Pendule-correction

September 28, 2022

1 Pendule

On considère un pendule de masse m, longueur l qui oscille dans le champ de gravité g entre $\pm\theta_0$.

Pour les applications numérique, on prendre $m = 100$ g, $l = 1$ m et $g = 9.806$ m/s^2

1.1 Formule de Borda

1. Dans la limite des petites oscillations, la periode du pendule est donnée par $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Calculez numériquement T_0

La formule de Borda nous dit que, à l'ordre 2 :

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{\theta^2}{16}$$

2. Tracez la formule de Borda pour θ_0 entre 0 et $\pi/2$

1.2 Calcul numérique

1. Dans le cas général, on peut démontrer que la pédiode du pendule est donnée par:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$$

   où $k = \sin\frac{\theta_0}{2}$. Calculez T pour $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$. On utilisera la fonction `quad` du package scipy.integrate

2. Tracez avec des points la valeurs de $T(\theta)/T_0$ pour une dizaine de points entre 0 et $\pi/2$.
3. Tracez la formule de Borda sur le même graphe pour comparer. Tracez l'erreur relative en fonction de θ_0.
4. Vérifiez numériquement le coefficient $\frac{1}{16}$ de la formule de Borda.

1.3 Analyse de données

Vous venez de faires des mesures de la période du pendule pour différents angles. Pour cela, vous avez mesuré à l'aide d'un chronomètre la durée totale de N oscillations. Voici les résultats des mesures:

(°)	N	T(s)
10	20	37.70
20	15	28.28
30	15	28.46
40	20	38.71
50	25	49.50
15	20	37.64

1. Rentrez ces données dans un tableur (e.g. libre office), sauvegardez les dans un fichier csv et impotez les données avec Python.
2. Tracez la periode en fonction de θ_0
3. On estime que l'intertitude de l'expérimentateur dans la mesure de T est de 200 ms. Tracez les points avec des barres d'erreurs
4. Ajustez les données par la fonction $T(\theta) = T_0(1 + \beta\theta^2)$.
   - Tracez les données avec l'ajustement,
   - Quelle est la longueur du pendule,
   - Son incertitude ?

[1]:
```
# On commence par tous les import
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import quad
from scipy.optimize import curve_fit
```

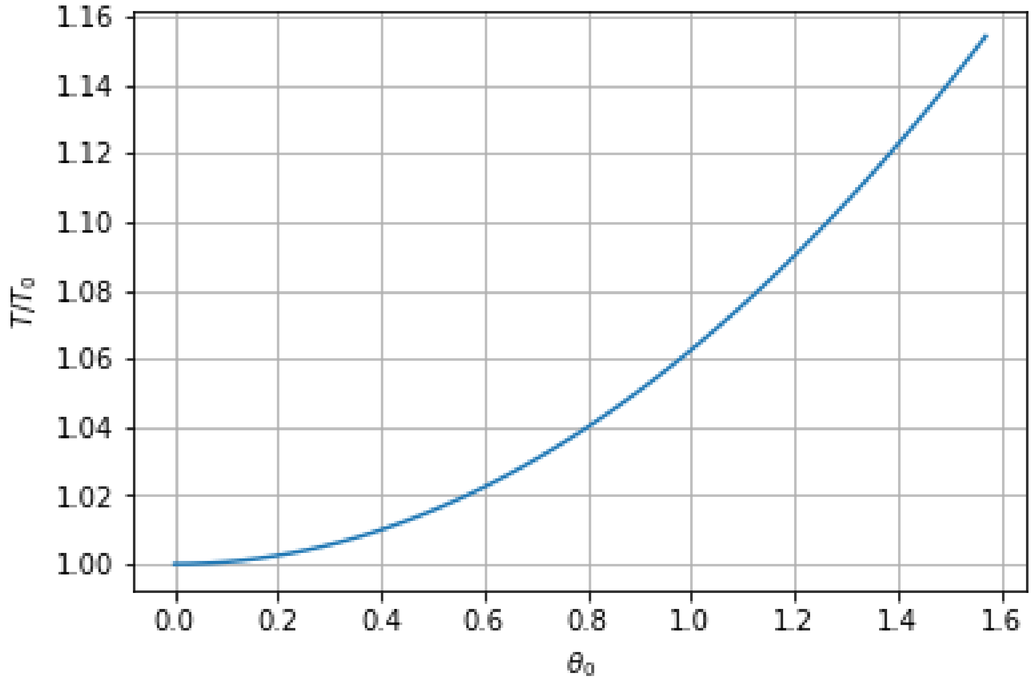
[2]:
```
# On commence par écrire toutes les constantes. Par défaut, on utilise les␣
↪unités SI
m = 0.1
l = 0.7
g = 9.806
```

