LICENCE DE PHYSIQUE — RELATIVITÉ RESTREINTE

EXERCICES — CORRIGÉ

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2024–2025

Intervenants : L. Le Guillou & J. Bolmont (Sorbonne Université / LPNHE)

TD 1

Rappels de mécanique classique — Référentiels : référentiels inertiels — La transformation de Galilée — Composition des vitesses

1. Mécanique "classique" : transformation de Galilée

Un navire manœuvre dans un port, et se déplace à vitesse constante $v = 3$ m/s parallèlement au quai.

1.1 — Sur le quai, un enfant court à la vitesse $u = 2\,\mathrm{m/s}$ par rapport au référentiel du quai, dans le même sens que le bateau. Quelle est sa vitesse dans le référentiel du navire ?

Soit $\mathcal{R}$ le référentiel du quai, et $\mathcal{R}'$ celui du navire, qui se déplace parallèlement au quai à la vitesse v. On prendra les axes Ox et Ox' parallèles au quai et au mouvement relatif du navire.

La vitesse de l'enfant est $u = u_x = 2\,\mathrm{m/s}$ dans $\mathcal{R}$; d'après la loi galiléenne de composition des vitesses, elle vaut :

$$u'_x = u_x - v = 2\,\mathrm{m/s} - 3\,\mathrm{m/s} = -1\,\mathrm{m/s}$$

dans le référentiel $\mathcal{R}'$ du navire. Vu du pont du navire, l'enfant semble reculer à la vitesse de $1\,\mathrm{m/s}$ (vitesse algébrique négative selon l'axe Ox').

1.2 — Un objet tombe en chute libre du haut du grand mât ($h = 10\,\mathrm{m}$). Écrivez la relation fondamentale de la dynamique pour cet objet dans le référentiel $\mathcal{R}$ du quai, et dans celui ($\mathcal{R}'$) du navire.

Dans les deux référentiels, tous les deux galiléens/inertiels, la deuxième loi de Newton est valide, et on aura :

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \qquad \text{avec} \quad \sum \mathbf{F} = \mathbf{P} = m\mathbf{g}$$

car la seule force qui s'applique sur l'objet en chute libre est son poids $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$. Dans les deux référentiels galiléens, le poids est le même, et l'accélération $\mathbf{a} = \mathbf{a'}$ aussi (les vitesses $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u'}$ ne diffèrent que par un terme constant).

1.3 — Décrivez la trajectoire de cet objet pour un observateur immobile sur le quai, et pour un marin de l'équipage. Où tombe-t-il ? Écrivez et résolvez les équations du mouvement dans le référentiel du quai et dans celui du bateau (on pourra utiliser la transformation de Galilée).

Dans le référentiel $\mathcal{R}'$ du navire, l'objet en chute libre qui se décroche du haut du mât ne subit que son propre poids $\mathbf{P} = m\mathbf{g} = -mg\,\mathbf{e}_z$ (on néglige ici les frottements de l'air). L'équation de son mouvement est donc :

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = m\mathbf{g} = -mg\,\mathbf{e}_z \qquad \text{d'où} \qquad \left\{\begin{array}{rl} \ddot{x}' = & 0 \\ \ddot{y}' = & 0 \\ \ddot{z}' = & -g \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rl} \dot{x}' = & 0 \\ \dot{y}' = & 0 \\ \dot{z}' = & -gt \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rl} x'(t) = & 0 \\ y'(t) = & 0 \\ z'(t) = & h - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{array}\right.$$

en prenant le pied du grand mât comme origine O' des coordonnées dans $\mathcal{R}'$.

Au bout d'un temps $t = \sqrt{2h/g} \approx 1.4\,\text{s}$, l'objet tombe au pied du mât en O'.

On peut obtenir la trajectoire du même objet dans le référentiel du quai en appliquant la transformation de Galilée,

$$\left\{\begin{array}{rl} x(t) = & x'(t) + vt = vt \\ y(t) = & y'(t) = 0 \\ z(t) = & z'(t) = h - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{array}\right. \qquad \text{d'où} \quad z(x) = h - \frac{1}{2}\frac{g}{v^2}x^2$$

ce qui correspond dans $\mathcal{R}$ à un arc de parabole.

1.4 — L'enfant s'arrête sur le quai, puis lance son ballon à la verticale au dessus de lui à la vitesse w ($w = 10\,\text{m/s}$), puis le rattrape. Ecrivez et résolvez les équations du mouvement du ballon dans les deux référentiels.

Dans le référentiel du quai, comme précédemment, le ballon de vitesse initiale $\mathbf{w} = w\,\mathbf{e}_z$ n'est soumis qu'à son poids $\mathbf{P} = m\mathbf{g} = -mg\,\mathbf{e}_z$. En supposant que l'enfant est en $x = x_0$ lorsqu'il lance son ballon, les équations du mouvement du ballon dans $\mathcal{R}$ s'écrivent :

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -mg\,\mathbf{e}_z \qquad \text{d'où} \qquad \left\{\begin{array}{rl} \ddot{x} = & 0 \\ \ddot{y} = & 0 \\ \ddot{z} = & -g \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rl} \dot{x} = & 0 \\ \dot{y} = & 0 \\ \dot{z} = & w - gt \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rl} x(t) = & x_0 \\ y(t) = & 0 \\ z(t) = & wt - \dfrac{1}{2}gt^2 + h_{\text{enfant}} \end{array}\right.$$

Le ballon suit ainsi une trajectoire verticale ascendante jusqu'à $t = +w/g \simeq 1\,\text{s}$, où il atteint la hauteur $w^2/(2g) \simeq 5\,\text{m}$ au dessus de l'enfant, puis retombe dans ses mains à $t = 2w/g \simeq 2\,\text{s}$.

