

**FLUIDES – CAPILLARITÉ**

Centre de Montrouge — Année Universitaire 2019–2020 ; Mise à jour : 2022-03-28

Préparation : L. Le Guillou (Sorbonne Université / LPNHE)

**1. Transport diffusif**

On se propose de caractériser la diffusion du glycérol dans l'eau, en reproduisant l'expérience de Sommerfield (*Optics*, Sommerfield). Le principe est d'exploiter la différence d'indice optique entre le glycérol et l'eau, en mesurant la déviation d'un faisceau laser dans la zone de mélange entre de l'eau distillée et une solution de glycérol (ici, à  $C_0 = 50\%$ ). La déviation du faisceau sera d'autant plus grande que le gradient d'indice dans la zone de mélange sera important : ce gradient va progressivement diminuer avec la diffusion du glycérol dans l'eau, et la déviation du laser fera de même.

Dans la région de mélange, à l'interface horizontale entre les deux liquides (eau dessus et glycérol dessous), l'angle  $\alpha_{\max}$  de déviation maximale du faisceau s'écrit :

$$\alpha_{\max} = \frac{(n_{\text{glycerol}} - n_{\text{eau}}) \times d \times C_0}{2\sqrt{\pi Dt}}$$

avec  $D$  la diffusivité du glycérol dans l'eau,  $t$  le temps écoulé depuis la mise en contact des deux liquides (loi de diffusion en  $\sqrt{t}$ ), et  $d$  l'épaisseur du liquide traversée par le faisceau.

**Mesures et résultats.** On introduit la solution de glycérol au fond du récipient transparent préalablement rempli d'eau, et on mesure régulièrement la déviation maximale du faisceau laser sur l'écran. On obtient les mesures du tableau 2.

L'allure générale est bien celle d'une évolution en  $t^{-1/2}$ . Cependant, on obtient un meilleur ajustement avec un modèle du type (fig. 4) :

$$\alpha_{\max} = k \times (t - t_0)^{-1/2} \quad \text{avec} \quad k = \frac{(n_{\text{glycerol}} - n_{\text{eau}}) \times d \times C_0}{2\sqrt{\pi D}}$$

En prenant  $n_{\text{glycérol}} = 1.47$  et  $n_{\text{eau}} = 1.33$ .

Pour une valeur de  $t_0 = -414$  s, on en déduit ainsi une estimation de la diffusivité  $D$  du glycérol dans l'eau :

$$k = 8.70 \pm 0.06 \text{ rad} \cdot \text{s}^{1/2} \quad \text{d'où} \quad D = (5.15 \pm 0.07) \times 10^{-10} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1},$$

comparable à la valeur tabulée de  $6 \times 10^{-10} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

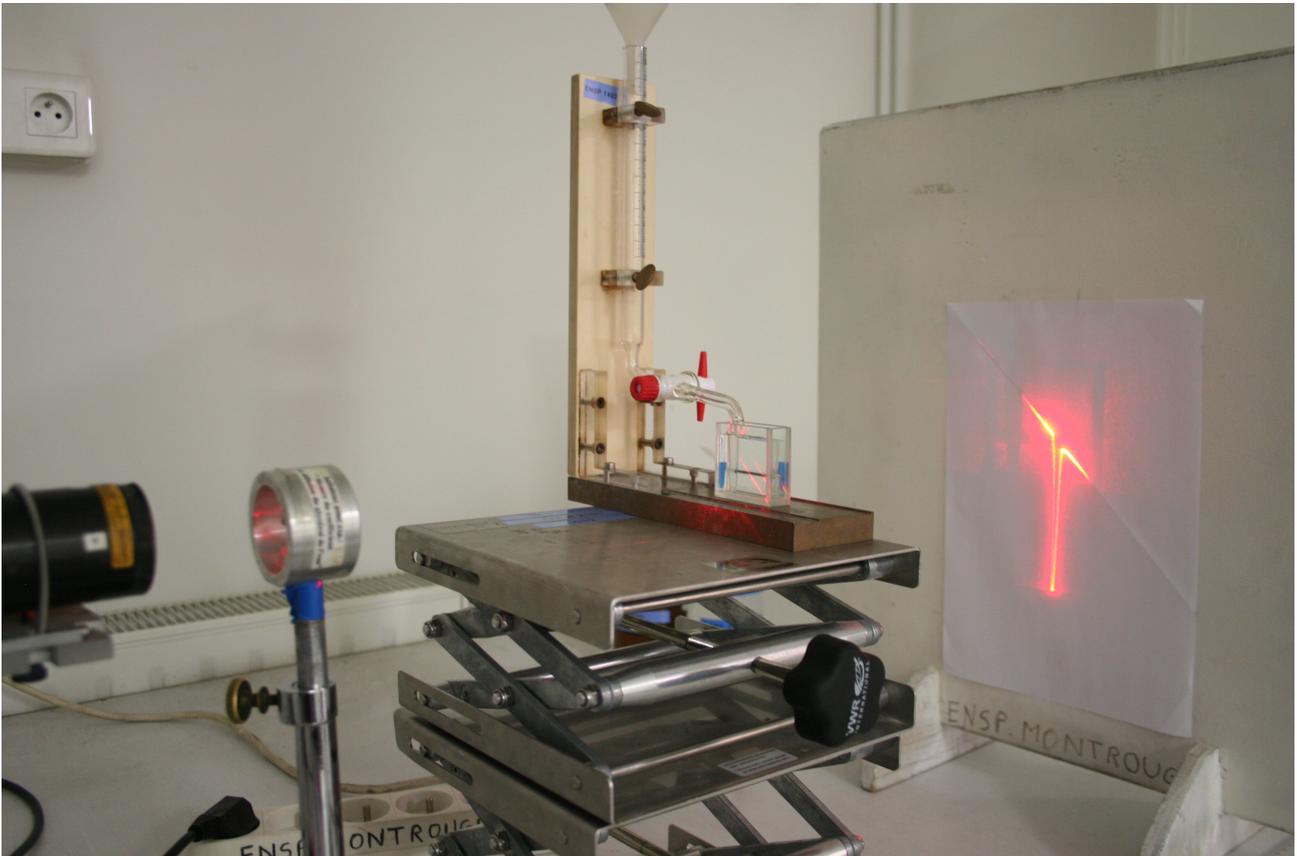


FIGURE 1 – Mesure de la diffusion du glycérol dans l'eau. Le récipient transparent, d'épaisseur  $d = 10$  mm, contient une solution de glycérol (concentration  $C_0 = 50\%$ ) et de l'eau distillée déposées l'une sur l'autre (la solution de glycérol est introduite au fond du récipient préalablement rempli d'eau). Un faisceau laser horizontal passe à travers le récipient, permettant de mesurer sur l'écran la déflexion du faisceau. La distance récipient–écran est ici de  $L = 304$  mm. La mesure de la déviation sur l'écran permet d'en déduire l'angle de déflexion  $\alpha_{\max}$ .

$t$ [s]	$h_{\max}$ [mm]	$\alpha_{\max}$ [degrés]
0	130	23.2
55	125	22.4
125	120	21.5
245	109	19.7
337	103	18.7
450	95	17.4
536	90	16.5
645	85	15.6
784	78	14.4
937	73	13.5
1150	67	12.4
1325	63	11.7
1544	59	11.0
1691	57	10.6
2173	51	9.5
2695	46	8.6
4200	37	6.9

FIGURE 2 – Diffusion du glycérol dans l'eau. Mesures (en gras) : déviation maximale  $h_{\max}$  mesurée sur l'écran et angle  $\alpha_{\max}$  correspondant.

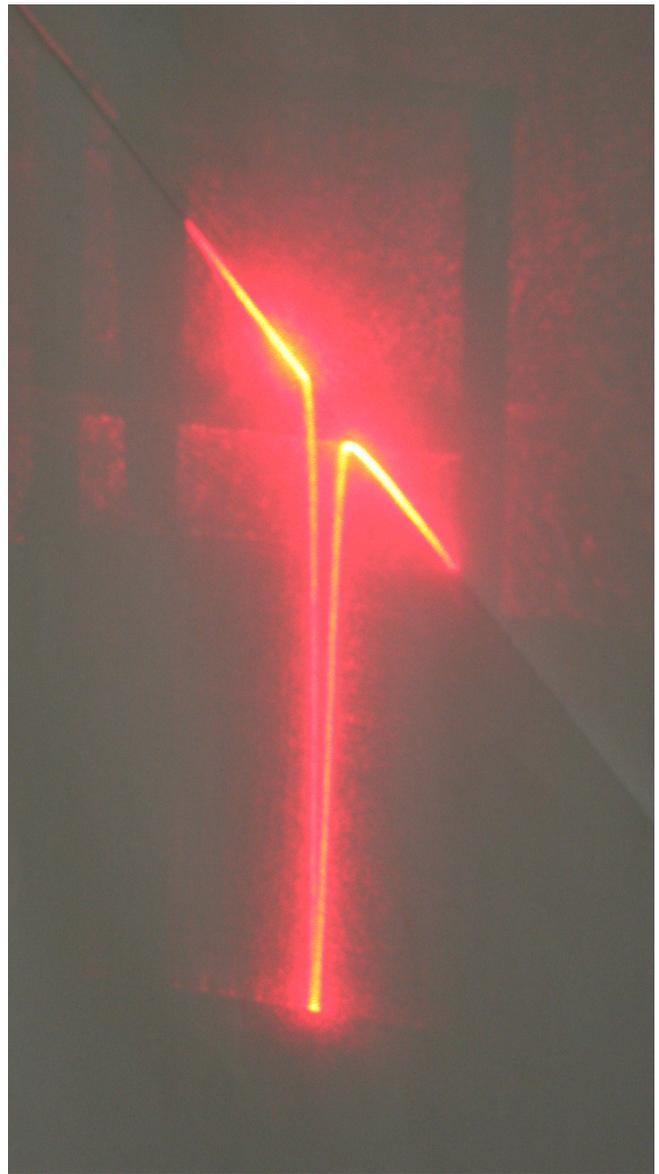


FIGURE 3 – Figure obtenue sur l'écran. La déviation maximale du laser est mesurée par rapport à la position que le faisceau devrait toucher sur l'écran (droite à  $45^\circ$ ) en l'absence du récipient.

