

---

**UPMC – M2 Ingénierie pour le Nucléaire**

# **Neutronique**

## **08. – Théorie Multi-groupe**

---

Laurent Le Guillou  
UPMC / LPNHE

llg@lpnhe.in2p3.fr

# Plan général du cours

---

1. – Introduction générale, rappels
2. – Cinétique ponctuelle des réacteurs (*équations de Nordheim*)
3. – Ralentissement des neutrons
4. – Absorption résonante
5. – Thermalisation des neutrons
6. – Transport des neutrons : équation de Boltzmann
7. – Diffusion des neutrons
8. – Théorie multi-groupe
9. – Evolution du combustible (*équations de Bateman*)
10. – Effets de température

# Plan

---

- Bilan neutronique, loi de Fick, théorie à 1 groupe (rappels)
- Conditions aux limites, aux interfaces (rappels)
- 
- Valeurs propres et fonctions propres du laplacien
- Condition critique en milieu multiplicateur

# Approximation de la diffusion : loi de Fick

---

- **Transport des neutrons** décrit par la loi de Fick :

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = -D(\mathbf{r}) \mathbf{grad} \phi(\mathbf{r}, t) \quad D(\mathbf{r}) = \frac{1}{3\Sigma_t(\mathbf{r})} = \frac{\lambda(\mathbf{r})}{3}$$

- L'équation devient (neutrons monocinétiques) :

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \text{div} [D(\mathbf{r}) \mathbf{grad} \phi(\mathbf{r}, t)] - \Sigma_a(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}, t) + S(\mathbf{r}, t)$$

- Dans un **milieu homogène** :  $D(\mathbf{r}) = D$

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D\Delta\phi(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}, t) + S(\mathbf{r}, t)$$

- Hypothèse : **neutrons monocinétiques**

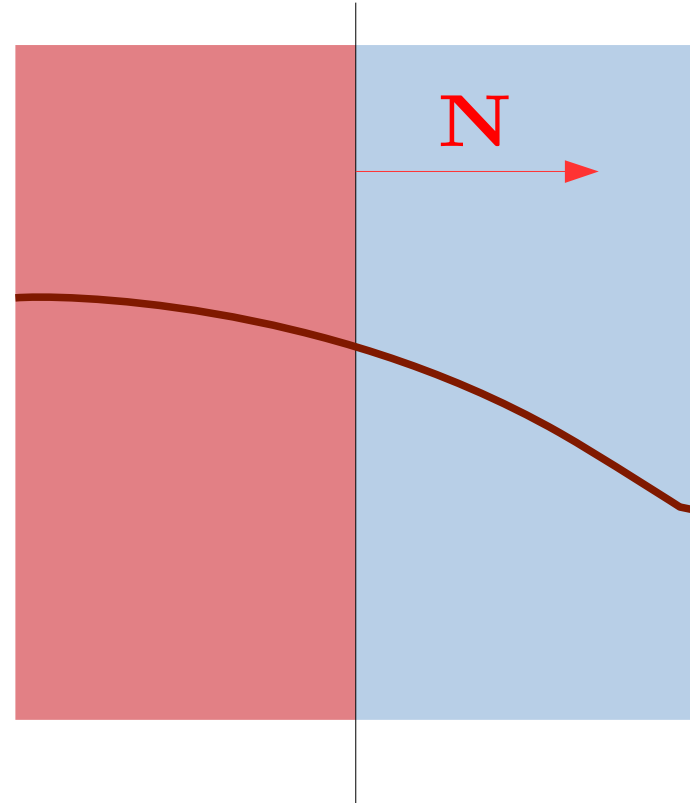
→ ***théorie de la diffusion à 1 groupe (d'énergie)***

# Continuité aux interfaces

---

- Aux **interfaces** entre milieux : **continuité du flux et du courant**, qui peut encore s'écrire :

$$\phi \quad \text{continu}$$
$$D \frac{\partial \phi}{\partial N} \quad \text{continu}$$



# Conditions aux limites

- À la **frontière** du réacteur :  
les neutrons sortant sont perdus  
(milieu ext. « noir »)

