Licence de Physique

Relativité Restreinte : Résumé des Cours 1 & 2

Parcours SPRINT & Double Majeure PM – Année Universitaire 2024–2025

Intervenants : L. Le Guillou & J. Bolmont (Sorbonne Université / LPNHE)

Rappels de mécanique classique — Référentiels : référentiels inertiels — La transformation de Galilée — Composition des vitesses et des accélérations — Référentiels non-galiléens : composition des vitesses et des accélérations — Forces inertielles : force d'entraînement, force de Coriolis — Dynamique terrestre : champ de pesanteur, force de Coriolis terrestre.

Notations : dans les documents de ce cours, les vecteurs sont notés en lettres grasses, sans flèches. Ainsi, par exemple, on notera $\mathbf{r}$ *le vecteur position de coordonnées cartésiennes* (x, y, z)*, et* $r = |\mathbf{r}|$ *sa norme. Une notation spécifique sera introduite pour les quadrivecteurs et pour leurs composantes.*

1. Rappels de mécanique classique

1.1. De la "mécanique" antique à Galilée et Newton

La mécanique est l'étude du mouvement des systèmes matériels, en relation avec les forces qui provoquent ou modifient ce mouvement.

Les théories mécaniques de l'antiquité restent très limitées dans leur portée explicative. Si certains concepts, notamment en statique, ont été dégagés très tôt : centre de gravité, équilibre des forces, principe du levier (Archimède (vers 287–212 av. J.C.)), la compréhension de la cinématique et de la dynamique laisse beaucoup à désirer. Les "paradoxes" de Zénon (vers 490–430 av. J.C.), par exemple, sont autant de sophismes tendant à démontrer que le mouvement lui-même ne peut exister, contre l'évidence même, faute des concepts et des outils mathématiques nécessaires pour raisonner correctement sur des infiniment petits.

Dans la cosmogonie héritée de la tradition grecque, l'univers se subdivise en deux parties, où règnent des lois différentes, notamment concernant les mouvements : d'une part, le monde sub-lunaire, où toute chose est constituée d'une combinaison des quatres éléments (terre, eau, air et feu), avec, au centre, la Terre, sphérique et immobile ; c'est le monde des choses qui naissent et meurent, où tout est périssable. D'autre part, le monde supra-lunaire, au-delà de l'orbite de la Lune, où tournent éternellement le Soleil, la Lune et les planètes, fixées sur des sphères cristallines concentriques transparentes, avec comme arrière-plan la sphère des étoiles fixes et immortelles (elle aussi en rotation) ; dans le monde supra-lunaire, les objets, éternels, sont constitués d'"*éther*" (le *cinquième élément*, ou *quintessence*), et leurs trajectoires sont naturellement des cercles, la figure géométrique parfaite. C'est la cosmogonie d'Empédocle (vers 490–430 av. J.C.) et d'Aristote (384–322 av. J.C.), dont Claude Ptolémée (vers 100–168 ap. J.C.) fera la synthèse (fig 1).

Dans la vision d'Aristote et de ses commentateurs, les mouvements des objets dans le monde sublunaire ont deux origines :

— Chacun des 4 éléments (terre, eau, air et feu) tend à retourner *à son lieu propre*, pour ensuite y demeurer immobile : la *terre* au centre, puis l'*eau*, l'*air* et le *feu*, dans cet ordre. Tous les corps sont constitué d'un mélange de ces quatre éléments, dans différentes proportions. Un corps qui contient beaucoup d'air ou de feu s'envole, tandis qu'un corps contenant une large proportion d'eau ou de terre tombe : une pierre tombe dans l'air et coule dans l'eau, par exemple, car contenant une large proportion de terre, elle tend à descendre dans l'air et dans l'eau pour rejoindre la terre au-dessous.

— Un corps peut-être mis en mouvement par l'action d'une force, qui lui transmet ainsi une certaine quantité d'*impetus* ; toutefois, cet *impetus* s'épuise progressivement, et il est nécessaire d'appliquer continuellement une force pour maintenir le mouvement du corps en question.

Le pouvoir explicatif et prédictif de cette description théorique est cependant assez faible, voire nul dans la plupart des situations concrètes.

Les observations des mouvements réels des corps, à la fois sur Terre et dans le ciel, vont peu à peu mettre à bas cette construction intellectuelle. Le suivi régulier des mouvements des planètes, avec des mesures de plus en plus précises (notamment par Tycho Brahé (1546–1601)) va progressivement mettre en difficulté le modèle géocentrique de l'Univers : malgré des raffinements successifs à base de mouvements circulaires composés imbriqués (épicycles, équants), l'impossibilité de rendre compte avec précision des observations du mouvement des planètes rend ce modèle intenable. La formulation des lois de Kepler (1571–1630) (fig. 3), puis la découverte des satellites de Jupiter par Galilée (1564–1642) marqueront la fin du modèle géocentrique et le triomphe du modèle héliocentrique, plaçant le Soleil et non la Terre au centre de l'Univers [1].

Par ailleurs, l'étude du pendule, de la chute des corps sur Terre et des lois du mouvement par Galilée, la formulation du principe d'inertie, puis la magistrale synthèse théorique réalisée par Isaac Newton (1642–1727), font émerger une nouvelle mécanique, dite "classique", qui permet de rendre compte à la fois des mouvements des corps sur Terre et des planètes dans le ciel, réunifiant les mondes sub- et supra-lunaires en une seule description cohérente. La mise au point du calcul différentiel et intégral (notamment par Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) et Newton) fournit aussi les outils mathématiques indispensables pour l'étude du mouvement dans le cadre élaboré par Newton et ses successeurs.

1. Aristarque de Samos (vers 310 BC – 230 BC) est probablement le premier à avoir formulé l'hypothèse héliocentrique, minoritaire à l'époque.