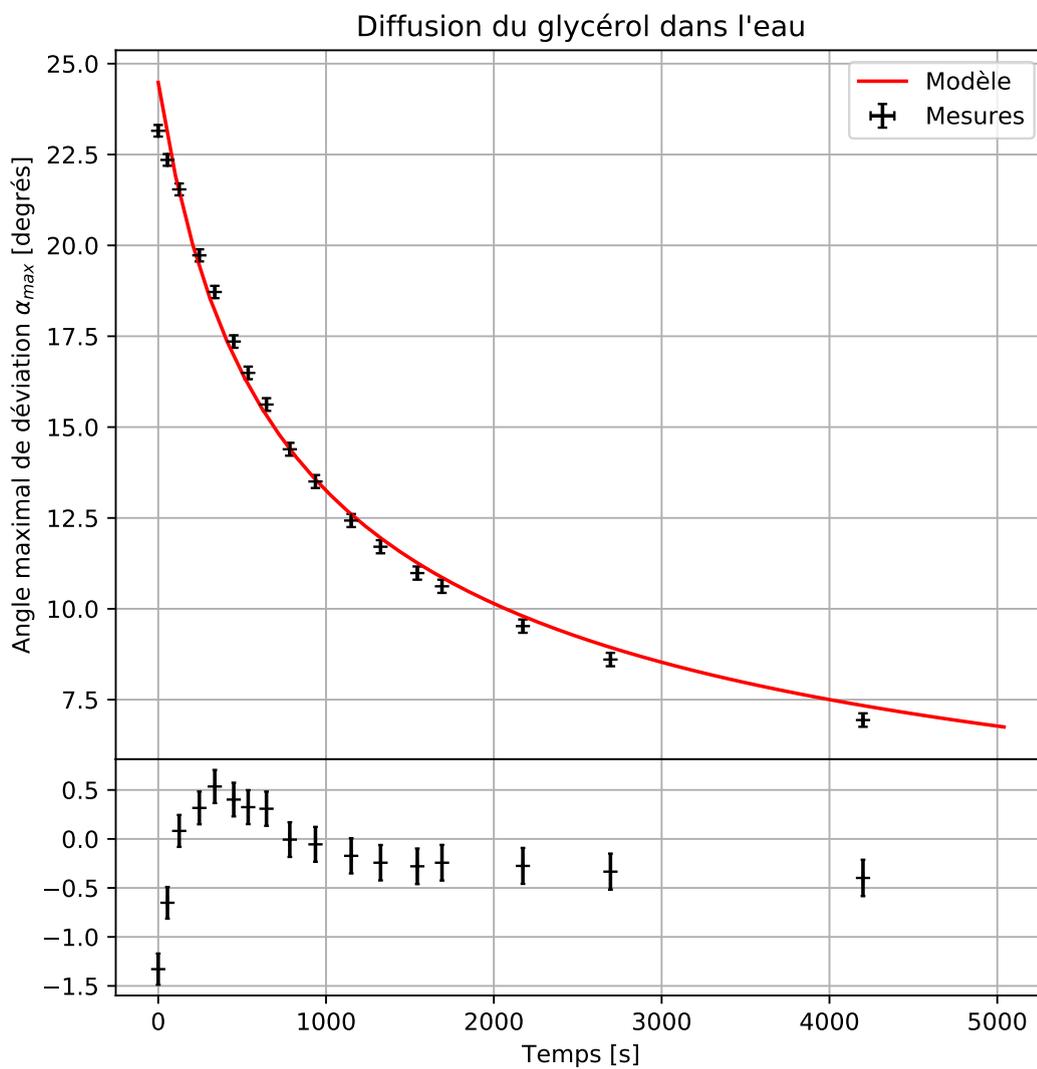


FIGURE 4 – Mesures de la déviation maximale du faisceau laser en fonction du temps, à partir de la mise en contact des deux liquides. Ajustement d'un modèle en  $(t - t_0)^{-1/2}$ .

## 2. Capillarité

### 2.1. Loi de Laplace

On se propose de vérifier la loi de Laplace ( $\Delta P = P_{\text{in}} - P_{\text{ext}} = \gamma(1/R_1 + 1/R_2)$ ) dans le cas des bulles de savon. Dans ce cas particulier, les films de savon présentant deux interfaces de courbure quasi-identiques, il faut compter ces deux contributions (facteur 2). De plus, pour une bulle de savon, les deux rayons de courbure principaux sont identiques et égaux au rayon  $R$  de la bulle. La surpression dans une bulle de savon s'écrit ainsi :

$$\Delta P = P_{\text{in}} - P_{\text{ext}} = \frac{4\gamma}{R}$$

**Expérience qualitative.** Lorsqu'on connecte deux bulles de savon de rayons différents, la surpression sera plus faible dans la bulle la plus grande ; par conséquent, un flux d'air s'établit de la bulle la plus petite vers la plus grande, et *la petite bulle se vide dans la grande*, et ce, de plus en plus rapidement, jusqu'à ce que la petite bulle se réduise à un film à l'ouverture du tube qui relie les deux bulles, film présentant la même courbure que la grande bulle (c'est en quelque sorte la partie manquante de la grande bulle).

**Expérience quantitative.** En utilisant le "générateur de bulle", on peut produire une bulle de grande dimension, et connecter le dispositif au manomètre différentiel (on met l'autre voie du manomètre à la pression atmosphérique). Il suffit ensuite de mesurer la tension en sortie du manomètre, et de dégonfler progressivement la grande bulle (en regonflant la poire) pour faire varier son rayon  $R$  et mesurer la surpression associée à chaque taille de bulle. On obtient ainsi les valeurs de la table 1.

$R$ [mm]	$U$ [V]	$\Delta P$ [Pa]
<b>à vide, ouvert</b>	2.273	<b>0</b>
<b>25.0</b>	2.233	<b>5.00</b>
<b>21.5</b>	2.227	<b>5.75</b>
<b>17.5</b>	2.216	<b>7.12</b>
<b>12.0</b>	2.193	<b>10.0</b>
<b>8.5</b>	2.165	<b>13.5</b>
<b>6.5</b>	2.132	<b>17.6</b>
<b>4.0</b>	2.051	<b>27.7</b>
<b>bulle crevée</b>	2.272	<b>0</b>

TABLE 1 – Loi de Laplace. Mesures (en gras) : rayon de la bulle (diamètre mesuré avec une incertitude de l'ordre du mm) et tension  $U$  aux bornes du manomètre, dont on déduit la surpression  $\Delta P$  dans la bulle de savon.

**Résultats.** On peut ajuster une loi en  $\Delta P = 4\gamma/R$  sur les données obtenues (fig. 5). On en déduit une estimation de la tension de surface pour le mélange savonneux utilisé :

$$\gamma = (28.4 \pm 0.2) \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1},$$

valeur comparable aux valeurs typiques pour de l'eau savonneuse ( $\approx 25 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ ), et très inférieure à celle de l'eau ( $72 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ ). On vérifie ainsi que l'effet des tensio-actifs du savon est bien d'abaisser la tension superficielle.

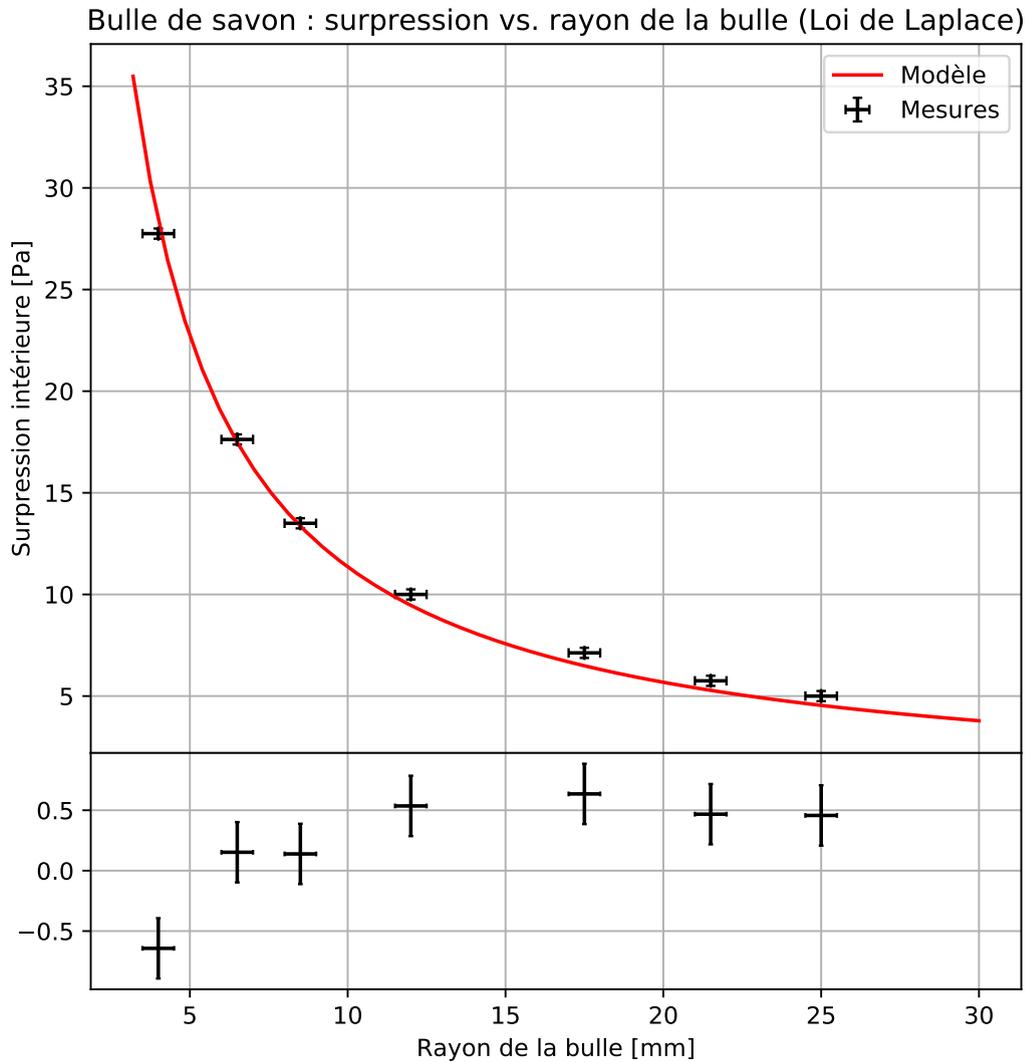


FIGURE 5 – Loi de Laplace. Mesure de la surpression dans une bulle de savon en fonction de son rayon. Ajustement en  $\Delta P \propto 1/r$ .