Le **courant entrant** est nul :

$$J_-(\mathbf{r}_f) = 0$$

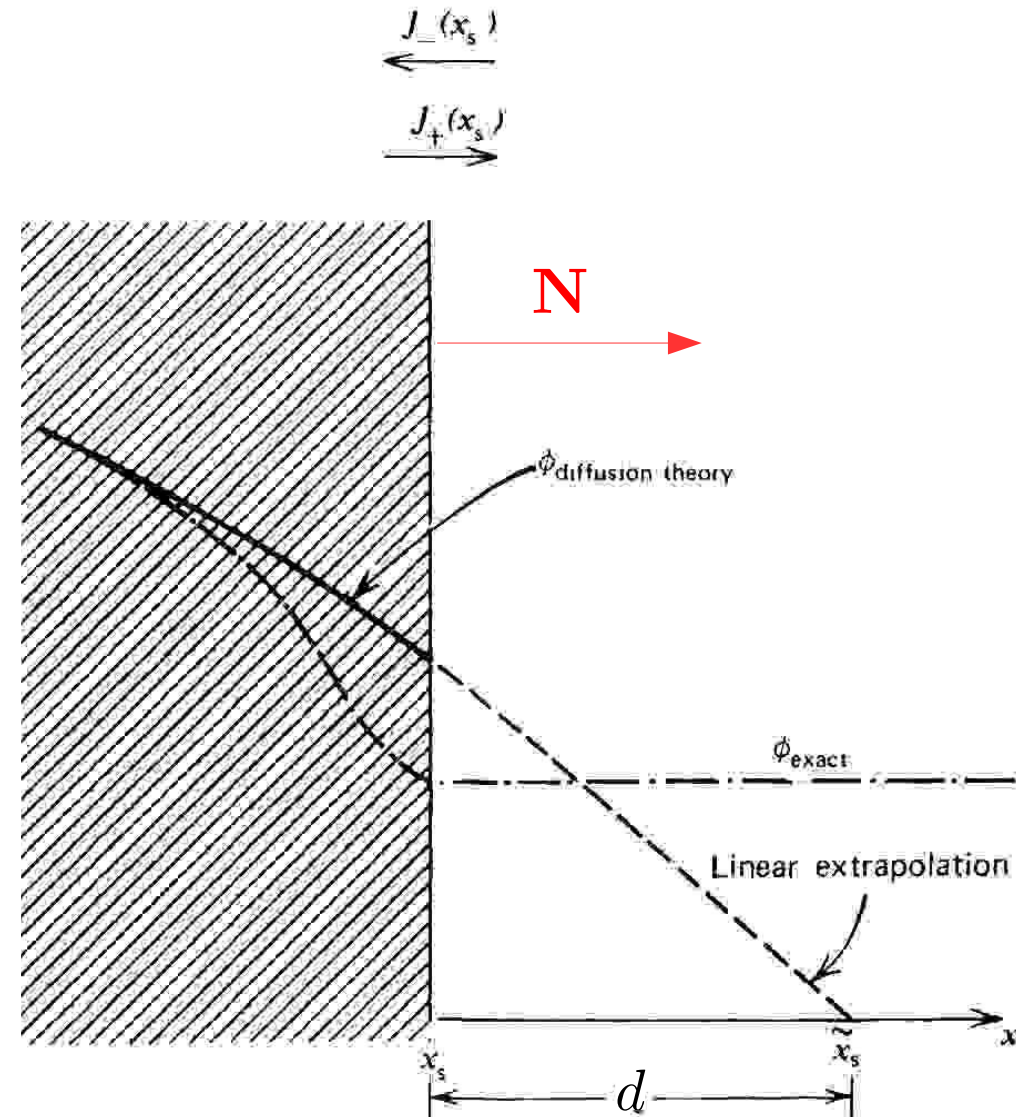
$$\frac{\phi(\mathbf{r}_f)}{4} + \frac{D}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial N} \right)_{\mathbf{r}_f} = 0$$

Le flux s'annule à la distance :

$$d \approx 2D = \frac{2}{3\Sigma_t} \quad d = \frac{0.7104}{\Sigma_t}$$

- Concept de « **surface extrapolée** » :