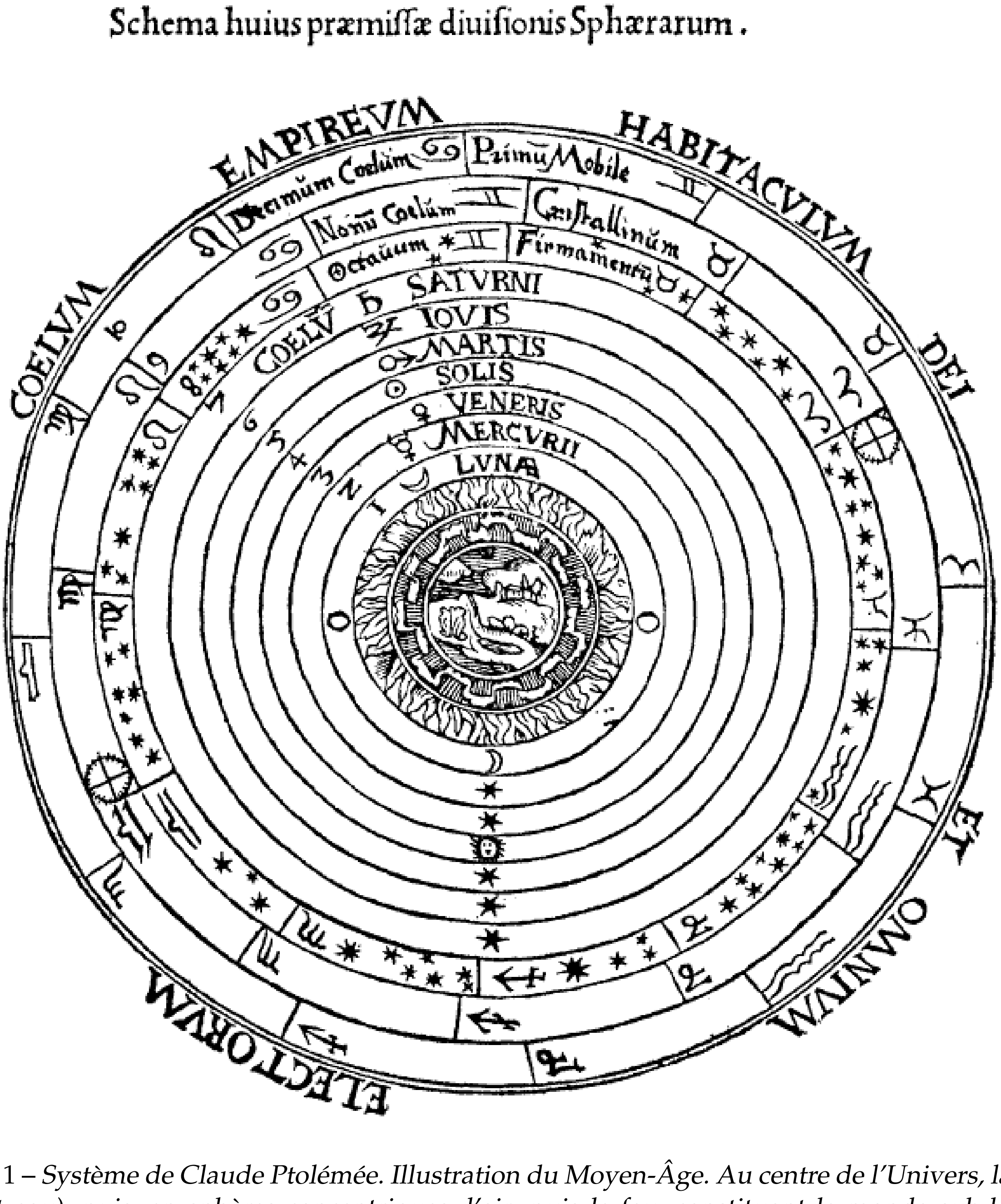


FIGURE 1 – *Système de Claude Ptolémée. Illustration du Moyen-Âge. Au centre de l'Univers, la Terre (terre et eau), puis, en sphères concentriques, l'air, puis le feu, constituant le monde sub-lunaire. Viennent ensuite la sphère cristalline de la Lune, puis celles de Mercure, Vénus, du Soleil, de Mars, Jupiter et Saturne ; La huitième sphère est celle du firmament, qui porte les étoiles fixes ; dans les sphères au-delà résident les principes premiers, la (ou les) divinité(s) et les élus. D'après Edward Grant, Celestial Orbs in the Latin Middle Ages, Isis, Vol. 78, No. 2. (1987), pp. 152-173.*

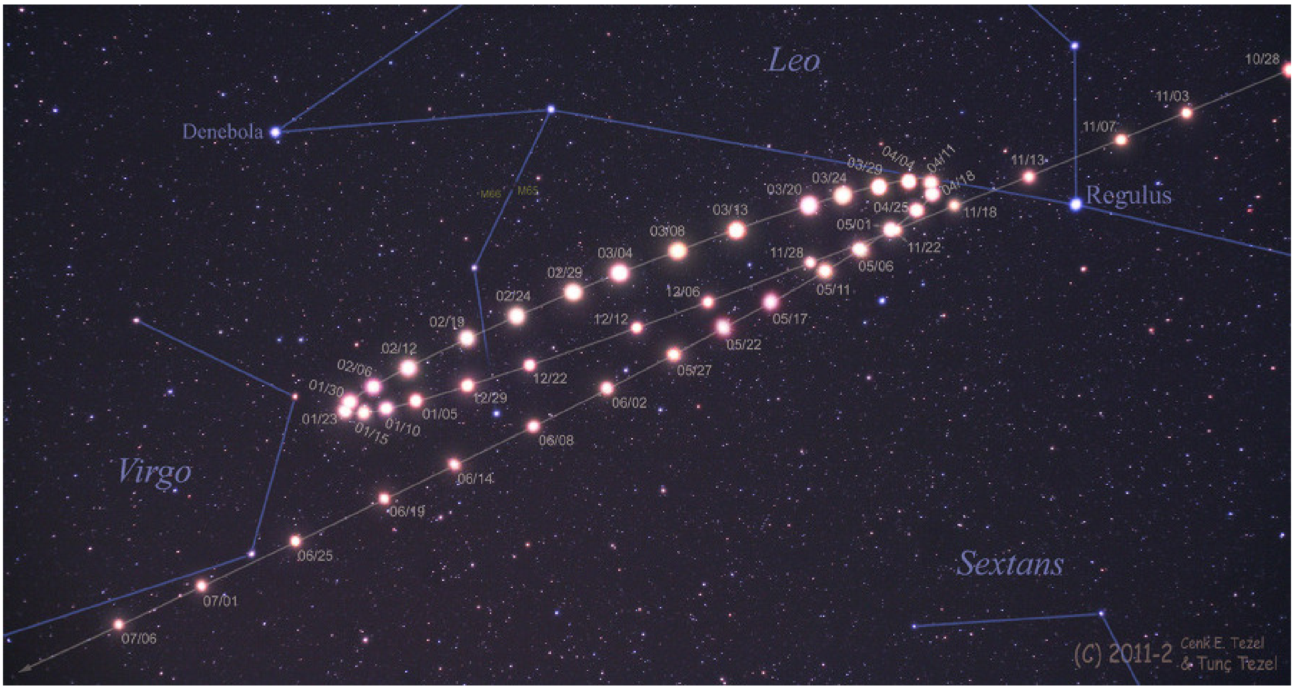


FIGURE 2 – *Mouvement rétrograde de la planète Mars d'octobre 2011 à juillet 2012 (les dates sont notées selon la convention anglo-saxonne, "mois/jour"). Une telle trajectoire vue de la Terre est difficilement compréhensible dans le cadre d'un modèle géocentrique de l'Univers (d'où les raffinements successifs des modèles géocentriques à base d'épicycles, de cercle déférent, d'équants, etc) ; cette trajectoire s'interprète aisément dans un modèle héliocentrique où la Terre et Mars orbitent toutes deux autour du Soleil, mais à des vitesses différentes (Source : Cenk E. Tezel & Tunç Tezel via APOD, 9 août 2012).*

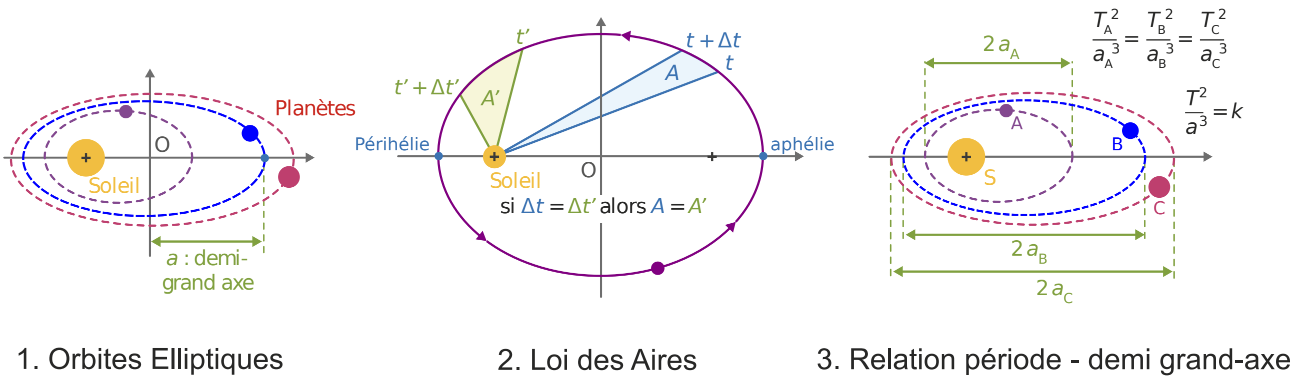


FIGURE 3 – *Illustration des 3 lois de Johannes Kepler (1571–1630), qui lui permettent de rendre compte des observations des trajectoires des planètes dans le ciel (notamment les mesures accumulées par Tycho Brahé, dont Kepler est l'assistant, puis le successeur), à partir d'un modèle héliocentrique : 1.– les planètes se déplacent sur des ellipses dont l'un des deux foyers est occupé par le Soleil ; 2.– Le rayon Soleil–planète parcourt des aires égales en des temps égaux ; 3.– Les carrés des périodes de révolution des différentes planètes d'un système sont proportionnels aux cubes de leurs demi-grands-axes. Isaac Newton montrera dans les Principia qu'il est possible de déduire les lois établies par Kepler à partir des 3 lois ("de Newton") qu'il énonce, et de sa loi de gravitation universelle.*

1. 2. Les principes de la mécanique classique

Dans les *Principia* (1687), son oeuvre majeure, Newton montre qu'il est possible de rendre compte des mouvements des corps sur Terre et dans le ciel à partir de trois "lois", dites "lois de Newton" :

1. Le **principe d'inertie** : *Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, et ne le contraigne à changer d'état.* Formulé autrement, un système **isolé** (*i.e.* qui ne subit aucune force extérieure) ou **pseudo-isolé** (pour lequel la somme des forces extérieures est nulle) voit son vecteur quantité de mouvement $\mathbf{p}$ conservé. Cette loi remet en cause le concept antique d'*impetus*.

2. La **relation fondamentale de la dynamique** ("RFD") : *Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice ; et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée.* Ce qu'on écrit aujourd'hui sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathbf{F}_i$$

i.e. la dérivée du vecteur quantité de mouvement $\mathbf{p}$ d'un système matériel est égale à la somme vectorielle des forces extérieures $\mathbf{F}_i$ qui s'exercent sur le système étudié. Cette loi se réduit à $m\,\mathbf{a} = \sum_i \mathbf{F}_i$ lorsque la masse m est constante.