## 2.2. Loi de Jurin : montée capillaire

On souhaite vérifier expérimentalement la loi de Jurin, qui prédit quantitativement la montée capillaire dans des tubes fins. On réalise l'expérience avec de l'alcool pour assurer un mouillage parfait. L'alcool offre aussi l'avantage de laisser les surfaces propres après évaporation. En plongeant plusieurs tubes capillaires de diamètres croissants, on mesure à chaque fois la hauteur du liquide.

La loi de Jurin prédit que la hauteur  $h$  atteinte par le liquide vérifie :

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g r}$$

où  $\gamma$  est la tension de surface liquide-air,  $\theta$  l'angle de mouillage, et  $\rho$  la masse volumique du liquide.

### Mesure par projection sur un écran

L'expérience est rendue plus spectaculaire en projetant le dispositif sur un écran avec un fort grossissement (ce qui augmente aussi la précision de la mesure). Il est important de déterminer l'échelle sur l'écran, par exemple en profitant de la présence d'une grille millimétrique sur l'une des faces de la cuve.

**Mesures.** On effectue ici l'expérience avec de l'éthanol pur, pour lequel on pourra considérer que l'angle de mouillage  $\theta$  est nul. On obtient les hauteurs suivantes (table 2).

$D = 2r$ [mm]	1.1	0.8	0.55	0.25
$r$ [mm]	0.55	0.4	0.275	0.125
$h$ [mm]	<b>12.25</b>	<b>13.75</b>	<b>21.35</b>	<b>40.00</b>

TABLE 2 – Loi de Jurin. Mesures (en gras) : hauteur  $h$  dans un tube capillaire en fonction de son rayon  $r$ .

**Résultats.** On ajuste un modèle en  $h \propto r^{-1}$  sur les données, et plus précisément :

$$h = \frac{2\gamma}{\rho_{\text{éthanol}} \times g} \cdot \frac{1}{r}$$

On obtient :

$$\gamma = (20.2 \pm 0.3) \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \quad (\text{erreurs statistiques})$$

La mesure est proche la valeur attendue pour de l'éthanol pur. On peut comparer ce résultat avec les valeurs tabulées pour une solution d'éthanol (à 25°C) :

Solution	éthanol pur	40% + eau	11% + eau
$\gamma$ [N/m]	$22.27 \times 10^{-3}$	$29.63 \times 10^{-3}$	$46.03 \times 10^{-3}$

**Remarques.** La mesure des hauteurs dans les tubes capillaires est plus précise en mesurant à l'écran, en ayant préalablement calibré le grandissement avec le papier transparent millimétré. On atteint sans difficulté des précisions de l'ordre du demi-millimètre. Par contre, la montée capillaire dépend fortement de l'état de surface (propreté, dépôts) à l'intérieur du capillaire, qui est relativement difficile à nettoyer (cuve à ultrasons + alcool?). Pour la même raison, il est difficile de répéter l'expérience car il est indispensable de nettoyer et sécher les tubes entre chaque essai. On peut toutefois sécher les capillaires en y faisant circuler de l'air sec (en plaçant les capillaires devant un robinet d'air comprimé).

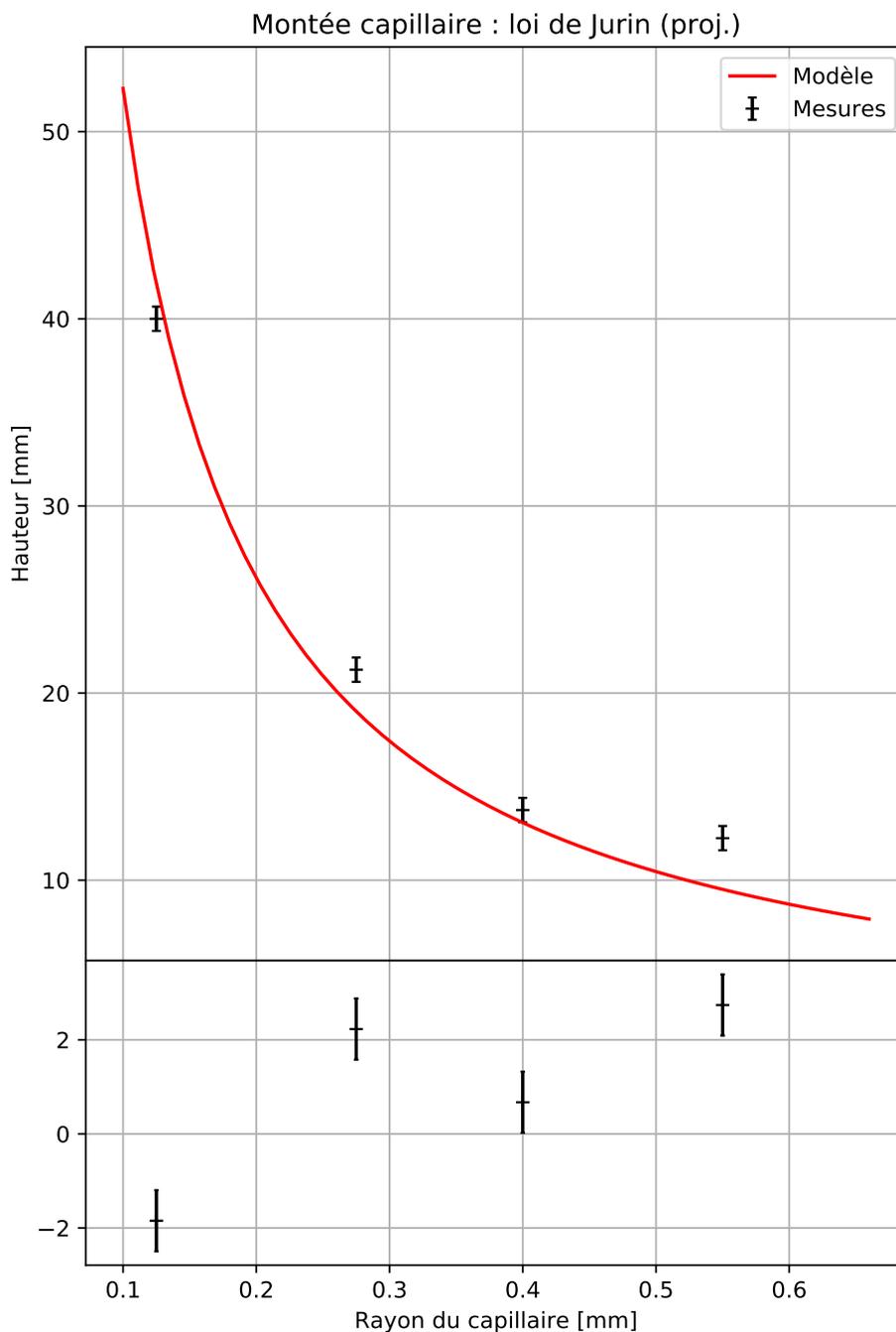


FIGURE 6 – Loi de Jurin. Mesure de la hauteur de la montée capillaire en fonction du rayon du tube, par projection sur un écran. Ajustement en  $h \propto 1/r$ .

### Variante du montage : utilisation d'une caméra

**Dispositif expérimental.** Afin de mesurer les hauteurs atteintes par le liquide dans les tubes capillaires, on peut aussi utiliser une caméra pour filmer l'ascension. La disposition expérimentale sera légèrement différente : pour assurer un contraste suffisant, on éclairera la cuve et les tubes capillaires par derrière (fig. 7) ; afin d'obtenir une illumination la plus uniforme possible, on pourra placer un écran derrière la cuve afin de diffuser la lumière, et éclairer la cuve de façon indirecte en illuminant l'écran avec un faisceau le plus large possible, imitant ainsi les méthodes d'éclairage de la photographie et du cinéma. Il est important d'assurer une illumination la plus uniforme possible dans le champ de vue de la caméra : des gradients d'intensité lumineuse trop importants dans l'image risqueraient de rendre la vidéo difficile à exploiter. On placera la caméra de sorte que l'ensemble des tubes et la cuve soient dans le champ, et on réglera l'objectif de la caméra afin d'obtenir une image la plus nette possible de l'intérieur des capillaires.



FIGURE 7 – Dispositif expérimental pour la mesure de la montée capillaire avec une caméra. Afin d'obtenir un éclairage le plus uniforme possible et ainsi éviter la présence de forts gradients d'intensité dans l'image, on éclaire un écran blanc en arrière plan de la cuve contenant le liquide et les tubes capillaires.