Le flux y est considéré comme nul : à quelques cm de la surf. réelle



# Solutions stationnaires (sources de fission)

---

- **Sources : réactions de fission**

$$S = \bar{\nu}\Sigma_f\phi \quad D\Delta\phi - \Sigma_a\phi + S = 0$$

$$D\Delta\phi - (\Sigma_a - \bar{\nu}\Sigma_f)\phi = 0$$

- On pose :

$$\chi^2 = \frac{\bar{\nu}\Sigma_f - \Sigma_a}{D} = \frac{k_\infty - 1}{M^2} \quad M^2 = \frac{D}{\Sigma_a} \quad \text{« Aire de migration »}$$

$$\Delta\phi + \chi^2\phi = 0$$

$$\chi^2 = \frac{k_\infty - 1}{M^2} \quad \text{« Laplacien matière »}$$

- Si  $k_\infty > 1$  alors  $\chi^2 > 0$  : milieu multiplicateur
- Si  $k_\infty < 1$  alors  $\chi^2 < 0$  : pas de solution stationnaire  
→ **condition sur les valeurs propres  $\mu_i$  du laplacien !**

# Piles « nues » homogènes

---

- **Equation générale** (source = neutrons de fission) :

$$D\Delta\phi - (\Sigma_a - \bar{\nu}\Sigma_f)\phi = 0 \quad \phi = 0 \quad \text{frontière extrapolée}$$

- **Condition d'existence** d'une solution stationnaire :

- Pile sphérique :  $\mu_0 = \frac{\pi^2}{R^2} \quad \phi(r) = A \frac{\sin(\pi r/R)}{r}$

- Pile cylindrique :  $\mu_0 = \frac{j^2}{R^2} + \frac{\pi^2}{H^2} \quad \phi(\rho, z) = AJ_0\left(j \frac{\rho}{R}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{H}\right)$

- Pile parallélépipédique :

$$\mu_0 = \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{c^2} \quad \phi(x, y, z) = A \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(\pi \frac{y}{b}\right) \sin\left(\pi \frac{z}{c}\right)$$



# Solutions stationnaires : criticité

---

- Relation **fondamentale** entre **criticité** et condition sur la **valeur propre  $\mu_0$  de l'opérateur laplacien** (déterminé par la géométrie du réacteur) :

$$\text{Solution stationnaire si : } \mu_0 = B_g^2 = \frac{k_\infty - 1}{M^2}$$

$$k_\infty = 1 + M^2 B_g^2 > 1$$

- On remarque :

$$k_{\text{eff}} = k_\infty P_{\text{nf}} = (1 + M^2 B_g^2) P_{\text{nf}}$$

- Réacteur **critique** :

$$k_{\text{eff}} = 1 \quad P_{\text{nf}} = \frac{1}{1 + M^2 B_g^2} < 1$$

- Criticité : **relation entre la géométrie réacteur et le taux de fuite**




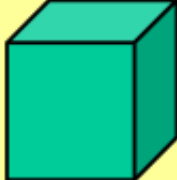
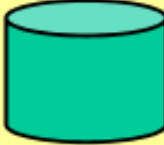
# Fonctions propres 1D

$$D\Delta\phi - \Sigma_a\phi + \bar{\nu}\Sigma_f\phi = 0$$

Équation	$\bar{\nu}\Sigma_f > \Sigma_a \Rightarrow \Delta\Phi + \chi^2\Phi = 0$	$\bar{\nu}\Sigma_f < \Sigma_a \Rightarrow \Delta\Phi - \kappa^2\Phi = 0$
Géométrie plane	$\cos(\chi x)$ et $\sin(\chi x)$	$\exp(\kappa x)$ et $\exp(-\kappa x)$ $\text{ch}(\kappa x)$ et $\text{sh}(\kappa x)$
Géométrie cylindrique	$J_0(\chi\rho)$ et $Y_0(\chi\rho)$	$I_0(\kappa\rho)$ et $K_0(\kappa\rho)$
Géométrie sphérique	$\left(\frac{\sin(\chi r)}{\chi r}\right)$ et $\left(\frac{\cos(\chi r)}{\chi r}\right)$	$\left(\frac{\exp(\kappa r)}{r}\right)$ et $\left(\frac{\exp(-\kappa r)}{r}\right)$ $\left(\frac{\text{sh}(\kappa r)}{r}\right)$ et $\left(\frac{\text{ch}(\kappa r)}{r}\right)$

