analyse vectorielle

Cartesian coordinates	Cylindrical coordinates	Spherical polar coordinates
Orthogonal line elements		
dx, dy, dz	$dr, r d\varphi, dz$	$dr, r d\theta, r \sin \theta d\varphi$
Components of gradient		
$(\nabla\psi)_x = \frac{\partial\psi}{\partial x}$	$(\nabla\psi)_r = \frac{\partial\psi}{\partial r}$	$(\nabla\psi)_r = \frac{\partial\psi}{\partial r}$
$(\nabla\psi)_y = \frac{\partial\psi}{\partial y}$	$(\nabla\psi)_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$	$(\nabla\psi)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}$
$(\nabla\psi)_z = \frac{\partial\psi}{\partial z}$	$(\nabla\psi)_z = \frac{\partial\psi}{\partial z}$	$(\nabla\psi)_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$
The divergence of $\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}$		
$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$
Components of curl \mathbf{A}		
$(\nabla \times \mathbf{A})_x = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right)$	$(\nabla \times \mathbf{A})_r = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right)$	$(\nabla \times \mathbf{A})_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi} \right)$
$(\nabla \times \mathbf{A})_y = \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right)$	$(\nabla \times \mathbf{A})_\varphi = \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right)$	$(\nabla \times \mathbf{A})_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r}$
$(\nabla \times \mathbf{A})_z = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$	$(\nabla \times \mathbf{A})_z = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\varphi} \right)$	$(\nabla \times \mathbf{A})_\varphi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta} \right)$
Laplacian of $\psi = \text{div grad } \psi = \nabla^2 \psi$		
$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin \theta \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial\varphi^2}$

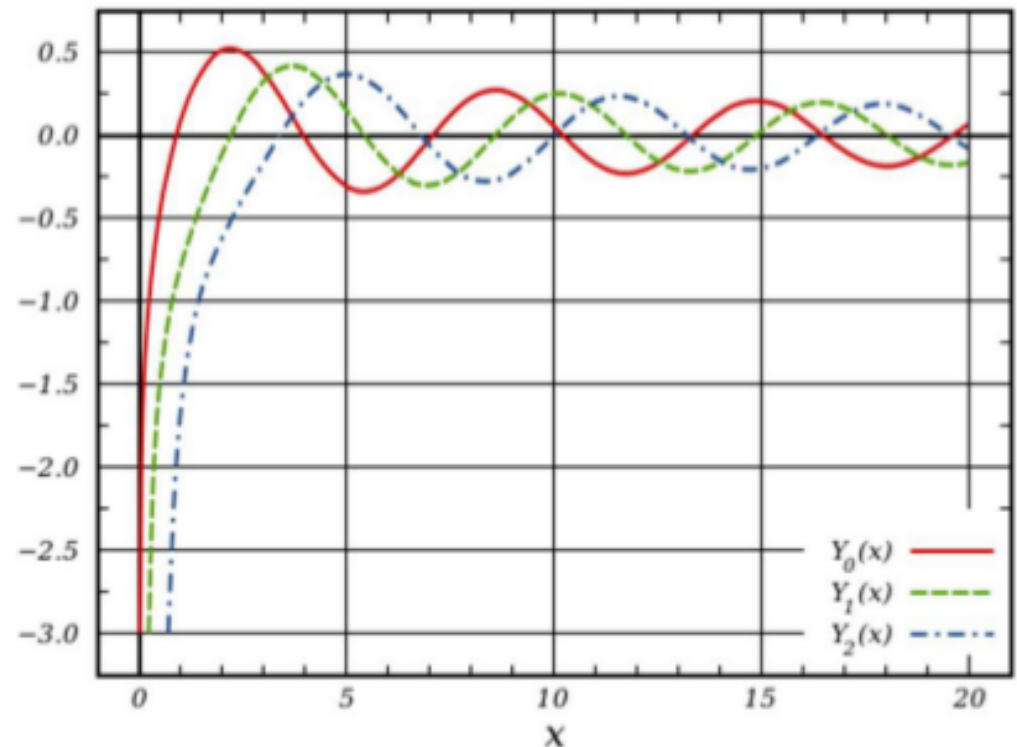
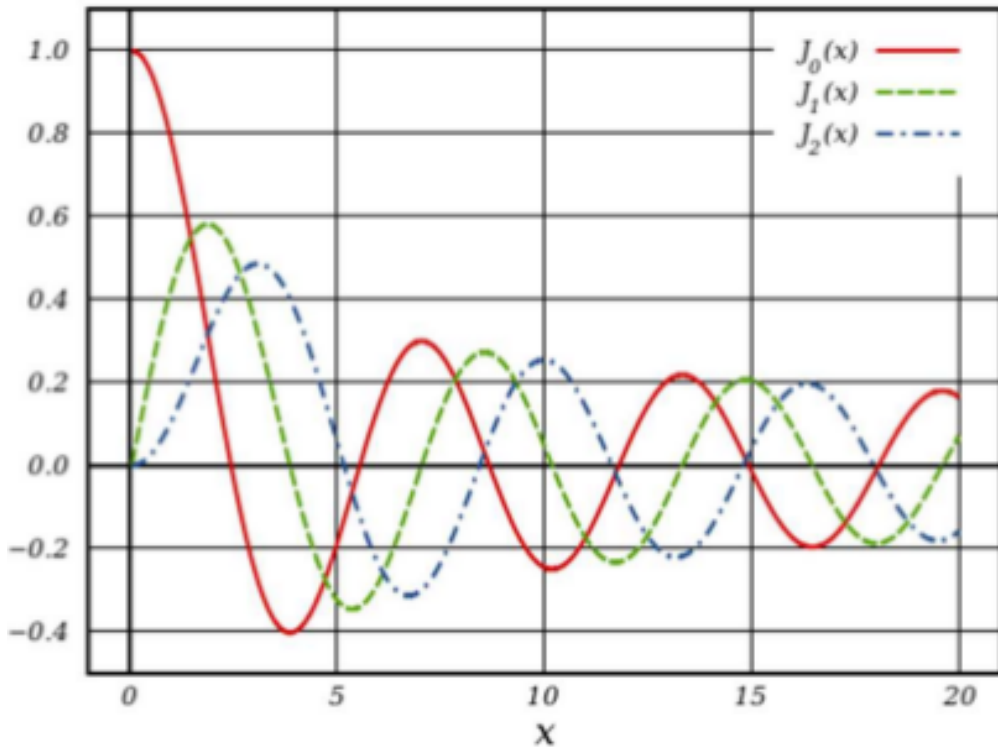
Fonctions de Bessel

/// Equation de Bessel d'ordre ν ($\nu =$ paramètre réel)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$

◆ Solutions régulières à l'origine : $J_\nu(x)$

◆ Solutions singulière à l'origine : $Y_\nu(x) = \frac{\cos \pi \nu J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi \nu}$



Fonctions de Bessel

Equation de Bessel modifiée d'ordre ν

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$

◆ Solutions régulières à l'origine : $I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(x)$

◆ Solutions singulière à l'origine : $K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \pi \nu}$