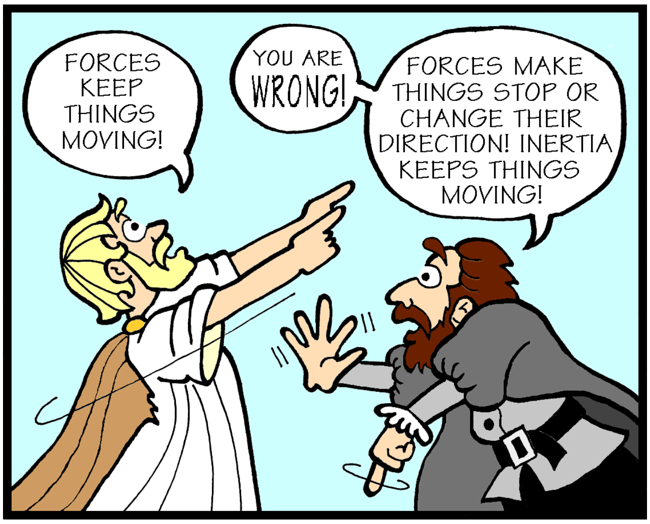
3. Le **principe d'action et de réaction** : *L'action est toujours égale à la réaction ; c'est-à-dire que les forces qu'exercent deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales et de sens contraires.*

Ces lois ne sont valides que dans une classe particulière de référentiels, baptisés *référentiels inertiels* ou encore *référentiels galiléens* (voir plus loin).

On inclut en général dans cette liste la "quatrième loi" de Newton : **la loi de la gravitation universelle**, qui prédit que tous les corps massifs s'attirent les uns les autres, et que la force d'attraction est proportionnelle à la masse des objets et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare. La force d'attraction qu'exerce un corps A sur un autre corps B s'écrit ainsi :

$$\mathbf{F}_{A/B} = -G\frac{m_A m_B}{r^2}\,\mathbf{e}_r \qquad \mathbf{F}_{B/A} = -\mathbf{F}_{A/B}$$

où $\mathbf{r} = \mathbf{AB}$ et $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$. Cette loi universelle (loi dite *de gravitation universelle*) permet de rendre compte à la fois de la chute des corps sur Terre et des mouvements des corps célestes : Newton démontre notamment que les lois de Kepler peuvent se déduire de ses 3 lois et de la loi de gravitation universelle.



2. Relativité en mécanique classique : la transformation de Galilée

Référentiels. La mécanique est l'étude du mouvement des systèmes matériels, en relation avec les forces qui provoquent ou modifient ce mouvement. On distingue en général la caractérisation du mouvement lui-même, baptisée **cinématique**, de l'étude de la relation entre forces et mouvement, que l'on nomme **dynamique**.

Afin d'étudier quantitativement le mouvement d'un objet matériel, il faut relever les positions successives qu'il occupe dans l'espace. Pour ce faire, il est indispensable de disposer d'un cadre de référence ou **référentiel** (*reference frame*) : il est en effet impossible de définir une position ou un mouvement dans un espace totalement "vide".

Un **référentiel** est un ensemble de points fixes entre eux (autrement dit, un *solide*) que l'on peut utiliser pour repérer les positions successives d'un objet *relativement à ces points fixes*. On pourra ainsi définir le référentiel d'un bâtiment, d'un train, d'un navire ; le référentiel terrestre solidaire de la planète, le référentiel héliocentrique, *etc.*

Dans un référentiel donné, on peut munir l'espace d'un **repère**, en choisissant arbitrairement un point d'origine (O) fixe dans le référentiel, et un système d'axes (Ox, Oy, Oz) solidaires du référentiel choisi. Une infinité de repères différents peuvent être définis dans un référentiel donné, et par convenance, on choisira souvent une origine et des axes qui simplifient la description du mouvement étudié, sans pour autant perdre en généralité.

Dans chaque référentiel, il est aussi nécessaire de disposer d'une horloge (souvent supposée parfaite) pour pouvoir décrire les positions successives qu'un objet occupe au fur et à mesure de l'écoulement du temps, et ainsi définir sa vitesse, son accélération, etc.

Principe de relativité. On conçoit naturellement que le choix du référentiel est subjectif, et que les mouvements (et plus généralement les phénomènes physiques) que l'on observe ne doivent pas dépendre du choix du référentiel d'étude ; de même, dans un référentiel donné, le choix du repère solidaire du référentiel ne doit en rien influer sur le phénomène étudié.

Dans *"Dialogue sur les deux grands systèmes du monde" (Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo)* (1632), Galilée fait remarquer que si on se trouve à l'intérieur d'une cabine sans fenêtre d'un grand navire à voiles, toutes les observations (chute d'un corps, lancers d'objets, sauts, mouvement des insectes, *etc.*) que l'on pourra y faire seront les mêmes, que le navire soit immobile au port, ou qu'il soit en mouvement de translation rectiligne uniforme (*i.e.* à vitesse constante) sous l'effet du vent dans les voiles [2]. Il est donc impossible de distinguer, au moyen d'une expérience de mécanique, si le navire est immobile ou en mouvement de translation uniforme : les lois du mouvement des objets dans la cabine sont les mêmes dans les deux cas, et de manière plus générale, dans tout référentiel immobile ou en mouvement de translation uniforme (référentiels dit "galiléens").

Galilée est ainsi le premier à formuler le **principe de relativité** en mécanique classique : il est impossible de réaliser une expérience de mécanique permettant de mettre en évidence un état de repos absolu ou de mouvement absolu : le mouvement est donc toujours défini relativement à un réferentiel donné, et les notions de repos absolu ou de mouvement absolu sont dépourvues de sens. De plus, les lois qui régissent les mouvements des objets sont les mêmes dans un référentiel immobile ou dans un référentiel en translation uniforme : autrement dit, les lois de la mécanique (et en fait, toutes les lois de la physique) doivent être invariantes par changement de référentiel galiléen (ou inertiel). Ainsi, les lois de Newton qui régissent les mouvements sont valides dans tout référentiel galiléen/inertiel, et s'y écrivent sous la même forme.

Référentiels galiléens. A priori, la définition d'un référentiel galiléen est circulaire : un référentiel est dit inertiel ou galiléen si le principe d'inertie y est vérifié ; et le principe d'inertie n'est valable que dans un référentiel galiléen. On se sort de cette situation en postulant qu'il existe une classe de référentiels où le principe d'inertie est vérifié ; et surtout, en montrant que tout référentiel en translation uniforme par rapport à un autre référentiel galiléen est lui aussi galiléen.

En pratique, la difficulté est d'identifier un "bon" référentiel galiléen ; selon les situations, on considérera un référentiel comme suffisamment "galiléen" pendant une durée donnée, et tel qu'on puisse y négliger les forces d'inertie qui s'y manifestent (fig. 7).

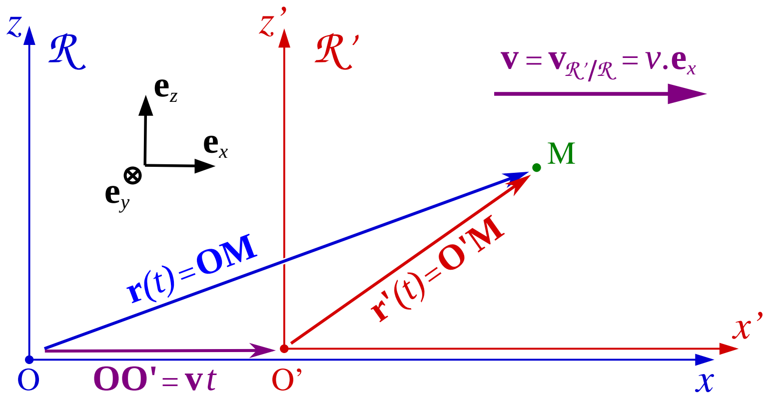
Changement de référentiel galiléen : transformations spéciales de Galilée. Considérons un mobile ponctuel M qui se trouve à l'instant t à la position définie par $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$: (x, y, z) dans le repère associé au référentiel galiléen $\mathcal{R}$. On souhaite en déduire au même instant t la position $\mathbf{r'} = \mathbf{O'M}$: (x', y', z') du même mobile dans un autre référentiel galiléen $\mathcal{R}'$, en translation uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ à la vitesse constante $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$. En mécanique classique, le passage entre les référentiels galiléens (ou inertiels) $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ s'effectue par la transformation suivante (dite *transformation de Galilée*) :

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OO'} + \mathbf{O'M} \qquad \text{d'où} \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}\,t \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v}\,t.$$

en choisissant l'origine du temps quand les origines O et O' se confondent.

On peut de plus décider de munir les deux référentiels de deux repères dont les axes sont parallèles, et où les axes (Ox) et $(O'x')$ sont choisis parallèlement à la vitesse relative $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v\,\mathrm{e}_x$ (il n'y a là aucune perte de généralité : on peut toujours orienter les repères choisis dans les deux référentiels de telle sorte que les axes (Ox) et $(O'x')$ soient parallèles à la vitesse relative entre les référentiels).