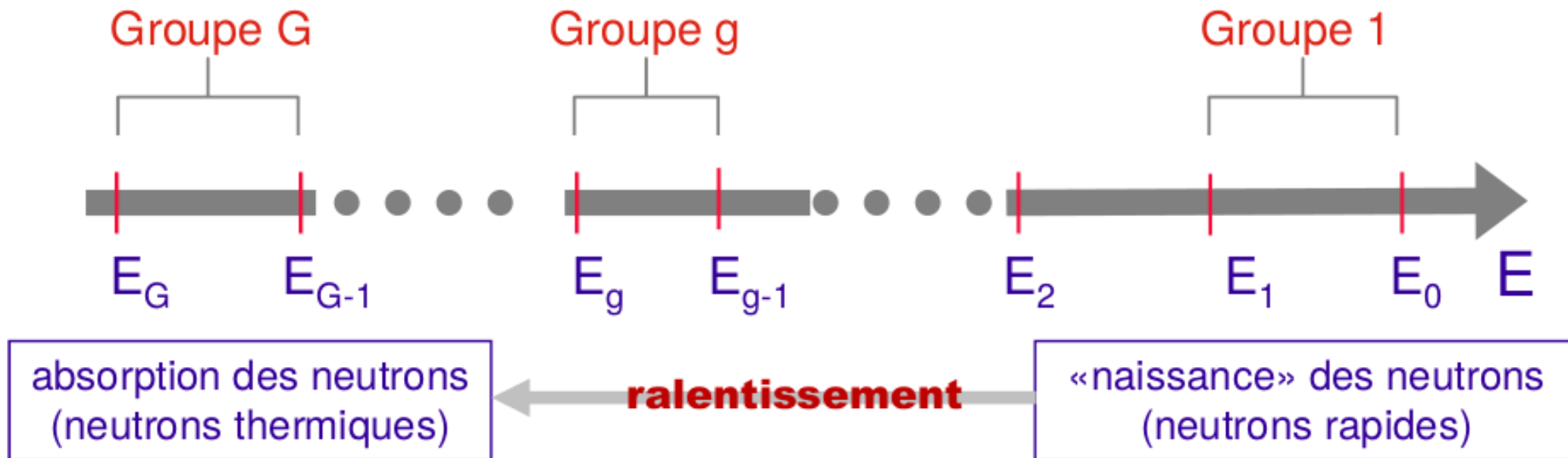
# Solutions pour des géométries simples

Réacteurs « nus », critiques

	Forme du réacteur		$B_g^2$	Forme du flux
1D	Plaque infinie (épaisseur a)		$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2$	$\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)$
1D	Cylindre infini (rayon R)		$\left(\frac{v_0}{R}\right)^2$	$J_0\left(\frac{v_0 r}{R}\right)$
1D	Sphère (rayon R)		$\left(\frac{\pi}{R}\right)^2$	$\frac{1}{r} \cos\left(\frac{\pi r}{R}\right)$
3D	Parallélépipède (a, b, c)		$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{c}\right)^2$	$\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{c}\right)$
3D	Cylindre fini (rayon R, hauteur H)		$\left(\frac{v_0}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2$	$J_0\left(\frac{v_0 r}{R}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right)$