[3]:
```
T_0 = 2*np.pi*np.sqrt(l/g)
print(T_0)
# Pour afficher juste 3 chiffres
print('T_0 = {:.3f} s'.format(T_0))
```

```
1.678738087582152
T_0 = 1.679 s
```

[4]:
```
def borda(theta_0):
    return 1 + theta_0**2/16

theta_plot = np.linspace(0, np.pi/2)

plt.plot(theta_plot, borda(theta_plot))
plt.grid()
```

```
plt.xlabel(r'$\theta_0$')
plt.ylabel(r'$T/T_0$');
```

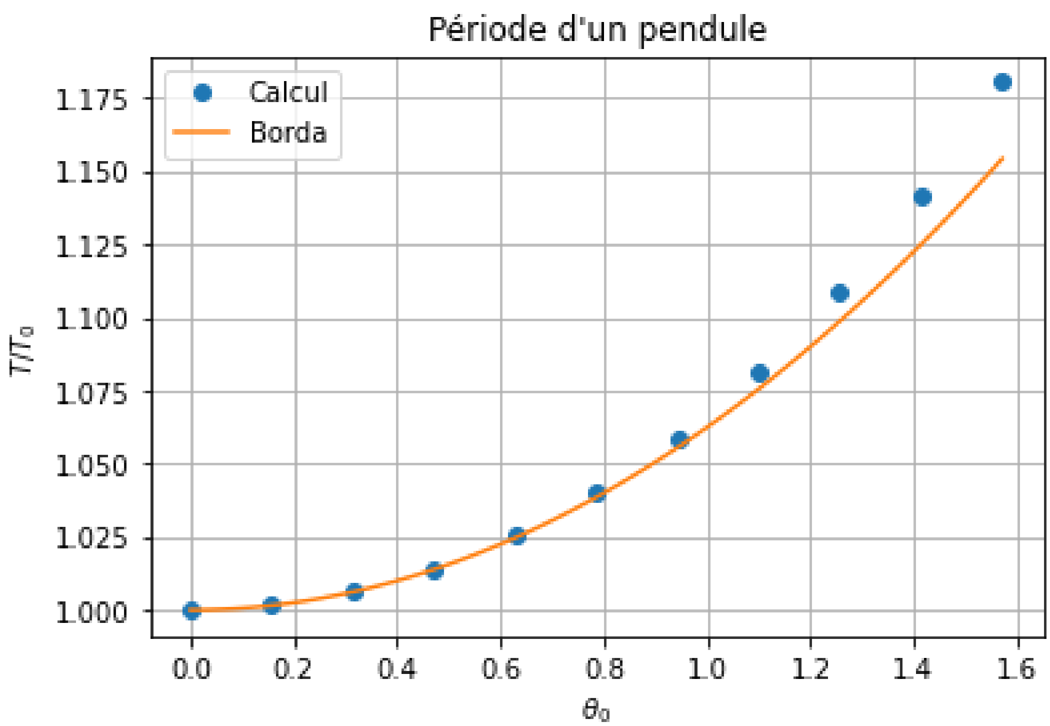


[5]:
```
def integrande(phi, theta_0):
    k = np.sin(theta_0/2)
    return 1/(np.sqrt(1-k**2*np.sin(phi)**2))

# Il faut lire la documentation ou prendre un exemple sur internet !
integral, err = quad(integrande, 0, np.pi/2, args=(np.pi/4,))

T_pi_sur_4 = T_0*2/np.pi*integral
print('Pour pi/4 : T = {:.3f} s'.format(T_pi_sur_4))
```

```
Pour pi/4 : T = 1.746 s
```