2. "Enfermez-vous avec un ami dans la cabine principale à l'intérieur d'un grand bateau et prenez avec vous des mouches, des papillons, et d'autres petits animaux volants. Prenez une grande cuve d'eau avec un poisson dedans, suspendez une bouteille qui se vide goutte à goutte dans un grand récipient en dessous d'elle. Avec le bateau à l'arrêt, observez soigneusement comment les petits animaux volent à des vitesses égales vers tous les côtés de la cabine. Le poisson nage indifféremment dans toutes les directions, les gouttes tombent dans le récipient en dessous, et si vous lancez quelque chose à votre ami, vous n'avez pas besoin de le lancer plus fort dans une direction que dans une autre, les distances étant égales, et si vous sautez à pieds joints, vous franchissez des distances égales dans toutes les directions. Lorsque vous aurez observé toutes ces choses soigneusement (bien qu'il n'y ait aucun doute que lorsque le bateau est à l'arrêt, les choses doivent se passer ainsi), faites avancer le bateau à l'allure qui vous plaira, pour autant que la vitesse soit uniforme [c'est-à-dire constante] et ne fluctue pas de part et d'autre. Vous ne verrez pas le moindre changement dans aucun des effets mentionnés et même aucun d'eux ne vous permettra de dire si le bateau est en mouvement ou à l'arrêt." — Galilée, *"Dialogue sur les deux grands systèmes du monde"* (1632).



On munit ainsi les deux référentiels du même trièdre direct $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$. En projetant sur les axes la relation précédente, la transformation peut s'écrire :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x - vt \\ y' & = & y \\ z' & = & z \end{array}\right. \quad \text{et réciproquement} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & x' + vt \\ y & = & y' \\ z & = & z' \end{array}\right.$$

On suppose ici que le temps s'écoule de la même manière dans les deux référentiels considérés (hypothèse d'un temps universel) et on choisit par convention $t = t' = 0$ quand les origines O et O' se confondent.

Loi classique de composition des vitesses. Si on appelle $\mathbf{u}$ (respectivement $\mathbf{u'}$) la vitesse d'un mobile mesurée dans $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{R}'$), la loi de composition des vitesses s'obtient en dérivant les équations de la transformation de Galilée par rapport au temps t. Connaissant la vitesse instantanée $\mathbf{u}$ d'un mobile dans le référentiel $\mathcal{R}$, la vitesse $\mathbf{u'}$ du même objet vu dans le référentiel $\mathcal{R}'$ s'écrira :

$$\mathbf{u'} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} - \mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{v} \qquad \text{et réciproquement} \qquad \mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v}.$$

On parle aussi d'*additivité des vitesses*.

En utilisant les mêmes conventions que précédemment (axes Ox et $O'x'$ choisis selon la vitesse relative $\mathbf{v}$ entre les référentiels), cette relation, en composantes, devient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u'_x & = & u_x - v \\ u'_y & = & u_y \\ u'_z & = & u_z \end{array}\right. \quad \text{et réciproquement} \quad \left\{\begin{array}{lcl} u_x & = & u'_x + v \\ u_y & = & u'_y \\ u_z & = & u'_z \end{array}\right.$$

Remarque : cette expression de la loi de composition des vitesses reste valide[3] même si les origines O et O' ne se confondent pas à $t = 0$.

3. En effet, si O et O' sont distincts à $t = 0$, la transformation de Galilée devient :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{OM}(t) = \mathbf{OO'}(t) + \mathbf{O'M}(t) = \mathbf{OO'}(t) + \mathbf{r}'(t) \qquad \text{avec} \quad \mathbf{OO'}(t) = \mathbf{OO'}(t=0) + \mathbf{v}t.$$

où $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \mathbf{v}(O'/\mathcal{R}) = \mathbf{v}(O'/O)$ ici. Le terme supplémentaire $\mathbf{OO'}(t = 0)$ est constant et disparaît lorsqu'on dérive cette relation par rapport au temps t.

Universalité de l'accélération. En dérivant la loi de composition des vitesses par rapport au temps, on montre de manière immédiate que l'accélération $\mathbf{a}$ d'un mobile est la même dans tous les référentiels galiléens :

$$\mathbf{a'} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{u'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{u'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \mathbf{a}.$$

Ce résultat est cohérent avec les lois de Newton, en particulier la seconde loi ("RFD") : en effet, la somme des forces extérieures agissant sur un système matériel sera bien égale à $m\,\mathbf{a}$ dans tous les référentiels galiléens, puisque l'accélération est invariante par changement de référentiel galiléen. On retrouve ici le résultat qu'un référentiel $\mathcal{R}'$ en translation uniforme par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen est lui aussi galiléen.

3. Cas des référentiels non-galiléens

Pour établir les lois générales de la mécanique dans un référentiel quelconque, non galiléen, on suppose qu'on dispose d'une part d'un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, où les lois de Newton sont valides, et d'autre part d'un référentiel $\mathcal{R}'$, animé d'un mouvement quelconque (fig. 4) par rapport à $\mathcal{R}$, et donc non galiléen. On cherche à formuler les lois de la mécanique dans ce référentiel $\mathcal{R}'$ quelconque.

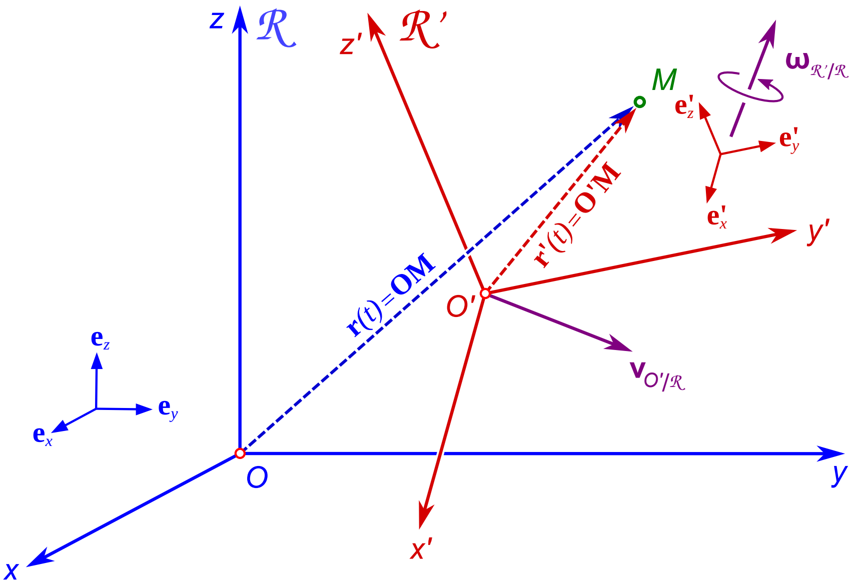


FIGURE 4 – *Afin d'établir les lois de la mécanique dans un référentiel non inertiel, on considère d'une part un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen/inertiel, où les lois de Newton s'appliquent, et un second référentiel $\mathcal{R}'$ effectuant un mouvement quelconque par rapport au référentiel $\mathcal{R}$: $\mathcal{R}'$ est donc non inertiel et les lois de Newton n'y sont a priori pas valides. À chaque instant t, on peut décomposer le mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ en une translation infinitésimale de l'origine O' par rapport à $\mathcal{R}$ à la vitesse $\mathbf{v}_{O'/\mathcal{R}}(t)$, et une rotation infinitésimale de vecteur vitesse angulaire instantanée $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t)$. La vitesse de translation $\mathbf{v}_{O'/\mathcal{R}}(t)$ et le vecteur $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t)$ peuvent varier à chaque instant, en norme comme en direction.*

On suppose de plus que le référentiel inertiel $\mathcal{R}$ est muni d'un repère (O, x, y, z) et d'une base associée $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ formant un trièdre direct; de même, on munit le référentiel $\mathcal{R}'$ d'un repère (O', x', y', z') et du trièdre correspondant $\{\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z\}$.

3.1. Dérivation d'un vecteur dans une base tournante : relation de Varignon

Dans le cas général d'un mouvement quelconque du référentiel $\mathcal{R}'$, le trièdre formé par les vecteurs unitaires de la base $\{\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z\}$ est en rotation (quelconque) par rapport au trièdre $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$: cette rotation ne s'effectue pas nécessairement à vitesse angulaire constante, ni même selon un axe de rotation constant. Mais on peut à tout moment décomposer le mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ comme le produit d'une translation infinitésimale de O' par rapport à O et d'une rotation infinitésimale du trièdre $\{\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z\}$ par rapport au trièdre $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$.