# Description multi-groupe : principes

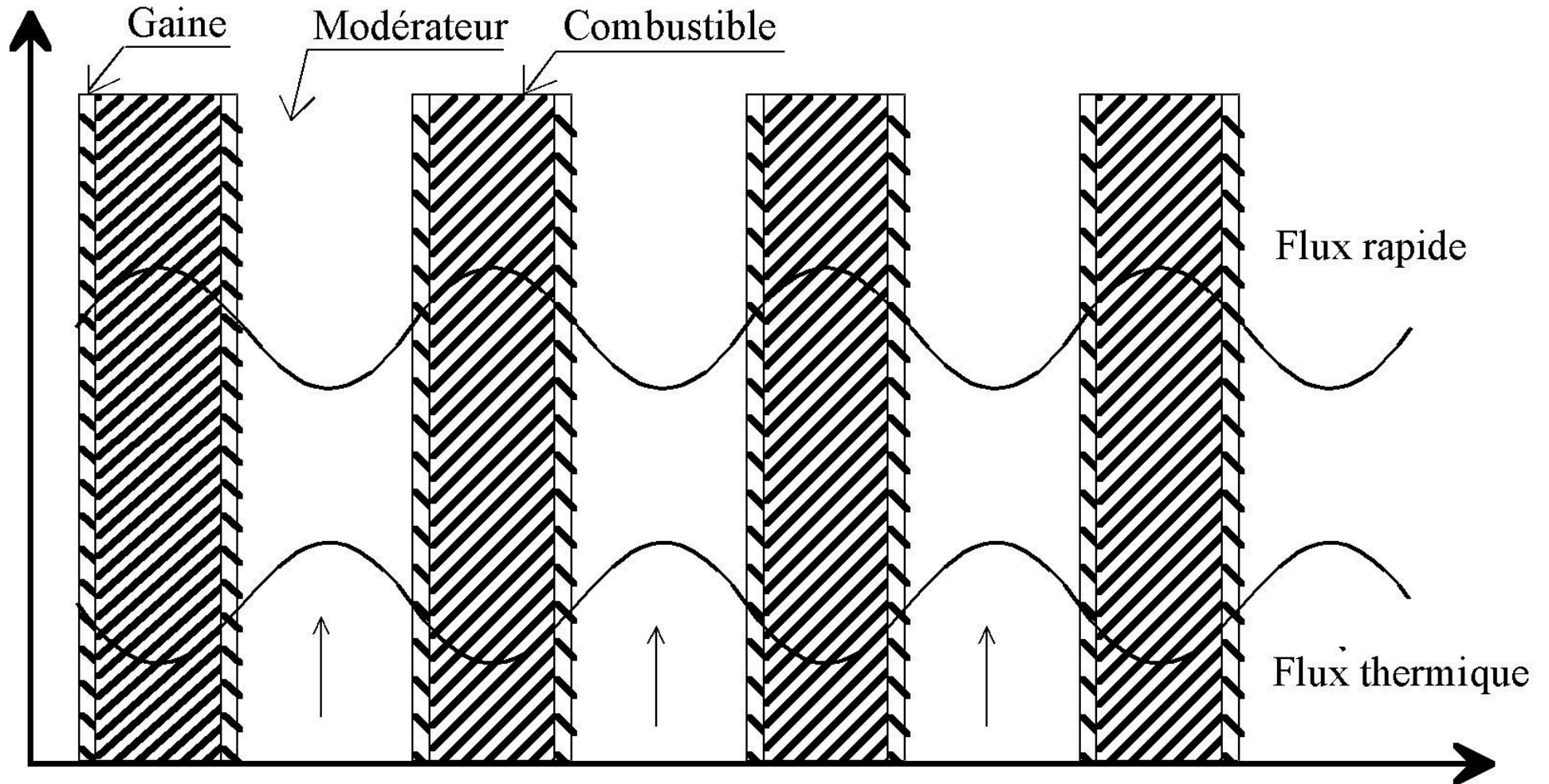
- **Différentes zones** dans un réacteur : le spectre des neutrons n'est pas le même partout (coeur/réacteur, MOX/UOX, absorbants...)
- **Discrétisation du spectre** des neutrons en « **groupes** »