**Mesures.** Une fois la vidéo de la montée capillaire enregistrée, on mesure directement sur l'image la hauteur (verticale, en pixels) atteinte dans chaque tube lorsque le niveau du liquide s'y est stabilisé. En utilisant ImageJ, on estime les hauteurs verticales à l'équilibre dans chaque tube capillaire (table 3).

$D = 2r$ [mm]	1.1	0.8	0.55	0.25
$r$ [mm]	0.55	0.4	0.275	0.125
$h$ [pixel]	<b>273</b>	<b>345</b>	<b>517</b>	<b>958</b>
$h$ [mm]	11.71	14.79	22.16	41.08

TABLE 3 – Loi de Jurin. Mesures (en gras) : hauteur  $h$  dans un tube capillaire en fonction de son rayon  $r$  mesurée sur une image, à l'équilibre, en pixel; conversion en millimètres une fois le facteur d'échelle déterminé.

Pour traduire ces mesures en hauteurs physiques (en mm), il est nécessaire de déterminer l'échelle physique de l'image dans le plan des tubes capillaires. Cette estimation demande un peu de soin, car

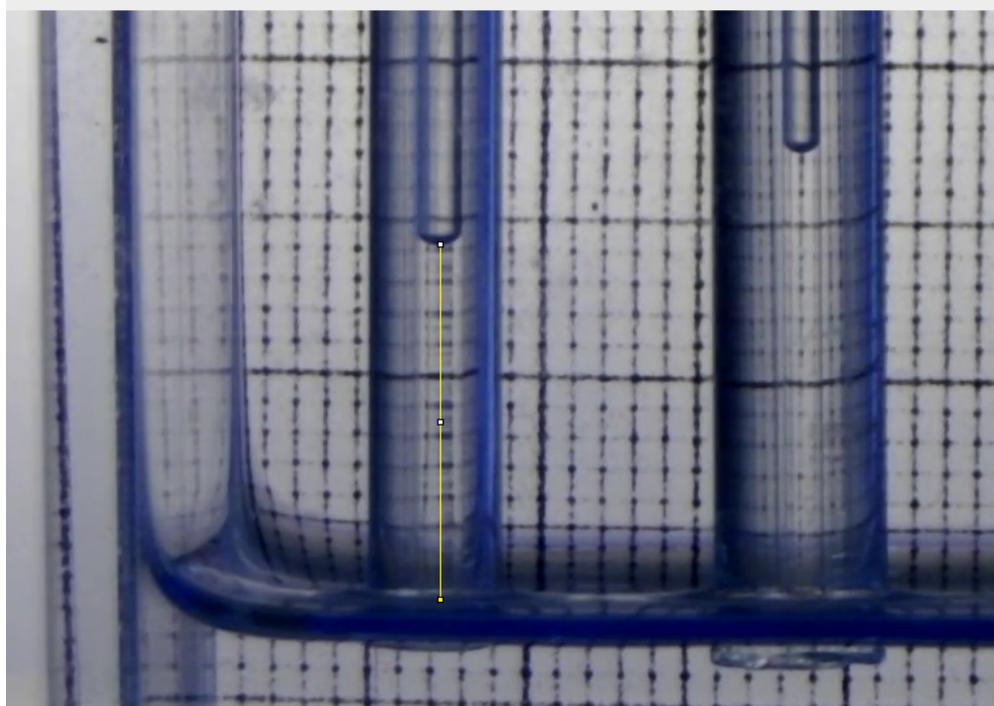
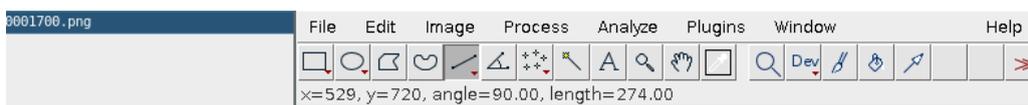


FIGURE 8 – Image extraite de la vidéo obtenue avec une caméra, une fois que le niveau du liquide s’est stabilisé dans les tubes capillaires. À gauche, exemple de mesure de distance (en pixels) sur la même image avec ImageJ.

il est important de tenir compte des effets de perspective dans l'image : la grille millimétrée collée sur la paroi arrière de la cuvette parallélépipédique n'est pas dans le même plan que les capillaires, et le facteur de conversion pixels  $\rightarrow$  millimètres (l'échelle physique de l'image) sera donc assez différent dans les deux plans (il est clairement visible sur l'image que les faces avant et arrière de la cuve ont des longueurs apparentes assez différentes).

Ici, la longueur extérieure de la cuve est de 55 mm, ce qui correspond sur la face externe avant à 1502 pixels environ, soit une échelle horizontale de :

$$f_{\text{avant,ext.}}^{\text{hor.}} \approx \frac{55 \text{ mm}}{1502 \text{ pixels}} \approx 3.66 \times 10^{-2} \text{ mm} \cdot \text{pixel}^{-1}$$

En utilisant la grille millimétrée fixée sur la face externe arrière, on trouve cette fois dans le plan correspondant une échelle horizontale de :

$$f_{\text{arrière,ext.}}^{\text{hor.}} \approx \frac{40 \text{ mm}}{834 \text{ pixels}} \approx 4.80 \times 10^{-2} \text{ mm} \cdot \text{pixel}^{-1}$$

En supposant que le centre des tubes capillaires est à équidistance des faces avant et arrière de la cuve, on peut estimer que l'échelle horizontale dans le plan des capillaires est proche de la moyenne de ces deux échelles, soit :

$$f^{\text{hor.}} \approx \frac{f_{\text{avant,ext.}}^{\text{hor.}} + f_{\text{arrière,ext.}}^{\text{hor.}}}{2} \approx 4.23 \times 10^{-2} \text{ mm} \cdot \text{pixel}^{-1}.$$

Cependant, il s'agit d'une échelle horizontale : nos mesures de hauteurs étant verticales, il est tout à fait possible que le plan des tubes capillaires ne soit pas parfaitement orthogonal à l'axe optique de la caméra, ce qui peut induire une différence d'échelle entre les directions horizontales et verticales (sans parler des effets des éventuelles distorsions dues à l'optique de la caméra). En comparant des mesures horizontales et verticales sur la grille millimétrée de la face arrière de la cuve, on peut estimer un facteur correctif :

$$\frac{f^{\text{ver.}}}{f^{\text{hor.}}} \approx \frac{35 \text{ mm}/720 \text{ pixels}}{40 \text{ mm}/834 \text{ pixels}} \approx 1.014$$

D'où on déduit une estimation de l'échelle verticale dans le plan des capillaires  $f^{\text{ver.}} \approx 1.014 \times f^{\text{hor.}} \approx 4.29 \times 10^{-2} \text{ mm} \cdot \text{pixel}^{-1}$ .

**Résultats.** Comme précédemment, on ajuste un modèle en  $h \propto r^{-1}$  sur les données, de la même forme :

$$h = \frac{2\gamma}{\rho_{\text{éthanol}} \times g} \cdot \frac{1}{r}$$

On obtient cette fois :

$$\gamma = (20.83 \pm 0.17) \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \quad (\text{erreurs statistiques})$$

La mesure obtenue est proche la valeur attendue pour de l'éthanol pur.

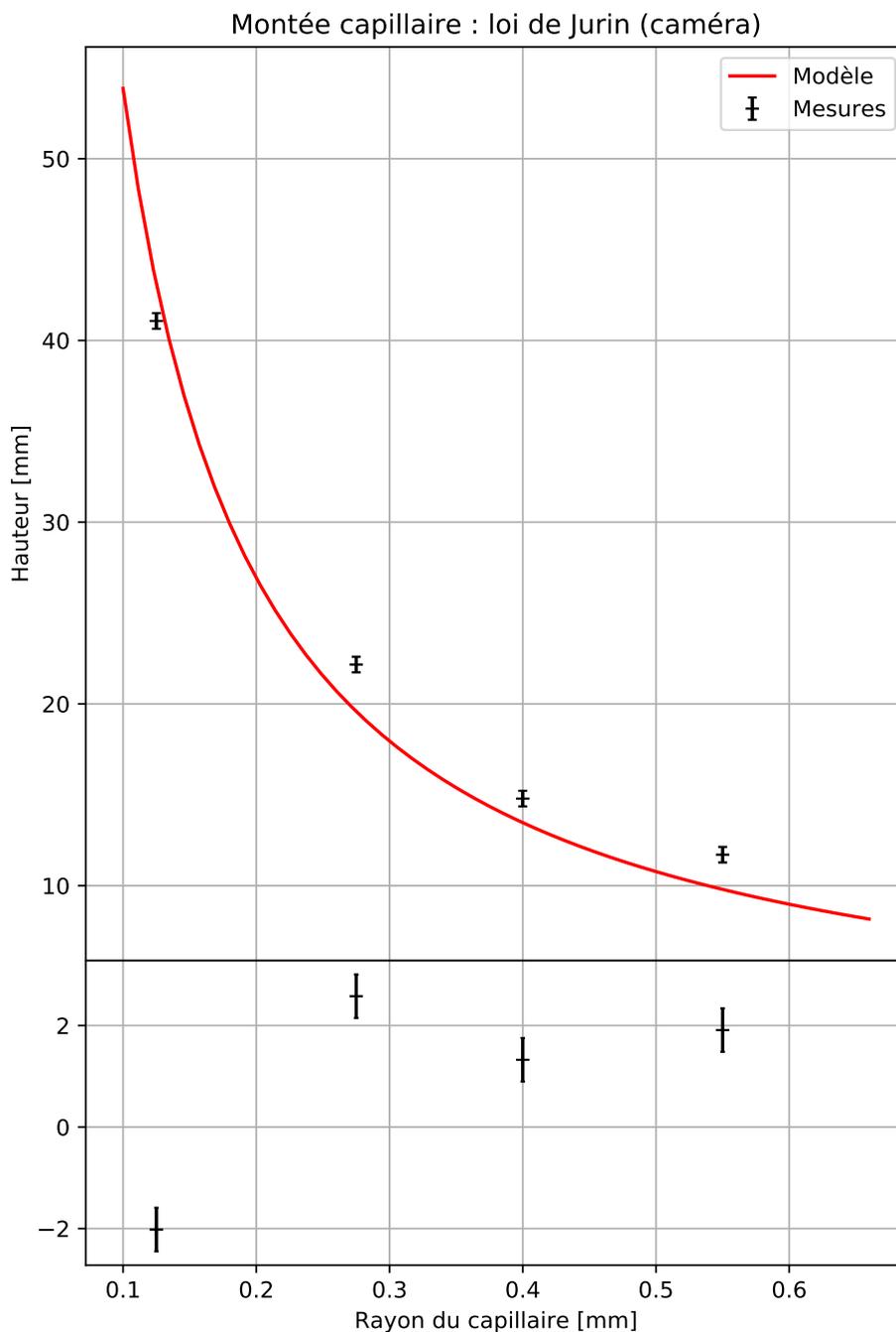


FIGURE 9 – Loi de Jurin. Mesure de la hauteur de la montée capillaire en fonction du rayon du tube, cette fois en utilisant une caméra. Ajustement en  $h \propto 1/r$ .

