

## EXERCICES

Centre de Montrouge — Année Universitaire 2025–2026

Intervenant : L. Le Guillou (Sorbonne Université / LPNHE)

### 1<sup>ère</sup> Partie

La transformation de Galilée — L'expérience de Michelson et Morley — Les postulats d'Einstein — Les équations de Lorentz — Contraction des longueurs, dilatation du temps — Les diagrammes d'espace-temps : diagrammes de Minkowski, diagrammes de Loedel.

#### 1. Mécanique “classique” : transformation de Galilée

Un navire manœuvre dans un port, et se déplace à vitesse constante  $v = 3$  m/s parallèlement au quai.

**1.1** — Sur le quai, un enfant court à la vitesse  $u = 2$  m/s par rapport au référentiel du quai, dans le même sens que le bateau. Quelle est sa vitesse dans le référentiel du navire ?

**1.2** — Un objet tombe en chute libre du haut du grand mât ( $h = 10$  m). Décrivez sa trajectoire pour un observateur immobile sur le quai, et pour un marin de l'équipage. Où tombe-t-il ? Ecrivez et résolvez les équations du mouvement dans le référentiel du quai et dans celui du bateau (on pourra utiliser la transformation de Galilée).

**1.3** — L'enfant s'arrête sur le quai, puis lance son ballon à la verticale au dessus de lui à la vitesse  $w$  ( $w = 10$  m/s), puis le rattrape. Ecrivez et résolvez les équations du mouvement du ballon dans les deux référentiels.

#### 2. Pêche à la ligne

*On traitera ce problème en mécanique classique (relativité galiléenne).*

Un pêcheur s'adonne à son loisir favori dans sa barque, au milieu d'une rivière. Ayant fait bonne pêche, il décide de rentrer chez lui, et il remonte le courant à la rame, en ramant à la vitesse constante  $w$  par rapport à la rivière.

Passant sous un pont, il perd sans s'en rendre compte son chapeau, qui tombe à l'eau, et est emporté par le courant.

Le pêcheur réalise la perte de son chapeau au bout de 30 minutes. Il décide alors de redescendre la rivière et, en ramant toujours à la même vitesse  $w$  par rapport au courant, il parvient à rattraper son chapeau 5 km en aval du pont.

Quelle est la vitesse du courant (par rapport aux berges) ?

### 3. L'expérience de Michelson et Morley

Une source lumineuse est placée à une distance  $L$  d'un miroir et émet un rayon lumineux dans sa direction. Le rayon est réfléchi et revient vers la source.

**3.1** — Quel est le temps mis par la lumière pour effectuer l'aller-retour entre la source et le miroir ?

La source et le miroir sont maintenant en translation rectiligne et uniforme dans une direction perpendiculaire à l'axe source-miroir et avec une vitesse  $v$ .

**3.2** — Représenter graphiquement la situation telle que la voit un observateur immobile. Pour cet observateur, compte-tenu de ce qu'il observe, quel est le temps  $T_{\perp}$  mis par le rayon lumineux pour faire l'aller-retour entre la source et le miroir ?

**3.3** — Répondre à la même question dans le cas où le déplacement se fait dans la direction source-miroir, si cette distance vaut  $L'$ . On nomme la durée trouvée  $T_{\parallel}$ .

**3.4** — On suppose pour cette question que  $L = L'$ . Comparer  $T_{\perp}$  et  $T_{\parallel}$ . Commenter ce résultat en faisant le lien avec l'expérience de Michelson et Morley.

**3.5** — On suppose maintenant que  $L \neq L'$ . Quelle devrait être la valeur de  $L'$  pour que la condition  $T_{\perp} = T_{\parallel}$  soit vérifiée ?

### 4. Invariance de l'intervalle d'espace-temps

**4.1** — Montrez que la transformation de Lorentz entraîne l'invariance de l'intervalle élémentaire d'espace-temps  $ds^2$  :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (1)$$

**4.2** — Si  $d\mathbf{r}$  est l'élément d'espace parcouru par un objet matériel pendant la durée  $dt$ , montrez que la pseudo-norme carrée de l'intervalle élémentaire d'espace-temps  $ds^2$  peut aussi s'écrire :  $ds^2 = c^2 d\tau^2$ , où  $\tau$  est le temps propre de l'objet en question. Déduisez-en que l'intervalle de temps propre est aussi un invariant de Lorentz.

### 5. Conséquences de la transformation de Lorentz

On considère un référentiel  $\mathcal{R}$ , inertiel, et un second référentiel  $\mathcal{R}'$ , en translation uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$  à la vitesse  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ . On choisit dans chaque référentiel une origine ( $O$  et  $O'$ , respectivement), et on munit les deux référentiels d'axes orthonormés  $(Ox, Oy, Oz)$  et  $(O'x', O'y', O'z')$  orientés de la même manière, et de telle façon que le mouvement relatif des deux référentiels soit selon  $Ox$  et  $O'x'$  :  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = v \mathbf{e}_x$ .

Enfin, on choisira l'origine des temps dans les deux référentiels de telle sorte que lorsque les origines  $O$  et  $O'$  se confondent, on a  $t = t' = 0$ .

**5.1** — Écrivez les équations de la transformation de Lorentz qui permettent de passer des coordonnées d'un événement  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  aux coordonnées du même événement  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ . De même, écrivez les équations de la transformation inverse. Vérifiez qu'en appliquant successivement ces deux transformations, on obtient bien l'identité.

**5.2** — Supposons que deux événements successifs  $A$  et  $B$  se produisent au même point  $x'_A = x'_B$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ . Dans  $\mathcal{R}'$ , ces deux événements sont séparés par une durée  $\Delta t' = 1$  s. Que vaut la durée entre les événements  $A$  et  $B$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  ?

Faites de même pour deux événements  $C$  et  $D$  qui se produisent cette fois au même point  $x_C = x_D$  dans  $\mathcal{R}$ , séparés par 1 s dans  $\mathcal{R}$ . Commentez.

**5.3** — Imaginons deux événements  $E$  et  $F$  qui se produisent au même instant  $t$ , en deux points différents d'abscisses  $x_E$  et  $x_F$ , avec  $x_E < x_F$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Ces deux événements sont-ils aussi simultanés dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  ?

Qu'en est-il dans un référentiel  $\mathcal{R}''$  qui se déplace à la vitesse  $(-v)$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  ? Commentez.

**5.4** — Considérons un objet de longueur  $\ell$  au repos dans  $\mathcal{R}$ . La mesure de sa longueur consiste à repérer la position des extrémités  $M$  et  $N$  de cet objet, *au même instant*, dans le référentiel où on effectue la mesure. Quelle longueur trouve-t-on dans  $\mathcal{R}$  ? Et dans  $\mathcal{R}'$  ?

Dans tout l'exercice, on pourra prendre  $v = 3c/5$  pour les applications numériques.

## 6. À la croisée des destinées : lignes d'univers et diagrammes de Minkowski

*L'objectif de cet exercice est de présenter un autre type de diagrammes d'espace-temps, parfois désignés comme "diagrammes de Minkowski". Ces diagrammes sont plus délicats à utiliser car la graduation des axes demande quelques précautions.*

Leia et Luke se déplacent avec une vitesse relative constante  $v$ . L'axe  $e_x$  des abscisses de Leia est orienté selon la vitesse de Luke, l'axe  $e_{x'}$  des abscisses de Luke étant opposé à la vitesse de Leia.

**6.1** — Tracez les lignes d'univers, c'est à dire les lignes constituées de l'ensemble des événements des vies respectives de Leia et de Luke :

- (i) sur un graphe d'espace-temps  $(x, t)$  dans le repère de Leia.
- (ii) sur un graphe d'espace-temps  $(x', t')$  dans le repère de Luke.

Luke et Leia mettent leurs montres à  $t = t' = 0$  lorsqu'ils se croisent : autrement dit,  $x = x' = 0$  quand  $t = t' = 0$ .

**6.2** — Représentez, sur le graphe  $(x, t)$ , deux événements A et B. Calculez les intervalles de coordonnées  $\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z$  entre A et B, pour Leia, en fonction des intervalles  $\Delta t', \Delta x', \Delta y', \Delta z'$  pour Luke. Calculez  $c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2$ .

**6.3** — Représentez, sur le graphe  $(x, t)$ , deux événements  $C$  et  $D$  de la vie de Luke. Calculez la valeur de l'intervalle  $\Delta t$  entre  $C$  et  $D$  pour Leia, en fonction de  $\Delta t'$ , pour Luke, et de la vitesse de celui-ci par rapport à celle-là. Pour donner une idée de l'effet en question, envisagez le cas  $v = 3c/5$ , et  $\Delta t' = 1$  s.

**6.4** — Luke tient un sabre laser tendu vers l'avant (c'est à dire selon l'axe  $e_{x'}$ ). Déterminez et représentez la ligne d'univers de la pointe du sabre de Luke sur le graphe  $(x, t)$ . Quelle définition peut adopter Leia pour la grandeur qu'elle va appeler "longueur du sabre de Luke" ? Calculez cette longueur  $\Delta \ell$  en fonction de la longueur  $\Delta \ell'$  pour Luke et de sa vitesse. Envisagez le cas  $v = 3c/5$ ,  $\Delta \ell' = 1$  m.

**6.5** — Tracez sur le graphe  $(x, t)$  :

- (i) quelques lignes d'univers du réseau  $x' = \text{cte}$  pour Luke.
- (ii) quelques lignes du réseau  $t' = \text{cte}$  pour Luke.

**6.6** — Quelles sont, sur ce graphe, les lignes qui représentent les axes  $t'$  et  $x'$  de Luke ? Soit un événement A. Représentez, sur le graphe  $(x, t)$ , ses coordonnées pour Leia et pour Luke respectivement.

**6.7** — Reste à graduer les axes  $t'$  et  $x'$  sur le graphe  $(x, t)$ .

- (i) Représentez sur le graphe la partie  $t > 0$  de l'hyperbole  $t^2 - x^2/c^2 = 1 \text{ s}^2$ . à quelle valeur de  $t$  correspond son intersection avec l'axe  $t$  ? A quelle valeur de  $t'$  correspond son intersection avec la représentation de l'axe  $t'$  ?
- (ii) Mêmes questions à propos de l'hyperbole  $x^2 - c^2 t^2 = 1 \text{ m}^2$  et de ses intersections avec les axes  $x$  et  $x'$ .

6.8 — Représentez sur le graphique :

- (i) le temps  $t$  de l'événement ( $t' = 1 \text{ s}$ ,  $x' = 0$ ) de la vie de Luke.
- (ii) la longueur  $\ell$  attribuée au sabre de Luke par Leia.

## 7. Temps de vie des muons atmosphériques

Les muons<sup>1</sup> sont des particules élémentaires instables, notées  $\mu$  : le muon  $\mu^-$ , sorte de cousin plus lourd de l'électron, et son anti-particule, l'anti-muon  $\mu^+$ . Sur Terre, ils sont essentiellement produits par l'interaction de rayons cosmiques de haute énergie avec la partie supérieure de l'atmosphère terrestre, qui, par collisions successives avec les molécules de l'air, engendrent des gerbes de particules descendantes (fig. 1). Parmi les particules produites (pions, muons, etc), ce sont principalement les muons qui atteignent le sol (les pions ont une durée de vie trop brève). Le flux de muons au niveau de la mer est approximativement de 170 muons par mètre carré et par seconde.

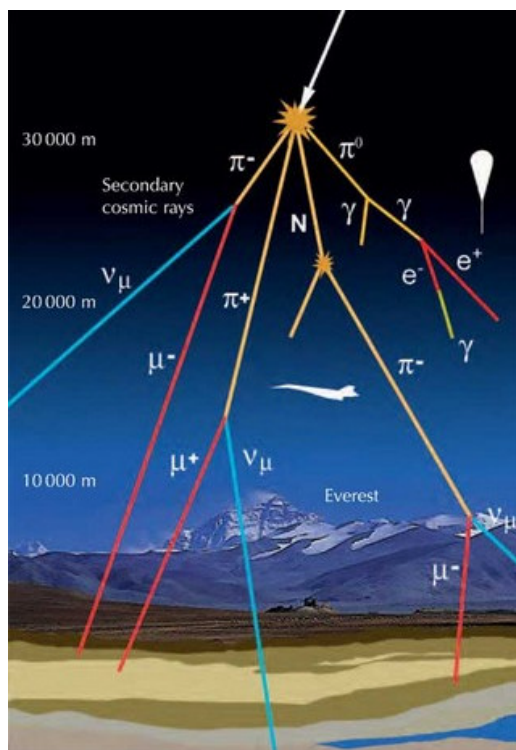
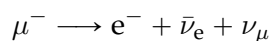


FIGURE 1 – Schéma (simplifié) d'une gerbe atmosphérique produite par un rayon cosmique de haute énergie.

Les muons sont instables et se désintègrent spontanément en un électron et deux neutrinos, selon la réaction :



1. On les a initialement appelés mu-mésos, ou encore mésotrons, avant de finalement les nommer "muons".



De même, l'anti-muon se désintègre symétriquement en un positon et deux neutrinos,

$$\mu^+ \longrightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$$

La durée de vie moyenne des muons est  $\tau = 2.2 \mu\text{s}$  au repos. Pour une population de muons donnée, le nombre de muons diminue avec le temps selon une loi exponentielle,

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}.$$

où  $N_0$  est le nombre de muons à l'instant  $t = 0$  choisi comme origine du temps. Au fur et à mesure de leur descente vers le sol, les muons des gerbes atmosphériques se désintègrent ainsi progressivement.

En 1941, Bruno Rossi (1905-1993), physicien italo-américain, et son assistant David Hall mesurent le flux de muons sur un dénivelé de 1624 m entre Echo Lake (3240 m d'altitude) et Denver (1616 m), en utilisant un dispositif de comptage à base de plaques métalliques (pour freiner les muons incidents) et de plusieurs compteurs Geiger-Müller. Ils constatent que le flux de muons ne décroît pas aussi rapidement qu'attendu lorsqu'on se rapproche du niveau de la mer [B. Rossi et D. B. Hall, *Phys. Rev.* **59**, 223 (1941)].

La mesure sera refaite en 1962, par David H. Frisch (1918-1991) et James H. Smith au moyen d'un détecteur constitué de plaques de fer (toujours pour freiner les muons, mais aussi pour sélectionner une gamme de vitesse en choisissant une certaine épaisseur de fer) et de scintillateurs "plastique" : lorsqu'un muon freiné par les plaques de fer traverse le scintillateur, un peu de lumière est émise, et cette émission est détectée au moyen d'un photomultiplicateur. Si, de plus, le muon, ralenti, se désintègre dans le détecteur, un second signal signe la présence de l'électron produit. La présence de ces deux signaux successifs confirme que la particule incidente est bien un muon. De plus, dans ce cas la distribution des durées entre le signal du muon fortement ralenti et le signal de l'électron est une exponentielle décroissante, qui permet éventuellement de re-mesurer la durée de vie moyenne du muon au repos [D. H. Frisch et J. H. Smith, *Measurement of the Relativistic Time Dilation Using  $\mu$ -Mesons*. *American Journal of Physics* **31**(5), 342–355].

D. H. Frisch et J. H. Smith effectuent la mesure au sommet du Mont Washington (New Hampshire, États-Unis, 1916 m d'altitude), puis la refont de retour au MIT à Cambridge (Massachusetts), quasiment au niveau de la mer (env. 4 m d'altitude).

**7.1** — Connaissant la durée de vie moyenne des muons, et en considérant que leur vitesse est très proche de celle de la lumière, estimez leur libre parcours moyen dans l'atmosphère (on néglige ici les éventuelles interactions avec l'air, peu dense).

**7.2** — Frisch et Smith comptent 568 muons par heure au sommet du Mont Washington. Combien faut-il de temps aux muons pour parcourir verticalement la distance entre le sommet et le site proche du niveau de la mer ? En supposant que l'efficacité de détection des muons de leur dispositif est constante, estimez numériquement le taux de muons attendus (par heure) au niveau de la mer.

**7.3** — Frisch et Smith déplacent leur dispositif en bas de la montagne, et comptent cette fois 412 muons par heure au niveau de la mer. Interprétez ce résultat dans le cadre relativiste, dans le référentiel terrestre (supposé ici galiléen). Déduisez-en le facteur  $\gamma(v)$  des muons, et la vitesse  $v$  des muons par rapport au sol.

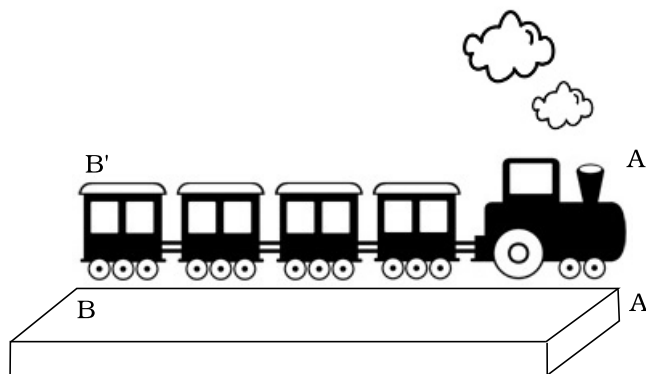
**7.4** — Interprétez le phénomène dans le référentiel propre des muons, où leur durée de vie moyenne est  $\tau = 2.2 \mu\text{s}$ .

L'expérience de David H. Frisch et James H. Smith a fait l'objet d'un film, *Time Dilation : An Experiment With Mu-Mesons* (1962), où Frisch et Smith présentent l'expérience au fur et à mesure de son exécution. Le film est disponible en ligne : <https://www.youtube.com/watch?v=rbzt8gDSYIM>

## 8. Contraction des longueurs et ordre temporel des événements

L'exercice suivant est un "classique académique" : il n'existe bien évidemment pas de train suffisamment rapide pour que les effets relativistes soient raisonnablement mesurables. Cet exemple permet toutefois d'illustrer les effets de perspectives dans l'espace-temps. Il existe un certain nombre de variantes de ce problème, avec par exemple deux trains qui se croisent, etc. Une variante plus complexe est le problème célèbre de "la règle et du trou", traité plus loin dans une déclinaison cinématographique.

On considère un train de longueur  $L$  se déplaçant à la vitesse  $v$  et passant devant un quai de gare sans s'arrêter. La longueur du quai est aussi  $L$  et lors d'un précédent voyage, le train s'étant arrêté, le chef de gare et le chauffeur du train ont pu vérifier à l'arrêt que train et quai avaient exactement la même longueur.



Lors de ce passage par la station, le train se déplace à vitesse constante et ne s'arrête pas en gare. On considère donc 4 événements :

- $P$  La tête du train  $A'$  coïncide avec l'arrière du quai  $B$ .
- $Q$  La tête du train  $A'$  (avec la locomotive et le conducteur) coïncide avec l'avant du quai  $A$  (où se tient le chef de gare).
- $R$  La queue du train  $B'$  coïncide avec l'arrière du quai  $B$ .
- $S$  La queue du train  $B'$  coïncide avec l'avant du quai  $A$ .

Pour simplifier l'analyse, on supposera que le chef de gare ( $A$ ) et le conducteur du train ( $A'$ ) synchronisent leurs horloges respectives à  $t = t' = 0$  lorsqu'ils se croisent. On supposera aussi qu'on dispose d'observateurs et d'horloges en queue de train et à l'arrière du quai, et que toutes les horloges d'un référentiel donné ont été préalablement synchronisées entre elles (par des échanges de signaux lumineux).

**8.1** — Établissez les coordonnées spatio-temporelles des 4 événements  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  et  $S$  dans les deux référentiels,  $\mathcal{R}$  (le quai) et  $\mathcal{R}'$  (le train). On pourra se servir de la transformation de Lorentz.

**8.2** — Quelle est la longueur du train dans son référentiel  $\mathcal{R}'$  ? vu du quai (référentiel  $\mathcal{R}$ ) ?

**8.3** — Quelle est la longueur du quai vu dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  du train ?

**8.4** — Commentez l'ordre des événements  $Q$  et  $R$  dans les 2 référentiels. Qu'en concluez-vous ? Est-ce cohérent avec les points de vue des deux observateurs sur les longueurs du train et du quai ?

**8.5** — Quelle est nécessairement la nature de l'intervalle d'espace-temps  $\widetilde{QR}$  ? Quelles sont les conséquences en terme de causalité ?

**8.6** — Tracez une représentation des tubes d'Univers du train et du quai dans les deux référentiels. Commentez.

## 9. Forme vectorielle des transformations de Lorentz

On considère deux référentiels inertiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ . Le référentiel  $\mathcal{R}'$  est en translation uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$  à une vitesse  $\mathbf{v}$ . On adopte la convention habituelle : à  $t = t' = 0$ , les origines  $O$  et  $O'$  se confondent. Par contre, on ne fait aucune hypothèse particulière sur l'orientation des axes des repères  $(Oxyz)$  et  $(O'x'y'z')$  des deux référentiels : leurs orientations sont quelconques.

En utilisant la propriété d'isotropie de l'espace, et en décomposant les vecteurs  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}'$  selon des composantes perpendiculaires et parallèles au mouvement, établissez les transformations de Lorentz sous forme vectorielle, c'est-à-dire donnant  $t'$  et  $\mathbf{r}'$  en fonction de  $t$  et  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{v}$ , la vitesse relative du repère  $(x', y', z')$  par rapport au repère  $(x, y, z)$ .

NB : on pourra commencer par étudier le cas particulier où  $\mathcal{R}'$  se déplace le long de l'axe  $x$  de  $\mathcal{R}$ .

## 10. Effet Doppler (relativiste)

Leia et Han ont une vitesse relative  $v$  constante. Leur coïncidence est prise, par tous deux, comme événement origine  $O$ . Leia choisit son axe  $x$  selon la vitesse de Han qui, lui, choisit son axe  $x'$  opposé à la vitesse de Leia. À intervalles réguliers à sa montre Han émet (événements  $O, E_1, E_2, E_3, \dots$ ) des éclats lumineux que Leia reçoit (événements  $O, R_1, R_2, R_3, \dots$ ).

**10.1** — Représentez ce scénario (lignes d'univers de Leia, de Han, de la lumière et événements divers) sur un graphe d'espace-temps  $(x, t)$  dans le repère de Leia et sur un graphe d'espace-temps  $(x', t')$  dans le repère de Han.