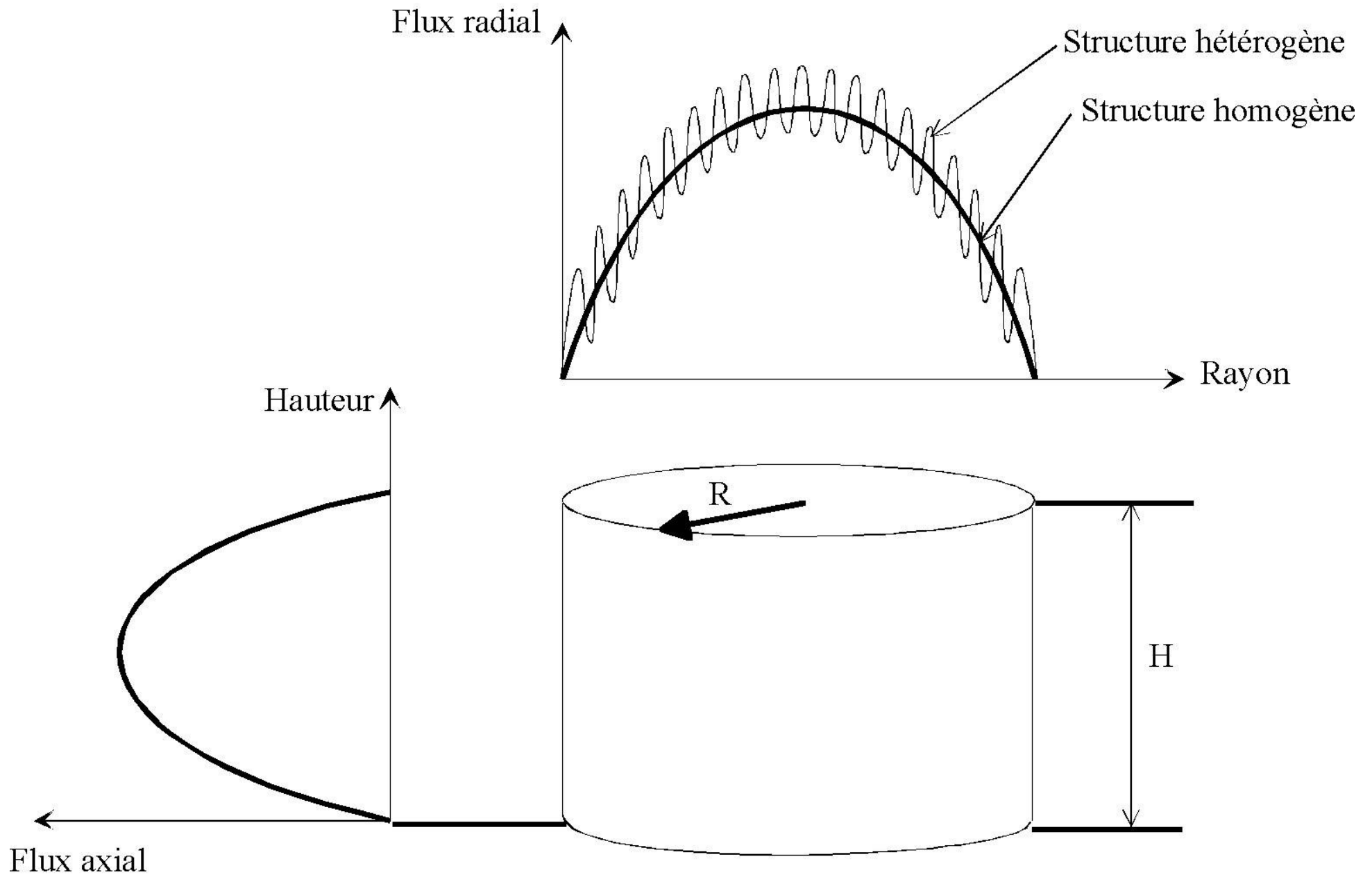
- Permet de modéliser un spectre différent selon les régions spatiales du réacteur.

# Description multi-groupe : principes

---



# Hétérogène / homogène



# Description multi-groupe : principes

---

- **Flux moyen** dans chaque groupe d'énergie :

$$\phi_g(\mathbf{r}) = \int_{E_g}^{E_{g-1}} \phi(\mathbf{r}, E) dE$$

- **Sections efficaces moyennées** sur l'intervalle d'énergie (en pratique, estimées via un flux de pondération réaliste) :

$$\sigma_g(\mathbf{r}) = \frac{\int_{E_g}^{E_{g-1}} \sigma(E) \phi(\mathbf{r}, E) dE}{\int_{E_g}^{E_{g-1}} \phi(\mathbf{r}, E) dE}$$

- **Ralentissement : probabilités de transfert** d'un groupe à l'autre :