On notera $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ le vecteur *vitesse angulaire instantané* de rotation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$, défini par sa norme qui est la vitesse angulaire instantanée de rotation du trièdre $\{\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z\}$ par rapport au trièdre $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$, et par sa direction qui est celle de l'axe de rotation instantané. Par convention, ω sera positif si la rotation a lieu dans le sens trigonométrique, et négatif dans le cas contraire.

Dérivées des vecteurs d'une base tournante. Comme le trièdre $\{\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z\}$ tourne par rapport au trièdre $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$, les vecteurs de la base $\{\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z\}$ ne sont pas constants vus dans $\mathcal{R}$: et par conséquent, les dérivées temporelles des vecteurs de base $\{\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z\}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ ne sont pas nulles. Il faut en tenir compte lorsqu'on dérive des vecteurs.

On peut montrer que les dérivées temporelles des vecteurs de la base en rotation $\{\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z\}$ du référentiel $\mathcal{R}'$ peuvent s'écrire, dans le référentiel $\mathcal{R}$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}'_x}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_x \qquad \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}'_y}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_y \qquad \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}'_z}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_z$$

où on note $\times$ le produit vectoriel de deux vecteurs.

Dérivée d'un vecteur quelconque : relation de Varignon. Considérons dans le référentiel $\mathcal{R}$ un vecteur quelconque $\mathbf{U}$, sa décomposition dans la base $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ s'écrit :

$$\mathbf{U} = U_x\,\mathbf{e}_x + U_y\,\mathbf{e}_y + U_z\,\mathbf{e}_z$$

où (U_x, U_y, U_z) sont les composantes de $\mathbf{U}$ dans la base $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ fixe dans $\mathcal{R}$. Comme dans $\mathcal{R}$ la base $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ est fixe et donc indépendante du temps, la dérivée temporelle de ce vecteur $\mathbf{U}$ dans $\mathcal{R}$ s'écrira :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \frac{\mathrm{d}U_x}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{e}_x + \frac{\mathrm{d}U_y}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{e}_y + \frac{\mathrm{d}U_z}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{e}_z = \dot{U}_x\,\mathbf{e}_x + \dot{U}_y\,\mathbf{e}_y + \dot{U}_z\,\mathbf{e}_z.$$

Si on décompose le vecteur $\mathbf{U}$ sur la base $\{\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z\}$, Comme précédemment, mais cette fois dans le référentiel $\mathcal{R}'$, ses composantes s'écriront :

$$\mathbf{U} = U'_x\,\mathbf{e}'_x + U'_y\,\mathbf{e}'_y + U'_z\,\mathbf{e}'_z. \tag{1}$$

et la dérivée de $\mathbf{U}$ dans $\mathcal{R}'$ s'écrira de même :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} = \frac{\mathrm{d}U'_x}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{e}'_x + \frac{\mathrm{d}U'_y}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{e}'_y + \frac{\mathrm{d}U'_z}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{e}'_z$$

Si on dérive maintenant l'expression (1) dans $\mathcal{R}$, où la base $\{\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z\}$ tourne, on obtient :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} &= \frac{\mathrm{d}U'_x}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{e}'_x + U'_x\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}'_x}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} + \frac{\mathrm{d}U'_y}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{e}'_y + U'_y\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}'_y}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} + \frac{\mathrm{d}U'_z}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{e}'_z + U'_z\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}'_z}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} \\ &= \frac{\mathrm{d}U'_x}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{e}'_x + \frac{\mathrm{d}U'_y}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{e}'_y + \frac{\mathrm{d}U'_z}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{e}'_z + U'_x\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_x + U'_y\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_y + U'_z\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_z\end{aligned}$$

Ce qui donne la relation suivante, connue comme ***la relation de Varignon***[4] :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{U} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{U}.$$

3.2. Vitesse d'un point matériel dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$

Considérons un point matériel M en mouvement quelconque. On repère sa position à chaque instant dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ respectivement par les vecteurs positions $\mathbf{r}(t)$ et $\mathbf{r'}(t)$:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{OM} : (x(t), y(t), z(t)) \qquad \mathbf{r'}(t) = \mathbf{O'M} : \big(x'(t), y'(t), z'(t)\big)$$

En dérivant dans $\mathcal{R}$ l'expression vectorielle $\mathbf{OM} = \mathbf{OO'} + \mathbf{O'M}$, on obtient immédiatement, en appliquant la relation de Varignon :

$$\mathbf{u}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{OO'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{O'M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{OO'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{O'M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{O'M}$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}_{O'/\mathcal{R}} + \mathbf{u}'(t) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O'M}.$$

Cette relation est la loi de composition des vitesses pour le cas d'un référentiel $\mathcal{R}'$ non galiléen. Le terme,

$$\mathbf{v}_{\mathrm{e}/\mathcal{R}} = \mathbf{v}_{O'/\mathcal{R}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O'M}$$

est parfois désigné comme ***la vitesse d'entraînement*** du point M par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ (notée $\mathbf{v}_{\mathrm{e}}$ ou $\mathbf{v}_{\mathrm{e}/\mathcal{R}}$).

Remarque : cette expression de la loi de composition des vitesses reste valide même si les origines O et O' ne se confondent pas à $t = 0$.

Cas où la vitesse relative est constante et la rotation nulle. En l'absence de toute rotation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$, $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \mathbf{0}$, et le résultat précédent se réduit à

$$\mathbf{u}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}_{O'/\mathcal{R}}$$

si de plus la vitesse relative $\mathbf{v}_{O'/\mathcal{R}}$ est constante, on retrouve la loi de composition des vitesses entre référentiels galiléens.

3.3. Accélération d'un point matériel dans les deux référentiels

En procédant comme précédemment, on peut établir la relation entre l'accélération $\mathbf{a}(t)$ du point matériel M mesurée dans $\mathcal{R}$ inertiel et l'accélération $\mathbf{a}'(t)$ du même point matériel mesurée dans $\mathcal{R}'$, référentiel quelconque, non galiléen.

L'accélération du point matériel considéré, mesurée dans le référentiel $\mathcal{R}$, peut s'écrire :

$$\mathbf{a}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}.$$

4. Nommée d'après le jésuite Pierre Varignon (1654-1722), mathématicien et physicien français.

En utilisant la loi de composition des vitesses établie précédemment, on obtient :

$$\mathbf{a}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{O'/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} \times \mathbf{O'M} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{O'M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}.$$

De manière immédiate, $(\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t)_{\mathcal{R}} = (\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t)_{\mathcal{R}'} = \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t$. En utilisant la relation de Varignon, l'expression précédente devient :

$$\mathbf{a}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{O'/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}' + \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} \times \mathbf{O'M} + \boldsymbol{\omega} \times \left[\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{O'M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O'M}\right]$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_{O'/\mathcal{R}} + \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}' + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{O'M} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O'M})$$

Ce qui, en regroupant les termes, donne la loi (généralisée) de composition des accélérations :

$$\mathbf{a}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}} = \mathbf{a}'(t) + \mathbf{a}_\mathrm{e} + \mathbf{a}_\mathrm{c} \qquad \text{où} \quad \mathbf{a}'(t) = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{O'M}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}'}$$

et où les termes d'accélération supplémentaires sont ***l'accélération d'entraînement*** $\mathbf{a}_\mathrm{e}$ et ***l'accélération de Coriolis***[5] $\mathbf{a}_\mathrm{c}$ qui s'écrivent respectivement :

$$\mathbf{a}_\mathrm{e} = \mathbf{a}_{\mathrm{e}/\mathcal{R}} = \mathbf{a}(O'/\mathcal{R}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O'M}) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{O'M}$$

$$\mathbf{a}_\mathrm{c} = 2\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}'$$

3.4. Forces ou pseudo-forces inertielles

Si le référentiel $\mathcal{R}$ est inertiel/galiléen, la seconde loi de Newton ("Relation Fondamentale de la Dynamique", "RFD") y est valide, et pour un objet matériel quelconque de masse m dont la position est repérée par $\mathbf{r}(t) = \mathbf{OM}$, on aura :

$$\sum \mathbf{F}_\mathrm{ext} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = m\,\mathbf{a} \qquad \text{avec l'accélération} \quad \mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

où $\sum \mathbf{F}_\mathrm{ext}$ est la somme des forces extérieures qui s'exercent sur l'objet considéré.