**Dynamique de la montée capillaire. Exploitation.** L'utilisation d'une caméra vidéo permet aussi d'enregistrer la montée capillaire pendant toute la durée du phénomène : il est donc possible, en mesurant les positions successives du ménisque dans chaque tube, d'étudier la cinématique du phénomène. Un exemple de vidéo de la montée capillaire :

<http://supernovae.in2p3.fr/~llg/Enseignements/Agregation/TP/Fluides-Capillarite/Montee-Capillaire--Loi-de-Jurin--LLG--20220125T15h12m51s.mp4>

En pratique, on peut relever les positions manuellement sur la vidéo, image par image, mais c'est un peu fastidieux. On peut aussi utiliser une procédure de suivi automatique, par exemple avec ImageJ.

La progression du ménisque dans le tube capillaire est le résultat de trois phénomènes : la tension de surface qui tire vers le haut la ligne de contact du ménisque avec le tube ; le poids croissant de la colonne de liquide dans le tube, et la viscosité (Poiseuille) qui freine l'ascension. En pratique, notamment à la fin de l'ascension capillaire, l'inertie du liquide peut être négligée, et le frottement visqueux considéré comme proportionnel à la vitesse. La progression du ménisque est très rapide au début (loi en  $z(t) \propto t^{1/2}$ ), puis ralentit à l'approche de la hauteur d'équilibre : la fin de l'ascension suit alors une dynamique de relaxation exponentielle vers la hauteur d'équilibre. En théorie, l'exploitation de la dynamique de la montée capillaire permet aussi d'estimer la viscosité du liquide.

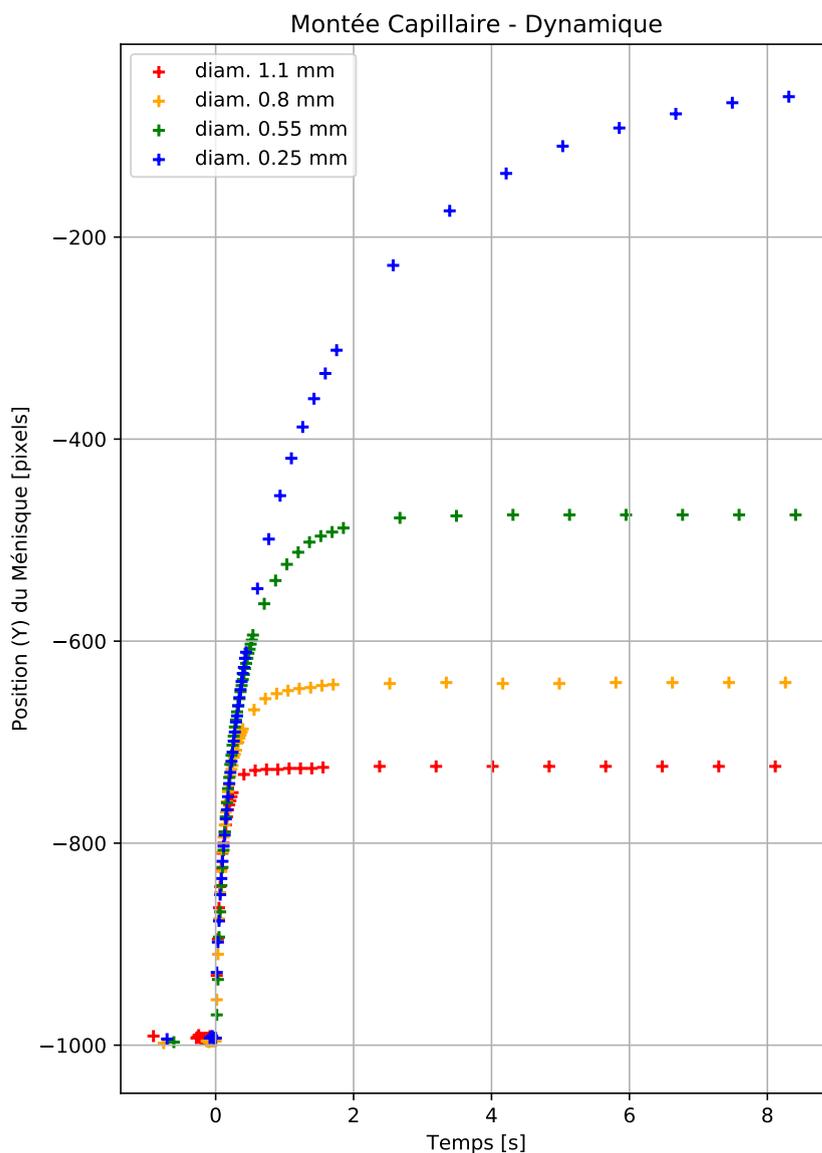


FIGURE 10 – *Dynamique de la montée capillaire en fonction du temps, pour 4 tubes capillaires de rayons différents. Les courbes ont été recalées temporellement pour que chaque montée démarre à  $t = 0$ .*

### 2.3. Tensiomètre à lame mouillée

Le principe de l'instrument est de plonger une lame dans un liquide, et de mesurer via une balance de précision la force exercée vers le bas par le liquide sur la lame, dont l'expression est :

$$F = 2L\gamma \cos \theta$$

où  $L$  est la longueur horizontale de la lame. La lame utilisée ici fait exactement  $2L = 9.81$  cm ce qui simplifie le calcul numérique de la tension de surface.



FIGURE 11 – Tensiomètre à lame mouillée.

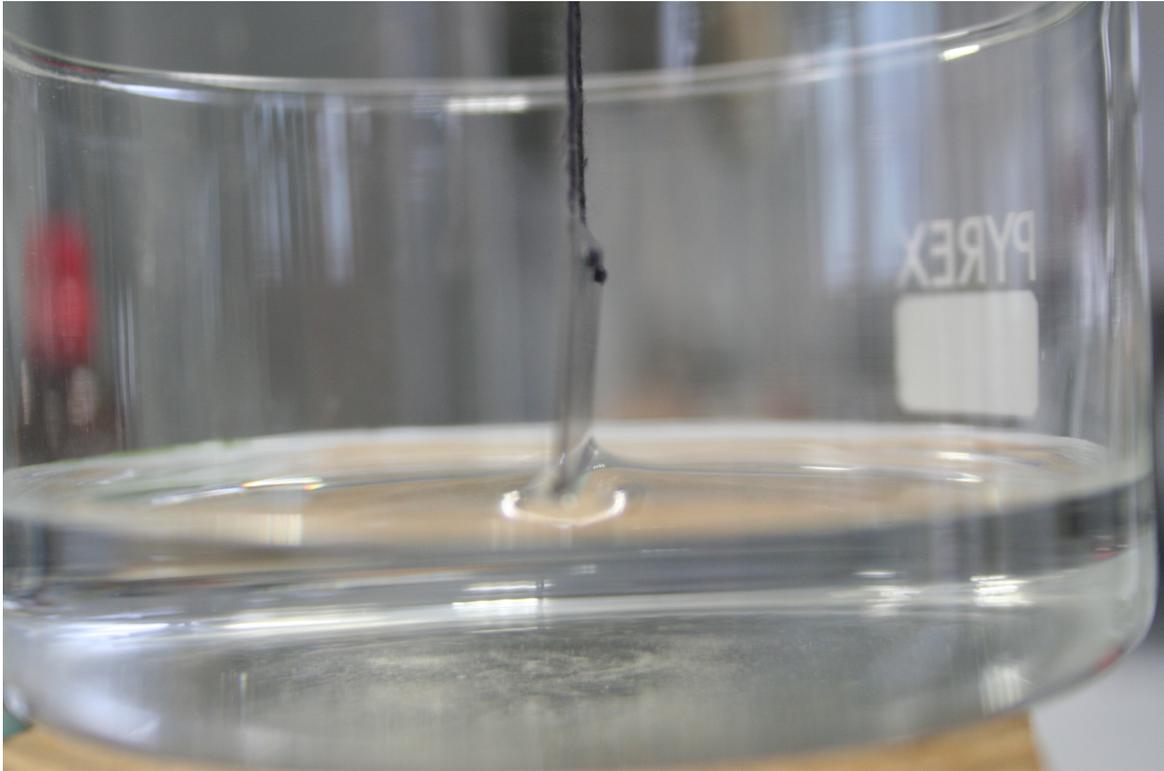
**Mesures et résultats.** Pour chaque mesure, on sèche la lame. On équilibre la balance de précision et on fait le zéro. Une fois le liquide à mesurer dans le cristallisateur, on le remonte lentement jusqu'à atteindre le contact avec la surface. On attend l'équilibre, puis on fait glisser le curseur de la balance jusqu'à atteindre la limite d'arrachement (juste avant que la lame ne s'arrache du liquide). Il est important à ce stade de ne plus déplacer le cristallisateur (il est facile d'entraîner la lame avec le cristallisateur, ce qui fausse la mesure).