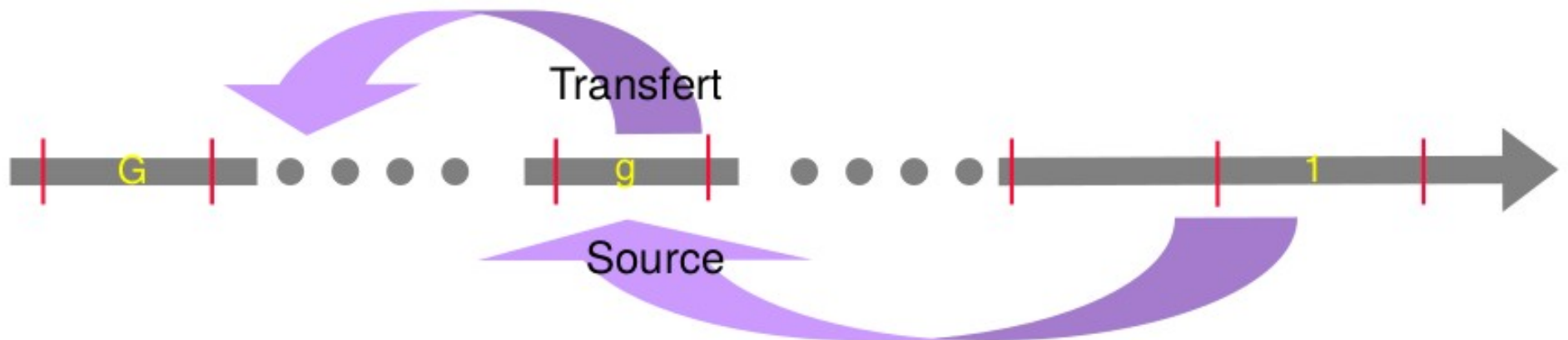
$$\sigma_{h \rightarrow g} = \sigma_h P_{h \rightarrow g} = \frac{\int_{E_h}^{E_{h-1}} \sigma_s(E') \phi(E') dE' \int_{E_g}^{E_{g-1}} P(E' \rightarrow E) dE}{\int_{E_h}^{E_{h-1}} \phi(E') dE'}$$

→ Matrice de transfert entre groupes

# Description multi-groupe : principes

---

- Chaque groupe d'énergie est considéré comme **monocinétique** :
  - **Sections efficaces, paramètres** moyennés sur l'intervalle
- Ralentissement décrit par un **terme de transfert inter-groupes**
- Obtention de  $1...G$  **équations différentielles couplées** :
  - Résolution de proche en proche, en commençant par le groupe d'énergie la plus élevée (l'éthargie la plus basse).