Si on se place maintenant dans un référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$, la seconde loi de Newton n'y est plus valide. Cependant, on peut écrire la relation entre l'accélération $\mathbf{a}$ de l'objet dans $\mathcal{R}$, et l'accélération $\mathbf{a}'$ du même objet mesurée dans $\mathcal{R}'$:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}'(t) + \mathbf{a}_\mathrm{e} + \mathbf{a}_\mathrm{c}$$

Et par conséquent,

$$\sum \mathbf{F}_\mathrm{ext} = m\,\mathbf{a}(t) = m\,\mathbf{a}'(t) + m\,\mathbf{a}_\mathrm{e} + m\,\mathbf{a}_\mathrm{c} \qquad \text{soit} \quad m\,\mathbf{a}'(t) = \sum \mathbf{F}_\mathrm{ext} - m\,\mathbf{a}_\mathrm{e} - m\,\mathbf{a}_\mathrm{c}$$

Ce qu'on peut encore écrire :

$$m\,\mathbf{a}' = \sum \mathbf{F}_\mathrm{ext} + \mathbf{F}_\mathrm{e} + \mathbf{F}_\mathrm{c}$$

où $\mathbf{F}_\mathrm{e} = -m\,\mathbf{a}_\mathrm{e}$ est la force (ou pseudo-force) inertielle d'entraînement, et $\mathbf{F}_\mathrm{c} = -m\,\mathbf{a}_\mathrm{c}$ la force (ou pseudo-force) inertielle de Coriolis. Ces forces, dites *inertielles*, apparaissent parce que le référentiel $\mathcal{R}'$ n'est pas galiléen/inertiel.

On constate ainsi qu'il est possible de conserver la forme générale de la seconde loi de Newton même dans les référentiels non galiléens, à condition d'ajouter ces forces ou pseudo-forces inertielles supplémentaires au bilan des forces.

5. Nommée ainsi en l'honneur de Gaspard-Gustave de Coriolis (1792–1843), mathématicien et ingénieur français.

Cas d'un mouvement relatif de translation uniformément accéléré. On suppose que le référentiel $\mathcal{R}'$ est en translation, mais à accélération constante, par rapport à $\mathcal{R}$. Dans le cas d'un mouvement relatif de translation, la vitesse angulaire de rotation $\boldsymbol{\omega}$ est nulle, et l'accélération $\mathbf{a}$ dans $\mathcal{R}$ s'écrit alors :

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}'(t) + \mathbf{a}_\mathrm{e} + \mathbf{a}_\mathrm{c} \qquad \text{où} \quad \mathbf{a}_\mathrm{e} = \mathbf{a}_{O'/\mathcal{R}} \qquad \textit{et} \quad \mathbf{a}_\mathrm{c} = 0.$$

Ce qui donne :

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}'(t) + \mathbf{a}_{O'/\mathcal{R}}.$$

La force d'entraînement subie par les objets dans le référentiel $\mathcal{R}'$ vaut alors simplement :

$$\mathbf{F}_\mathrm{e} = -m\,\mathbf{a}_\mathrm{e} = -m\,\mathbf{a}_{O'/\mathcal{R}}.$$

Cette force est de sens opposé à l'accélération du référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$. Par exemple, dans une voiture qui accélère, les objets subissent une force d'entraînement qui les tire vers l'arrière ; au contraire, si la voiture freine, la force d'entraînement pousse les objets en avant (fig. 5).

FIGURE 5 – *À gauche, une voiture (référentiel $\mathcal{R}'$) qui accélère par rapport à la route (référentiel $\mathcal{R}$) : les objets dans la voiture subissent une force d'entraînement $\mathbf{F}_\mathrm{e} = -m\,\mathbf{a}_\mathrm{e}$ de sens opposé à l'accélération du référentiel de la voiture, qui les tire en arrière. À droite, la même voiture freine : l'accélération est de sens opposé (décélération), et cette fois la force d'entraînement tire les objets vers l'avant de la voiture.*

Cas d'un mouvement de rotation à vitesse angulaire constante. Supposons que les origines de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ se confondent, et que le référentiel $\mathcal{R}'$ est en rotation à vitesse angulaire ω constante (par exemple, en choisissant les axes de telle sorte que $\boldsymbol{\omega} = \omega\,\mathbf{e}_z = \omega\,\mathbf{e}'_z$).

Dans le cas d'une simple rotation à vitesse constante, l'accélération $\mathbf{a}$ dans $\mathcal{R}$ s'écrit :

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}'(t) + \mathbf{a}_\mathrm{e} + \mathbf{a}_\mathrm{c}$$

où le terme d'accélération d'entraînement se réduit à :

$$\mathbf{a}_\mathrm{e} = \boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O'M}\right) = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OM})$$

car ici les deux origines O et O' se confondent. On peut décomposer $\mathbf{OM}$ en une composante selon l'axe de rotation et une composante orthogonale à cet axe : si on appelle H la projection de M sur l'axe de rotation, on aura :

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OH} + \mathbf{HM} \qquad \text{et} \quad \mathbf{a}_\mathrm{e} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{OH} + \mathbf{HM}]) = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{HM})\,.$$

En projetant sur les axes, ou encore en utilisant la relation du double produit vectoriel,

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\,\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\,\mathbf{C}$$

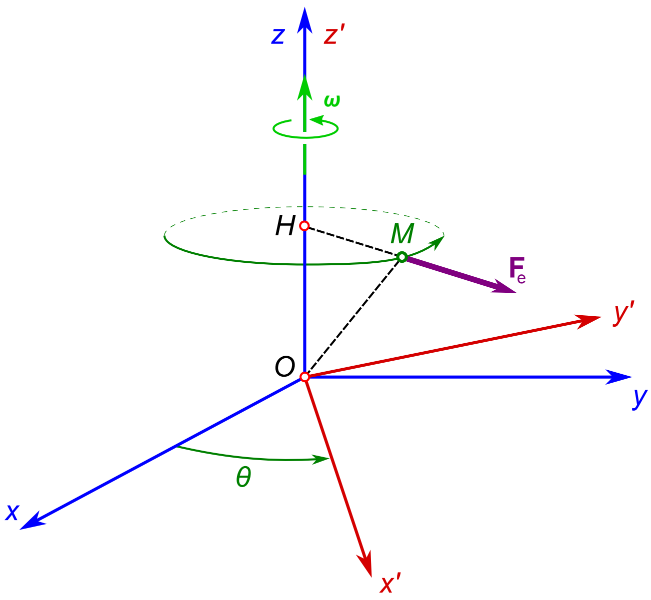


FIGURE 6 – *Le référentiel $\mathcal{R}'$ est en rotation à vitesse constante par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ galiléen.*

on trouve :

$$\mathbf{a}_{\mathrm{e}} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{HM}) = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{HM})\, \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})\, \mathbf{HM} = -\omega^2\, \mathbf{HM}$$

où on reconnaît l'expression du terme d'accélération centripète.

La force d'entraînement correspondante $\mathbf{F}_{\mathrm{e}}$ s'en déduit :

$$\mathbf{F}_{\mathrm{e}} = -m\, \mathbf{a}_{\mathrm{e}} = +m\omega^2\, \mathbf{HM}.$$

C'est ce terme qu'on désigne en général comme la *force centrifuge* : cette force inertielle tend à éloigner les objets de l'axe de rotation, et l'effet est d'autant plus intense que la vitesse de rotation est grande : la force centrifuge est proportionnelle au carré de la vitesse angulaire de rotation, et proportionnelle à la distance à l'axe de rotation (fig. 6).

4. Dynamique terrestre

La Terre est en rotation sur elle-même : sa période de révolution par rapport aux étoiles, autrement dit le temps nécessaire pour que localement, une étoile donnée repasse à la même position dans le ciel, vaut $T_\star = 23\,\mathrm{h}\,56\,\mathrm{min}\,04\,\mathrm{s}$, durée aussi baptisée "jour sidéral", ce qui correspond à une vitesse angulaire de rotation $\Omega_\oplus \approx 7.292 \times 10^{-5}\,\mathrm{rad/s}$. Le vecteur $\boldsymbol{\Omega}_\oplus$ est orienté selon $\mathbf{e}_{z_\star}$ car la Terre tourne d'Ouest en Est.

Ce qu'on appelle usuellement "un jour" est le "jour solaire", le temps qui s'écoule entre deux passages du soleil au méridien local, et sa durée moyenne au cours de l'année vaut $24\,\mathrm{h} = 86400\,\mathrm{s}$ (elle varie au cours de l'année car la trajectoire de la Terre autour du Soleil est légèrement elliptique).