**10.2** — Indiquez sur le graphe de Leia les intervalles de coordonnées  $\Delta x$  et  $\Delta t$  entre les deux événements  $O$  et  $E_1$  observés par Leia.

**10.3** — Calculez sans transformation de Lorentz,  $\Delta t$  en fonction de  $v$  et de l'intervalle  $\Delta\tau$  entre les deux émissions  $O$  et  $E_1$  à la montre de Han.

**10.4** — Calculez l'intervalle de temps  $\Delta t_R$  entre deux réceptions  $O$  et  $R_1$  de ces éclats vus par Leia. Interprétez.

**10.5** — Déduisez-en la relation entre la fréquence d'émission des signaux  $\nu_E$  par Han et la fréquence de réception  $\nu_R$  par Leia.

## 11. L'attaque de l'Étoile Noire

Pour détruire l'Étoile Noire, Luke envisage de survoler parallèlement sa surface afin de faire pénétrer discrètement son vaisseau (de longueur  $L$ ) par un orifice de l'Étoile de même diamètre  $L$  (figure 2). Son vaisseau atteignant sans difficulté la vitesse  $v = \sqrt{3}c/2 \simeq 0.87c$ , Luke compte profiter de la contraction des longueurs : dans le référentiel de l'Étoile Noire, son vaisseau apparaîtra plus court et pourra donc passer sans difficulté par l'ouverture de largeur  $L$ .

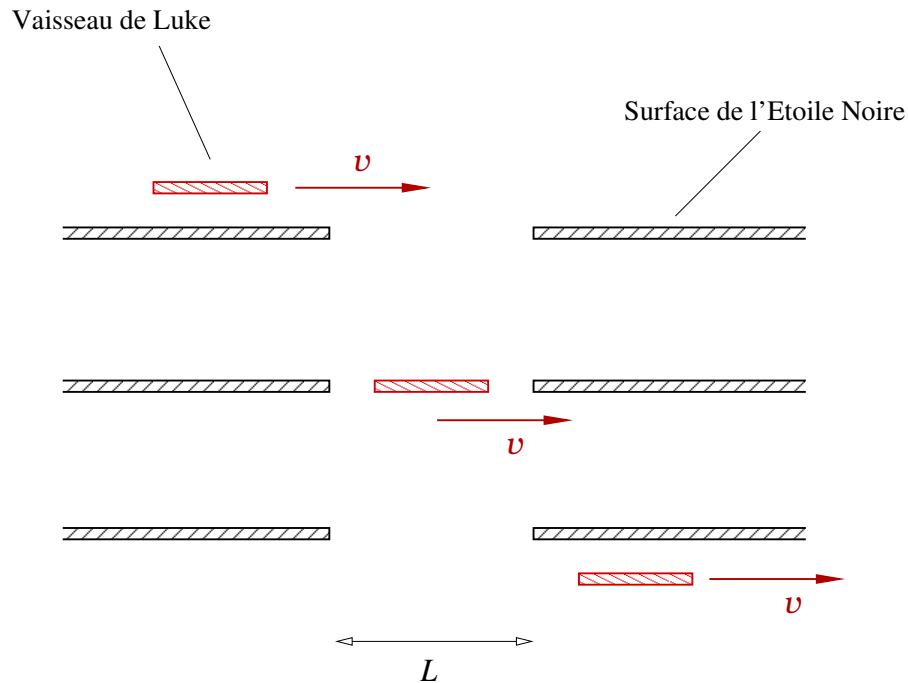


FIGURE 2 – Plan d'attaque de Luke, du point de vue du référentiel de l'Étoile Noire.

**11.1** — Que vaut le facteur  $\gamma(v)$  du vaisseau de Luke dans le référentiel de l'Étoile Noire (supposé galiléen)?

**11.2** — Dans le référentiel de l'Étoile Noire, quelle sera la longueur du vaisseau de Luke (assimilé à un segment de droite)? Le vaisseau pourra-t-il pénétrer par l'ouverture de diamètre  $L$ ?

**11.3** — L'amiral de la flotte fait toutefois remarquer que dans le référentiel de son vaisseau, c'est le trou à la surface de l'Étoile Noire qui paraîtra plus petit et que le plan de Luke est par conséquent voué à l'échec. Quelle est effectivement la longueur apparente du trou dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  du vaisseau de Luke?

Afin de réconcilier les deux points de vue, on se propose de modéliser les trajectoires respectives du vaisseau et de la surface de l'Étoile Noire dans les deux référentiels suivants :

- Le référentiel  $\mathcal{R}$  représenté sur la figure 3 : dans  $\mathcal{R}$ , la surface de l'Étoile Noire se déplace en translation uniforme selon  $\mathbf{e}_z$  avec une vitesse faible  $u \ll c$ . À  $t = 0$ , la surface de l'Étoile Noire se confond avec le plan  $xOy$ . Dans ce même référentiel  $\mathcal{R}$ , le vaisseau de Luke se déplace sur l'axe  $Ox$ , à la vitesse  $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$ , de telle sorte que le centre du vaisseau se trouve à l'origine  $O$  à  $t = t' = 0$ .
- Le référentiel  $\mathcal{R}'$  solide du vaisseau de Luke, en translation uniforme par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  :  $\mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v \mathbf{e}_x$ . L'origine  $O'$  du référentiel  $\mathcal{R}'$  est prise au centre du vaisseau. Elle se confond avec  $O$  à  $t = t' = 0$ .

**11.4** — Écrivez la transformation de Lorentz permettant de passer du référentiel  $\mathcal{R}$  au référentiel  $\mathcal{R}'$ . De même, écrivez la transformation inverse.

**11.5** — Dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , quelle est la position  $x(O')$  du centre du vaisseau en fonction du temps  $t$ ? À  $t = 0$ , que valent les abscisses des extrémités avant  $x(A')$  et arrière  $x(B')$  du vaisseau, dans le référentiel  $\mathcal{R}$ ? Au même instant  $t = 0$ , que valent les abscisses  $x(P)$  et  $x(Q)$  des extrémités du trou? De ce point de vue, le vaisseau peut-il effectivement passer par le trou?

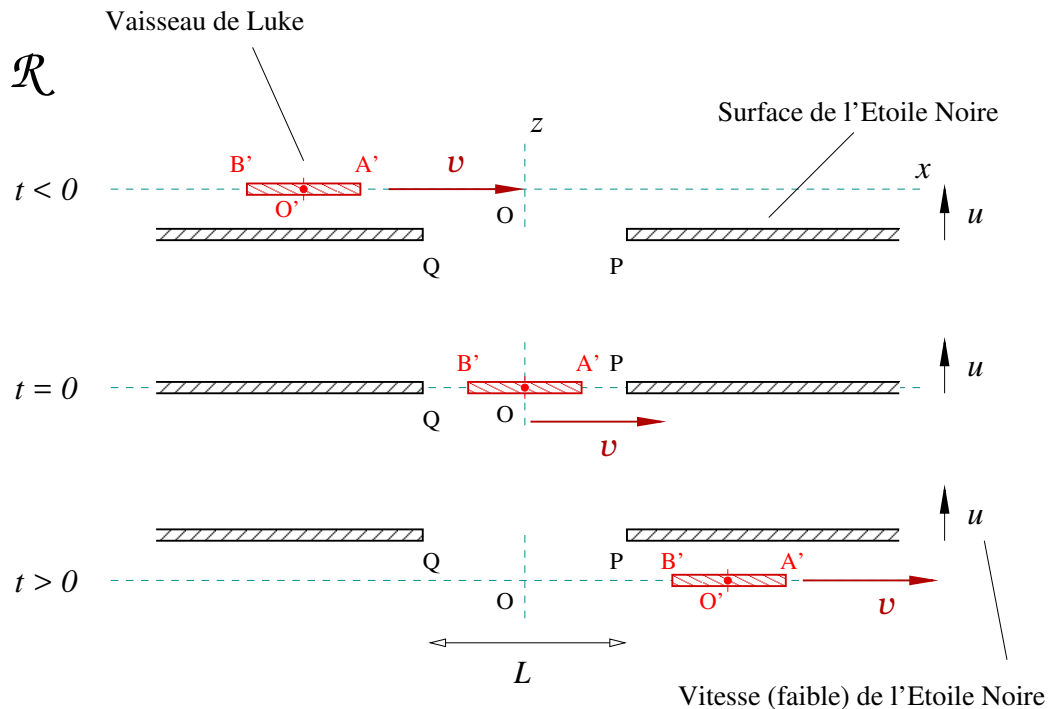


FIGURE 3 – Plan d'attaque de Luke pour détruire l'étoile noire, vu dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Dans ce référentiel, le vaisseau se déplace à la vitesse  $v$  le long de l'axe des  $x$ , tandis que la surface de l'Étoile Noire se déplace à la vitesse faible  $u \ll c$  selon l'axe des  $z$ .

On s'intéresse maintenant aux mêmes événements, mais vus dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  solide du vaisseau.

**11.6** — Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  dessinez dans le plan  $x'O'z'$  le vaisseau de longueur  $L$ , en repérant la position de ses 2 extrémités. Faites un dessin assez large, que l'on complétera aux questions suivantes.

**11.7** — Soit un point  $M(x, y, z)$  quelconque de la surface de l'Étoile Noire. On a nécessairement  $x$  dans l'intervalle  $] -\infty, -L/2] \cup [L/2, +\infty[$ . Que vaut  $z$  en fonction du temps  $t$  dans  $\mathcal{R}$  ?

**11.8** — Déterminez les coordonnées  $(x', y', z')$  des points  $M$  de la surface de l'Étoile Noire en fonction du temps  $t'$  dans  $\mathcal{R}'$ . Quel est le lieu des points  $M$  de la surface à l'instant  $t' = 0$  dans le plan  $x'O'z'$  ? Dessinez la position du plan de la surface de l'Étoile Noire à  $t' = 0$  sur le dessin précédent.

**11.9** — Que valent les coordonnées des extrémités  $P$  et  $Q$  du trou dans le référentiel  $\mathcal{R}$  ? Déduisez-en l'équation de la trajectoire  $z' = f(x')$  pour chacun de ces deux points dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ .

**11.10** — Calculez la position de l'intersection des trajectoires des extrémités  $P$  et  $Q$  avec l'axe des  $x'$ . Dessinez les trajectoires de  $P$  et  $Q$  dans le plan  $x'O'z'$ .

**11.11** — Décrivez la trajectoire de la surface de l'Étoile Noire dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  du vaisseau. À votre avis, qui a raison de l'amiral de la flotte ou de Luke ? Luke doit-il retourner sur Dagobah auprès de Yoda parfaire sa maîtrise de la relativité restreinte ?

Cet exercice est une déclinaison *GeorgeLucaesque* du célèbre problème relativiste connu comme "le paradoxe de la règle et du trou", où on considère une règle de longueur  $L$  que l'on fait glisser sur une table dans laquelle il y a un trou de même longueur. Ce paradoxe a été longuement débattu, notamment par Rindler (*American Journal of Physics* 29, 365 (1961); <https://doi.org/10.1119/1.1937789>).

## 12. *Clocks around the Rock* : l'expérience de Hafele et Keating

À la fin des années 50 les horloges atomiques au césium-133 commencent à être commercialisées, et leur précision et leur stabilité deviennent suffisantes pour qu'il soit possible, avec de telles horloges, de tester directement les prédictions de la relativité concernant la dilatation du temps.

En 1971, Joseph C. Hafele (1933–2014) propose de vérifier la désynchronisation prédite par la Relativité entre des horloges en mouvement les unes par rapport aux autres ("paradoxe des jumeaux"); il suggère de faire voyager des horloges atomiques en leur faisant faire un tour du globe en avion, soit vers l'Est, soit vers l'Ouest, et de comparer le temps qu'elles affichent avec celui d'une autre horloge atomique restée au sol. Joseph C. Hafele et l'astronome Richard E. Keating (1941–2006) réalisent ensemble l'expérience en octobre 1971. Ils effectuent deux tours du monde en avion (avec escales) sur des lignes commerciales, en transportant avec eux quatre horloges atomiques ("*Mister Clock*", fig. 4); ils surveillent la bonne marche des horloges tout au long des deux voyages, avant de comparer la durée enregistrée avec celle qu'indiquent les horloges atomiques de référence restées à l'US Naval Observatory (USNO)<sup>2</sup>.



FIGURE 4 – Joseph C. Hafele (1933–2014) et Richard E. Keating (1941–2006) accompagnant "*Mister Clock*", les 4 horloges atomiques au césium qui occupaient deux sièges dans l'avion. Photo prise un peu avant le départ du vol Pan American 106 de Washington à Londres [Source : Time Magazine, 18 octobre 1971].

2. C'est probablement l'une des expériences les moins chères jamais réalisées pour tester la théorie de la Relativité : les horloges atomiques ayant été empruntées à l'USNO, l'ensemble de l'expérience n'a coûté que 8000 dollars de l'époque, dépensés principalement en billets d'avion pour deux tours du monde avec 4 "passagers", *Mr. Clock* occupant deux fauteuils.

## Préambule : temps propre d’une horloge en mouvement

Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , considérons une horloge parfaite en mouvement, selon une trajectoire quelconque, à une vitesse  $\mathbf{u}(t)$  (non nécessairement constante). À un instant  $t$  donné, on considère le référentiel  $\mathcal{R}'$  qui se confond à cet instant précis  $t$  avec le référentiel propre de l’horloge. Autrement dit, la vitesse  $\mathbf{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  est égale, à cet instant  $t$  particulier, à  $\mathbf{u}(t)$ .

**12.1** — En utilisant l’invariance de l’intervalle d’espace-temps, montrez que deux événements de la trajectoire de l’horloge séparés par  $(dt, d\mathbf{r})$  dans le référentiel inertiel  $\mathcal{R}$ , sont séparés dans le référentiel inertiel tangent  $\mathcal{R}'$  par  $(d\tau, \mathbf{0})$ , avec

$$d\tau = \frac{1}{\gamma(\mathbf{u})} dt = \left(1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} dt = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} dt$$

où  $\tau$  est le *temps propre* de l’horloge, c’est à dire le temps que l’horloge affiche.

**12.2** — Pour des vitesses  $u$  faibles devant la vitesse de la lumière, développez l’expression précédente en ne conservant que les termes de premier ordre en  $u^2/c^2$ .

## Dilatation cinématique du temps

Afin de modéliser l’expérience de Hafele et Keating, on se placera dans le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_g$ , à savoir le référentiel dont l’origine est le centre de la Terre, et dont les trois axes pointent vers des étoiles lointaines (fig. 5). Comme les expériences considérées ne durent que quelques jours, on assimilera le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_g$  à un référentiel galiléen.

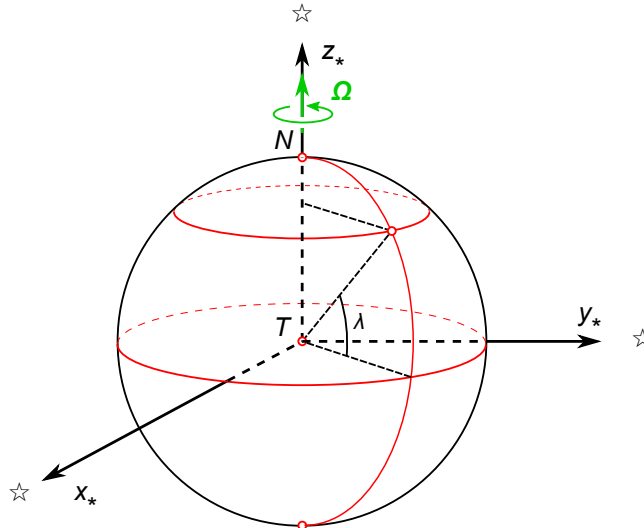


FIGURE 5 – Référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_g$  muni du repère  $(T, x_*, y_*, z_*)$ , dont l’origine est le centre  $T$  de la terre, et dont les axes sont définis par les étoiles. Pour une expérience de courte durée (comparée à la période de révolution de la Terre autour du Soleil), le référentiel géocentrique peut être considéré comme galiléen; le référentiel de Copernic (système solaire) est une meilleure approximation d’un référentiel galiléen.

On considère de plus que ce référentiel  $\mathcal{R}_g$  est muni d’une horloge idéale et parfaite, qui fournit le temps  $t$  : cette horloge, solidaire de  $\mathcal{R}_g$ , ne subit ni la rotation de la Terre, ni le champ de gravité terrestre (elle pourrait par exemple être placée en son centre).

Pour comprendre l'expérience de Hafele et Keating, on s'intéressera à la trajectoire de trois horloges particulières : une horloge atomique placée en un lieu donné à la surface terrestre, immobile par rapport au sol ; et deux horloges qui font chacune un tour du monde en avion, l'une vers l'Est, et l'autre vers l'Ouest.

**12.3** — Faites un dessin, du point de vue d'un observateur placé au pôle Nord, à très haute altitude, et qui regarde la Terre tourner au dessous de lui. Indiquez le sens de rotation de la Terre. Schématisez l'horloge immobile au sol, et les horloges qui font un tour du monde vers l'Est et vers l'Ouest en volant au-dessus de l'équateur.

On notera  $R_{\oplus}$  le rayon de la Terre,  $\Omega_{\oplus}$  sa vitesse angulaire de rotation dans le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_g$ , et  $M_{\oplus}$  la masse de la Terre.

**12.4** — Connaissant la durée d'une révolution terrestre par rapport aux étoiles lointaines (jour sidéral), déduisez-en la vitesse angulaire  $\Omega_{\oplus}$  de rotation de la Terre dans le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_g$ . Donnez son expression et sa valeur numérique.

**12.5** — Supposons, pour simplifier, que l'horloge immobile par rapport au sol soit placée en un point de la surface terrestre à l'équateur. Donnez l'expression littérale et la valeur numérique de la vitesse instantanée (en m/s) de cette horloge dans le référentiel géocentrique.

**12.6** — Déduisez-en le facteur  $\gamma$  associé, et l'expression de l'intervalle de temps propre  $d\tau_{\text{fixe}}$  pour cette horloge fixe par rapport au sol en fonction de  $dt$ . Estimez numériquement le facteur  $\beta$ . En considérant que les vitesses ici sont faibles devant  $c$ , déduisez-en une expression approchée de  $d\tau_{\text{fixe}}$ , de la forme :

$$d\tau_{\text{fixe}} \approx \left(1 - \frac{P}{2c^2}\right) dt \quad (2)$$

Donnez l'expression de  $P$  en fonction de  $R_{\oplus}$  et  $\Omega_{\oplus}$ .

On s'intéresse maintenant à une horloge qui fait le tour du monde à bord d'un avion. L'avion vole à l'altitude  $h$  et à la vitesse  $v$  *par rapport au sol*, en longeant l'équateur terrestre. On comptera  $v$  positivement si l'avion vole vers l'Est, et négativement s'il vole vers l'Ouest.

**12.7** — En utilisant la loi relativiste de composition des vitesses, donnez l'expression de la vitesse instantanée de l'avion volant au-dessus de l'équateur à l'altitude  $h$  dans le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_g$ . Montrez que vu les faibles vitesses considérées ici par rapport à  $c$ , l'expression peut se réduire à la loi classique de composition des vitesses.

**12.8** — Déduisez-en le facteur  $\gamma$  correspondant, et l'expression de l'intervalle de temps propre  $d\tau_{\text{vol}}$  en fonction de  $dt$  et de la vitesse  $v$  de l'avion. Montrez qu'en développant au premier ordre,  $d\tau_{\text{vol}}$  peut se mettre sous la forme :

$$d\tau_{\text{vol}} \approx \left(1 - \frac{Q}{2c^2}\right) dt \quad (3)$$

et donnez l'expression de  $Q$  en fonction de  $v$ ,  $R_{\oplus}$ ,  $h$  et  $\Omega_{\oplus}$ .

## Effet supplémentaire de la gravitation sur l'écoulement du temps

Comme l'expérience est menée sur Terre, les horloges sont plongées dans le champ gravitationnel terrestre. La Relativité Générale prédit que des horloges parfaites se comportent différemment selon l'intensité du champ gravitationnel qu'elles subissent : plus le champ est intense, et plus l'écoulement du temps ralentit. Le traitement complet nécessiterait d'utiliser le formalisme de la Relativité Générale ; cependant, du fait de la faible intensité du champ terrestre, on pourra se permettre ici d'ajouter



un simple terme correctif gravitationnel dans les équations (2) et (3). Ces équations deviennent ainsi : pour l'horloge fixe,

$$d\tau_{\text{fixe}} \approx \left(1 - \frac{P}{2c^2}\right) dt \longrightarrow d\tau_{\text{fixe}} \approx \left(1 + \frac{\Phi(r_{\text{fixe}})}{c^2} - \frac{P}{2c^2}\right) dt \quad (4)$$

et, pour l'horloge à bord de l'avion,

$$d\tau_{\text{vol}} \approx \left(1 - \frac{Q}{2c^2}\right) dt \longrightarrow d\tau_{\text{vol}} \approx \left(1 + \frac{\Phi(r_{\text{vol}})}{c^2} - \frac{Q}{2c^2}\right) dt \quad (5)$$

où  $\Phi(r)$  est l'intensité du potentiel gravitationnel que subit un objet à la distance  $r \geq R_{\oplus}$  du centre de la Terre :

$$\Phi(r) = -\frac{GM_{\oplus}}{r}$$

avec  $R_{\oplus}$  le rayon de la Terre, et  $M_{\oplus}$  sa masse (Le champ gravitationnel dérive de ce potentiel  $\Phi$ ).

**12.9** — Explicitiez les équations (4) et (5) respectivement pour l'horloge fixe au sol, et pour l'horloge qui vole à l'altitude  $h$  ; en particulier, explicitiez  $r_{\text{fixe}}$  et  $r_{\text{vol}}$ .

### Calcul approché du décalage des horloges

**12.10** — En intégrant  $d\tau_{\text{fixe}}$  et  $d\tau_{\text{vol}}$  sur tout le parcours, entre l'instant où l'horloge qui voyage quitte l'horloge fixe (événement  $A$ ), et celui où les deux horloges se retrouvent au point de départ à la fin du voyage (événement  $B$ ), calculez les durées  $\Delta\tau_{\text{fixe}}$  et  $\Delta\tau_{\text{vol}}$  mesurées pendant l'ensemble du voyage en fonction de  $\Delta t$ , le temps écoulé entre les événements  $A$  et  $B$  dans le référentiel géocentrique. Pour simplifier, on supposera que l'avion vole à vitesse et à altitude constantes, au dessus de l'équateur terrestre, et on négligera les phases d'atterrissage et de décollage de l'avion.