[6]:
```
# Une bonne habitude: des noms explicites
def periode_pendule(theta_0):
    integral, err = quad(integrande, 0, np.pi/2, args=(theta_0,))
    return 2/np.pi*integral


theta_0_pts = np.linspace(0, np.pi/2, 11)
periode = [periode_pendule(theta_0)
                      for theta_0 in theta_0_pts]
```

```
plt.plot(theta_0_pts, periode, 'o',
     label='Calcul')

theta_0_curve = np.linspace(0, np.pi/2, 101)
plt.plot(theta_0_curve, borda(theta_0_curve), label='Borda')
plt.title(r"Période d'un pendule")
plt.xlabel(r'$\theta_0$')
plt.ylabel(r'$T/T_0$')
plt.grid(True)
plt.legend();
```



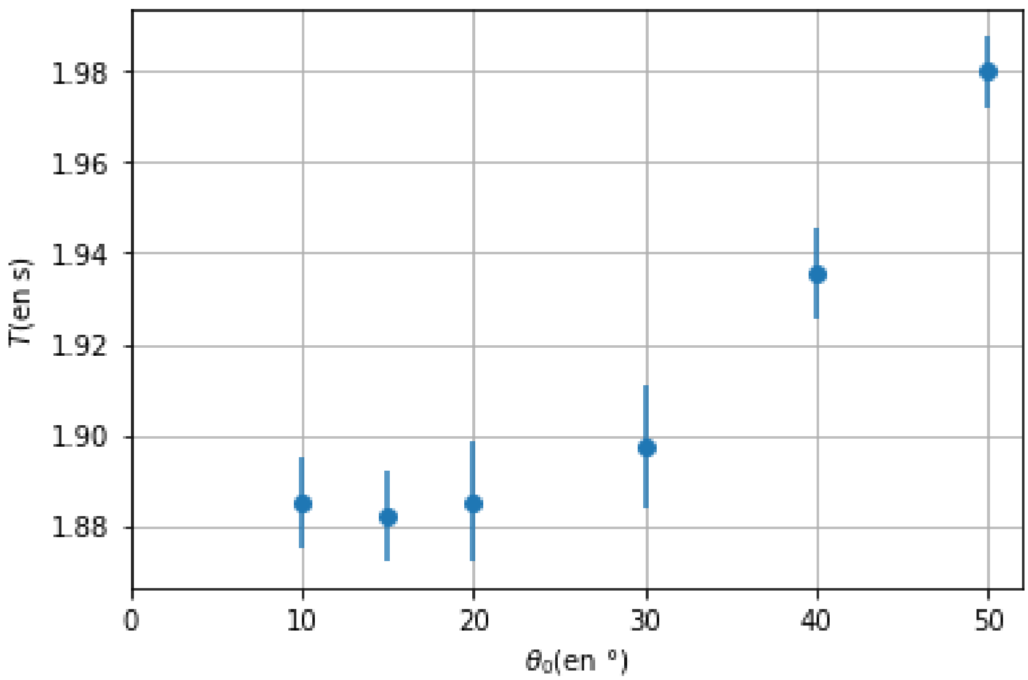
[7]:
```
theta_0 = 1E-2
print(f'Ecart à la formule de Borda pour theta_0={theta_0:.2f} :',␣
 ↪(periode_pendule(theta_0)-1)/theta_0**2 - 1/16)
```

```
Ecart à la formule de Borda pour theta_0=0.01 : 3.580756455789924e-07
```

[8]:
```
theta_in_deg, N, Ttot = np.loadtxt('data.csv', unpack=True)
# Si le fichier contient des ',' comme séparateur décimal
#from pandas import read_csv
#theta_in_deg, N, Ttot = read_csv('data.csv', delimiter=' ',
#              decimal='.', header=None).to_numpy().transpose()
```