4.1. Gravitation et champ de pesanteur

Le champ de pesanteur ressenti à la surface de la Terre est la combinaison de la force de gravitation exercée par la planète, celle exercée par les autres astres (notamment le Soleil et la Lune, responsables

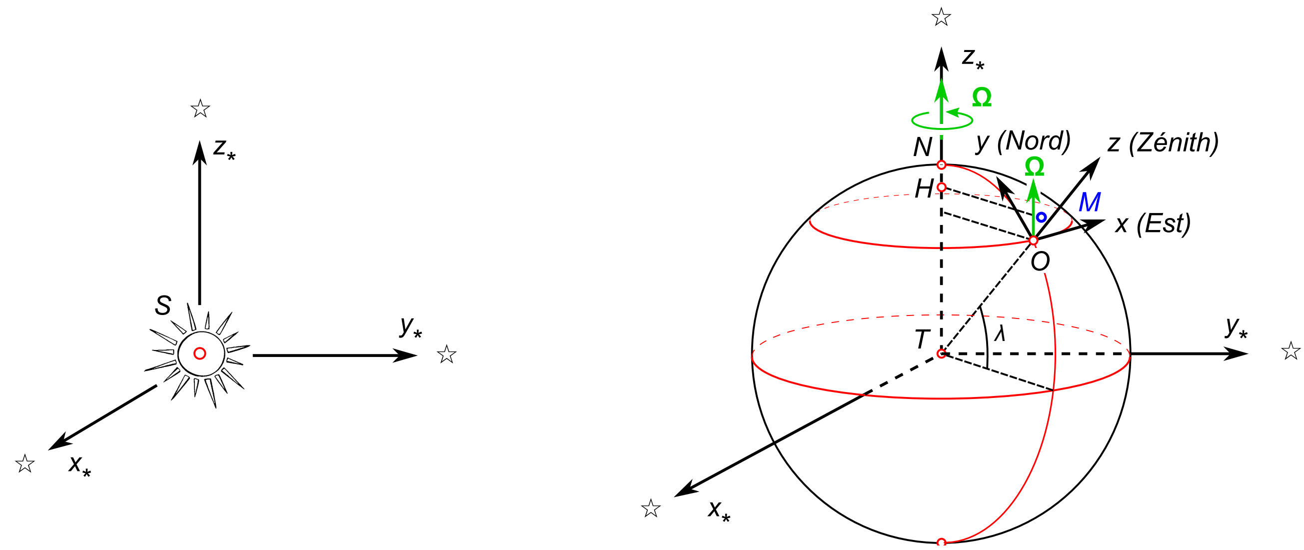


FIGURE 7 – *À gauche : référentiel de Copernic $\mathcal{R}_0$ de repère $(S, x_\star, y_\star, z_\star)$, dont l'origine est le centre de gravité S du système solaire, et dont les axes sont définis par trois étoiles éloignées (ou plutôt aujourd'hui, par un ensemble de quasars). À droite : le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$ de repère $(T, x_\star, y_\star, z_\star)$, dont l'origine est le centre T de la terre, et dont les axes sont définis par les étoiles ; on a aussi représenté le référentiel terrestre local $\mathcal{R}_{\text{local}}$ au point O, muni d'un repère (O, x, y, z) avec Ox dirigé vers l'Est, Oy vers le Nord, et Oz selon la verticale du lieu. Pour une expérience de courte durée (comparée à la période de révolution de la Terre autour du Soleil), le référentiel géocentrique peut être considéré comme galiléen ; le référentiel de Copernic est une meilleure approximation d'un référentiel galiléen.*

des forces de marée), et de la force centrifuge due à la rotation de la Terre sur elle-même. Dans la suite, on négligera les forces de marée.

Si en un lieu à la surface terrestre de latitude λ, on considère un objet immobile (par exemple, un corps M de masse m suspendu à un fil). Dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$, qu'on peut assimiler à un référentiel galiléen (au moins pour des expériences de durée très inférieure à l'année), la masse suspendue subit deux forces : d'une part, l'attraction gravitationnelle terrestre,

$$\mathbf{F}_\oplus = m\mathbf{G}_\oplus(M)$$

où $\mathbf{G}_\oplus(M)$ est le champ gravitationnel terrestre au point M, qu'on peut écrire :

$$\mathbf{G}_\oplus(M) = -\mathcal{G}\frac{M_\oplus}{TM^2}\frac{\mathbf{TM}}{TM} \qquad \text{(Loi de la gravitation universelle)}$$

et d'autre part, la tension $\mathbf{T}_{\text{fil}}$ du fil qui retient l'objet.

La seconde loi de Newton, exprimée dans $\mathcal{R}_g$ galiléen, donne ainsi :

$$m\,\mathbf{a}_{/\mathcal{R}_g} = m\,\mathbf{G}_\oplus(M) + \mathbf{T}_{\text{fil}}.$$

Si on exprime l'accélération dans le référentiel terrestre local $\mathcal{R}_{\text{local}}$:

$$\mathbf{a}_{/\mathcal{R}_g} = \mathbf{a}_{/\mathcal{R}_{\text{local}}} + \mathbf{a}_{\text{e}} + \mathbf{a}_{\text{c}}$$

et en remplaçant dans la relation précédente, on obtient :

$$m\,\mathbf{a}_{/\mathcal{R}_{\text{local}}} = m\,\mathbf{G}_\oplus(M) - m\,\mathbf{a}_{\text{e}} - m\,\mathbf{a}_{\text{c}} + \mathbf{T}_{\text{fil}}.$$

Si l'objet, retenu par le fil, est immobile dans $\mathcal{R}_{\text{local}}$, sa vitesse $\mathbf{u}_{/\mathcal{R}_{\text{local}}}$ y est nulle et par conséquent la force de Coriolis $\mathbf{F}_\text{c} = -m\,\mathbf{a}_\text{c} = -2m\,\mathbf{\Omega}_\oplus \times \mathbf{u}_{/\mathcal{R}_{\text{local}}}$ l'est aussi.

De plus le terme d'accélération d'entraînement s'écrit :

$$\mathbf{a}_\text{e} = \mathbf{a}_{O/\mathcal{R}_g} + \mathbf{\Omega}_\oplus \times (\mathbf{\Omega}_\oplus \times \mathbf{OM}) + \frac{\mathrm{d}\mathbf{\Omega}_\oplus}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{OM}$$

On peut considérer que la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même est constante par rapport aux étoiles lointaines [6] et par conséquent que le terme en $\mathrm{d}\mathbf{\Omega}_\oplus/\mathrm{d}t$ est nul.

Pour aller plus loin, écrivons la vitesse du point O (origine du repère terrestre local $\mathcal{R}_{\text{local}}$) dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$:

$$\mathbf{v}_{O/\mathcal{R}_g} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{TO}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_g} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{TO}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_{\text{local}}} + \mathbf{\Omega}_\oplus \times \mathbf{TO} = \mathbf{\Omega}_\oplus \times \mathbf{TO}$$

car le vecteur $\mathbf{TO}$ est constant dans le référentiel local $\mathcal{R}_{\text{local}}$.

On peut en déduire l'expression de l'accélération de l'origine O du repère du référentiel local $\mathcal{R}_{\text{local}}$ vue dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$:

$$\mathbf{a}_{O/\mathcal{R}_g} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{O/\mathcal{R}_g}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_g} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathbf{\Omega}_\oplus \times \mathbf{TO}\right]\right)_{\mathcal{R}_g} = \mathbf{\Omega}_\oplus \times \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{TO}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_g} = \mathbf{\Omega}_\oplus \times (\mathbf{\Omega}_\oplus \times \mathbf{TO})\,.$$

Revenons maintenant à l'expression de l'accélération d'entraînement :

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_\text{e} &= \mathbf{a}_{O/\mathcal{R}_g} + \mathbf{\Omega}_\oplus \times (\mathbf{\Omega}_\oplus \times \mathbf{OM})\\ &= \mathbf{\Omega}_\oplus \times (\mathbf{\Omega}_\oplus \times \mathbf{TO}) + \mathbf{\Omega}_\oplus \times (\mathbf{\Omega}_\oplus \times \mathbf{OM})\\ &= \mathbf{\Omega}_\oplus \times (\mathbf{\Omega}_\oplus \times (\mathbf{TO} + \mathbf{OM}))\\ &= \mathbf{\Omega}_\oplus \times (\mathbf{\Omega}_\oplus \times \mathbf{TM})\,.\end{aligned}$$

Si on appelle H la projection de M sur l'axe de rotation de la Terre, on aura $\mathbf{TM} = \mathbf{TH} + \mathbf{HM}$, avec $\mathbf{TH}$ colinéaire avec $\mathbf{\Omega}_\oplus$. L'expression précédente se simplifie alors en :

$$\mathbf{a}_\text{e} = \mathbf{\Omega}_\oplus \times (\mathbf{\Omega}_\oplus \times [\mathbf{TH} + \mathbf{HM}]) = \mathbf{\Omega}_\oplus \times (\mathbf{\Omega}_\oplus \times \mathbf{HM})$$

Pour aller plus loin, on peut soit projeter cette relation sur les axes du référentiel géocentrique, soit tirer parti des propriétés du double produit vectoriel, à savoir

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\,\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\,\mathbf{C}$$

ce qui donne ici :

$$\mathbf{a}_\text{e} = \mathbf{\Omega}_\oplus \times (\mathbf{\Omega}_\oplus \times \mathbf{HM}) = (\mathbf{\Omega}_\oplus \cdot \mathbf{HM})\ \mathbf{\Omega}_\oplus - (\mathbf{\Omega}_\oplus \cdot \mathbf{\Omega}_\oplus)\ \mathbf{HM} = -\Omega_\oplus^2\,\mathbf{HM}$$

Et la force inertielle d'entraînement se réduit à :

$$\mathbf{F}_\text{e} = -m\,\mathbf{a}_\text{e} = +m\Omega_\oplus^2\,\mathbf{HM}$$

où on reconnaît le terme de force centrifuge (voir ci-après).