**12.11** — Exprimez le rapport  $\Delta\tau_{\text{vol}}/\Delta\tau_{\text{fixe}}$ . Pour l'instant, ne poussez pas plus loin le calcul.

**12.12** — L'effet que l'on cherche à mesurer est très faible. On pourra considérer que les vitesses en jeu sont faibles devant  $c$ , et que, de plus, l'altitude de l'avion est petite devant le rayon terrestre :  $h \ll R_{\oplus}$ . Pour notre calcul, afin de ne conserver que les termes significatifs dans le développement, estimez numériquement les termes suivants :

$$\frac{GM_{\oplus}h}{R_{\oplus}^2c^2} \quad \frac{v^2}{2c^2} \quad \frac{R_{\oplus}\Omega_{\oplus}v}{c^2} \quad \frac{h^2\Omega_{\oplus}^2}{2c^2} \quad \frac{h\Omega_{\oplus}v}{c^2}$$

**12.13** — En faisant un développement limité au premier ordre de l'expression de  $\Delta\tau_{\text{vol}}/\Delta\tau_{\text{fixe}}$ , i.e. en négligeant les termes d'ordre supérieur en  $c^{-4}$ ,  $c^{-6}$ , etc, et en ne conservant que les termes significatifs, montrez que

$$\frac{\Delta\tau_{\text{vol}}}{\Delta\tau_{\text{fixe}}} \approx 1 + \frac{GM_{\oplus}h}{R_{\oplus}^2c^2} - \frac{R_{\oplus}\Omega_{\oplus}^2h}{c^2} - \frac{R_{\oplus}\Omega_{\oplus}v}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} \quad (6)$$

**12.14** — Exprimez l'accélération de pesanteur  $g$  à l'équateur, en fonction de  $G$ ,  $M_{\oplus}$ ,  $R_{\oplus}$  et  $\Omega_{\oplus}$ . Rappelez-vous de la définition du poids, et n'oubliez pas que la Terre tourne sur elle-même...

**12.15** — En utilisant ce qui précède, montrez que l'équation (6) peut se ré-écrire :

$$\frac{\Delta\tau_{\text{vol}}}{\Delta\tau_{\text{fixe}}} \approx 1 + \frac{gh}{c^2} - \frac{R_{\oplus}\Omega_{\oplus}v}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}$$

**12.16** — Déduisez-en l'expression de l'écart relatif  $\delta(v)$  entre l'horloge qui a volé et l'horloge restée au sol :

$$\delta(v) = \frac{\Delta\tau_{\text{vol}}(v) - \Delta\tau_{\text{fixe}}}{\Delta\tau_{\text{fixe}}}.$$

**12.17** — Estimez numériquement le décalage relatif  $\delta_E$  attendu pour l'horloge qui a fait le tour de monde vers l'Est ; calculez de même  $\delta_W$  pour l'horloge qui est partie vers l'Ouest.

**12.18** — Pour le tour du monde effectué vers l'Est (commencé le 4 octobre 1971), les phases de vol ont duré 41.2 heures au total ; pour le tour de monde vers l'Ouest (démarré le 13 octobre 1971), la durée cumulée de vol a été de 48.6 heures. Déduisez-en les décalages attendus  $\Delta\tau_E$  et  $\Delta\tau_W$  par rapport à l'horloge restée fixe, et donnez leurs valeurs en nanosecondes. Comparez avec les mesures effectuées par Hafele et Keating (table 1).

Remarque : on a ici grandement simplifié la trajectoire des avions, en supposant un vol circumterrestre au-dessus de l'équateur, à vitesse et altitude constantes. En pratique, Hafele et Keating ont emprunté des vols commerciaux ordinaires : pour obtenir un calcul théorique plus précis, il faut tenir compte de la latitude du lieu dans l'équation (4), et il faut intégrer l'équation (5) le long des véritables trajets des avions de ligne utilisés, en tenant compte des variations de la latitude, de la vitesse de vol et de l'altitude. Hafele et Keating ont pu effectuer ces calculs à partir des données de vol obtenues auprès des équipages de chacun des avions empruntés lors de l'expérience.

Horloge (numéro de série)	$\Delta\tau_E$	$\Delta\tau_W$
#120	−57 ns	+277 ns
#361	−74 ns	+284 ns
#408	−55 ns	+266 ns
#447	−51 ns	+266 ns
Moyenne	$-59 \pm 10$ ns	$+275 \pm 7$ ns

TABLE 1 – *Différences de temps observées entre les 4 horloges atomiques utilisées et l'horloge atomique de référence de l'USNO. [Source : Joseph C. Hafele et Richard E. Keating, "Around-the-world atomic clocks : observed relativistic time gains", Science, vol. 177, n°4044 (1972), p. 168-170.]*

Données :

$$G = 6.67430(15) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \quad c = 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$M_{\oplus} = 5.9722 \times 10^{24} \text{ kg} \quad R_{\oplus} = 6378 \text{ km} \quad g \approx 9.80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$1 \text{ jour sidéral} : T_{\oplus} = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4 \text{ s}.$$

$$\text{Avion : altitude de vol } h = 10 \text{ km ; vitesse par rapport au sol } v = 200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

## 2<sup>ème</sup> Partie

Composition des vitesses — Mouvement hyperbolique — Paradoxe des jumeaux — Voyages interstellaires.

### 1. Composition des vitesses

Vues dans le laboratoire, deux particules  $A$  et  $B$  s'éloignent de l'origine choisie  $O$  dans des directions opposées avec chacune une vitesse  $3c/4$  mesurée dans le référentiel du laboratoire.

**1.1** — Est-il correct de dire que la vitesse relative de  $A$  par rapport à  $B$  est  $3c/2$ , c'est à dire supérieure à  $c$ ? Quelle est la vitesse de  $A$  par rapport à  $B$ ? Et réciproquement?

**1.2** — Supposons deux référentiels galiléens  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ , avec  $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$  la vitesse relative de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . Un rayon lumineux se propage à la vitesse  $\mathbf{u} = c \mathbf{e}_x$  vers l'avant dans  $\mathcal{R}$ ; quelle est sa vitesse de propagation dans  $\mathcal{R}'$ ? Même question pour un rayon lumineux se propageant cette fois vers l'arrière.

**1.3** — En partant de la loi de composition des vitesses, montrez algébriquement que la vitesse d'un objet ne peut dépasser  $c$  quel que soit le référentiel où on mesure cette vitesse.

### 2. Rapidité

**2.1 — Preamble.** Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels. À partir de la définition de la fonction *tangente hyperbolique*, montrez que la tangente hyperbolique d'une somme de deux réels s'écrit :

$$\operatorname{th}(a + b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b} \quad (7)$$

et, de même, que,

$$\operatorname{th}(a - b) = \frac{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b}{1 - \operatorname{th} a \operatorname{th} b} \quad (8)$$

Soient deux référentiels inertiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ , en translation l'un par rapport à l'autre, avec pour vitesse relative  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v \mathbf{e}_x$ . On suppose que les axes des repères des deux référentiels sont parallèles, et on utilise la convention habituelle : on fixera  $t = t' = 0$  à l'instant où les origines  $O$  et  $O'$  des repères des deux référentiels se confondent.

Soit un mobile matériel en mouvement dans le référentiel inertiel  $\mathcal{R}'$  avec une vitesse  $\mathbf{u}' = u'_x \mathbf{e}_x$  parallèle à l'axe des  $x'$  (et des  $x$ ).

**2.2** — Donnez l'expression de sa vitesse  $\mathbf{u}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

**2.3** — On appelle *rapidité* de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  la grandeur  $\varphi$  définie par :

$$\beta = \frac{v}{c} = \operatorname{th} \varphi \quad \text{i.e.} \quad \varphi = \operatorname{argth} \beta.$$

De même, on peut définir la rapidité  $\psi$  du mobile matériel dans  $\mathcal{R}$  (et respectivement sa rapidité  $\psi'$  dans  $\mathcal{R}'$ ) par :

$$\frac{u_x}{c} = \operatorname{th} \psi \quad \text{et} \quad \frac{u'_x}{c} = \operatorname{th} \psi'.$$

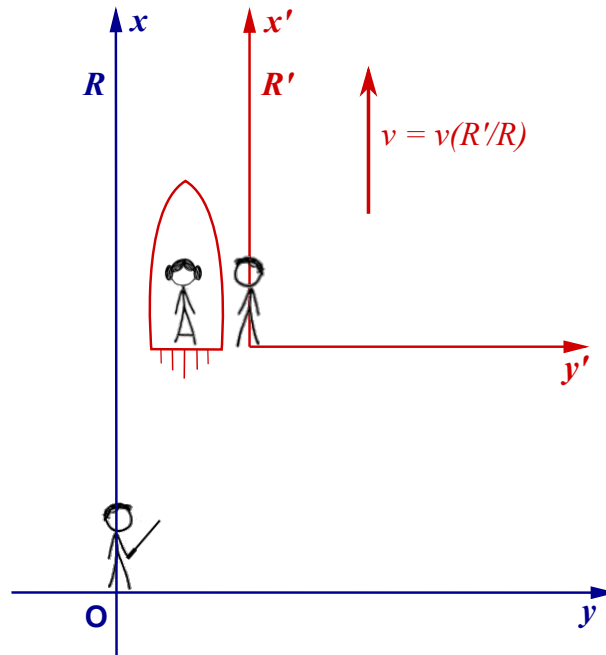
Exprimez la loi relativiste de composition des vitesses en terme de rapidités. Commentez.

**2.4** — Exprimez  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$  en fonction de la rapidité  $\varphi$  du référentiel  $\mathcal{R}'$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ . Écrivez la transformation de Lorentz sous forme matricielle, en faisant apparaître la rapidité  $\varphi$ . Commentez.

### 3. Mouvement accéléré, référentiel tangent, mouvement hyperbolique

Leia effectue avec son vaisseau un mouvement rectiligne accéléré (donc non uniforme). À un instant donné (événement  $E_1$ ), sa vitesse est  $v$  par rapport à Luke, inertiel (i.e. dépourvu d'accélération), et sa vitesse est nulle par rapport à Han, lui aussi inertiel. Un peu plus tard (événement  $E_2$ ), après un temps  $dt'$  pour Han, la vitesse de Leia est passée à  $v + dv$  pour Luke, et à  $dv'$  pour Han.

3.1 — En utilisant la composition des vitesses, établissez l'expression de  $dv'$  en fonction de  $v$  et  $dv$ .



3.2 — Quelle est l'expression de l'accélération propre  $a$  de Leia, en fonction de  $dv'$  et de  $dt'$ ? Quelle est l'expression de la durée  $dt'$  en fonction de  $v$  et de  $dt$ ? En déduire l'expression de la durée  $dt$  en fonction de  $a$ ,  $v$  et  $dv$ .

3.3 — En surveillant bien le poids (apparent) d'une masse test, Leia, pilote sa fusée en maintenant son accélération propre  $a$  constante. Sachant qu'elle a quitté Luke en douceur, avec une vitesse  $v(0)$  nulle à l'instant  $t = 0$ , quelle est l'expression de sa vitesse  $v(t)$  à l'instant  $t$  pour Luke toujours inertiel?

3.4 — En déduire l'expression de la position  $x(t)$  de Leia à l'instant  $t$  pour Luke.

3.5 — Quelles sont les expressions approchées de  $x(t)$  et de  $v(t)$  lorsque  $t$  est petit? lorsque  $t$  est grand? (par rapport à quoi d'ailleurs?) Représenter sur un graphe d'espace-temps dans le repère  $(x, t)$  de Luke : (i) la ligne d'univers de Luke, (ii) la ligne d'univers de Leia, (iii) la ligne d'univers de Han, inertiel, qui à l'instant  $t_1$  coïncide, en douceur, avec Leia. Pourquoi désigne-t-on ce type de mouvement comme "hyperbolique"?

3.6 — Quelle est, en général, la durée  $d\tau$  écoulée pour Leia, entre  $E_1$  et  $E_2$ , en fonction de  $dt'$ ? en fonction de  $dt$  et de  $v$ ? Lorsque Leia se dote d'un mouvement à accélération propre constante  $a$ , que devient cette durée  $d\tau$  en fonction de  $dt$ ,  $a$  et  $t$ ?

3.7 — En déduire le temps propre  $\tau(t)$  à la montre de Leia, en fonction de  $a$  et de  $t$  pour Luke. Quelles sont les expressions approchées de  $\tau(t)$  pour  $t$  petit? pour  $t$  grand?

3.8 — Leia se donne l'accélération "de confort"  $a = g = 9.8 \text{ m.s}^{-2}$ . Exprimez  $a$  en  $\text{ly.y}^{-2}$  (année-lumière par année carrée). Calculez  $\tau(t)$  après un mois, 3 mois, 1 an, 3 ans, 10 ans.

## 4. Le paradoxe des jumeaux

Luke et Leia dérivent dans l'espace, libres. Leia décide de quitter Luke en se donnant une accélération propre constante  $a = g$  pendant une durée finie  $\Delta\tau$  (temps propre de Leia). Puis elle stoppe les turbopropulseurs à l'arrière de son vaisseau, allume ceux à l'avant qui lui fournissent désormais une accélération  $a = -g$ , et continue son voyage avec cette accélération propre pendant la durée  $2\Delta\tau$ . Enfin, elle arrête les propulseurs à l'avant et rallume les propulseurs à l'arrière, se donnant ainsi une accélération propre  $a = g$  pendant  $\Delta\tau$  pour finir par couper ses turbopropulseurs. Pendant tout ce temps, occupé à autre chose, Luke est resté au repos.

4.1 — Représentez toute cette épopée sur un graphe d'espace-temps dans le repère de Luke.

4.2 — Calculez le temps  $4\Delta\tau$  qui s'est écoulé pour Leia si toute cette histoire a duré  $4\Delta t = 12$  mois pour Luke. Faites de même pour  $4\Delta t = 12$  ans et pour  $4\Delta t = 40$  ans. Concluez.

## 5. Voyages intersidéraux

5.1 — Partant du système solaire, un vaisseau se rend à vitesse constante  $v$  sur une étoile située à  $D = 8$  années-lumière de la terre. Pour l'équipage de ce vaisseau, le voyage dure  $\Delta\tau = 8$  années. Quelle est la vitesse  $v$  du vaisseau dans le référentiel du système solaire ?

Dans la question précédente, on a négligé les phases d'accélération et de décélération du vaisseau ce qui rend le voyage irréaliste. On se propose plutôt d'effectuer le même voyage en deux phases : une phase d'accélération à accélération propre constante  $a$  jusqu'à mi-parcours, et une phase symétrique de décélération à accélération propre constante  $-a$ , de telle sorte que le vaisseau parte sans vitesse initiale et s'arrête à destination.

5.2 — Dessinez cette trajectoire sur un diagramme d'espace-temps dans le référentiel du système solaire.

On souhaite, comme précédemment, que le voyage dure  $\Delta\tau = 8$  années pour les occupants du vaisseau.

5.3 — Soit  $\mathcal{R}$  le référentiel du système solaire (considéré comme galiléen) et  $\mathcal{R}'$  le référentiel tangent à la trajectoire du vaisseau à un instant  $t$  donné. Dans le référentiel tangent  $\mathcal{R}'$ , la vitesse du vaisseau est nulle à l'instant  $t$  (ou  $t'$ ), et vaut  $dv'$  à l'instant  $t + dt$  (ou  $t' + dt'$ ). En utilisant la loi de composition des vitesses, montrer que

$$dv' = \gamma^2(v)dv$$

5.4 — Exprimez l'intervalle de temps propre  $d\tau = dt'$  en fonction de  $dt$  et  $\gamma(v)$ . Déduisez-en une expression de  $dv/dt$  en fonction de  $a$  et  $\gamma(v)$ .

5.5 — En utilisant les relations précédentes, montrez que  $d\tau$  est proportionnel à  $d\varphi$  où  $\varphi$  est la rapidité ( $\beta = \tanh \varphi$ ). En intégrant sur la première moitié du parcours du vaisseau, exprimez  $\Delta\tau$  en fonction de la rapidité à mi-parcours  $\varphi_{1/2}$ .

5.6 — En se souvenant que  $dx = vdt$ , exprimez  $dx$  en fonction de  $d\varphi$ . Déduisez-en une expression de  $\varphi_{1/2}$  en fonction de la distance totale à parcourir  $D$ .

5.7 — On souhaite déterminer l'accélération  $a$  qui permettra à l'équipage d'effectuer ce voyage à la distance  $D = 8$  années-lumière en un temps propre de  $\Delta\tau = 8$  ans. Montrez que l'équation à résoudre est de la forme :

$$8\xi = \cosh(8\xi) - 1$$

La solution de cette équation est  $8\xi \simeq 1.616$  soit  $\xi \simeq 0.202$ . Sachant que  $c \times 1 \text{ an}^{-1} \simeq 9.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , Exprimez  $a$  en unités  $c \times 1 \text{ an}^{-1}$  et en unités SI.

5.8 — Combien de temps dure le voyage pour les observateurs restés sur Terre? Exprimez  $\Delta t$  en fonction de  $c$ ,  $a$  et  $\varphi_{1/2}$ . Application numérique.

On donne :  $c \times 1 \text{ an}^{-1} \simeq 9.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , et  $\sinh(1.616) \simeq 2.417$ .

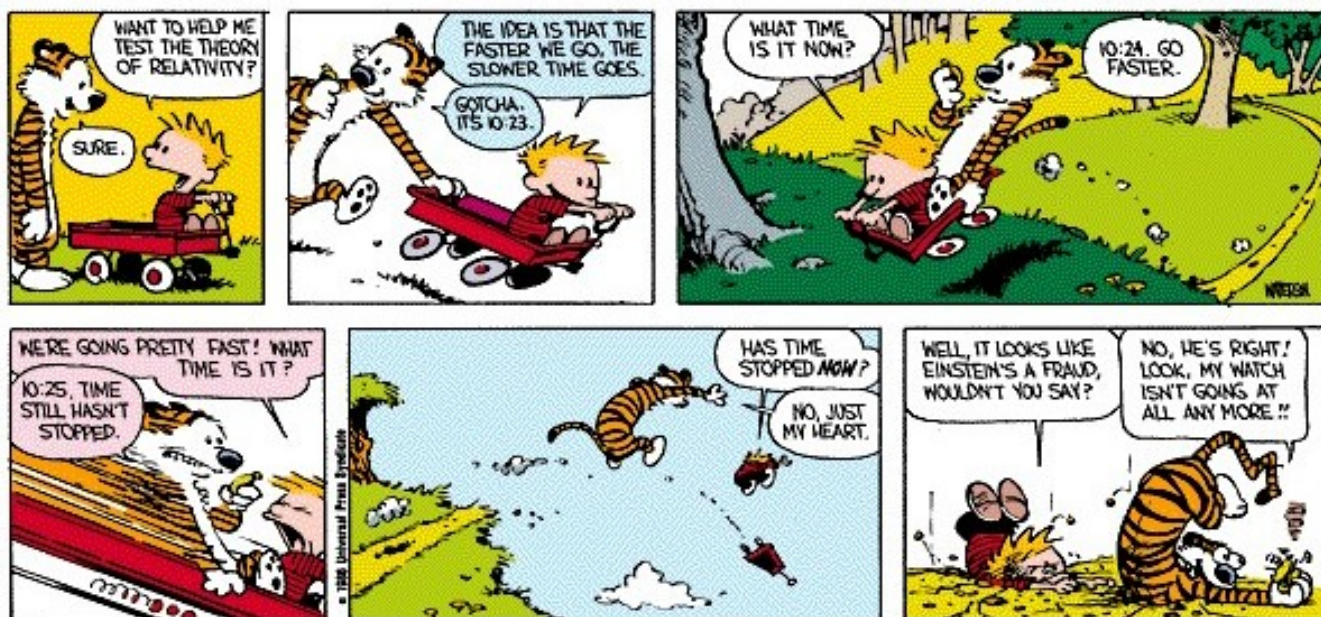


FIGURE 6 – *Calvin & Hobbes*, Bill Waterson

### 3<sup>ème</sup> Partie

Formalisme quadrivectoriel — Invariants — Quadrivecteurs position, vitesse, accélération — Quadri-force — Tenseurs — composantes covariantes et contravariantes.

## 1. Propriétés des quadrivecteurs

1.1 — Soit un quadrivecteur  $\tilde{\mathbf{A}}$ . Montrez que le carré de sa pseudo-norme :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}}^2 &= (A_t)^2 - (A_x)^2 - (A_y)^2 - (A_z)^2 = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 \\ &= A_0 A^0 + A_1 A^1 + A_2 A^2 + A_3 A^3 = A_\mu A^\mu\end{aligned}$$

est invariant lorsqu'on passe d'un référentiel galiléen à un autre. Montrez, de même, que pour deux quadrivecteurs  $\tilde{\mathbf{A}}$  et  $\tilde{\mathbf{B}}$ , le produit pseudo-scalaire :

$$\tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{B}} = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3 = A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 = A_\mu B^\mu$$

est invariant de Lorentz.

1.2 — Montrez que l'intervalle de temps propre  $d\tau$  est un invariant de Lorentz.

1.3 — À partir du quadrivecteur position  $\tilde{\mathbf{r}}$ , construisez un quadrivecteur vitesse  $\tilde{\mathbf{U}}$  qui obéisse aux transformations de Lorentz lorsqu'on passe d'un référentiel galiléen à un autre. Que vaut  $\tilde{\mathbf{U}}^2 = U_\mu U^\mu$  ? Est-ce un invariant ?

## 2. Vitesse relative

Vus d'un référentiel  $\mathcal{R}$ , Luke et Han Solo se déplacent aux vitesses constantes  $\mathbf{u}_L$  et  $\mathbf{u}_H$  respectivement. On cherche à déterminer leur vitesse relative en fonction de  $\mathbf{u}_L$  et  $\mathbf{u}_H$  sans utiliser les transformations de Lorentz. En utilisant l'invariance du produit scalaire des quadri-vitesses  $\tilde{\mathbf{U}}_L$  et  $\tilde{\mathbf{U}}_H$  par changement de repère, déterminer le facteur  $\gamma(\mathbf{u}_{L/H})$  de Luke par rapport à Han. En déduire la norme de la vitesse relative de Luke par rapport à Han.