Avec de l'éthanol à 95%, on trouve une force équivalente à  $m = 225 \pm 5$  mg. En considérant un angle de mouillage quasi-nul pour l'éthanol, ce qui donne directement une tension de surface éthanol-air de :

$$\gamma_{\text{éthanol}} = \frac{mg}{2L} \cdot \frac{1}{\cos \theta} = (22.5 \pm 0.5) \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

ce qui correspond bien aux valeurs tabulées pour l'éthanol.

En procédant de même avec de l'eau, on trouve cette fois une force équivalente à  $m = 545 \pm 5$  mg. Cette fois, l'angle de mouillage n'est pas nul, et est assez difficile à mesurer. En prenant  $\theta \approx 30^\circ$

FIGURE 12 – *Lame à la limite de l'arrachement du liquide (éthanol).*

(mesure visuelle très grossière), on obtient :

$$\gamma_{\text{eau}} = \frac{mg}{2L} \cdot \frac{1}{\cos \theta} \approx 63 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

à comparer avec la valeur tabulée de  $\gamma_{\text{eau}} = 72 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  pour de l'eau pure à 20°C.

### 3. Hydrodynamique

#### 3.1. Écoulement de Poiseuille

On souhaite vérifier la loi de Poiseuille (proportionnalité du gradient de pression  $\Delta P$  avec le débit volumique  $Q$ ), qu'on peut écrire :

$$\Delta P = RQ = \frac{8\eta L}{\pi r^4} Q \quad \text{où} \quad R = \frac{8\eta L}{\pi r^4}$$

où  $\Delta P$  est la différence de pression entre deux points de l'écoulement (*perte de charge*),  $\eta$  est la viscosité dynamique de l'eau,  $r$  et  $L$  sont respectivement le rayon et la longueur du tube (entre les deux points de mesure) où s'écoule le liquide. La loi de Poiseuille présente une analogie formelle avec la loi d'Ohm  $U = RI$ , où le débit  $Q$  correspond au courant électrique et la différence de potentiel  $U$  est l'analogue de la différence de pression  $\Delta P$  (*analogie hydraulique*).

La loi de Poiseuille est valide lorsque le champ de vitesse est parallèle à l'axe du tube et le profil de l'écoulement parabolique. La loi demeure une approximation raisonnable tant que le nombre de Reynolds  $\mathcal{R}_e = 2r\bar{v}\rho/\eta$  est inférieur à 2000 environ.

En pratique, on règle la vitesse d'écoulement en jouant sur la hauteur du tube de prise d'air dans le flacon réservoir, et on mesure le débit à la sortie du tube en mesurant le volume qui s'est écoulé pendant un temps donné. La différence de pression (perte de charge) se lit directement en mesurant la différence de hauteur de l'eau dans les deux tubes fixés aux deux points de mesure. En variant la vitesse d'écoulement, on obtient le tableau 4.

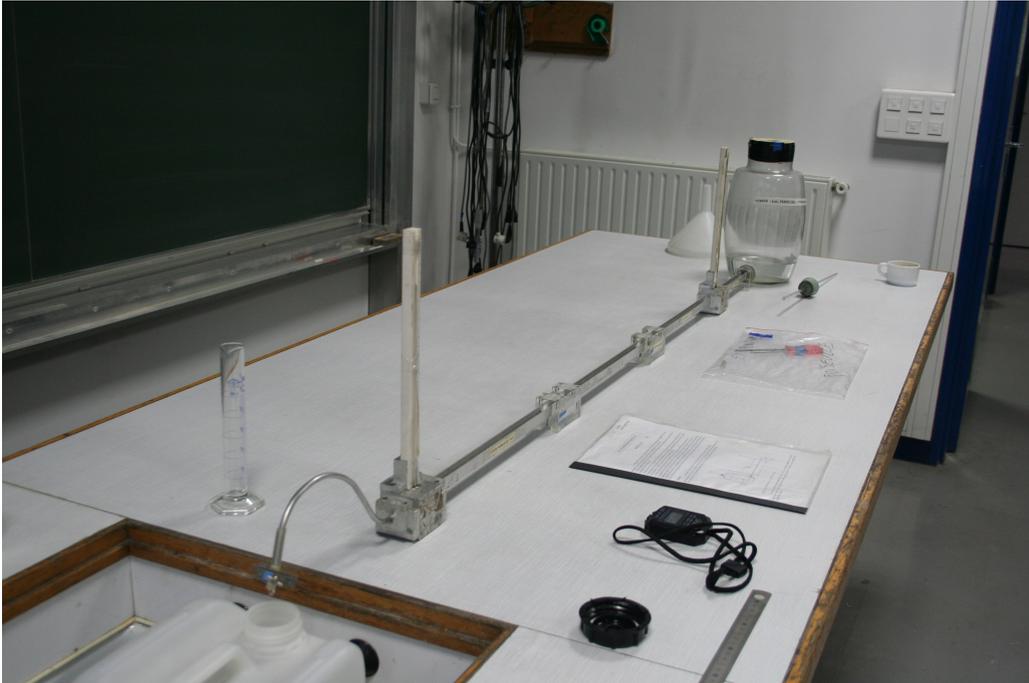


FIGURE 13 – Expérience de Poiseuille installée.

**Mesures.** En variant le débit  $Q$ , on obtient les mesures du tableau 4.

$h_1$ [mm]	$h_2$ [mm]	$\Delta h$ [mm]	$\Delta P = mg\Delta h$ [Pa]	$V$ [cm <sup>3</sup> ]	$\Delta t$ [s]	$Q = V/\Delta t$ [cm <sup>3</sup> · s <sup>-1</sup> ]	$\bar{v}$ [m · s <sup>-1</sup> ]	$Re$
170	170	0	0.0	–	–	0.0	0	0
34	16	18	176.6	34	30.0	1.13	0.09	360
100	79	21	206.0	38	30.0	1.27	0.10	403
28	3	25	245.3	42	31.0	1.35	0.11	431
46	9	37	362.9	42	20.0	2.10	0.17	668
77	29	48	470.9	45	13.6	3.31	0.26	1053

TABLE 4 – Loi de Poiseuille. Mesures (en gras) : hauteurs  $h_1$  et  $h_2$  dans les deux tubes, durée  $\Delta t$  de mesure de l'écoulement et volume  $V$  d'eau recueillie correspondante. On en déduit la différence de pression  $\Delta P$ , le débit  $Q$ , la vitesse moyenne  $\bar{v}$  du fluide dans la section du tube, et le nombre de Reynolds.

**Résultats.** On vérifie que la perte de charge  $\Delta P$  est bien proportionnelle au débit volumique  $Q$  dans le tube (fig. 14). On trouve une pente  $R \approx 144.7 \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{cm}^{-3}$ , d'où on déduit une estimation de la

viscosité dynamique de l'eau :

$$\eta = \frac{\pi r^4 R}{8L} \approx 0.76 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

à une température d'environ 23°C. Pour comparaison, la valeur tabulée de la viscosité dynamique de l'eau à cette température est plutôt de  $0.95 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ .

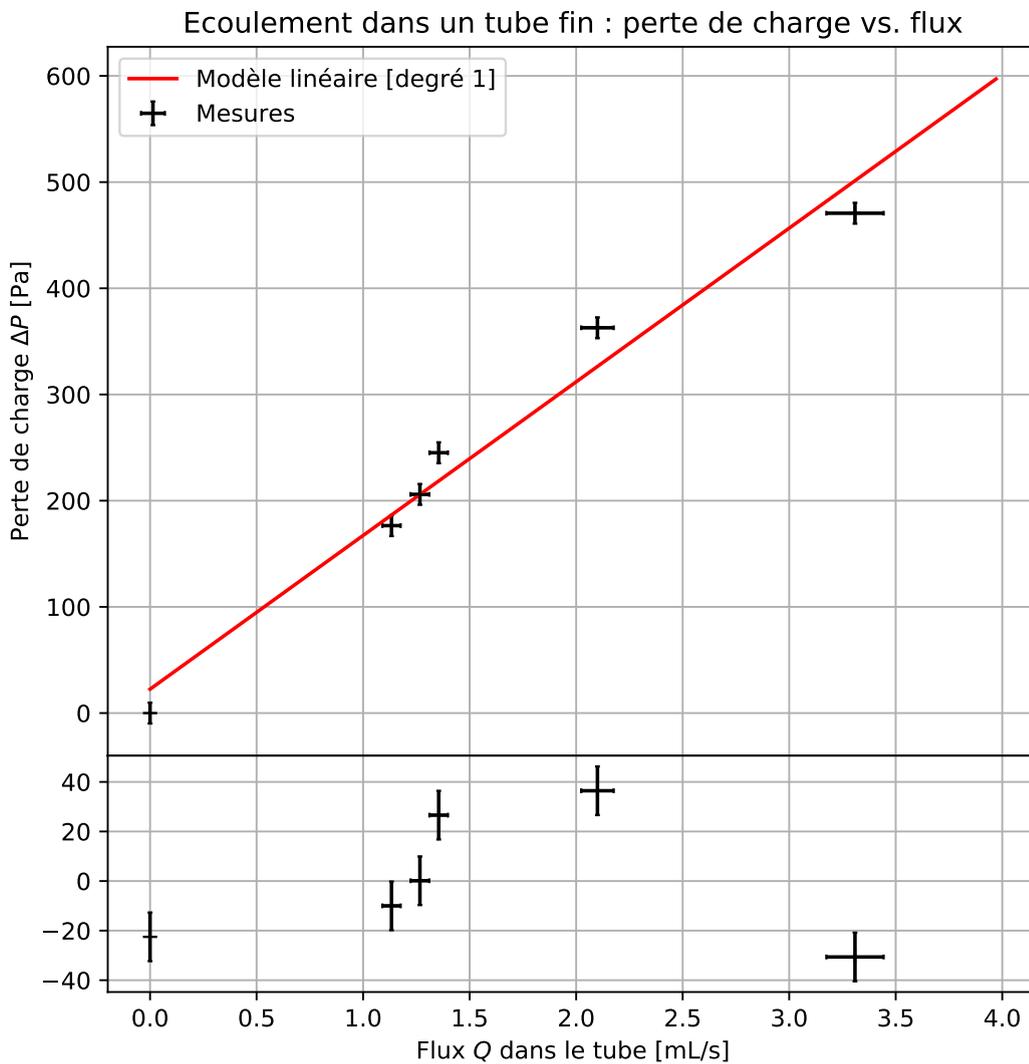


FIGURE 14 – Mesures de la perte de charge  $\Delta P$  dans le tube entre les deux points de mesure, en fonction du débit  $Q$ . Ajustement linéaire.