6. En réalité, la rotation de la Terre ralentit tout doucement, du fait de la présence de la Lune et des frottements dus aux forces de marée. On estime que sa période de rotation sur elle-même (le jour) augmente d'environ deux millisecondes par siècle. Pour des expériences qui ne durent pas des siècles, on peut négliger ce ralentissement.

La seconde loi de Newton (dans $\mathcal{R}'$ non-galiléen) pour un objet massif en M s'écrira :

$$m\,\mathbf{a}_{/\mathcal{R}_{\text{local}}} = m\,\mathbf{G}_{\oplus}(M) + \mathbf{T}_{\text{fil}} + \mathbf{F}_{\text{e}} = m\,\mathbf{G}_{\oplus}(M) + \mathbf{T}_{\text{fil}} - m\,\mathbf{a}_{\text{e}}$$

Soit,

$$m\,\mathbf{a}_{/\mathcal{R}_{\text{local}}} = m\,\mathbf{G}_{\oplus}(M) + m\Omega_{\oplus}^2\mathbf{HM} + \mathbf{T}_{\text{fil}}$$

On appellera "poids" (noté $\mathbf{P}$) la somme de la force d'attraction gravitationnelle et de la force centrifuge :

$$\mathbf{P} = m\,\mathbf{G}_{\oplus}(M) + m\Omega_{\oplus}^2\mathbf{HM}.$$

Si l'objet est immobile dans le référentiel local, le poids et la tension du fil s'équilibrent exactement ; la direction du fil est aussi celle du poids de l'objet, et permet de définir la "verticale" locale du lieu (principe même du fil à plomb).

En posant $\mathbf{P} = m\,\mathbf{g}$, on obtient l'expression du *champ de pesanteur local* $\mathbf{g}$,

$$\mathbf{P} = m\,\mathbf{g} = m\,\mathbf{G}_{\oplus}(M) + m\Omega_{\oplus}^2\mathbf{HM} \qquad \text{soit} \quad \mathbf{g} = \mathbf{G}_{\oplus}(M) + \Omega_{\oplus}^2\mathbf{HM} = \mathbf{G}_{\oplus}(M) - \mathbf{a}_{\text{e}}.$$

où $\mathbf{F}_{\text{e}} = -m\,\mathbf{a}_{\text{e}} = m\Omega_{\oplus}^2\mathbf{HM}$ est la force centrifuge qui s'exerce sur l'objet du fait de la rotation de la planète sur elle-même.

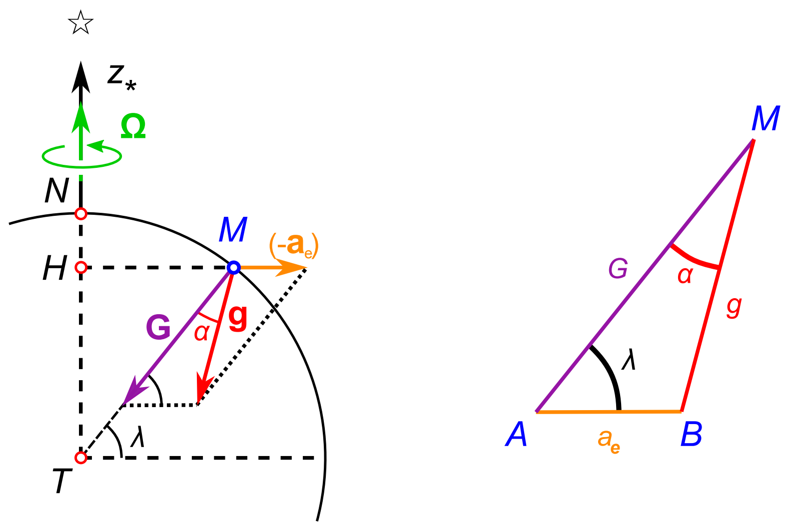


FIGURE 8 – *Le champ de pesanteur* $\mathbf{g}$ *ne pointe pas exactement vers le centre de la Terre, du fait de la force centrifuge. L'angle* α *entre* $\mathbf{G}_{\oplus}$ *(pointant vers le centre de la planète) et* $\mathbf{g}$ *est maximal aux latitudes* $\lambda = \pm\pi/4 = \pm 45^{\text{o}}$ *et vaut alors 6 arcmin.*

Au maximum (à l'équateur), l'accélération centrifuge représente

$$\frac{|\mathbf{a}_{\text{e}}|}{g} \approx 0.0034 \approx 0.3\% \approx \frac{1}{17^2}.$$

du champ de pesanteur g. On dit parfois que si la Terre tournait 17 fois plus vite, la force centrifuge à l'équateur compenserait l'attraction gravitationnelle de la planète.

Du fait du terme de force centrifuge, le champ de pesanteur $\mathbf{g}$ ne pointe pas exactement vers le centre de la Terre ; comme la verticale locale est justement définie par la direction de $\mathbf{g}$, il existe un petit angle entre la verticale locale en un point de la surface terrestre et la direction du centre de la Terre (fig 8). Cet angle est maximal pour $\lambda = \pm 45^{\text{o}}$. Au pôle la force centrifuge est nulle ; à l'équateur, l'angle α est nul. À Paris, on trouve $\alpha \approx 5.9\,$arcmin.

Les calculs présentés ici supposent que la Terre est parfaitement sphérique, ce qui n'est pas le cas : en raison justement des effets de la force centrifuge, la Terre est déformée et présente un léger renflement à l'équateur (rayon au pôle : 6357 km ; rayon à l'équateur : 6378 km). Cette distribution de la masse terrestre affecte le champ gravitationnel qui n'est plus à symétrie sphérique, ce qui contribue aussi aux variations du champ de pesanteur $\mathbf{g}$. La distribution des masses rocheuses du sous-sol, ainsi que leur composition contribuent aussi aux variations spatiales du champ de pesanteur à la surface de la Terre. La mesure précise de ces variations, appelée *gravimétrie*, s'effectue aujourd'hui avec des précisions relatives jusqu'à 10^{-9}, soit au sol (gravimètres), soit à bord d'avions, ou encore via l'étude fine des trajectoires des satellites artificiels. Elle permet d'étudier le sous-sol, par exemple pour de la prospection minière ou pétrolière.

4.2. Force de Coriolis

Un mobile en mouvement dans le référentiel terrestre (référentiel local) subit à la fois la force inertielle d'entraînement $\mathbf{F}_\mathrm{e} = -m\,\mathbf{a}_\mathrm{e}$ (prise en compte dans la définition et l'expression du poids de l'objet considéré $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$), mais aussi la force inertielle de Coriolis $\mathbf{F}_\mathrm{c}$,

$$\mathbf{F}_\mathrm{c} = -m\,\mathbf{a}_\mathrm{c} = -2m\,\mathbf{\Omega}_\oplus \times \mathbf{u}_{/\mathcal{R}_\mathrm{local}}$$

où $\mathbf{u}_{/\mathcal{R}_\mathrm{local}}$ est la vitesse du mobile dans le référentiel local $\mathcal{R}_\mathrm{local}$ solidaire de la Terre en rotation. Cette force agit donc perpendiculairement à la vitesse de l'objet qui la subit.

L'intensité de la force de Coriolis terrestre est faible, sauf pour des objets qui se déplacent à des vitesses élevées. La force de Coriolis est responsable d'un certain nombre de phénomènes : la déviation vers l'Est d'un objet en chute libre, et de manière générale la déviation de la trajectoire des projectiles à très longue portée (obus à très longue portée, missiles balistiques, *etc*), la rotation du plan d'oscillation du pendule de Foucault ; dans l'atmosphère terrestre, le sens de rotation des masses d'air (qui est différent entre les deux hémisphères, nord et sud) et les nombreux phénomènes météorologiques qui en découlent.

Bibliographie

J.-Ph. Pérez, *Mécanique*, Masson (1995) : chapitres 2, 3, 4 et 7.

H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, *Classical Mechanics*, Addison Wesley (2002) : chapitre 4.

G. Galilei (dit Galilée), *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* (1632), traduit de l'italien sous le titre *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde*.

G. Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (1638), traduit de l'italien sous le titre *Discours concernant deux sciences nouvelles*.

I. Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687). Traduit du latin en français par la marquise Gabrielle-Émilie Le Tonnelier de Breteuil du Châtelet, dite Émilie du Châtelet (1706–1749), sous le titre *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, Desaint et Saillant (1759, édition posthume)[7].

7. Cette traduction en français des *Principia* fait toujours référence aujourd'hui.