## 3. Quadri-vitesses et composition relativiste des vitesses

**Remarque : pour cet exercice, afin d'éviter toute confusion, soyez précis : il est essentiel d'exprimer les différents facteurs  $\beta$  et  $\gamma$  en jeu en indiquant à chaque fois la vitesse utilisée dans l'expression des facteurs  $\beta$  et  $\gamma$  : par exemple,  $\gamma(v)$  ou bien  $\gamma(u)$ , etc.**

On considère deux référentiels galiléens  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ , avec  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$  la vitesse de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . On munit ces deux référentiels de repères orthonormés parallèles et du même trièdre  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ , de telle sorte que  $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$ . On suppose ces deux référentiels munis d'horloges parfaites, et on choisit l'origine des temps  $t = t' = 0$  lorsque l'origine  $O'$  se confond avec  $O$ .

On s'intéresse au mouvement d'un objet matériel  $M$ , dont la position est repérée par son vecteur position  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{OM}$  dans  $\mathcal{R}$ , et par son vecteur position  $\mathbf{r}'(t') = \mathbf{O'M}$ .

3.1 — Rappelez comment se transforment les coordonnées  $(ct, \mathbf{r}) = (ct, x, y, z)$  d'un point de la trajectoire de l'objet  $M$  lorsqu'on passe du référentiel  $\mathcal{R}$  au référentiel  $\mathcal{R}'$ . Montrez que ces relations peuvent se mettre sous forme matricielle.

**3.2** — Rappelez la définition de la vitesse ordinaire  $\mathbf{u}$  du mobile  $M$  mesurée dans le référentiel  $\mathcal{R}$ ; faites de même pour sa vitesse  $\mathbf{u}'$  mesurée cette fois dans  $\mathcal{R}'$ . On notera  $(u_x, u_y, u_z)$  les composantes de la vitesse  $\mathbf{u}$  dans  $\mathcal{R}$ , et  $(u'_x, u'_y, u'_z)$  les composantes de  $\mathbf{u}'$  dans  $\mathcal{R}'$ .

**3.3** — Donnez la définition du quadrivecteur vitesse  $\tilde{\mathbf{U}}$  (*quadri-vitesse*), de composantes  $U^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) pour l'objet étudié; donnez l'expression de ses 4 composantes  $U^\mu$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Faites de même pour les 4 composantes  $U'^\mu$  de la quadri-vitesse  $\tilde{\mathbf{U}}'$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ .

**3.4** — Que vaut  $\tilde{\mathbf{U}}^2$ ? Est-ce un invariant de Lorentz?

**3.5** — Comment les composantes  $U^\mu$  de la quadri-vitesse  $\tilde{\mathbf{U}}$  se transforment-elles lorsqu'on passe de  $\mathcal{R}$  à  $\mathcal{R}'$ ? Calculez explicitement les 4 composantes  $U'^\mu$  de la quadri-vitesse  $\tilde{\mathbf{U}}'$  du mobile dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ .

**3.6** — À partir des équations précédentes, redémontrez la loi relativiste de composition des vitesses qui fournit les expressions de  $u'_x$ ,  $u'_y$  et  $u'_z$  en fonction de  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  et  $v$ .

## 4. Quadri-accélération

**4.1** — Pour un mobile, on construit son quadrivecteur accélération (ou “quadri-accélération”) en dérivant son quadrivecteur vitesse par rapport à son temps propre. Retrouver les expressions des composantes temporelles  $A^0$  et spatiales  $\mathbf{A}$  de la quadri-accélération d'une particule  $\tilde{\mathbf{A}}$  en un événement où, dans un repère inertiel, sa vitesse et son accélération valent respectivement  $\mathbf{u}$  et  $\dot{\mathbf{u}}$ .

**4.2** — En déduire les valeurs  $A'^0$  et  $\mathbf{A}'$  des composantes de ce même quadrivecteur accélération dans un repère inertiel où la vitesse est nulle et l'accélération (dite alors propre) vaut  $\mathbf{a}$ .

**4.3** — En déduire l'expression de  $\mathbf{a}^2$  en fonction de  $\mathbf{u}$  et de  $\dot{\mathbf{u}}$ .

**4.4** — Que devient cette expression dans le cas d'une accélération longitudinale, c'est à dire lorsque  $\dot{\mathbf{u}}$  est parallèle à  $\mathbf{u}$ ?

**4.5** — Montrez que le pseudo-produit scalaire  $\tilde{\mathbf{U}} \cdot \tilde{\mathbf{A}}$  est toujours nul; autrement dit, que les quadrivecteurs vitesse et accélération sont “orthogonaux” au sens des quadrivecteurs.

## 5. Quadri-force

Considérons une particule de quadri-vitesse  $\tilde{\mathbf{U}}$  qui subit une quadriforce  $\tilde{\mathbf{f}} = d\tilde{\mathbf{p}}/d\tau$ .

**5.1** — Rappelez ce que vaut  $\tilde{\mathbf{U}}^2 = U_\mu U^\mu$ . Déduisez-en  $U_\mu dU^\mu/d\tau$ .

**5.2** — Montrez que le produit  $\tilde{\mathbf{f}} \cdot \tilde{\mathbf{U}}$  est nul. Déduisez-en une expression pour la variation de l'énergie  $E$  de la particule en fonction du temps  $\dot{E} = dE/dt$ . Quel résultat retrouve-t-on?

## 6. Tenseurs, composantes covariantes et contravariantes

**6.1** — Soient un quadrivecteur  $\tilde{\mathbf{V}}$  et un quadritenseur  $\tilde{\mathbf{T}}$  de composantes :

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad V^\mu = (-1, 2, 0, -2)$$



Ecrivez les composantes de

$$T_{\mu\nu} \quad T^\mu{}_\nu \quad T_\mu{}^\nu \quad T^\lambda{}_\lambda \quad V_\mu V^\mu \quad V_\mu T^{\mu\nu}$$

**6.2** — Écrivez les composantes contravariantes  $p^\mu$  du quadrivecteur énergie-impulsion  $\tilde{\mathbf{p}}$  d'une particule. Comment obtient-on les composantes covariantes  $p_\mu$ ? Écrivez ces composantes explicitement.

**6.3** — On peut écrire l'opérateur gradient sous forme tensorielle :

$$\tilde{\nabla} : \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Explicitez  $\partial_\mu$  et  $\partial^\mu$ .

**6.4** — Explicitez la contraction  $\partial_\mu \partial^\mu$ . Que reconnaissez-vous?

## 4<sup>ème</sup> Partie

Dynamique relativiste — Quadri-vecteur énergie-impulsion (ou quadri-impulsion) — Défaut de masse — Collisions élastiques et inélastiques de particules — Effet Compton — Energie seuil — Boson de Higgs.

### 1. Energie et impulsion

**1.1** — Rappelez la définition de la quadri-impulsion d'une particule de masse  $m$ , de temps propre  $\tau$ , de ligne d'univers  $\tilde{x}(\tau)$ .

**1.2** — En déduire les expressions de l'énergie et de l'impulsion de la particule de masse  $m$ , de vitesse  $\mathbf{u}$ .

**1.3** — En déduire les diverses identités remarquables satisfaites par la quadri-impulsion, l'énergie, l'impulsion et la vitesse  $\mathbf{u}$  de la particule de masse  $m$ .

**1.4** — On considère la diffusion élastique proton-proton vue du laboratoire : proton cible immobile, énergie cinétique du proton incident 437 MeV, masse du proton 938 MeV. On s'intéresse au cas où les deux protons de l'état final ont la même énergie. Considérant la conservation de la quadri-impulsion totale, et donc de son carré, calculez l'angle formé par les directions de propagation des protons de l'état final. Et dans le cas d'un proton incident de 1 TeV (produit par le TEVATRON du Fermilab) ?

**1.5** — On considère la collision inélastique,  $m + m \rightarrow m'$ , d'une particule de masse  $m$ , de vitesse  $4/5c$ , sur une particule de masse  $m$ , immobile. Calculez la masse  $m'$  de la particule finale, ainsi que sa vitesse.

### 2. Défaut de masse, énergie de liaison, bilan d'une réaction nucléaire

**2.1 — Défaut de masse du deutérium.** L'hydrogène possède un isotope dont le noyau comporte un proton et un neutron : le deutérium  ${}^2_1\text{H}$  aussi noté  ${}^2_1\text{D}$ . Estimez précisément sa masse à partir de ses constituants ( $m_p = 1.007276 \text{ u}$ ,  $m_n = 1.008665 \text{ u}$ ,  $m_e = 511 \text{ keV}/c^2$ ). La masse atomique du deutérium est en fait  $2.014102 \text{ u}$ . Où est passée la différence ? Faites le calcul en unités atomiques et en MeV. Que représente cette différence d'énergie ?

**2.2** — Faites le même calcul pour l'hélium  ${}^4_2\text{He}$ , le béryllium-8  ${}^8_4\text{Be}$  et l'uranium  ${}^{238}_{92}\text{U}$ .

**2.3** — Déduisez-en l'énergie de liaison par nucléon de chacun de ces noyaux.

**2.4 — Désintégration du Béryllium-8.** Le béryllium-8 est un isotope instable du Béryllium ; sa demi-vie est très brève,  $T_{1/2}({}^8_4\text{Be}) \approx 8.2 \times 10^{-17} \text{ s}$ . Son noyau se désintègre spontanément en 2 noyaux d'hélium-4.

Écrivez le bilan de la réaction. En se plaçant dans le référentiel propre de l'atome de béryllium-8 avant désintégration, écrivez la conservation du quadri-vecteur énergie-impulsion total. Déduisez-en l'énergie libérée, et l'énergie cinétique emportée par chacun des deux hélium-4 produits.

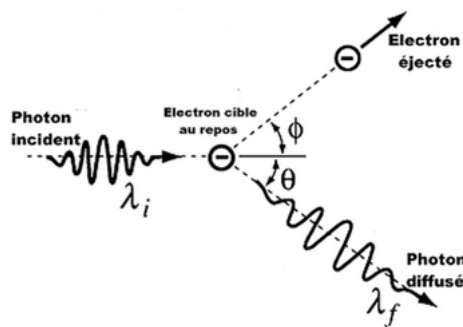
Données :

$$\begin{aligned}
 m_n &= 1.008665 \text{ u} &= 939.565 \text{ MeV}/c^2 \\
 m_p &= 1.007276 \text{ u} &= 938.272 \text{ MeV}/c^2 \\
 m_e &= 0.000549 \text{ u} &= 511 \text{ keV}/c^2 \\
 m({}_1^2\text{H}) &= 2.014102 \text{ u} \\
 m({}_2^4\text{He}) &= 4.0026033 \text{ u} \\
 m({}_4^8\text{Be}) &= 8.0053051 \text{ u} \\
 m({}_{92}^{238}\text{U}) &= 238.05078 \text{ u} \\
 1 \text{ u} &= 1.660538 \times 10^{-27} \text{ kg} &= 931.494 \text{ MeV}/c^2.
 \end{aligned}$$

### 3. L'effet Compton

En 1923, Arthur H. Compton (1892-1962) découvre que lorsqu'un photon diffuse sur un électron, la longueur d'onde du photon diffusé est modifiée, et que ce changement de longueur d'onde  $\Delta\lambda$  dépend de l'angle de diffusion  $\theta$ . Ce phénomène, inexplicable par l'électromagnétisme classique, ne peut être compris que dans le cadre relativiste; la découverte de l'effet Compton établit définitivement l'idée de dualité onde-corpuscule pour le photon.

**3.1** — On considère la collision d'un photon d'énergie  $h\nu_i$  avec un électron libre au repos (approximation raisonnable lorsque l'énergie du photon incident est grande devant l'énergie de liaison des électrons). Ecrivez la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement dans le référentiel du laboratoire.



**3.2** — Déduisez-en le décalage de longueur d'onde  $\Delta\lambda = \lambda_f - \lambda_i$  du photon diffusé en fonction de son angle de diffusion  $\theta$ .

**3.3** — Expérimentalement (A. H. Compton, *Phys. Rev.*, **21** (1923), 483.), A. H. Compton trouve qu'à  $90^\circ$  la longueur d'onde de la raie  $K\alpha$  ( $\lambda_i = 0.0708 \text{ nm}$ ) du molybdène est mesurée à  $\lambda_f = 0.0730 \text{ nm}$ . Déduisez-en une estimation de la masse de l'électron.

**3.4** — Le processus inverse de l'effet Compton, baptisé diffusion Compton inverse, se produit lorsque des électrons très énergétiques sont freinés par les photons du milieu. Ce phénomène est observé en astrophysique, par exemple lorsque les photons du rayonnement fossile micro-onde interagissent avec les électrons très énergétiques du gaz chaud d'un amas de galaxies (effet Sunyaev-Zel'dovich).

Montrez que dans ce cas, le photon diffusé *gagne de l'énergie* aux dépens de l'électron (astuce : reprendre le calcul précédent en se plaçant dans le référentiel de l'électron après la collision).

**3.5** — Montrez qu'un processus où le photon disparaîtrait par absorption par un électron libre est impossible, du fait des lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion. Commentez pour l'effet photoélectrique.

**3.6** — Un photon peut aussi disparaître et se matérialiser sous la forme d'une paire électron-positron  $e^- e^+$ . Quelle est l'énergie minimale qu'un photon doit posséder pour produire une paire  $e^- e^+$ ? Montrez que ce processus de production de paire ne peut pas se produire dans le vide (il ne se produit en fait qu'en présence d'un champ électromagnétique externe, par exemple dans la matière à proximité d'un noyau atomique).

**3.7** — Montrez, de même, que l'annihilation d'une paire  $e^+ e^-$  ne peut pas s'effectuer en produisant un photon unique, mais au minimum deux photons (la désintégration d'une paire  $e^+ e^-$  s'effectue en fait en produisant soit deux photons, soit trois photons).

## 4. Désintégration du pion

On considère le processus de désintégration d'un pion *au repos* :

$$\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

**4.1** — La masse du neutrino (ici muonique) n'étant toujours pas connue, on attribue à celui-ci une masse  $m_\nu$ , et l'on souhaite calculer l'énergie  $E_\mu$  du muon émis. La procédure standard consiste, sur la base du principe de conservation de la quadri-impulsion totale, à exprimer la quadri-impulsion de la particule non-observée, le neutrino ici, en termes des quadri-impulsions des autres particules, et à élever au carré les deux membres de cette expression, éliminant ainsi l'énergie et l'impulsion du neutrino trop difficiles à mesurer.

Établissez ainsi l'expression de l'énergie du muon émis en fonction des masses des trois particules en jeu.

**4.2** — La masse du pion est  $m_\pi = 139.57 \text{ MeV}/c^2$ ; celle du muon  $m_\mu = 105.66 \text{ MeV}/c^2$ . La masse du neutrino mu est inconnue; les expériences de mesure des oscillations de neutrinos ont montré que leur masse est non nulle; elle est cependant très faible (inférieure à l'électron-volt). On pourra donc ici négliger le terme en  $m_\nu$ . Donnez la valeur numérique de l'énergie totale et de l'énergie cinétique du muon produit, dans le référentiel du pion au repos avant désintégration.

**4.3** — Que vaut la quantité de mouvement relativiste  $\mathbf{p}_\mu$  du muon? Déduisez-en la quantité de mouvement emportée par le neutrino.

**4.4** — En négligeant la masse du neutrino (qui est très petite, et mal connue), estimez l'énergie emportée par le neutrino. Vérifiez que l'énergie totale est bien conservée.

## 5. Expériences sur cible fixe et sur collisionneurs

On s'intéresse à la collision de deux particules identiques de masse  $m$ , dans deux configurations : collision d'une particule en mouvement sur une particule identique, immobile ("cible fixe", fig. 7), et collision de deux particules identiques animées de vitesses égales en norme et opposées ("collisionneur symétrique", fig. 8).

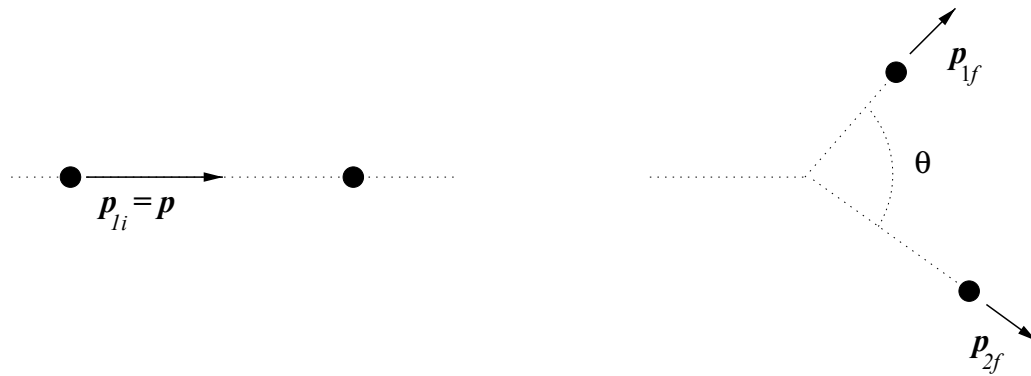


FIGURE 7 – Collision élastique sur cible fixe.

### Collision élastique sur cible fixe : traitement relativiste

On s'intéresse à la collision élastique d'une particule de masse  $m$ , d'impulsion  $\mathbf{p}$  et d'énergie cinétique  $T$  sur une particule identique, immobile (la "cible", fig. 7).

Dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , on considère un dispositif expérimental où une particule de masse  $m$  de vitesse  $\mathbf{u}$ , de quantité de mouvement  $\mathbf{p}$  d'énergie  $E$  entre en collision avec une particule identique, mais immobile ("collision sur cible fixe").

5.1 — Écrivez la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total lors de la collision.

5.2 — Écrivez la masse invariante  $M^*$  du système constitué par les deux particules. Quelle est l'énergie totale  $E^*$  disponible dans le référentiel du centre de masse  $\mathcal{R}^*$ , en fonction de  $E$  et  $m$ ? Exprimez  $M^*$  et  $E^*$  en fonction de l'énergie cinétique  $T$  du proton incident.

### Collisionneur symétrique : collision élastique

On considère maintenant le cas d'un collisionneur symétrique : dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire, les deux particules possèdent la même énergie  $E$  et des impulsions (quantités de mouvement) opposées mais de même norme  $p$  (fig. 8).

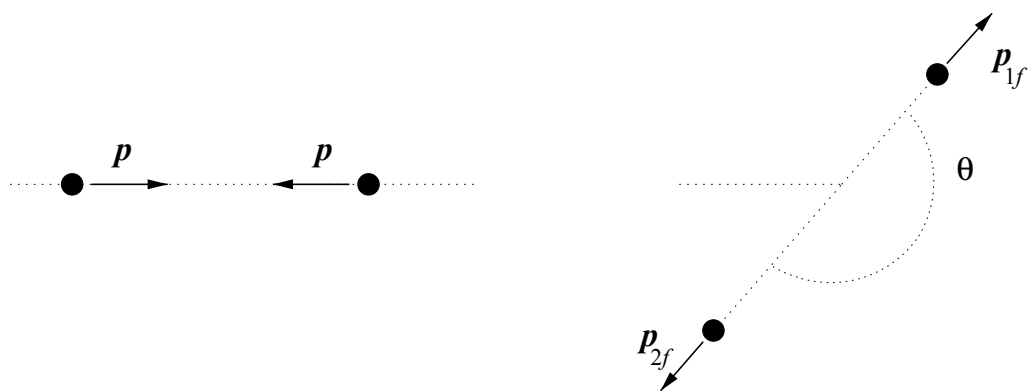


FIGURE 8 – Collision symétrique (collisionneur).

5.3 — Écrivez la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion avant et après la collision, dans le référentiel du laboratoire.

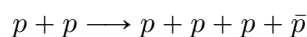
5.4 — Que pensez-vous du référentiel du centre de masse du système  $\mathcal{R}^*$ ?

**5.5** — Écrivez la masse invariante  $M^*$  du système constitué par les deux particules. Quelle est l'énergie totale  $E^*$  disponible dans le référentiel du centre de masse  $\mathcal{R}^*$ , en fonction de  $E$  et  $m$ ? De même, faites apparaître l'énergie cinétique  $T$  des protons avant la collision.

### Collision inélastique : production des anti-protons

En physique des particules on cherche à produire des collisions inélastiques : l'objectif est de concentrer pendant un bref instant une énergie considérable dans un petit volume afin de produire des particules nouvelles, souvent de courte durée de vie et donc inexistantes dans la matière ordinaire, afin d'étudier les propriétés de ces particules.

Considérons la réaction suivante, qui vise à produire des anti-protons  $\bar{p}$  en faisant collisionner des protons  $p$  : on transforme ici une partie de l'énergie cinétique des protons incidents en une paire proton / anti-proton,



**5.6** — En utilisant la notion de masse invariante, déterminez l'énergie cinétique minimale  $T$  qu'il faut donner aux protons d'un faisceau qui frappe une cible d'hydrogène, pour produire effectivement des antiprotons (scénario "cible fixe"). Application numérique.

**5.7** — En procédant de même, déterminez l'énergie cinétique minimale  $T$  qu'il faut fournir aux protons de deux faisceaux opposés pour produire des antiprotons (scénario "collisionneur symétrique"). Application numérique.

**5.8** — Entre ces deux types d'expériences, quelle est la méthode qui semble la plus avantageuse? Commentez. Données : masse du proton et de l'anti-proton :  $m_p = m_{\bar{p}} = 938 \text{ MeV}/c^2$ .



FIGURE 9 – Edward McMillan et Edward Lofgren, responsables du projet, photographiés sur le blindage de l'accélérateur dit "Bevatron" (Lawrence Berkeley National Laboratory, USA). Exploité à partir de 1954, le Bevatron permit en 1955 la découverte de l'anti-proton en bombardant une cible fixe avec des protons d'énergie cinétique suffisante. Pour cette découverte, Emilio Gino Segrè et Owen Chamberlain se virent attribuer le prix Nobel de Physique en 1959.