**Remarques.** Lorsqu'on contrôle le rythme de l'écoulement dans le tube principal en fermant le réservoir avec son bouchon et en réglant la hauteur du tube d'arrivée d'air, l'entrée d'air est pulsée (passage des bulles d'air), et la circulation de l'eau dans le tube principal aussi. Pour certains débits, on voit même le niveau osciller dans le premier tube de mesure de la pression. L'hypothèse d'un écoulement régulier à débit constant est donc probablement incorrecte dans ce cas. Il est peut être

plus judicieux de faire varier le débit en jouant sur le système de fermeture du tuyau d'évacuation du liquide, à l'extrémité du tube.

**Suggestions et améliorations possibles.** Afin d'améliorer la lisibilité de la hauteur du liquide dans les deux tubes, et, plus généralement, l'aspect spectaculaire de l'expérience, on pourrait envisager d'utiliser un colorant (non tâchant) dans l'eau du réservoir. Sur les deux tubes de verre, le papier millimétré photocopié part en miettes, surtout une fois mouillé (à cause des fuites) : on pourrait éventuellement fixer un réglé métallique ou une portion de règle en plastique le long des deux tubes.

### 3.2. Traînée sur une sphère en régime visqueux : loi de Stokes

L'objectif est de vérifier la loi de Stokes et d'en déduire la viscosité de la glycérine. Pour ce faire, on fait tomber en chute libre des billes d'acier de rayon croissant dans un grand récipient de glycérine, et on détermine la vitesse limite  $v_{\text{lim}}$  atteinte par chaque bille dans le liquide, en mesurant le temps de parcours entre deux marques horizontales séparées d'une hauteur  $H$  fixée. On place les repères de hauteur sur le récipient de manière à éviter la phase accélérée de la chute (entrée de la bille dans le liquide).

En régime visqueux, pour un nombre de Reynolds inférieur à 1, la force de traînée sur la bille sphérique de rayon  $r$  est de la forme  $\mathbf{F} = \alpha \mathbf{v} = -6\pi\eta r \mathbf{v}$ . La vitesse limite s'écrit alors :

$$v_{\text{lim}} = \frac{2gr^2}{9\eta} (\rho_{\text{acier}} - \rho_{\text{glycérine}})$$

**Mesures et résultats.** On laisse tomber en chute libre des billes d'acier de diamètres variés : on vérifie le diamètre des billes au pied à coulisse. On obtient les mesures de la table 5.

$d = 2r$ [mm]	$\Delta t$ [s]	$v_{\text{lim}}$ [m · s <sup>-1</sup> ]	$Re$
2.50	2.44	0.082	0.94
2.50	2.41	0.083	0.95
2.50	2.54	0.079	0.90
3.50	1.31	0.153	2.45
3.50	1.40	0.143	2.39
4.97	0.78	0.256	5.84
4.97	0.75	0.267	6.07
4.00	1.06	0.189	3.46
1.56	6.50	0.031	0.22
1.00	15.25	0.0131	0.06
1.00	15.47	0.0129	0.06

TABLE 5 – Étude de la traînée d'une bille d'acier en chute libre dans du glycérol : mesure de la vitesse limite : diamètre  $2r$  de la bille, temps de chute  $\Delta t$  pour une hauteur  $H = 200$  mm, vitesse limite  $v_{\text{lim}}$  et nombre de Reynolds (obtenu a posteriori à partir de la viscosité dynamique mesurée).

De l'ajustement des données (fig. 15), on déduit une estimation de la viscosité dynamique du glycérol :

$$\eta = 0.275 \pm 0.004 \text{ Pa} \cdot \text{s}.$$

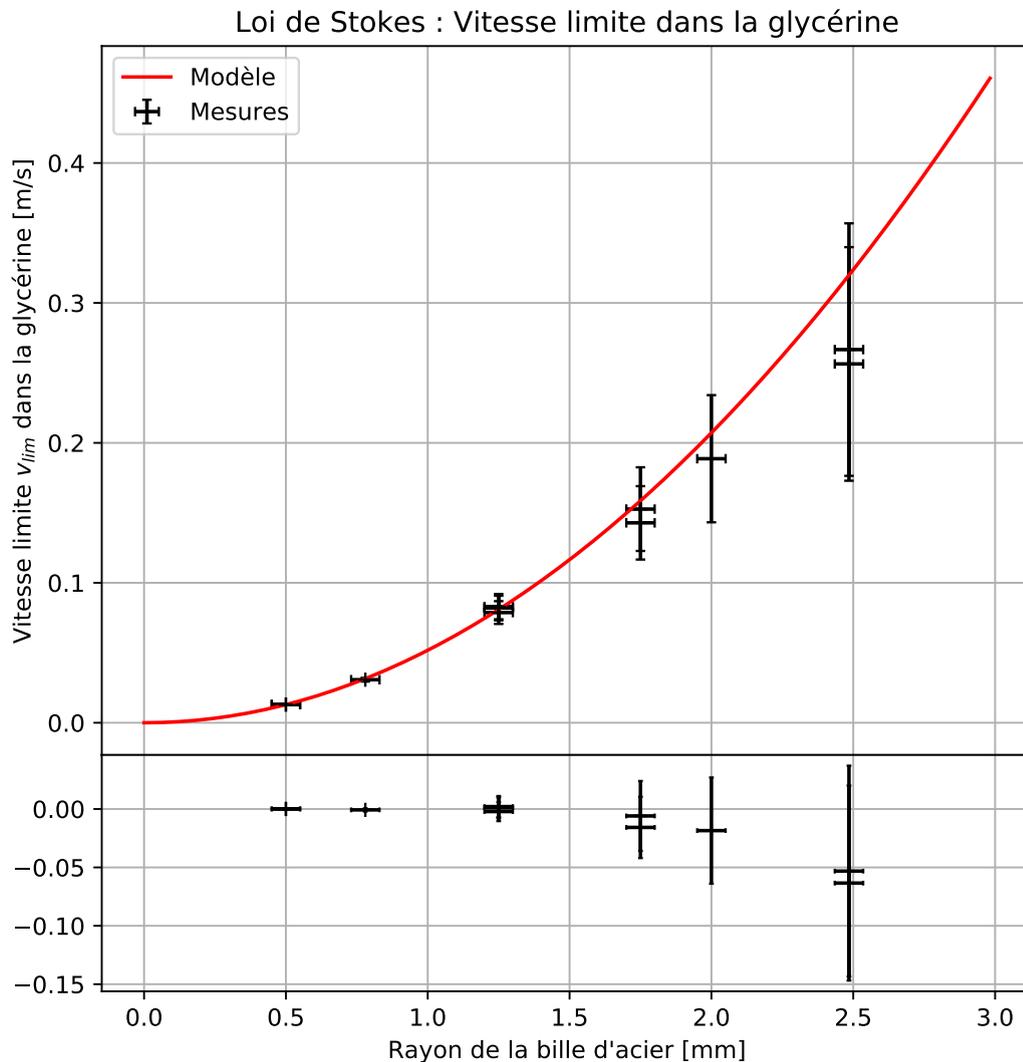


FIGURE 15 – Mesures de la vitesse limite  $v_{lim}$  de la bille d’acier en chute libre dans la glycérine, en fonction du rayon de la bille. Ajustement en  $v_{lim} \propto r^2$

La valeur obtenue est assez faible comparée à ce qu’on attend pour du glycérol ( $\eta = 1.49 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ). Cette différence peut être le résultat de l’absorption progressive de l’humidité atmosphérique par le glycérol qui est hygroscopique : en effet, la viscosité dynamique d’une solution de glycérol diminue très rapidement avec la concentration (elle diminue d’un facteur  $\approx 2$  lorsqu’on passe de 100% à 96% de glycérol) : il suffit d’une très faible proportion d’eau pour abaisser la viscosité de la glycérine.

### 3.3. Équation de Bernoulli : tube de Pitot

On souhaite vérifier l’équation de Bernoulli dans le cas particulier d’un tube de Pitot (“sonde Pitot”, appelée aussi “antenne de Prandtl”). On suppose l’écoulement parfait et incompressible, et on applique l’équation de Bernoulli le long d’une ligne de courant, afin d’établir la différence de pression

entre les points  $O$  et  $O'$  (voir figure de l'énoncé); comme ces deux points sont à l'horizontale, on obtient (en considérant la vitesse comme nulle :

$$\frac{\Delta P}{\rho} + \frac{v^2}{2} = 0 \quad \text{i.e.} \quad P_{\text{totale}} = P_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\rho v^2$$

où  $P_{\text{atm}}$  est la pression atmosphérique (mesurée en  $O'$ ),  $P_{\text{totale}}$  est la pression dite *totale* (mesurée dans le tube intérieur relié à l'entrée  $O$ ), et  $\Delta P$  la différence de pression  $\Delta P = P_{\text{totale}} - P_{\text{atm}}$ . On déduit de la mesure de  $\Delta P$  la vitesse  $v$  du fluide en  $O$ .