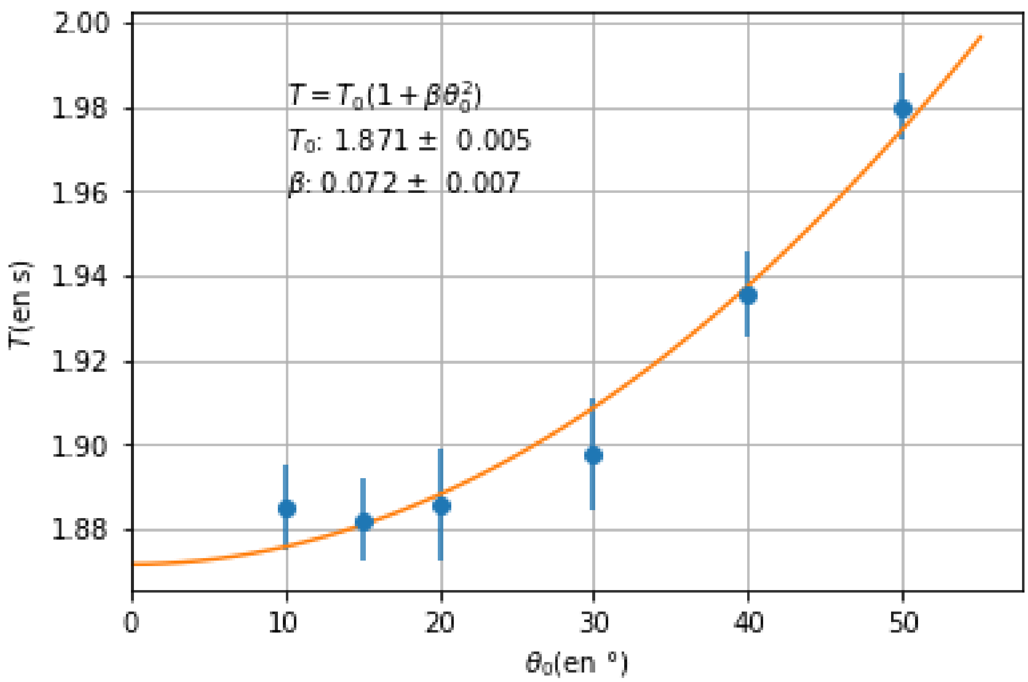
```
theta_in_rad = theta_in_deg/180 * np.pi
T = Ttot/N
```

[9]:
```
plt.errorbar(theta_in_deg, T, yerr=0.2/N, fmt='o')
plt.xlim(0, None)
plt.grid(True)
plt.xlabel(r'$\theta_0$(en °)')
plt.ylabel(r'$T$(en s)');
```



[10]:
```
def fit_function(theta, period, beta):
    return period*(1+beta*theta**2)

popt, pcov = curve_fit(fit_function, theta_in_rad, T)

period, beta = popt

# Les points pour la courbe n'ont pas de raison d'être les mêmes
# que ceux que l'on a mesuré ou calculé
theta_for_plot = np.linspace(0, 55)

plt.errorbar(theta_in_deg, T, yerr=0.2/N, fmt='o')
plt.plot(theta_for_plot, fit_function(theta_for_plot*np.pi/180, period, beta))
```

```
plt.xlim(0, None)
plt.grid(True)
plt.xlabel(r'$\theta_0$(en °)')
plt.ylabel(r'$T$(en s)')
plt.text(10, 1.98, r'$T = T_0(1+\beta\theta_0^2)$')
plt.text(10, 1.97, r'$T_0$: {:.3f} $\pm$  {:.3f}'.format(period, np.
 ↪sqrt(pcov[0,0])))
plt.text(10, 1.96, r'$\beta$: {:.3f} $\pm$  {:.3f}'.format(beta, np.
 ↪sqrt(pcov[1,1])));
```




```
[ ]:
```