## 6. La physique au Large Hadron Collider (LHC)

Afin de comprendre la structure élémentaire de la matière, les physiciens des particules ont développé des techniques d'accélération des particules chargées (électrons, protons, ions, etc) permettant de produire des collisions à très haute énergie. L'analyse détaillée de chaque collision permet de mieux comprendre la sous-structure des particules, leurs interactions, et de découvrir de nouvelles particules. C'est ainsi qu'ont été découverts un ensemble de particules élémentaires prédites par le *Modèle Standard* : les quarks charm (c), bottom (b) et top (t); les bosons  $W^+$ ,  $W^-$  et  $Z$ ; et enfin le boson de Higgs en 2012.

### Collision inélastique : production d'une paire $X \bar{X}$

En physique des particules on cherche à produire des collisions inélastiques : l'objectif est de concentrer pendant un bref instant une énergie considérable dans un petit volume afin de produire des particules inexistantes dans la matière ordinaire et pouvoir ainsi étudier leurs propriétés.

Considérons la réaction inélastique suivante, qui vise à produire une paire de particules quelconques  $X$  et  $\bar{X}$  ( $X$  et son anti-particule  $\bar{X}$ ) de mêmes masses  $m_X$  en faisant collisionner des protons, selon :

$$p + p \longrightarrow p + p + X + \bar{X}.$$

Les deux protons qui interagissent ont la même énergie cinétique avant la collision, mais viennent de directions opposées (les deux faisceaux de protons circulent en sens opposés dans l'accélérateur circulaire). Pour simplifier, on supposera ici que les protons incidents survivent après la collision, ce qui n'est généralement pas le cas pour les collisions intéressantes au LHC.

**6.1** — Écrivez la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion pour cette réaction.

**6.2** — Exprimez la masse invariante du système, avant et après la réaction.

**6.3** — Déterminer l'énergie cinétique minimale  $T$  qu'il faut fournir aux protons de deux faisceaux opposés pour produire une particule  $X$  de masse  $m_X$  et son antiparticule  $\bar{X}$  de même masse (en supposant les protons intacts après la collision).

### Détection du boson de Higgs dans le canal $\gamma\gamma$

Si l'énergie dans le centre de masse est suffisante, il est possible de produire un boson de Higgs dans la collision. Le boson de Higgs est instable et peut se désintégrer de différentes manières (on parle de "voies" ou de "canaux de désintégration"). Il peut par exemple se désintégrer en deux photons gamma (canal diphoton) : cette signature de la présence très éphémère d'un boson de Higgs est l'une des plus faciles à mettre en évidence ("canal en or").

**6.4** — Ecrivez l'équation-bilan de la désintégration du boson de Higgs (noté  $H$ ) en deux photons gamma. On se place dans le référentiel du boson de Higgs  $\mathcal{R}_H$  : écrivez la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total avant et après la désintégration.

**6.5** — Que vaut la masse invariante  $m_{\gamma\gamma}$  du système formé par les deux photons issus de la désintégration du Higgs ? Quelle est l'énergie de chaque photon dans le référentiel du Higgs  $\mathcal{R}_H$  ? Que vaut nécessairement l'angle entre les deux photons émis dans  $\mathcal{R}_H$  ?

**6.6** — Écrivez maintenant le bilan de la désintégration du Higgs en deux photons dans le référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}$ . Exprimez la masse invariante en fonction des énergies  $E_1$  et  $E_2$  de chacun des deux photons et de l'angle  $\theta_{12}$  entre les deux photons. Exprimez la masse  $m_H$  du boson de Higgs en fonction de  $E_1$ ,  $E_2$  et  $\theta_{12}$ .

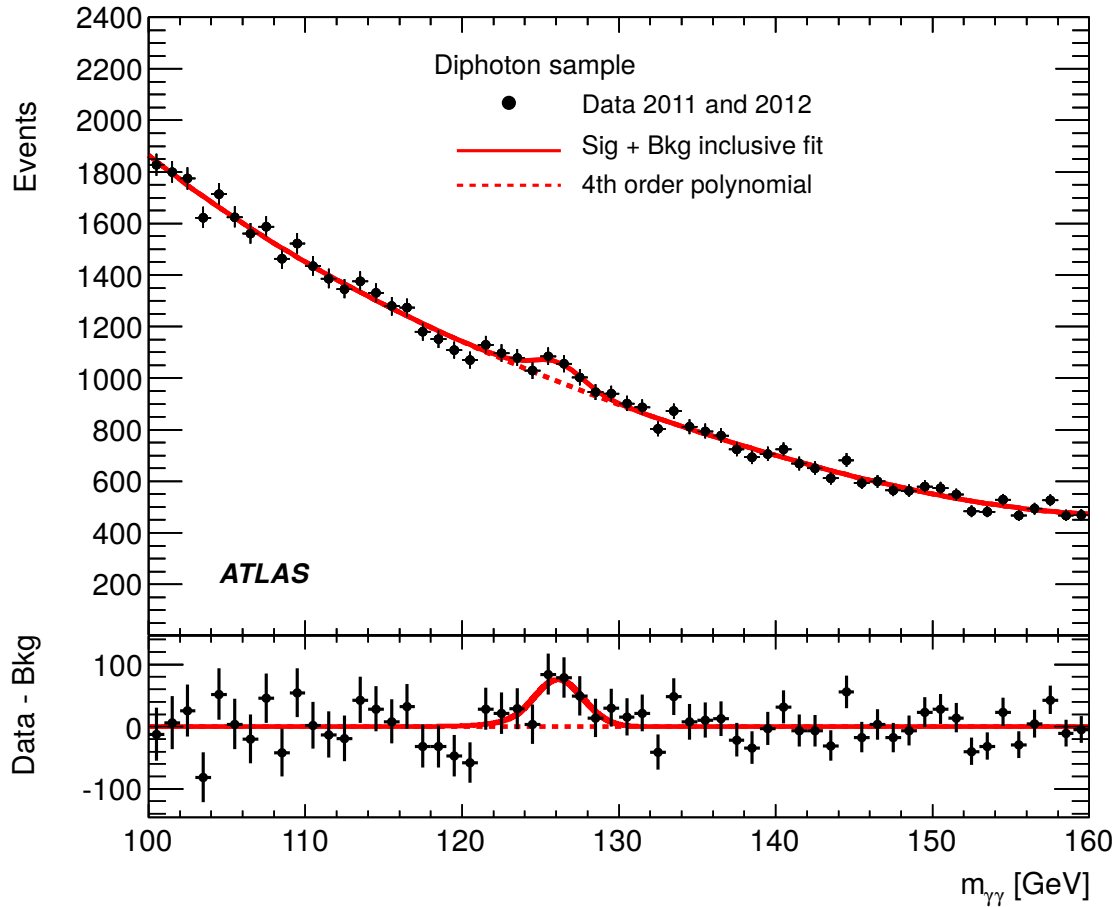


FIGURE 10 – Distribution de la masse invariante  $m_{\gamma\gamma}$  mesurée pour tous les événements avec 2 photons de haute énergie dans l'expérience ATLAS au LHC (points noirs). En pointillés rouges, modélisation du fonds dû à toutes les autres réactions produisant principalement deux photons gamma. Première analyse du canal "diphoton", thèse de doctorat de Heberth Torres (2013), LPNHE.

6.7 — La figure 10 représente la distribution de la masse invariante  $m_{\gamma\gamma}$  pour les événements où sont apparus deux photons  $\gamma$  de haute énergie. Il s'agit du premier lot de mesures effectuées dans l'expérience ATLAS au LHC, ayant permis la découverte du Higgs. Déduisez-en la masse du boson de Higgs (donnez une estimation de sa valeur numérique).



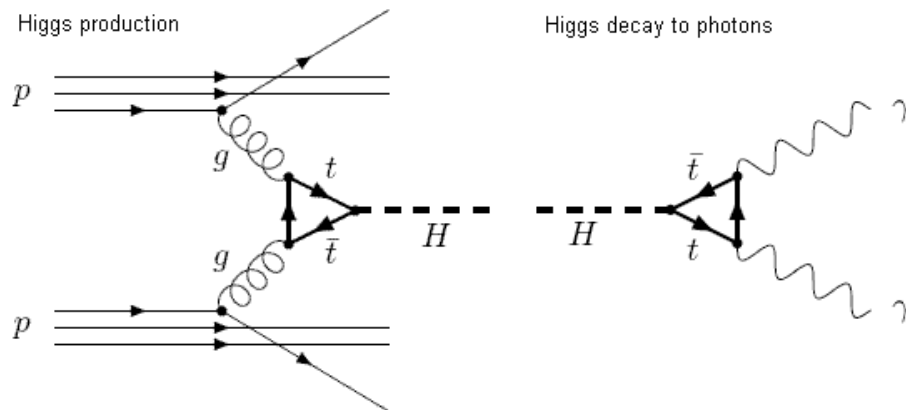


FIGURE 11 – Diagrammes de Feynman (le temps va de gauche à droite) : à gauche, production d'un boson de Higgs dans une collision de protons par fusion de gluons (les protons sont "détruits" dans ce type de collision); à droite, désintégration du boson de Higgs en deux photons.

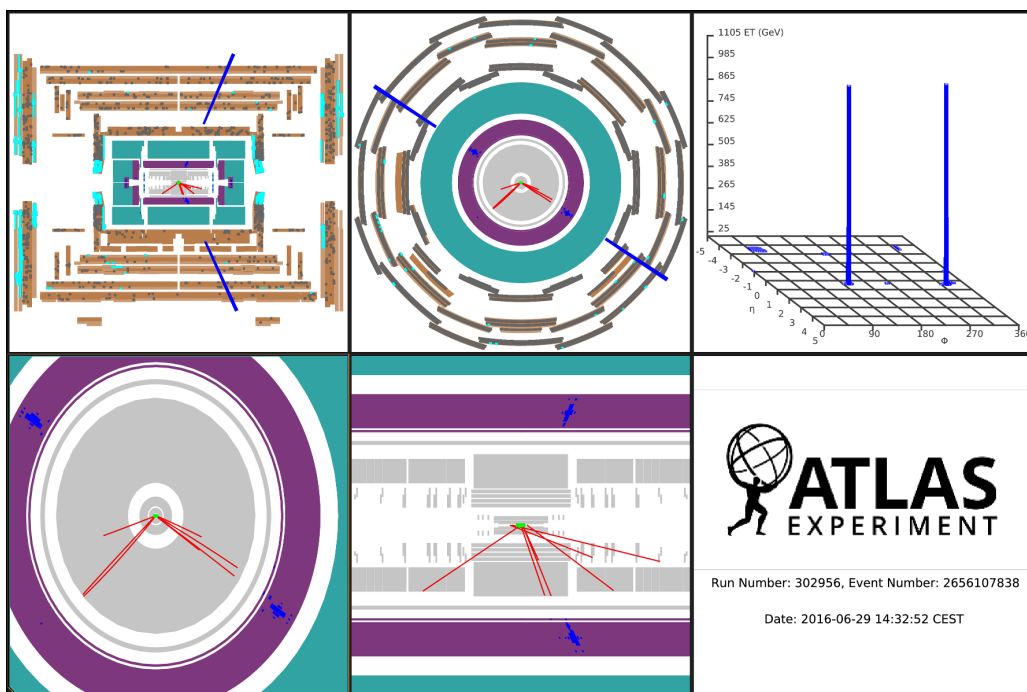


FIGURE 12 – Événement avec production de deux photons isolés de haute énergie dans l'état final. Expérience ATLAS, LHC. Les deux photons gamma se convertissent dans le détecteur, et forment deux gerbes de particules chargées (dépôts d'énergie indiqués en bleu)

## 5<sup>ème</sup> Partie

Représentation relativiste du champ électromagnétique – Invariance de jauge – Force de Lorentz – Equation d’onde – Optique

### 1. Equations de Maxwell, invariance de jauge

1.1 — À partir des équations du champ électromagnétique sous leur forme relativiste,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \quad \partial^\sigma F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\sigma} + \partial^\nu F^{\sigma\mu} = 0$$

retrouvez les quatre équations de Maxwell dans le vide.

1.2 — Rappelez les expressions des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  en fonction du potentiel scalaire  $V$  et du potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ .

1.3 — En partant du quadripotentiel  $\tilde{\mathbf{A}} : A^\mu = (V/c, \mathbf{A})$ , Montrez comment les composantes parallèles  $\mathbf{E}_\parallel, \mathbf{B}_\parallel$  et perpendiculaires  $\mathbf{E}_\perp, \mathbf{B}_\perp$  se transforment par changement de référentiel.

1.4 — Le potentiel  $\tilde{\mathbf{A}} : A^\mu = (V/c, \mathbf{A})$  n’est pas défini de façon univoque. Montrez que pour toute fonction scalaire  $\chi$ , la transformation suivante :

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi$$

laisse  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  inchangés. On parle d’*invariance de jauge*. Montrez que  $F^{\mu\nu}$  vérifie l’invariance de jauge.

En fonction du problème traité, on pourra choisir la *jauge* la plus adaptée. On rencontre généralement les deux choix de jauge suivants :

$$\text{Jauge de Coulomb :} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

$$\text{Jauge de Lorenz :} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

1.5 — Montrez que la condition de la jauge de Lorenz s’écrit simplement  $\partial_\mu A^\mu = 0$ .

1.6 — Écrivez l’équation de propagation du potentiel  $\tilde{\mathbf{A}}$  dans le vide. Montrez que cette équation prend une forme très simple dans la jauge de Lorenz.

1.7 — Vérifiez que toute fonction de la forme  $f(\tilde{\mathbf{r}}) = C e^{i\tilde{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{r}}}$  avec  $\tilde{\mathbf{k}} : k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$  est solution de l’équation  $\square f = 0$ .

1.8 — Que reconnaissez-vous dans le produit  $\varphi = \tilde{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{r}} = k_\mu r^\mu$  ? Est-ce un invariant de Lorentz ?

### 2. Accélération d’une particule chargée dans un champ électrique uniforme

Afin de comprendre la structure élémentaire de la matière, les physiciens des particules ont développé des techniques d’accélération des particules chargées (électrons, protons, ions, etc) permettant de produire des collisions à très haute énergie. L’analyse détaillée de chaque collision permet de mieux comprendre la sous-structure des particules, leurs interactions, et de découvrir de nouvelles particules. C’est ainsi qu’ont été découverts un ensemble de particules élémentaires prédites par le

*Modèle Standard* : les quarks charm (c), bottom (b) et top (t); les bosons  $W^+$ ,  $W^-$  et  $Z$ ; et enfin le boson de Higgs en 2012.

Le boson de Higgs a été mis en évidence au *Large Hadron Collider* dans des collisions de protons dont l'énergie cinétique est de plusieurs téra-électrons-volts (TeV). Pour atteindre cette énergie, les protons sont injectés et accélérés dans une succession d'accélérateurs de plus en plus puissants (fig. 13). Les faisceaux de protons entrent en collision en 4 points du LHC, où sont placés 4 énormes détecteurs de particules dédiés : ATLAS, CMS, LHCb et ALICE.

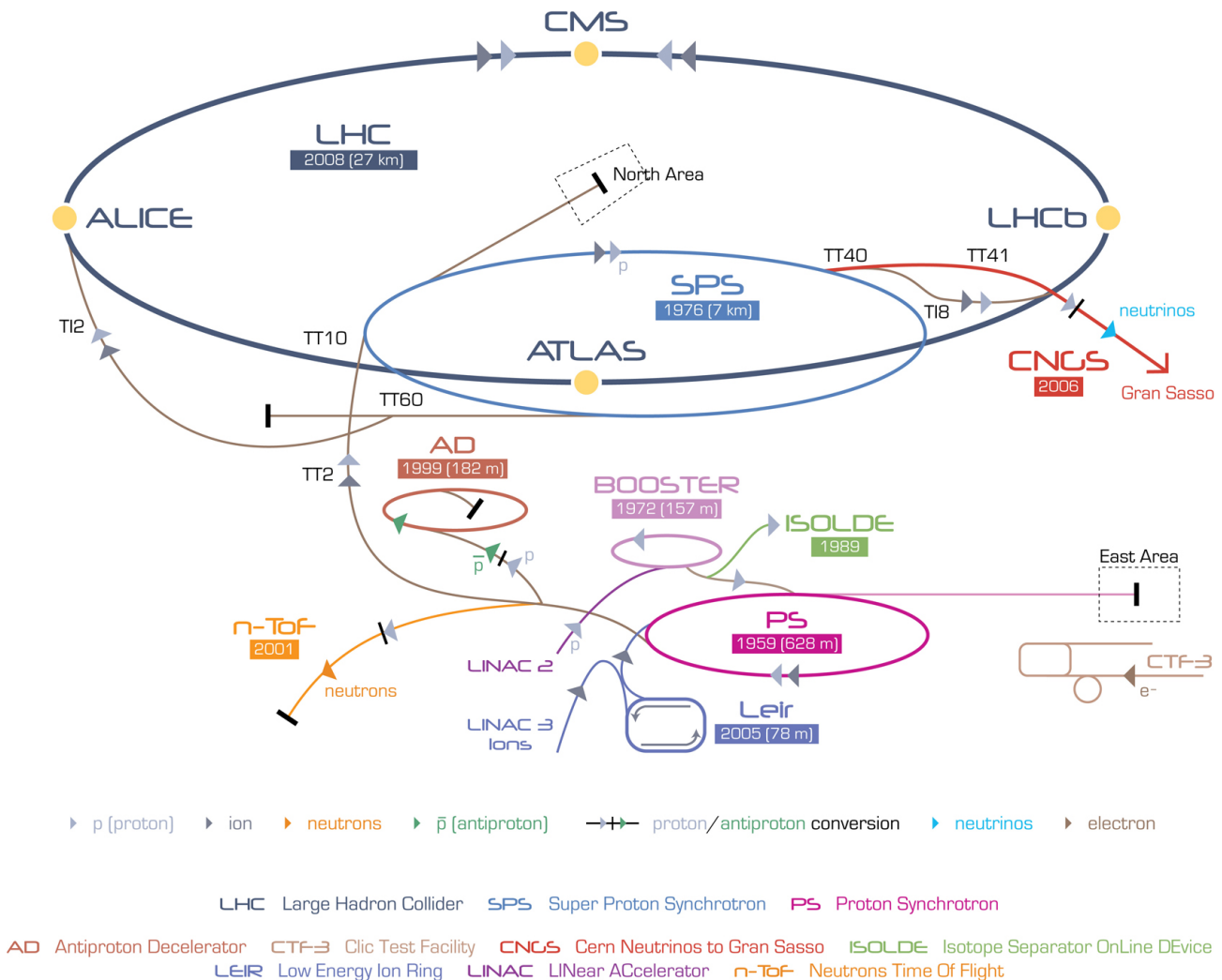


FIGURE 13 – Structure des accélérateurs de particules du CERN (Genève). Les protons sont d'abord accélérés dans l'accélérateur linéaire "LINAC 2" ( $T = 50$  MeV), puis injectés et accélérés dans le synchrotron "PS Booster" ( $T = 1.4$  GeV), puis dans le PS ( $T = 25$  GeV), le SPS ( $T = 450$  GeV) et enfin le LHC lui-même ( $T = 7$  TeV).

## Accélération d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme

La source des protons du LHC est une bouteille d'hydrogène gazeux, située à l'entrée du LINAC 2. L'hydrogène est soumis à un champ électrique, qui arrache ses électrons afin de ne laisser entrer dans l'accélérateur que les protons.

Dans sa forme la plus simple, un accélérateur linéaire LINAC consiste en un tube à vide contenant une succession de cylindres conducteurs, dont les charges électriques alternent (fig. 14). Les particules chargées sont injectées par paquets, et on inverse périodiquement la charge électrique des conducteurs cylindriques, afin de toujours accélérer les particules lors du franchissement de l'espace séparant deux cylindres de charges opposées (région de champ électrique uniforme  $E_{\text{kin}}$  sur la figure).

On se propose dans cette première partie de calculer dans le cadre relativiste le comportement d'une particule accélérée sous l'effet d'un champ électrique uniforme.

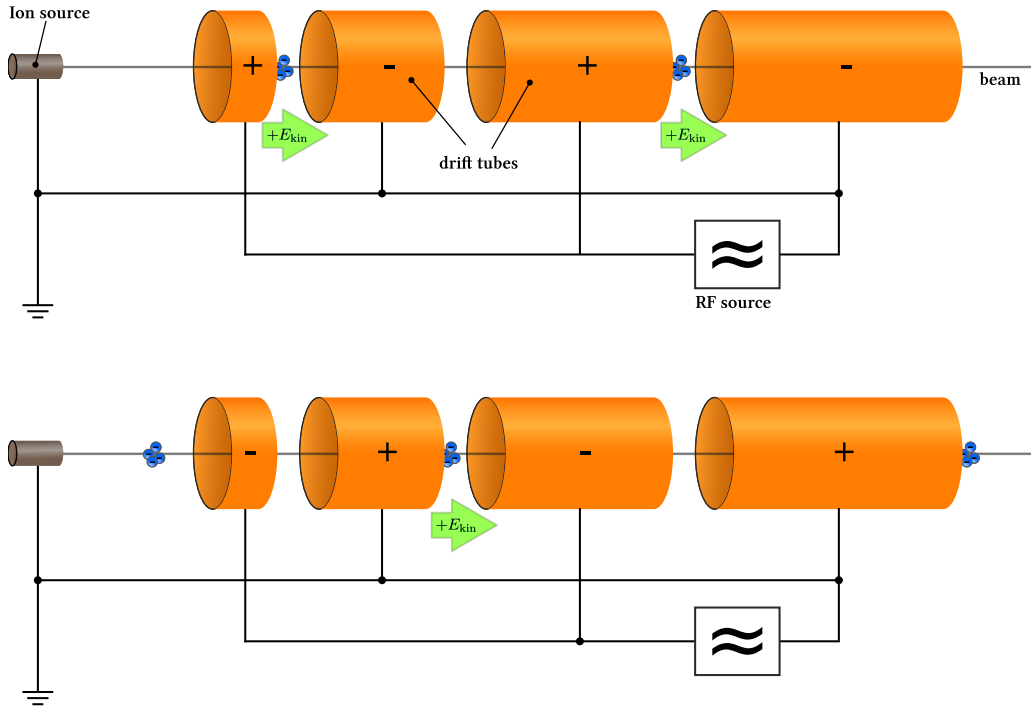


FIGURE 14 – Principe de fonctionnement d'un accélérateur linéaire (LINAC) dans sa forme la plus simple. Les particules sont injectées par paquets (pulses). Les cylindres conducteurs portent des charges électriques alternées, que l'on inverse périodiquement. Lorsque les particules passent d'un cylindre au suivant, elles subissent le champ électrique  $E_{\text{kin}}$  : l'inversion périodique des charges des cylindres permet de toujours accélérer les particules dans le même sens.