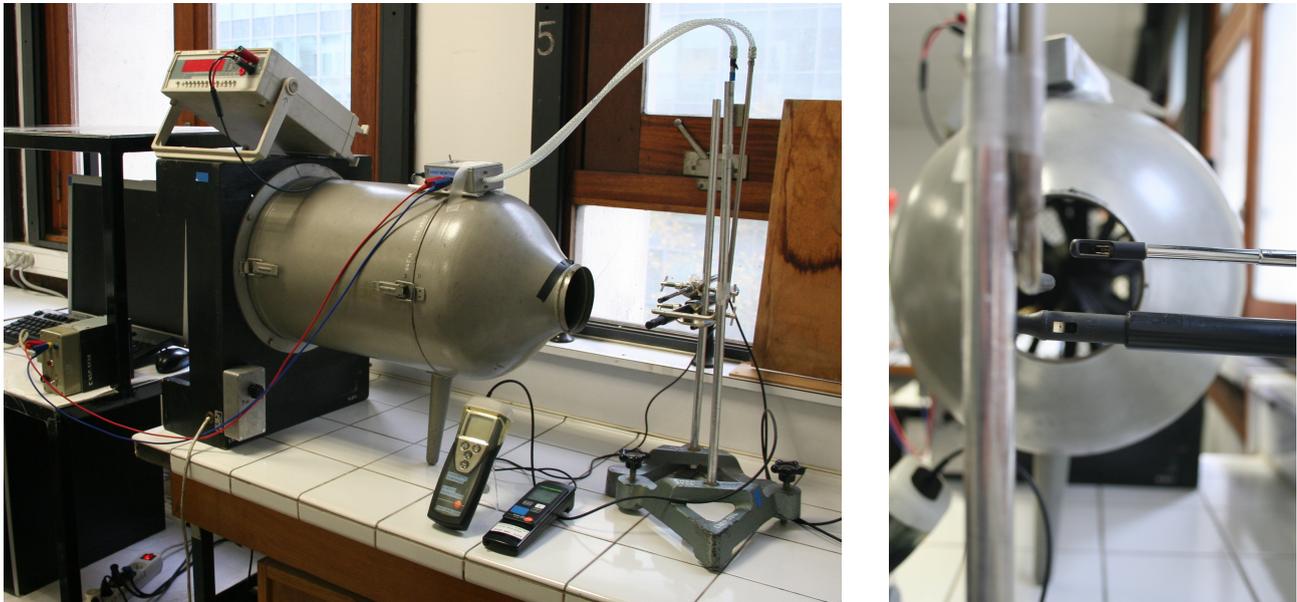


FIGURE 16 – Sonde de Pitot. À gauche : dispositif de mesure, avec la soufflerie, la sonde de Pitot connectée au manomètre différentiel, et les anémomètres à fil chaud disposés dans le flux d'air produit par la soufflerie. À droite : détail de la disposition de la sonde et des anémomètres en face de la bouche de sortie.

**Mesures et résultats.** Pour différentes vitesses de soufflerie, on mesure au manomètre différentiel la différence de pression  $\Delta P = P_{\text{totale}} - P_{\text{atm}}$  (que l'on déduit de la tension  $U$  mesurée sur le voltmètre relié au manomètre, avec  $\Delta P = 125 \text{ Pa/V} \times U$ ). On met en relation cette mesure avec la vitesse de l'air donnée par deux anémomètres à fil chaud (deux versions du Testo 425, de numéros d'inventaire ENSP 3878 et 4051). Les mesures obtenues sont regroupées en table 6.

L'allure générale est bien parabolique, comme attendu. Par contre, l'erreur systématique sur la vitesse de l'air est considérable, du fait probablement de la dérive de la calibration des anémomètres à fil chaud.

Pour aller plus loin, on ajuste les mesures obtenues par un polynôme de degré deux. Le coefficient de degré le plus élevé est sensé valoir  $a_2 = \rho_{\text{air}}/2 = 0.6465 \text{ kg/m}^3$ ; on trouve ici :

$$a_2^{3878} = 0.75 \text{ kg/m}^3 \quad \text{et} \quad a_2^{4051} = 1.71 \text{ kg/m}^3$$

**Remarques et suggestions.** Il est probablement souhaitable de rapprocher davantage les sondes (anémomètres, sonde Pitot) de la bouche de sortie de la soufflerie. D'autre part, on a supposé ici que la vitesse de l'air en sortie de soufflerie était indépendante de la position dans le plan transverse. Ce

$\Delta U$ [V]	$\Delta P$ [Pa]	$v$ (3878) [m · s <sup>-1</sup> ]	$v$ (4051) [m · s <sup>-1</sup> ]
<b>2.503</b>	0.0	<b>0.0</b>	<b>0.03</b>
<b>2.398</b>	13.1	<b>3.9</b>	<b>3.6</b>
<b>2.350</b>	19.1	<b>4.9</b>	<b>4.2</b>
<b>1.915</b>	73.5	<b>9.9</b>	<b>8.2</b>
<b>1.71</b>	99.1	<b>11.5</b>	<b>9.8</b>
<b>1.36</b>	142.9	<b>13.8</b>	<b>10.8</b>
<b>0.97</b>	191.6	<b>15.9</b>	<b>12.2</b>
<b>0.83</b>	209.1	<b>16.6</b>	<b>12.6</b>
<b>0.40</b>	262.9	<b>18.7</b>	<b>14.0</b>

TABLE 6 – *Étude du fonctionnement d'un tube de Pitot. Mesure de la tension aux bornes du manomètre différentiel, dont on déduit la différence de pression  $\Delta P$ ; mesure de la vitesse de l'air au moyen de deux anémomètres à fil chaud (Testo 425, numéros d'inventaire 3878 et 4051).*

n'est probablement pas le cas : on doit pouvoir améliorer l'expérience en tenant compte du profil (parabolique?) de l'écoulement et des positions précises des différentes sondes dans le plan transverse. Éventuellement, il serait souhaitable de cartographier la vitesse de l'écoulement dans le plan transverse.

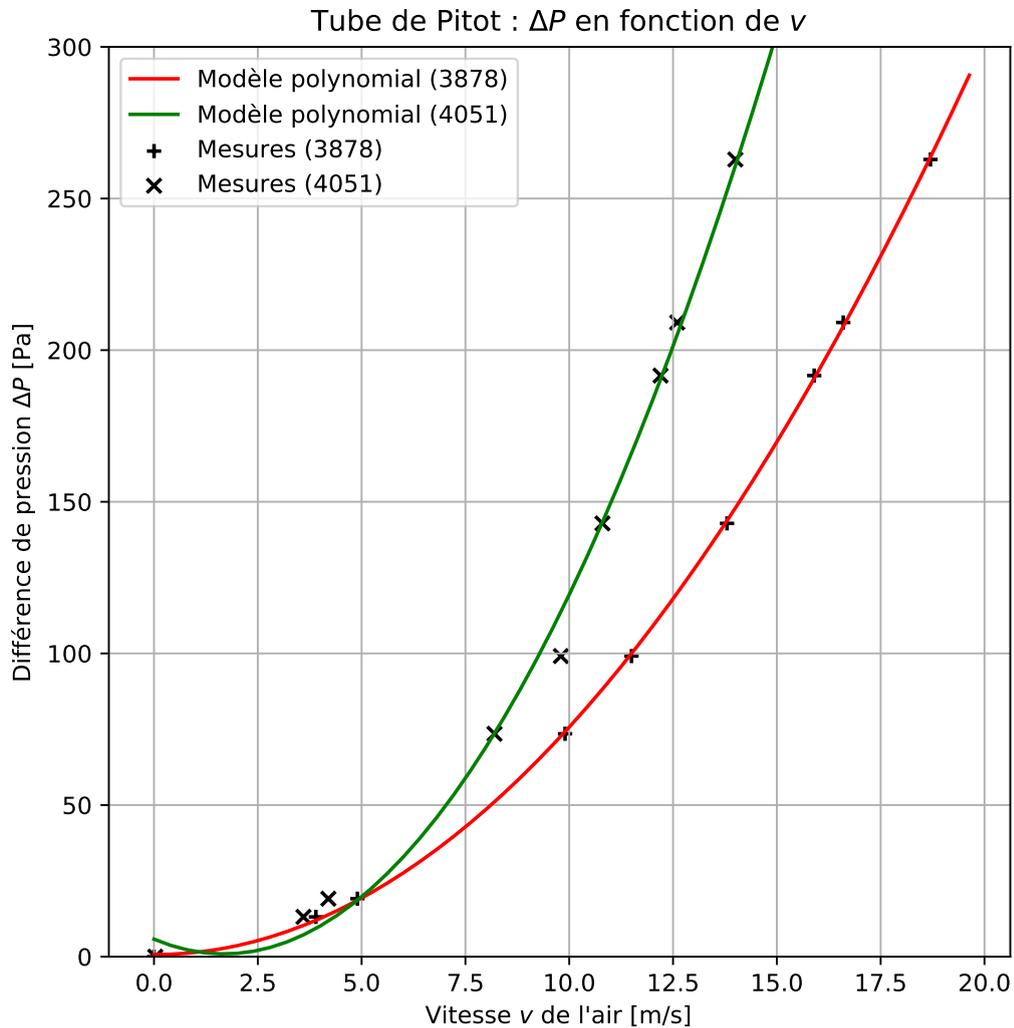


FIGURE 17 – Mesure de la différence de pression  $\Delta P$  du tube Pitot en fonction de la vitesse de l'air, mesurée au moyen de deux anémomètres à fil chaud (Testo 425, numéros d'inventaire 3878 et 4051). Ajustements des données par un modèle polynomial de degré deux.