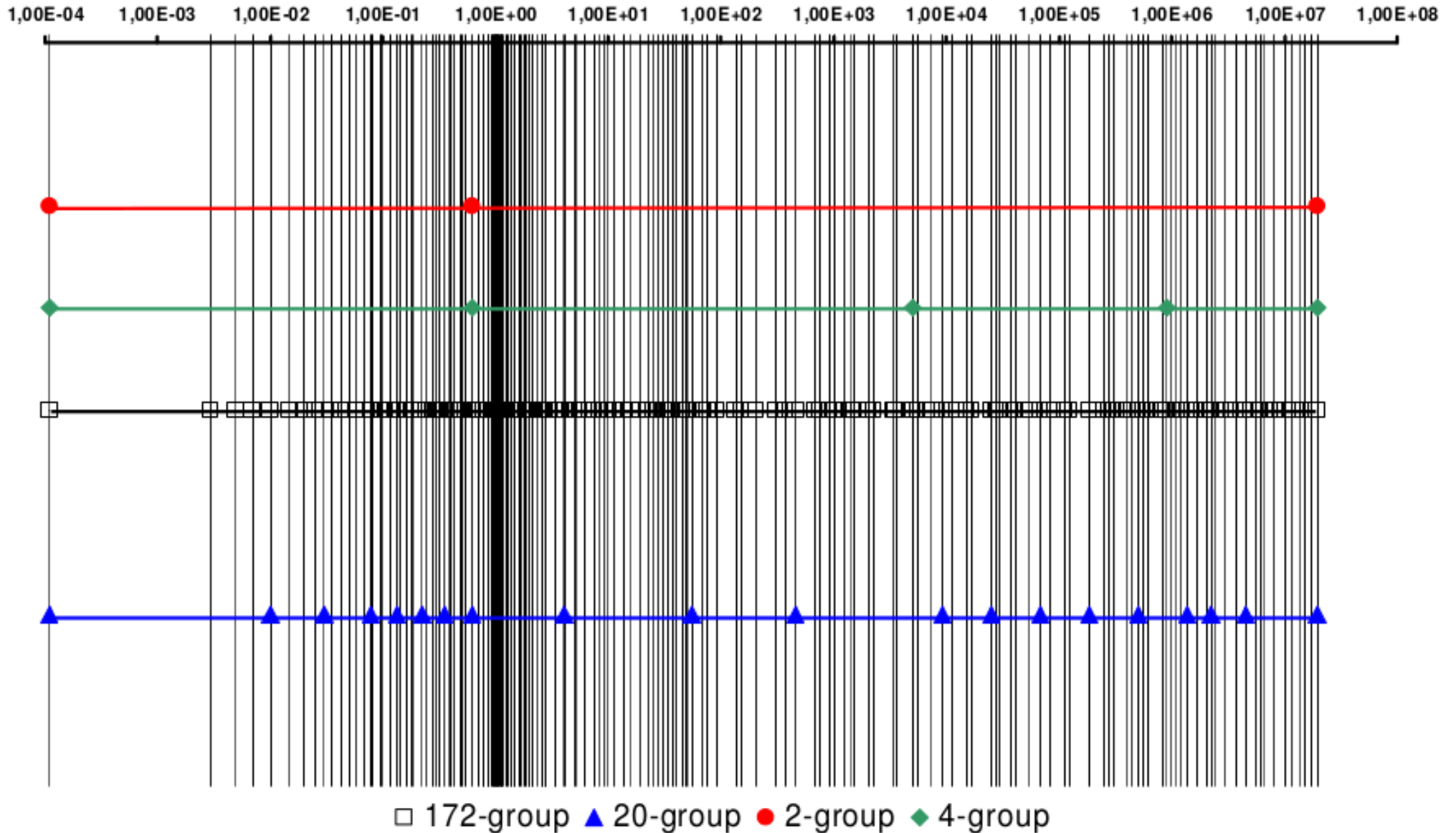




# Description multi-groupe : exemples

---

Multigroup energy meshes



# Description multi-groupe : principes

---

- Equations dans l'**approximation de la diffusion, stationnaire** :

$$\Delta(D_g \phi_g(\mathbf{r})) - \Sigma_{a,g}(\mathbf{r}) \phi_g(\mathbf{r}) - \sum_h \Sigma_s(g \rightarrow h, \mathbf{r}) \phi_g(\mathbf{r}) + \sum_h \Sigma_s(h \rightarrow g, \mathbf{r}) \phi_h(\mathbf{r}) + \chi_g \sum_h \nu \Sigma_{f,h}(\mathbf{r}) \phi_h(\mathbf{r}) = 0$$

- Termes de **ralentissement** : **transfert** de neutrons depuis et vers le groupe  $g$  :

$$- \sum_h \Sigma_s(g \rightarrow h, \mathbf{r}) \phi_g(\mathbf{r}) + \sum_h \Sigma_s(h \rightarrow g, \mathbf{r}) \phi_h(\mathbf{r})$$

Neutrons produits dans le groupe  $g$  par **fissions** induites par des neutrons d'autres groupes  $h$  :

$$\chi_g \sum_h \nu \Sigma_{f,h}(\mathbf{r}) \phi_h(\mathbf{r})$$

$\chi_g$  spectre des neutrons produits par fission :

$$\chi_g = \int_{E_g}^{E_{g-1}} \chi(E) dE \quad \sum_g \chi_g = 1$$

# Exemple simple : théorie à 2 groupes

---

- Groupe des **neutrons rapides et épithermiques** :

$$D_1 \Delta \phi_1 - \Sigma_{a,1} \phi_1 - \Sigma_{1 \rightarrow 2} \phi_1 + \nu \Sigma_{f,1} \phi_1 + \nu \Sigma_{f,2} \phi_2 = 0$$

- Groupe des **neutrons thermiques** :

$$D_2 \Delta \phi_2 - \Sigma_{a,2} \phi_2 + \Sigma_{1 \rightarrow 2} \phi_1 = 0$$

- Pas de remontée en énergie.
- Tous les neutrons de fission sont rapides :  $\chi_1 = 1$   $\chi_2 = 0$

- **Facteurs identifiables** :

$$\varepsilon \nu \Sigma_{f,2} \phi_2 = \nu \Sigma_{f,1} \phi_1 + \nu \Sigma_{f,2} \phi_2$$

$$p \approx \Sigma_{1 \rightarrow 2} / (\Sigma_{a,1} + \Sigma_{1 \rightarrow 2})$$

$$\eta f = \nu \Sigma_{f,2} / \Sigma_{a,2}$$

# Approche multi-groupe : pile réfléchie