2.1 — Question de cours : à partir de l'équation de Maxwell écrite sous forme covariante :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$$

Retrouvez les deux équations de Maxwell sous leur forme habituelle (équations exprimant les relations entre les champs et les sources).

On rappelle la forme du tenseur du champ électromagnétique  $F^{\mu\nu}$  :

$$\tilde{\mathbf{F}} : F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

2.2 — Rappelez l'expression du quadrivecteur énergie-impulsion  $\tilde{\mathbf{p}}$  et celle de ses composantes contravariantes  $p^\mu$  et covariantes  $p_\mu$ .

**2.3** — Par analogie avec la mécanique classique, on définit le quadrivecteur force  $\tilde{\mathbf{f}}$  par :

$$\tilde{\mathbf{f}} = \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{d\tau}$$

Est-ce bien un quadrivecteur ? Justifiez. Ecrivez les composantes  $f^\mu$  de  $\tilde{\mathbf{f}}$  en fonction des dérivées par rapport à  $t$  de l'énergie  $E$  de la particule et de sa quantité de mouvement  $\mathbf{p}$ .

**2.4** — Montrez que pour une particule de quadrivitesse  $\tilde{\mathbf{U}}$  subissant une quadriforce  $\tilde{\mathbf{f}}$ , on a  $\tilde{\mathbf{f}} \cdot \tilde{\mathbf{U}} = f^\mu U_\mu = 0$ . Déduisez-en que :

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}$$

où on notera

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(\gamma(u)m\mathbf{u})}{dt}$$

Dans le référentiel du laboratoire, on considère une région de l'espace où règne un champ électrique uniforme et constant  $\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x$ .

**2.5** — Donnez explicitement  $F^{\mu\nu}$  dans la région de l'espace où  $\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x$ .

On considère une particule de charge  $q$  placée dans le champ : on note  $\tilde{\mathbf{r}}$  sa position,  $\mathbf{u}$  son vecteur vitesse et  $\tilde{\mathbf{U}}$  sa quadri-vitesse. Les composantes contravariantes de la quadriforce de Lorentz  $\tilde{\mathbf{f}}$  qu'elle subit s'écrivent :

$$f^\mu = qF^\mu{}_\nu U^\nu = qF^{\mu\nu} U_\nu. \quad (9)$$

**2.6** — Rappelez l'expression des composantes contravariantes  $U^\mu$  et covariantes  $U_\mu$  de la quadri-vitesse  $\tilde{\mathbf{U}}$ .

**2.7** — À partir de l'équation (9), donnez explicitement les composantes  $f^0, f^1, f^2$  et  $f^3$  du quadrivecteur  $\tilde{\mathbf{f}}$ .

**2.8** — Déduisez-en les équations différentielles auxquelles obéissent l'énergie  $E$  et la quantité de mouvement  $\mathbf{p}$  de la particule qui subit le champ électrique. Montrez que

$$\frac{d(\gamma(u)\mathbf{u})}{dt} = \frac{qE_x}{m} \mathbf{e}_x = a \mathbf{e}_x \quad \text{avec} \quad a = \frac{qE_x}{m}$$

**2.9** — À  $t = 0$  la particule est immobile ( $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ) dans le référentiel du laboratoire à la position  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ . Déduisez-en l'expression de la vitesse  $u$  en fonction du temps (on aura avantage à faire apparaître la rapidité  $\varphi$ ).

Lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , vers quelle valeur tend  $u$  ? Comparez avec le cas classique.

**2.10** — Déduisez-en la trajectoire de la particule et donnez l'expression de  $r^\mu = (ct, x, y, z)$  en fonction de  $t$ . On aura avantage à faire apparaître la rapidité  $\varphi = \operatorname{arctanh} \beta$ . Montrez que pour  $at \ll c$ , on retrouve le résultat classique  $x(t) = at^2/2$ .

### 3. Champ électromagnétique produit par un fil infini chargé

On considère un fil infini le long de l'axe  $Oz$ , de section  $s$  négligeable devant les dimensions du problème. On se placera toujours à l'extérieur du fil.

Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen, solidaire avec le matériau constituant le fil, le fil porte une charge électrique uniformément répartie : la densité volumique de charge est  $\rho$ , et la densité linéique  $\lambda = \rho s$ . Ces charges électriques sont animées d'un mouvement uniforme à la vitesse  $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_z$ , créant ainsi dans le fil une densité de courant  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ .

### 3.1. Courant et densité de charge

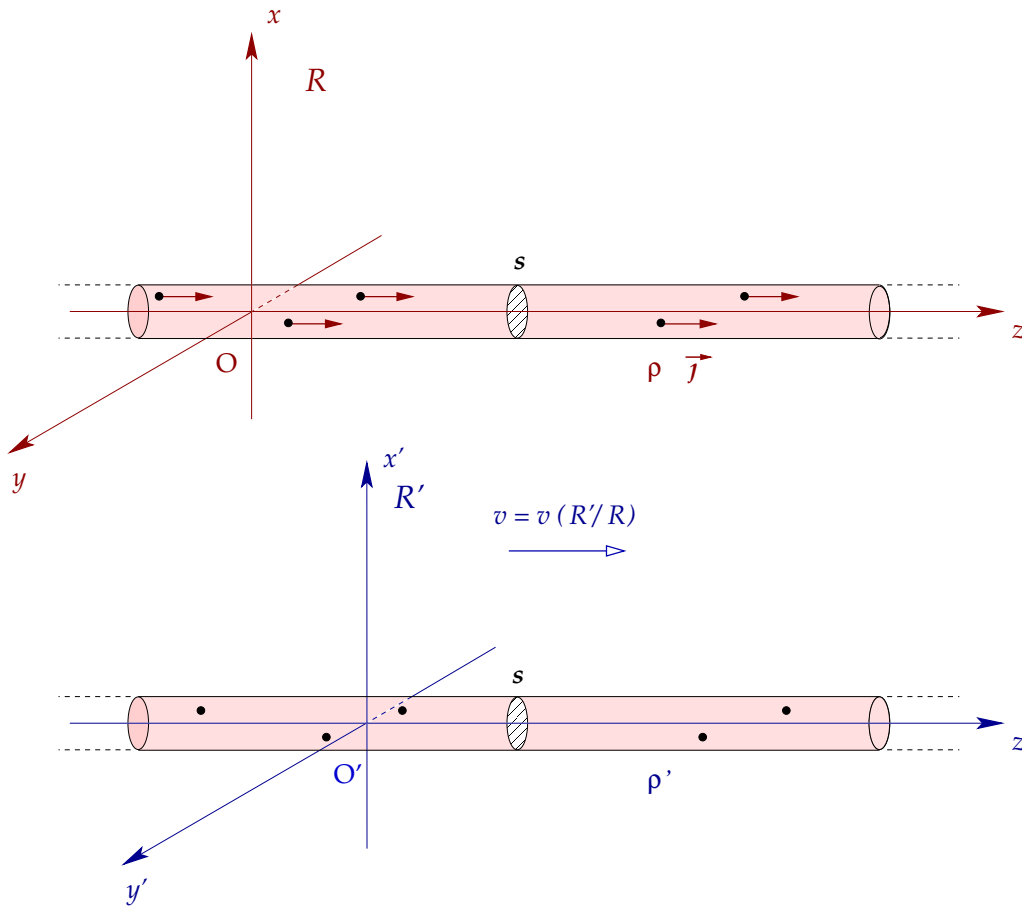


FIGURE 15 – Fil infini chargé, parcouru par un courant. Points de vue : dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du fil (haut); dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  en mouvement avec les charges (bas).

**3.1** — Exprimez le courant électrique  $I$  qui circule dans le fil en fonction de  $\mathbf{j}$  et  $s$ , puis en fonction de  $\rho$ ,  $v$  et  $s$ .

On se place maintenant dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , en translation uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$  à la vitesse  $\mathbf{v}$ , tel que  $\mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \mathbf{v} = v \mathbf{e}_z$ .

**3.2** — Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , que vaut le courant électrique  $I'$  dans le fil? La densité de courant  $\mathbf{j}'$ ?

**3.3** — Écrivez la transformation de Lorentz entre les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ . **Attention! Le mouvement relatif n'est pas selon  $Ox$  mais selon  $Oz$ !**

**3.4** — Montrez que pour un quadrivecteur quelconque  $\tilde{\mathbf{A}}$  de composantes contravariantes  $A^\nu$ , la matrice  $[\mathbf{L}]$  qui permet d'exprimer les composantes  $A'^\mu = [\mathbf{L}]^\mu{}_\nu A^\nu$  dans  $\mathcal{R}'$  en fonction des composantes  $A^\nu$  dans  $\mathcal{R}$  s'écrit :

$$\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}' \quad A'^\mu = \sum_\nu [\mathbf{L}]^\mu{}_\nu A^\nu = [\mathbf{L}]^\mu{}_\nu A^\nu \quad \text{avec} \quad [\mathbf{L}]^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Donnez la matrice inverse  $\mathbf{L}^{-1}$  telle que  $A^\mu = [\mathbf{L}^{-1}]^\mu{}_\nu A'^\nu$ . Comment se transforment les composantes covariantes  $A_\nu$  lorsqu'on passe du référentiel  $\mathcal{R}$  au référentiel  $\mathcal{R}'$ ?

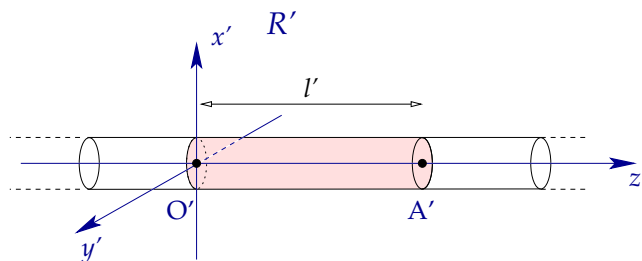
**Soyez très attentif au choix des axes effectué dans l'énoncé : le mouvement relatif est selon  $e_z$ .**

**3.5 —** Que vaut l'abscisse  $z'$  du point origine  $O'$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ ? Exprimez  $z'(O')$  en fonction de sa position  $z(O')$  dans  $\mathcal{R}$  et du temps  $t$ .

**3.6 —** Considérons un point  $A'$  fixe dans  $\mathcal{R}'$ , placé sur l'axe  $O'z'$  à une distance  $z'(A') = \ell'$  de l'origine  $O'$ . Exprimez  $z'(A')$  dans  $\mathcal{R}'$  en fonction de sa position  $z(A')$  dans  $\mathcal{R}$  et du temps  $t$ .

**3.7 —** En vous souvenant que la longueur d'un objet se mesure dans un référentiel donné en repérant la position de ses extrémités *au même instant* dans ce référentiel, déduisez-en la relation entre  $\ell = z(A') - z(O')$  et  $\ell' = z'(A') - z'(O')$ .

**3.8 —** Considérons le volume cylindrique du fil délimité par les points  $O'$  et  $A'$  (figure ci-contre). Quel est son volume  $V$  (respectivement  $V'$ ) dans le référentiel  $\mathcal{R}$  (resp.  $\mathcal{R}'$ )? En utilisant le fait que la charge électrique totale  $Q$  contenue dans ce cylindre est la même dans les deux référentiels, déduisez-en la relation qui relie la densité de charge électrique  $\rho$  vue dans  $\mathcal{R}$  et  $\rho'$  vue dans  $\mathcal{R}'$ .



**3.9 —** Retrouvez la relation entre  $\rho$  et  $\rho'$  en écrivant le quadrivecteur-courant  $\tilde{\mathbf{j}}$  :  $j^\mu = (\rho c, \mathbf{j})$  dans les deux référentiels et en exploitant l'invariance de  $\tilde{\mathbf{j}}^2 = j^\mu j_\mu$ .

## 3.2. Champ électrique

Plaçons-nous dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  : dans  $\mathcal{R}'$  les charges sont immobiles, et nous sommes en présence d'un problème classique d'électrostatique.

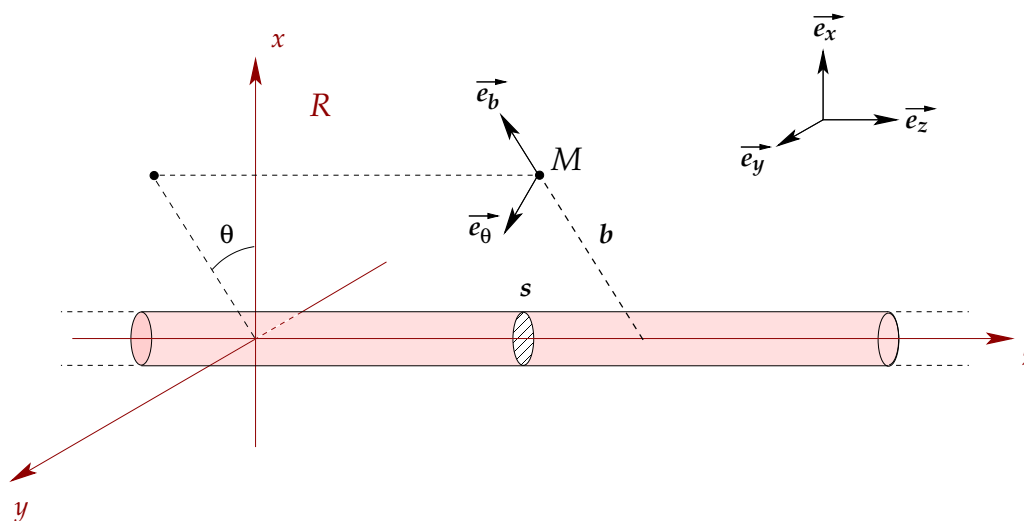
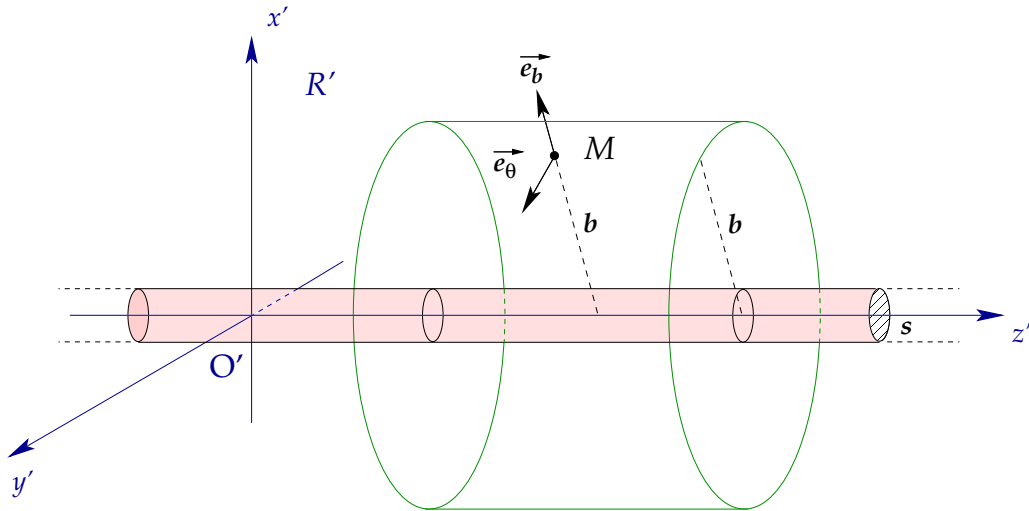


FIGURE 16 – Choix des coordonnées : on notera  $b$  la distance d'un point quelconque  $M$  au fil.

Soit un point  $M$  quelconque dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , situé à une distance  $b$  de l'axe  $z'$  du fil infini.

**3.10 —** On repère le point  $M$  par ses coordonnées polaires  $b', \theta', z'$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , et  $b, \theta, z$  dans  $\mathcal{R}$  (figure 16). Exprimez  $b$  et  $\theta$  en fonction de  $b'$  et  $\theta'$ .

**3.11 —** En utilisant des arguments de symétrie, montrez que le champ électrique  $\mathbf{E}'(M)$  est nécessairement radial, et qu'il n'est fonction que de  $b$  :  $\mathbf{E}'(M) = E'(b) \mathbf{e}_b$ .

FIGURE 17 – Volume cylindrique de rayon  $b$  pour le calcul du champ électrique par le théorème de Gauss.

**3.12** — En appliquant le théorème de Gauss pour un volume cylindrique bien choisi (voir fig. 17), montrez que l'expression de l'intensité du champ électrique  $\mathbf{E}'(b)$  à l'extérieur du fil est :

$$\mathbf{E}'(b) = E'(b) \mathbf{e}_b = \frac{\rho' s}{2\pi\epsilon_0 b} \mathbf{e}_b$$

On rappelle la forme générale du tenseur du champ électromagnétique  $F^{\mu\nu}$  :

$$\tilde{\mathbf{F}} : F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

**3.13** — Donnez explicitement l'expression du tenseur  $\tilde{\mathbf{F}}' : F'^{\mu\nu}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  pour un point quelconque M situé à l'extérieur du fil chargé.

**3.14** — Rappelez comment se transforme un tenseur contravariant de rang 2 par changement de référentiel galiléen. **Soyez très attentif au choix des axes effectué dans l'énoncé.**

**3.15** — En utilisant le résultat précédent, déduisez-en l'expression du tenseur électromagnétique  $F^{\mu\nu}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Identifiez avec l'expression générale du tenseur  $F^{\mu\nu}$ , et donnez l'expression des composantes  $(E_x, E_y, E_z)$  et  $(B_x, B_y, B_z)$  des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

**3.16** — En vous plaçant dans le référentiel  $\mathcal{R}$  et en utilisant de nouveau le théorème de Gauss, retrouvez l'expression du champ  $\mathbf{E}(M)$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Commentez.

### 3.3. Champ magnétique

On considère maintenant le système dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Dans ce référentiel, le fil est parcouru par un courant  $I$ .

**3.17** — Montrez que, par symétrie, l'intensité du champ magnétique  $B$  en un point M quelconque (à l'extérieur du fil) n'est fonction que de  $b$ , et que  $\mathbf{B}$  est nécessairement orthoradial :  $\mathbf{B} = B(b) \mathbf{e}_\theta$ .



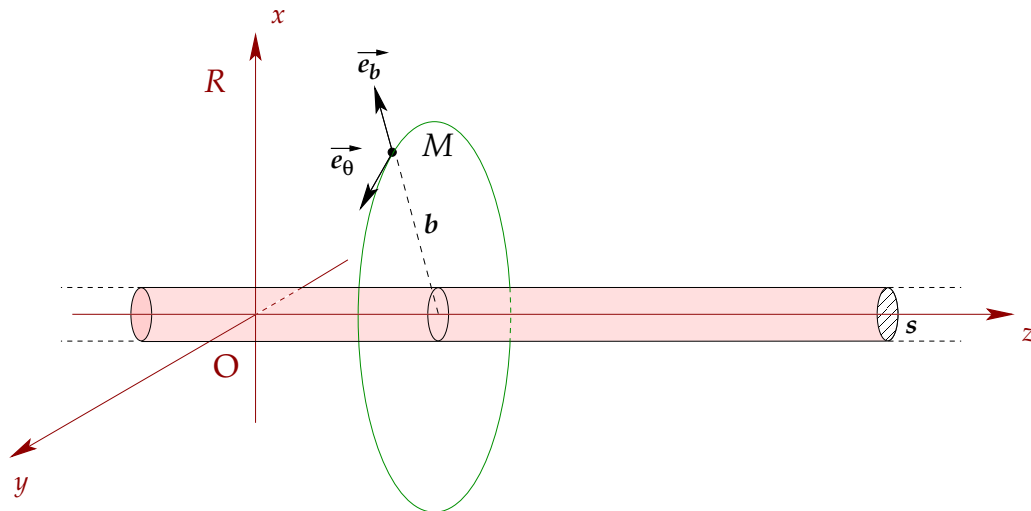


FIGURE 18 – Contour circulaire de rayon  $b$  pour le calcul du champ magnétique au point  $M$  par le théorème d'Ampère.

**3.18** — En utilisant le théorème d'Ampère sur un contour astucieusement choisi (fig 18), montrez que le champ magnétique vaut :

$$\mathbf{B}(b) = B(b) \mathbf{e}_\theta \quad \text{avec} \quad B(b) = \frac{\mu_0 j s}{2\pi b} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}$$

**3.19** — Montrez que ce résultat est cohérent avec les composantes  $(B_x, B_y, B_z)$  que vous avez obtenues précédemment par transformation du tenseur  $F^{\mu\nu}$ .

Commentez : en quoi le champ magnétique est-il un effet purement relativiste ?

## 4. Effet Doppler

En utilisant le quadrivecteur énergie-impulsion du photon, retrouvez la loi de l'effet Doppler relativiste.

## 5. Effet Doppler transverse : l'expérience d'Ives-Stilwell

### L'effet Doppler en mécanique classique

*Vous traiterez cette première partie de l'exercice dans le cadre de la mécanique classique. Vous veillerez dans vos notations à distinguer lisiblement les fréquences, notées par la lettre grecque  $\nu$  ("nu"), et les vitesses, notées  $v$ .*

L'effet Doppler, aussi appelé effet Doppler-Fizeau, est le décalage de fréquence que l'on observe lorsqu'il existe un mouvement relatif entre la source d'une onde et le récepteur de cette même onde. Le phénomène s'observe pour des ondes mécaniques, comme les ondes sonores, comme pour les ondes électromagnétiques.

En mécanique classique, on décrit en général l'effet Doppler en se plaçant dans le référentiel (supposé galiléen) du milieu de propagation de l'onde : l'air ou l'eau par exemple pour des ondes sonores, ou encore l'éther luminifère, l'hypothétique support matériel des ondes lumineuses, dans une description pré-relativiste, antérieure à la formulation de la relativité restreinte.

On notera  $c$  la vitesse de propagation des ondes considérées dans le milieu (mécaniques ou lumineuses), et  $\mathbf{c}$  le vecteur vitesse associé pour une direction donnée de propagation de l'onde ; on notera aussi  $\mathbf{v}_E$  le vecteur vitesse de l'émetteur (source) mesurée dans le référentiel du milieu de propagation, et  $\mathbf{v}_R$  le vecteur vitesse du récepteur, lui aussi mesuré dans le référentiel du milieu. Enfin,  $\nu_E$  sera la fréquence émise par la source,  $\lambda_E$  la longueur d'onde associée ;  $\nu_R$  la fréquence de l'onde reçue par le récepteur, et  $\lambda_R$  la longueur d'onde correspondante (fig. 19).

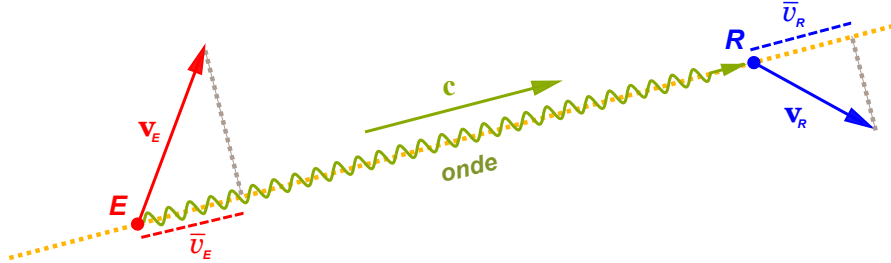


FIGURE 19 – Description classique de l'effet Doppler, pour une onde de nature quelconque.  $\mathbf{v}_E$  est le vecteur vitesse de l'émetteur et  $\mathbf{v}_R$  celui du récepteur, mesuré dans le référentiel du milieu de propagation.  $c$  est la vitesse de propagation de l'onde.  $\bar{v}_E$  et  $\bar{v}_R$  sont les projections algébriques des vitesses  $\mathbf{v}_E$  et  $\mathbf{v}_R$  sur la direction de propagation de l'onde.

En raisonnant en mécanique classique, dans le cadre galiléen, on obtient la relation suivante entre fréquence émise  $\nu_E$  et fréquence reçue  $\nu_R$  :

$$\nu_R = \frac{c - \bar{v}_R}{c - \bar{v}_E} \nu_E = \frac{1 - \bar{v}_R/c}{1 - \bar{v}_E/c} \nu_E \quad (10)$$

où  $\bar{v}_E$  et  $\bar{v}_R$  sont les projections algébriques (i.e. positives ou négatives) des vecteurs vitesses  $\mathbf{v}_E$  et  $\mathbf{v}_R$  sur la direction de propagation de l'onde (fig. 19) :

$$\bar{v}_E = \frac{\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{c}}{c} = \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{e}_c \quad \text{et} \quad \bar{v}_R = \frac{\mathbf{v}_R \cdot \mathbf{c}}{c} = \mathbf{v}_R \cdot \mathbf{e}_c \quad \text{avec} \quad \mathbf{e}_c = \frac{\mathbf{c}}{c}.$$

Dans le référentiel du milieu de propagation, supposé galiléen, on considère une source  $E$  (par exemple, sonore) en mouvement à la vitesse  $\mathbf{v}_E = v \mathbf{e}_x$  avec  $v > 0$ .

**5.1** — Supposons que cette source émette une onde de fréquence  $\nu_E$ , par exemple sonore, qui se propage vers l'avant (direction des  $x$  positifs), et que l'onde soit reçue par un récepteur immobile  $R$  situé sur l'axe des  $x$ , en avant de la source. Faites un schéma. Écrivez dans ce cas l'expression de la fréquence  $\nu_R$  de la même onde, du point de vue du récepteur ? Exprimez  $\lambda_R$  en fonction de  $\lambda_E$ ,  $v$  et  $c$ . Qu'observe-t-on ?

**5.2** — Supposons que le récepteur soit toujours immobile, mais situé sur une droite à angle droit avec la direction du mouvement de la source. Supposons de plus que l'onde soit émise exactement lorsque la direction émetteur-source est perpendiculaire à la direction du mouvement de la source (fig. 20).

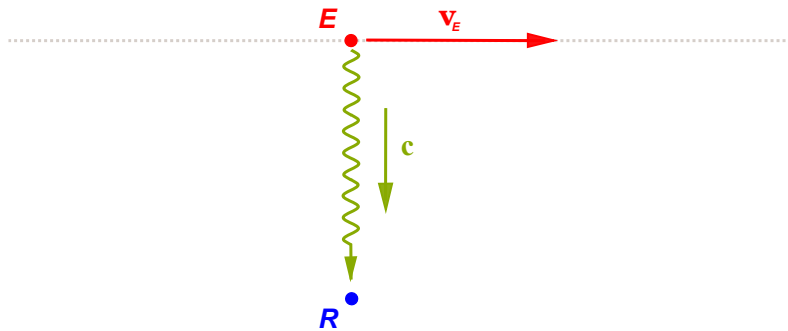


FIGURE 20 – Cas d'une onde émise par la source  $E$  en mouvement, lorsque l'onde se propage perpendiculairement à la direction du mouvement.

Que valent alors la fréquence  $\nu_R$  et la longueur d'onde  $\lambda_R$  de l'onde reçue par  $R$  ? Commentez.

**5.3** — Supposons maintenant que l'onde soit émise selon une direction formant un angle  $\theta$  avec  $\mathbf{v}_E$  (fig. 21) vers l'avant. Que valent alors  $\nu_R$  et  $\lambda_R$  (configuration 1 sur la figure 21) ? Même question pour un angle  $\theta$ , mais vers l'arrière (configuration 2 sur la figure 21) ?

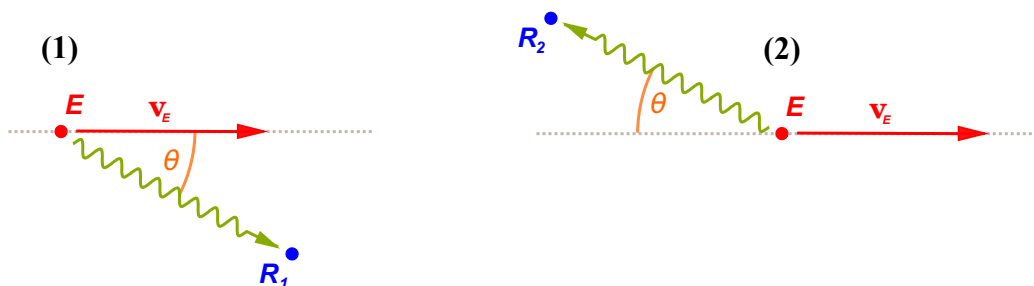


FIGURE 21 – Cas d'une onde émise selon un angle  $\theta$  vers l'avant (configuration 1, à gauche), et d'une onde émise selon un angle  $\theta$  mais vers l'arrière (configuration 2, à droite).

**5.4** — Si on note  $\lambda_{R_1}$  la longueur d'onde pour le récepteur dans la configuration 1, et  $\lambda_{R_2}$  la longueur d'onde pour le récepteur dans la configuration 2, que vaut la moyenne des deux longueurs d'ondes  $\lambda_{R_1}$  et  $\lambda_{R_2}$  ? Commentez.

## Effet Doppler relativiste pour les ondes électromagnétiques

*Vous traiterez cette partie et tout le reste de l'exercice dans le cadre de la relativité restreinte.*

Les expériences de Michelson-Morley et de Trouton-Noble ayant échoué à mettre en évidence le vent d'éther, la description classique de l'effet Doppler ne fonctionne plus pour les ondes électromagnétiques, notamment parce qu'il devient impossible de considérer le référentiel du milieu de propagation<sup>3</sup>. Les ondes électromagnétiques, en particulier la lumière, se propagent dans le vide à la vitesse  $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  dans tous les référentiels galiléens. La description classique de l'effet Doppler ne permet donc pas de rendre compte de ce qu'on observe pour les ondes électromagnétiques, notamment pour la lumière.

On souhaite établir ici la loi de l'effet Doppler relativiste, dans le cas le plus général, pour un photon se propageant selon une direction quelconque.

**5.5 —** Rappelez l'expression du quadrivecteur énergie-impulsion  $\tilde{\mathbf{P}}$  pour un photon de fréquence  $\nu$  et de longueur d'onde  $\lambda$  : vous donnerez l'expression des composantes contravariantes  $P^\mu$  dans le cas le plus général (vous ne ferez pour l'instant aucune hypothèse sur la direction de propagation du photon). Que vaut  $\tilde{\mathbf{P}}^2$  pour un photon ?

Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire, supposé galiléen, on considère une source de lumière  $E$  en translation uniforme à la vitesse  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{E/\mathcal{R}} = v \mathbf{e}_x$ . On notera  $\mathcal{R}'$  le référentiel solide de la source  $E$ . Cette source peut émettre dans toutes les directions des photons de fréquence  $\nu_E = \nu'$  et de longueur d'onde  $\lambda_E = \lambda'$ . On suppose que l'émission se produit dans le vide.

On considère un photon émis par la source  $E$ , pour lequel la direction de propagation est contenue dans le plan  $(E, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$  et qui fait dans le référentiel  $\mathcal{R}$  un angle  $\theta$  avec la direction du mouvement de la source (direction de  $\mathbf{v}_E$ , selon  $\mathbf{e}_x$  ici). Cet angle sera noté  $\theta$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire et  $\theta'$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  de la source.

**5.6 —** Donnez l'expression des composantes contravariantes  $P^\mu$  du quadrivecteur énergie-impulsion d'un photon émis par cette source, dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  de la source  $E$ , en fonction de  $\nu_E = \nu'$ ,  $\lambda_E = \lambda'$  et  $\theta'$ . En utilisant la transformation de Lorentz, déduisez-en les expressions des composantes contravariantes  $P^\mu$  du quadrivecteur énergie-impulsion du même photon, mais vu dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire.

Vous donnerez les composantes  $P^\mu$  en fonction de  $\nu_E = \nu'$ ,  $\lambda_E = \lambda'$  et  $\theta$ .

**5.7 —** Déduisez-en l'expression de la fréquence  $\nu = \nu_R$  du photon mesurée dans le référentiel du laboratoire, en fonction de sa fréquence  $\nu' = \nu_E$  mesurée dans le référentiel de la source, de  $v$ ,  $c$  et de l'angle  $\theta$ . Montrez qu'on obtient :

$$\nu_R = \frac{1}{\gamma(v)} \frac{1}{1 - \beta \cos \theta} \nu_E \quad \text{avec} \quad \nu_R = \nu \quad \nu_E = \nu' \quad \text{et} \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (11)$$

*Vous détaillerez les étapes de votre raisonnement et de votre calcul.*

**5.8 —** Quelle relation lie les angles  $\theta$  et  $\theta'$  ?

**5.9 —** De la relation (11), déduisez l'expression de la longueur d'onde reçue  $\lambda_R = \lambda$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire en fonction de la longueur d'onde émise  $\lambda_E = \lambda'$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  de la source, de  $v$ ,  $c$  et de l'angle  $\theta$ .

**5.10 —** Dans le cas particulier où le photon est émis vers l'avant (selon  $+\mathbf{e}_x$ ), que valent alors  $\nu_R = \nu$  et  $\lambda_R = \lambda$  ? Et lorsque le photon est émis vers l'arrière (selon  $-\mathbf{e}_x$ ) ?

3. Puisque le milieu de propagation hypothétique, l'éther luminifère, n'existe pas.

**5.11** — Pour un photon émis par la source en mouvement, et qui se propage dans  $\mathcal{R}$  à angle droit avec la direction de déplacement de la source (autrement dit, pour  $\theta = \pi/2$ ), que valent respectivement sa fréquence  $\nu = \nu_R$  et sa longueur d'onde  $\lambda = \lambda_R$  dans le référentiel du laboratoire ? Comparez avec le résultat obtenu en mécanique classique (première partie). Commentez.

## Expérience de Ives et Stilwell

L'effet Doppler relativiste dit “*transverse*” est une prédiction de la théorie de la relativité restreinte : pour une source de lumière (ou plus généralement d'ondes électromagnétiques) en mouvement dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , la longueur d'onde perçue dans  $\mathcal{R}$  selon la direction orthogonale au mouvement est affectée d'un facteur  $\gamma(v)$ . On interprète cet effet comme la conséquence du ralentissement de l'horloge de la source<sup>4</sup> en mouvement par rapport à l'horloge du laboratoire (effet de dilatation du temps).

Expérimentalement, la mesure est très délicate : il faut disposer d'une source de lumière possédant une vitesse  $v$  suffisante pour que le facteur  $(\gamma(v) - 1)$  ne soit pas trop faible ; de plus, le moindre écart angulaire avec la direction perpendiculaire au mouvement de la source introduit un facteur dû à l'effet Doppler longitudinal, qui domine rapidement et rend la mesure très difficile en pratique.

À la fin des années 1930, Herbert E. Ives (1882–1953) et G. R. Stilwell, travaillant tous deux aux *Bell Telephone Laboratories*<sup>5</sup> construisent une expérience dédiée à la mise en évidence de l'effet Doppler relativiste transverse.<sup>6</sup> Pour ce faire, ils conçoivent un dispositif (fig. 22) leur permettant de produire un faisceau d'ions hydrogène de vitesse bien définie : une fois accélérés, ces ions se déplacent en ligne droite et finissent par se recombiner avec un électron et se désexcitent en émettant de la lumière, selon des fréquences et des longueurs d'onde bien définies liées aux propriétés de l'atome d'hydrogène (raies atomiques de l'hydrogène). L'objectif premier du dispositif est de mesurer la longueur d'onde des photons émis par ces ions en mouvement, afin, *in fine*, de mettre en évidence l'effet Doppler transverse.

Dans une enceinte en verre contenant un peu d'hydrogène sous très faible pression, les ions hydrogène sont produits par un arc électrique ; ils sont ensuite accélérés par l'application d'un champ électrique intense entre deux électrodes perforées, champ produit en appliquant une tension électrique importante  $U_{\text{acc}}$  entre les deux électrodes (fig. 22). La tension accélératrice  $U_{\text{acc}}$  est de l'ordre de plusieurs milliers à plusieurs dizaines de milliers de volts.

Une fois passée la seconde électrode, les ions (ici des ions dihydrogène  $\text{H}_2^+$  et des ions trihydrogène  $\text{H}_3^+$ ) se déplacent en ligne droite avec une vitesse  $v$  constante, fonction uniquement de la tension accélératrice  $U_{\text{acc}}$  appliquée et de la masse de l'ion. L'expérience est menée pour différentes valeurs de tension.

**5.12** — Pour un objet de masse  $m$  au repos et de vitesse  $v$ , rappelez l'expression de son énergie totale  $E$ , de son énergie de masse (énergie au repos), et de son énergie cinétique relativiste  $T$ , en fonction de sa vitesse  $v$ .

**5.13** — En écrivant l'expression de la force de Lorentz, on montre que l'énergie cinétique relativiste  $T$  acquise pendant la phase d'accélération entre les deux électrodes s'écrit  $T = q U_{\text{acc}}$ , où  $q$  est la charge électrique de l'ion, et  $U_{\text{acc}}$  la haute tension appliquée entre les électrodes. Montrez que la vitesse  $v$  de l'ion ainsi accéléré vérifie :

$$\gamma(v) - 1 = \frac{q U_{\text{acc}}}{m c^2} \quad (12)$$

4. Horloge qui mesure le *temps propre* de la source  $E$ .

5. Les célèbres “Bell Labs”, où seront notamment inventés le transistor et le laser.

6. H. E. Ives et G. R. Stilwell, *An experimental study of the rate of a moving atomic clock*, *The Journal of Optical Society of America*, vol. 28, no 7, 1938. et Herbert E. Ives et G. R. Stilwell, *An experimental study of the rate of a moving clock II*, *Journal of the Optical Society of America*, vol. 31, 1941, p. 369-374.

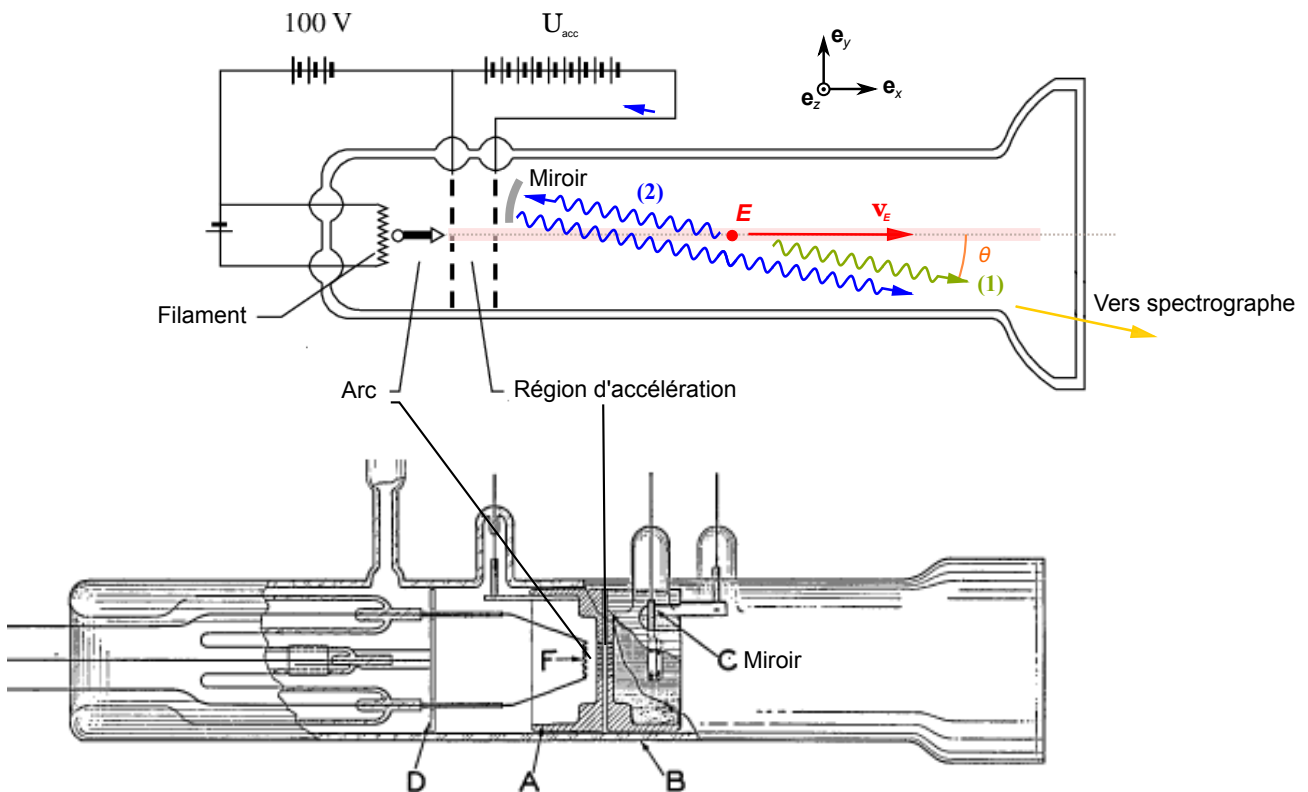


FIGURE 22 – (Haut) Schéma de principe de l'expérience de Ives et Stilwell : en vert (1), les photons émis dans la direction de la fente d'entrée du spectrographe; en bleu, les photons émis dans la direction opposée, qui se réfléchissent sur le miroir avant d'entrer dans le spectrographe. (Bas) Gravure représentant l'enceinte (en verre) construite pour l'expérience de Ives et Stilwell.

**5.14** — Déduisez-en l'expression de la vitesse  $v$  et du rapport  $\beta = v/c$  de l'ion en fonction de sa masse  $m$  et de la tension  $U_{\text{acc}}$  choisie. Faites l'application numérique pour  $\gamma(v) - 1$ ,  $\beta = v/c$  et  $v$  pour un ion dihydrogène  $\text{H}_2^+$ , et pour un ion trihydrogène  $\text{H}_3^+$ .

Pendant leur trajet, les ions finissent par capturer l'électron qui leur manque<sup>7</sup> et émettent de la lumière en se désexcitant, selon le spectre de raies atomiques caractéristiques de l'atome d'hydrogène. Ives et Stilwell choisissent d'observer l'émission associée à la raie  $\text{H}\beta$  de l'hydrogène, de longueur d'onde  $\lambda_E = 486.074 \text{ nm}$  dans le référentiel propre de l'ion.

Afin de tester la prédiction de l'effet Doppler transverse, on serait tenté d'essayer de mesurer la longueur d'onde des photons émis perpendiculairement par rapport au faisceau d'ions. En pratique, il est très difficile de se placer exactement à angle droit avec la direction du faisceau d'ions, et même une très faible erreur angulaire fausserait complètement la mesure<sup>8</sup>.

Afin de contourner cette difficulté, Ives et Stilwell choisissent une stratégie différente : ils décident d'observer un point particulier du faisceau d'ions sous un angle  $\theta$  de 7 degrés par rapport au faisceau, et de mesurer la longueur d'onde des photons émis dans cette direction au moyen d'un spectrographe de très grandes dimensions, leur donnant ainsi une grande précision dans la mesure des longueurs d'onde (de l'ordre de  $0.00025 \text{ nm}$  en répétant les mesures). De plus, ils placent à l'intérieur

7. En l'arrachant à l'une des rares molécules présentes dans l'enceinte, le vide y étant imparfait.

8. La contribution de l'effet Doppler longitudinal dominerait alors complètement la mesure.

de l'enceinte de verre un petit miroir qui leur permet d'observer simultanément les photons émis à 7 degrés du faisceau et les photons émis dans la direction opposée, qui se réfléchissent sur le miroir et parviennent aussi dans la fente d'entrée du spectrographe (figures 22 et 24).

**5.15** — Pour les photons émis vers l'avant à  $\theta = 7$  degrés du faisceau (fig. 22, configuration (1)), d'après l'expression générale de l'effet Doppler relativiste, que vaut la longueur d'onde mesurée dans le référentiel du laboratoire ? Vous donnerez l'expression littérale en fonction de  $\lambda_E$  et  $v$ . Application numérique pour un ion  $H_2^+$  et pour un ion  $H_3^+$ .

**5.16** — Pour les photons émis vers l'arrière à  $\theta = 7$  degrés du faisceau (fig. 22, configuration (2)), qui se réfléchissent dans le miroir puis parviennent au spectrographe, que vaut cette fois la longueur d'onde mesurée dans le référentiel du laboratoire ? Comme précédemment, vous donnerez l'expression littérale en fonction de  $\lambda_E$  et  $v$ . Application numérique pour un ion  $H_2^+$  et pour un ion  $H_3^+$ .

Ives et Stilwell mesurent simultanément avec leur spectrographe la longueur d'onde des photons émis à  $\theta = 7^\circ$  vers l'avant et celle des photons émis dans la direction opposée et qui se reflètent dans le miroir. Ils calculent ensuite la moyenne de ces deux longueurs d'onde.

**5.17** — Écrivez l'expression littérale de la moyenne  $\lambda_{\text{moy}}$  de ces deux longueurs d'onde. Commentez. Donnez l'expression de l'écart  $\Delta'\lambda = \lambda_{\text{moy}} - \lambda_E$  entre la position nominale de la raie et la position  $\lambda_{\text{moy}}$  du barycentre des raies décalées vers le rouge et vers le bleu.

Application numérique pour  $\theta = 7^\circ$ , la raie  $H\beta$ , pour un ion  $H_2^+$  et pour un ion  $H_3^+$ .

**5.18** — Comparez votre calcul théorique avec les mesures effectuées par Ives et Stilwell (colonne  $\Delta'\lambda$ ), pour le spectrogramme enregistré sur la plaque photo (*plate*) n°172. Concluez.

TABLE III.

PLATE	VOLT-AGE	LINE	$\lambda_0(\frac{1}{2}V^2/c^2)$ COM-PUTED FROM VOLTAGE	$\lambda_0(\frac{1}{2}V^2/c^2)$ COM-PUTED FROM OBSERVED $\Delta\lambda$	$\Delta'\lambda$ OBSERVED
169	6,788	$H_3$	0.0116	0.0109	0.011A
160	7,780	$H_2$	.0203	.0202	.0185
163	9,187	$H_2$	.0238	.0243	.0225
170	10,574	$H_2$	.0275	.0280	.027
165	11,566	$H_3$	.0198	.0203	.0205
172	13,560	$H_2$	.0352	.0360	.0345
172	13,560	$H_3$	.0233	.0237	.0215
177	18,350	$H_2$	.0478	.0469	.047

FIGURE 23 – Résultats obtenus pour l'écart  $\Delta'\lambda$ . Attention, les écarts en longueur d'onde sont indiqués en Angströms : 1 Angström = 0.1 nm =  $10^{-10}$  m. D'après H. E. Ives et G. R. Stilwell, *An experimental study of the rate of a moving atomic clock*, *The Journal of Optical Society of America*, vol. 28, no 7, 1938.

En comparant la moyenne  $\lambda_{\text{moy}}$  et la longueur d'onde nominale  $\lambda_E$  de la raie atomique, pour les différents ions et pour plusieurs valeurs de tension accélératrice, Ives et Stilwell vérifient bien la prédiction de la relativité restreinte concernant l'effet Doppler transverse. Il s'agit de l'une des premières mises en évidence expérimentale du ralentissement des horloges pour les objets en mouvement (la dilatation du temps), conformément aux prédictions relativistes.

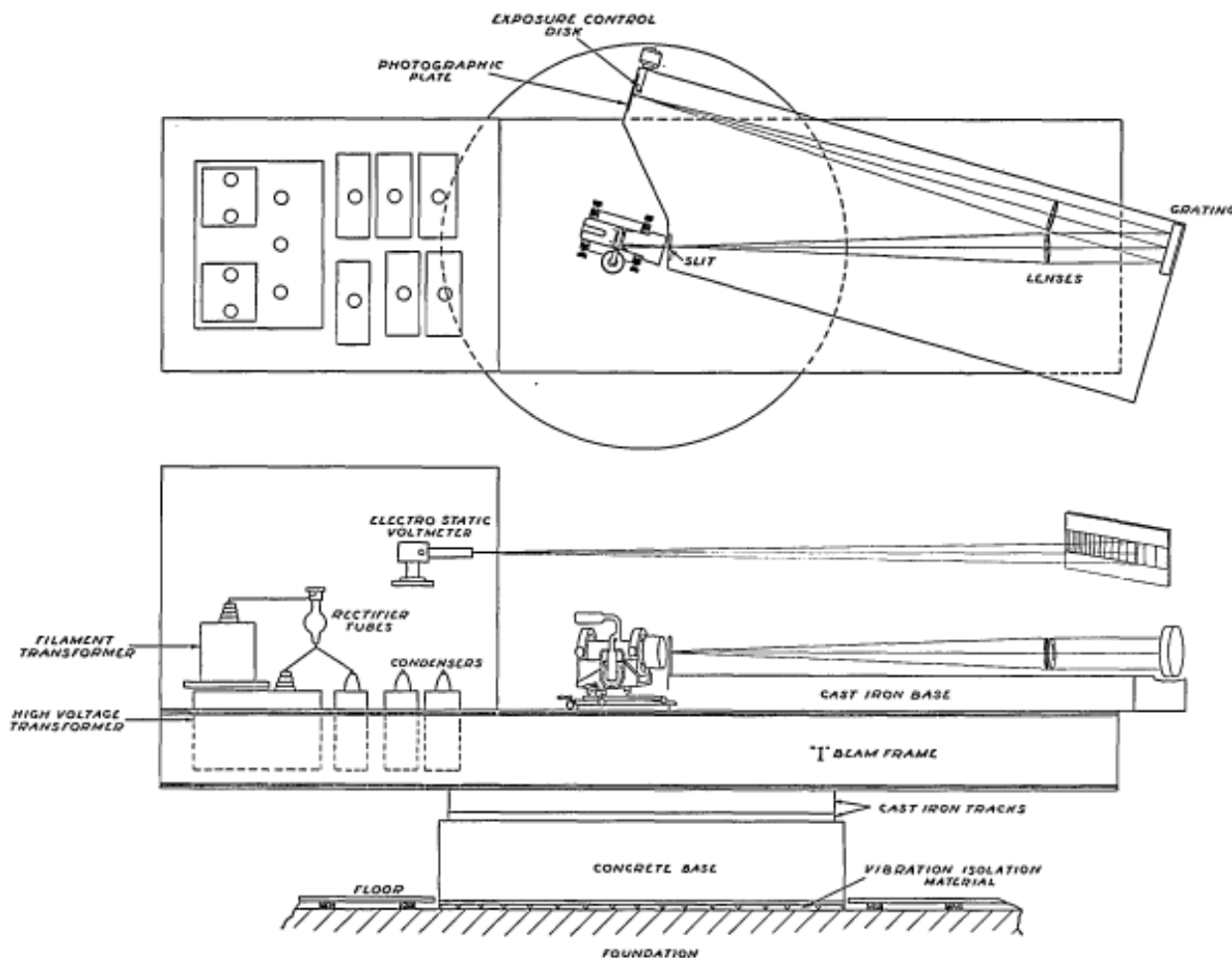
**Données :**Raie  $H\beta$  de l'hydrogène :  $\lambda_E = 486.074 \text{ nm}$ Angle d'observation de l'émission :  $\theta = 7^\circ$ Tension accélératrice :  $U_{\text{acc}} = 13560 \text{ V}$ Ion dihydrogène  $\text{H}_2^+$  : charge électrique  $q = +e$     masse  $m(\text{H}_2^+) = 2.016 \text{ u}$ Ion trihydrogène  $\text{H}_3^+$  : charge électrique  $q = +e$     masse  $m(\text{H}_3^+) = 3.02 \text{ u}$  $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$      $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$  $1 \text{ u} = 1.660538 \times 10^{-27} \text{ kg} = 931.494 \text{ MeV}/c^2$ 

FIGURE 24 – Schéma de l'expérience de Ives et Stilwell, avec au centre l'enceinte de verre, et sur la droite, le spectrographe. L'ensemble du dispositif est posée sur un support en acier qui peut pivoter sur lui-même.

Paradoxalement, Herbert E. Ives n'a jamais cru en la théorie de la relativité ; son objectif en construisant cette expérience était d'apporter la preuve de l'existence de l'éther dans le cadre d'une théorie alternative dite "théorie de Lorentz-Larmor", et de mettre en défaut la théorie de la relativité restreinte. Dépité par l'interprétation de l'expérience menée avec Stilwell comme une preuve expérimentale en faveur de la relativité, il tentera dans une série d'articles de convaincre la communauté scientifique de son point de vue, sans succès.



## 6. Distribution angulaire de la lumière émise par une source en mouvement (effet phare)

Une source de lumière  $O'$  émet des photons de manière isotrope dans son référentiel  $\mathcal{R}'$ . Cette source lumineuse est animée d'une vitesse  $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ . Pour illustrer, on pourra prendre  $v = c/2$ .

**6.1** — Exprimez les composantes  $u'_x$ ,  $u'_y$  et  $u'_z$  de la vitesse  $\mathbf{u}'$  d'un rayon lumineux dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  en fonction des angles  $\theta'$  et  $\phi'$ , où  $\theta'$  est l'angle zénithal entre la direction du mouvement relatif (par exemple l'axe  $O'x'$ ) et la direction du rayon lumineux, et  $\phi'$  est l'angle azimutal dans le plan  $y'O'z'$  (coordonnées sphériques, mais avec  $O'x'$  comme axe de référence).

**6.2** — En utilisant la loi relativiste de composition des vitesses, établissez les composantes  $u_x$ ,  $u_y$  et  $u_z$  du vecteur vitesse  $\mathbf{u}$  du même rayon lumineux, mais cette fois dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , où la source se déplace à la vitesse  $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$ .

**6.3** — Vérifiez que la norme du vecteur vitesse  $\mathbf{u}$  dans  $\mathcal{R}$  vaut également  $c$ , comme attendu d'après le second postulat de la relativité restreinte.

**6.4** — Exprimez les coordonnées du vecteur vitesse  $\mathbf{u}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , en fonction des angles  $\theta$  et  $\phi$ , où  $\theta$  est l'angle zénithal par rapport à la direction de la vitesse relative, et  $\phi$  l'angle azimutal dans le plan orthogonal, définis de la même manière que précédemment (coordonnées sphériques avec l'axe  $Ox$  comme axe de référence).

**6.5** — Exprimez les angles  $\theta$  et  $\phi$  qui définissent dans  $\mathcal{R}$  la direction du rayon lumineux en fonction de  $\theta'$  et  $\phi'$ .

**6.6** — Montrez que pour  $0 \leq \beta < 1$  (source se déplaçant vers l'avant), on a nécessairement  $\theta < \theta'$ . Calculez explicitement  $\theta$  pour  $\beta = 1/2$  et  $\theta' = \pi/2$ . Commentez.

**6.7** — Bonus : étudiez la distribution angulaire des photons dans  $\mathcal{R}$  autour de la direction  $Ox$  (direction du mouvement relatif).

## 7. Aberration des étoiles

L'aberration des étoiles est un phénomène découvert par l'astronome James Bradley (1693–1762) en 1725 en étudiant l'évolution de la position de l'étoile  $\gamma$  Draconis : lorsqu'on observe une même étoile tout au long de l'année, celle-ci semble parcourir une petite ellipse plus ou moins aplatie selon la latitude de l'étoile, et ce, en une année. Toutes les étoiles sont affectées par ce phénomène : l'angle d'où provient la lumière semble varier avec la vitesse relative de l'observateur, à la manière de la pluie pour un piéton en mouvement. James Bradley tentait de mesurer la parallaxe<sup>9</sup> des étoiles proches, en particulier de  $\gamma$  Draconis (*Eltamin*, la 3<sup>ème</sup> étoile la plus brillante de la constellation du Dragon) : au lieu de cela, il découvrit l'aberration des étoiles et la nutation (petit mouvement de l'axe de rotation terrestre qui se superpose à la précession des équinoxes, de 18.6 années de période).

**7.1** — Considérons une étoile lointaine située dans la direction du pôle de l'écliptique (axe  $Oz$  de l'orbite terrestre autour du Soleil). Un astronome sur Terre observe régulièrement cette étoile. On appelle  $v$  la vitesse de l'astronome par rapport au référentiel de Copernic. Calculez l'angle apparent  $\theta'$  que fait la direction de l'étoile avec le pôle de l'écliptique<sup>10</sup> pour l'astronome. Faites l'application numérique ( $v \simeq 30 \text{ km.s}^{-1}$ ).

9. La parallaxe annuelle de  $\gamma$  Draconis est en fait de  $22 \times 10^{-3}$  arcsec, soit environ 1000 fois plus faible que l'effet de l'aberration.

10. L'écliptique est la trajectoire apparente du Soleil sur la sphère céleste ; le plan de l'écliptique est le plan de l'orbite terrestre autour du Soleil.

**7.2** — Généralisez le résultat précédent pour une étoile inclinée avec un angle  $\theta$  par rapport au pôle de l'écliptique (angle zénithal). Décrivez la trajectoire apparente des étoiles en fonction de  $\theta$ .

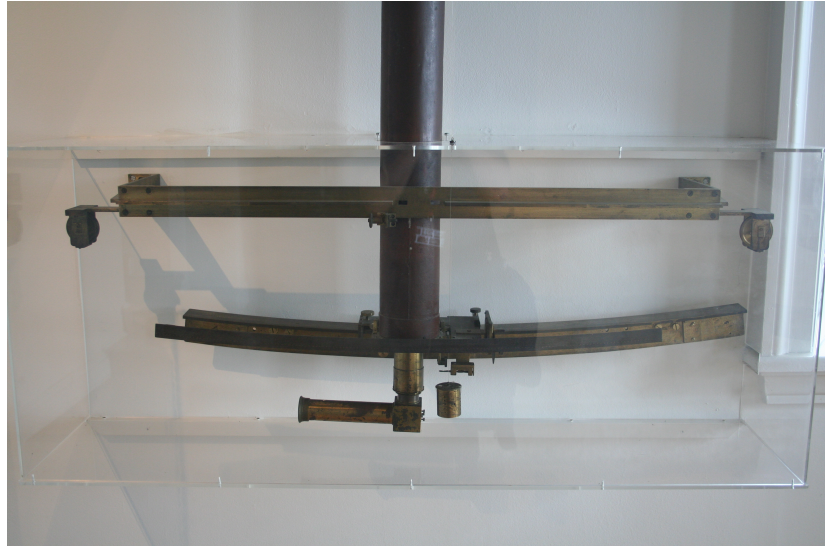


FIGURE 25 – Secteur zénithal (télescope pointant au zénith, permettant la mesure de la distance zénithale des étoiles). Conçu pour James Bradley, il est installé à l'observatoire de Greenwich. C'est avec cet instrument que J. Bradley découvrit l'aberration de la lumière et la nutation de l'axe terrestre (photos L. Le Guillou).

## 8. Physique des tachyons

There was a young lady named Bright  
Whose speed was far faster than light  
She went out one day  
In a relative way  
And returned the previous night.

— Reginald Buller, *Punch* (1923)

Le tachyon (baptisé ainsi par Gerald Feinberg en 1957, de  $\tau\alpha\chi\upsilon\varsigma$  (*tachus*), “rapide”, “prompt” en grec) est une particule hypothétique dont la vitesse  $u$  serait supérieure à  $c$ . En se basant uniquement sur cette définition (particule de vitesse  $u$  telle que  $u > c$ ), on peut tenter de décrire les propriétés d’une telle particule dans le cadre de la relativité restreinte.

**8.1** — Sur un diagramme d’espace-temps (Minkowski ou Loedel, selon votre préférence), indiquez les axes  $x$  et  $ct$  du référentiel  $\mathcal{R}$ . Indiquez aussi le cône de lumière passé et futur du point-événement choisi comme origine  $O$  de coordonnées  $(t = 0, x = 0)$  dans  $\mathcal{R}$ . (Par souci de clarté, consacrez une pleine page à ce diagramme qui sera complété au fur et à mesure des questions suivantes).

**8.2** — Sur le même diagramme, dessinez :

- (i) la ligne d’univers (i.e. la trajectoire dans l’espace-temps) d’un objet immobile placé à une abscisse  $x = x_0 < 0$ ;
- (ii) la ligne d’univers d’un objet se déplaçant à la vitesse constante  $\mathbf{w} = w \mathbf{e}_x$  avec  $0 < w < c$ ;
- (iii) la ligne d’univers d’un photon émis vers l’avant (dans la direction des  $x > 0$ ) au point événement  $A : (t_A, x_A)$  avec  $t_A > 0$  et  $x_A > 0$ .

**8.3** — Dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , un tachyon est émis en  $A : (t = t_A, x = x_A)$ , et reçu un peu plus tard en  $B : (t = t_B, x = x_B)$ , avec  $t_B > t_A$ . Dessinez sa ligne d’univers (attention à la pente sur votre dessin ! souvenez-vous que la vitesse  $u$  du tachyon est supérieure à  $c$  !). Indiquez les projections des événements  $A$  et  $B$  sur les axes d’espace et de temps de votre diagramme, et les coordonnées  $t_A, t_B, x_A$  et  $x_B$  sur votre schéma.

**8.4** — Déterminez le signe de l’expression  $\Delta s^2 = \widetilde{\mathbf{AB}}^2 = c^2(t_B - t_A)^2 - (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)^2$ . Quelle est la nature de l’intervalle d’espace-temps  $\widetilde{\mathbf{AB}}$  ?

**8.5** — Considérons un événement quelconque  $M$  repéré dans le référentiel inertiel  $\mathcal{R}$  par  $\tilde{\mathbf{r}} : r^\mu = (ct, x, y, z) = (ct, \mathbf{r})$ , et par  $\tilde{\mathbf{r}}' : r'^\mu = (ct', x', y', z') = (ct', \mathbf{r}')$  dans un second référentiel  $\mathcal{R}'$ , où  $\mathcal{R}'$  est en translation uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$  avec  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v \mathbf{e}_x$ , et  $v < c$ . Rappelez les équations de la transformation de Lorentz entre les référentiels inertiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ .

**8.6** — Montrez que l’on peut toujours trouver un référentiel galiléen  $\mathcal{R}'$  avec une vitesse relative  $v = v(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$ , avec  $v < c$  telle que  $t'_B < t'_A$ , **c’est à dire un référentiel galiléen  $\mathcal{R}'$  dans lequel l’ordre des**



FIGURE 26 – Tachyon en peluche, The Particle Zoo.

**événements  $A$  et  $B$  est inversé.** Montrez que, pour que l'ordre des événements soit inversé dans  $\mathcal{R}'$ , il faut que la vitesse relative  $v = v(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$  vérifie la condition  $uv > c^2$  (où  $u$  est la vitesse du tachyon dans  $\mathcal{R}$ ).

**8.7 —** Dans un référentiel  $\mathcal{R}'$  qui vérifie la condition  $uv > c^2$ , la réception du tachyon (événement  $B$ ) se produit **avant** l'émission du même tachyon (événement  $A$ ). Sur votre diagramme d'espace-temps, dessinez les axes  $ct'$  et  $x'$  d'un tel référentiel  $\mathcal{R}'$ , ainsi que les projections des événements  $A$  et  $B$  sur ces axes, afin de faire apparaître qu'effectivement, dans ce référentiel  $\mathcal{R}'$ , on a  $t'_B < t'_A$ .

**8.8 —** Qu'en concluez-vous à propos des tachyons et du principe de causalité? Proposez une interprétation possible de la succession des événements  $A$  et  $B$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ .

**8.9 —** On s'intéresse maintenant à la dynamique des tachyons. Écrivez l'énergie d'un tachyon de vitesse  $u > c$  en fonction de sa masse au repos  $m$  et de sa vitesse  $u$ . Dans l'expression que vous obtenez, le facteur  $\gamma(u)$  est imaginaire pour un tachyon; pour obtenir une énergie qui soit un nombre réel, on peut faire l'hypothèse que la masse  $m$  au repos du tachyon est aussi un nombre imaginaire :  $m = iM$  avec  $M$  un nombre réel. Écrivez l'énergie  $E(u)$  du tachyon sous cette hypothèse.

**8.10 —** Que pouvez-vous dire du comportement de  $E(u)$  en fonction de  $u$ ? Pour un tachyon, comment évolue son énergie lorsqu'il accélère? lorsqu'il ralentit? Combien d'énergie faut-il fournir à un tachyon pour le faire ralentir jusqu'à  $u = c$ ?

**8.11 —** Qu'en concluez-vous sur la physique de l'hypothétique tachyon dans le cadre de la relativité restreinte?

**8.12 — Question Bonus :** montrez que si  $u > c$  dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  on a alors nécessairement  $u' > c$  dans tout autre référentiel inertiel  $\mathcal{R}'$  en translation uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$  avec  $v = v(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) < c$ . Pensez à discuter tous les cas possibles en fonction du signe du dénominateur dans l'expression de  $u'$ .

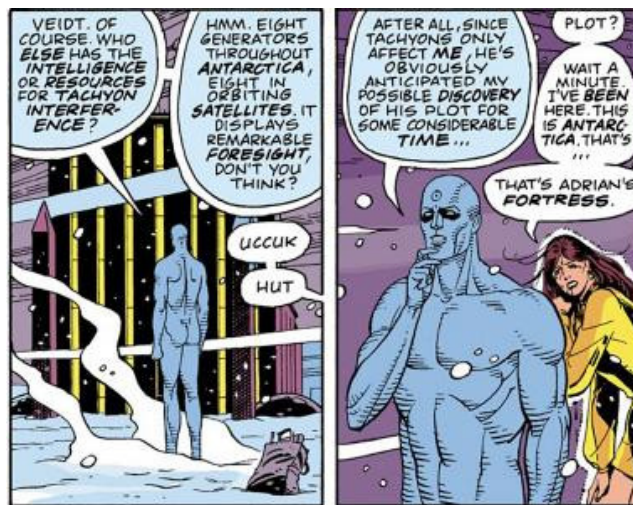


FIGURE 27 – Dans la science-fiction, depuis la bande dessinée jusqu'au cinéma, les tachyons constituent une forme fréquente d'"unobtainium" (matériau fictif aux propriétés hautement invraisemblables), autorisant à la fois voyages dans le temps, envois de messages du présent vers le passé ou du futur vers le présent, voyages superluminiques, etc. Concept de physique théorique devenu populaire, les tachyons permettent surtout aux auteurs de combler les trous béants de leurs scénarios... Dr. Manhattan dans "Watchmen", de Alan Moore (1987).





FIGURE 28 – The Particle Zoo : le zoo des particules élémentaires du Modèle Standard, en version “peluches”, avec notamment le tachyon dans la catégorie “particules hypothétiques”.