Vu du navire, les équations du mouvement du ballon deviennent (transformation de Galilée) :

$$\left\{\begin{array}{rl} x'(t) = & x(t) - vt = x_0 - vt \\ y'(t) = & y(t) = 0 \\ z'(t) = & wt - \dfrac{1}{2}gt^2 + h_{\text{enfant}} \end{array}\right.$$

Ce qui correspond dans $\mathcal{R}'$ à une trajectoire parabolique.

2. Pêche à la ligne

On traitera ce problème en mécanique classique (relativité galiléenne).

Un pêcheur s'adonne à son loisir favori dans sa barque, au milieu d'une rivière. Ayant fait bonne pêche, il décide de rentrer chez lui, et il remonte le courant à la rame, en ramant à la vitesse constante w par rapport à la rivière.

Passant sous un pont, il perd sans s'en rendre compte son chapeau, qui tombe à l'eau, et est emporté par le courant.

Le pêcheur réalise la perte de son chapeau au bout de 30 minutes. Il décide alors de redescendre la rivière et, en ramant toujours à la même vitesse w par rapport au courant, il parvient à rattraper son chapeau 5 km en aval du pont.

Quelle est la vitesse du courant (par rapport aux berges) ?

Notons $\mathcal{R}$ le référentiel des berges de la rivière, et $\mathcal{R}'$ le référentiel de la rivière, en translation uniforme à la vitesse $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_x = \mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ des berges.

La première approche consiste à analyser les trajectoires du pêcheur et de son chapeau dans $\mathcal{R}$. Ce n'est pas la méthode la plus directe comme nous le verrons plus loin.

On prendra comme origine des temps $t = 0$ le moment de la perte du chapeau sous le pont, et la position de cet événement comme origine des abscisses, dans les deux référentiels. On notera t_C l'instant où le pêcheur récupère son chapeau, et $D = 5\,\mathrm{km}$ la distance en aval du pont atteinte par le chapeau quand le pêcheur le ramasse dans l'eau ; on notera $\Delta t_A = 30\,$minutes le temps écoulé entre la perte du chapeau sous le pont et le moment où le pêcheur fait demi-tour et Δt_R le temps nécessaire ensuite au pêcheur pour rejoindre son chapeau à la dérive. La succession des événements vu dans $\mathcal{R}$ est représentée sur la figure 1.

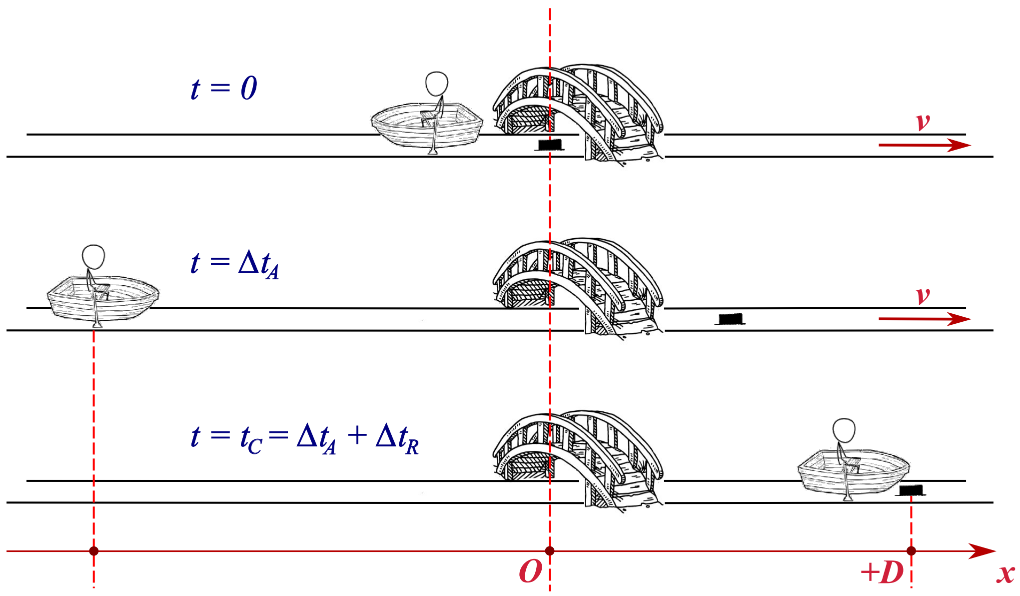


Fig. 1 – Trajectoires du pêcheur et de son chapeau vues dans le référentiel des berges.

Dans le référentiel des berges $\mathcal{R}$, le pêcheur remonte tout d'abord la rivière à la vitesse $u = u' + v = -w + v$ jusqu'à l'abscisse $x = (-w + v)\Delta t_A$. Il prend alors conscience de la perte de son chapeau, et parcourt ensuite la rivière en sens inverse, à la vitesse $u = u' + v = w + v$, pour atteindre l'abscisse $x = +D$ lorsqu'il rattrape son chapeau, à $t = t_C$. On a ainsi :

$$x_{\text{pêcheur}}(t_C) = +D = (-w + v)\Delta t_A + (w + v)\Delta t_R$$

Par ailleurs, au même instant le chapeau a descendu la rivière à la vitesse v, et se trouve ainsi à la même abscisse,

$$x_{\text{chapeau}}(t_C) = +D = v(\Delta t_A + \Delta t_R)$$

De ces deux équations, on déduit :

$$D = (-w+v)\Delta t_A + (w+v)\Delta t_R = v(\Delta t_A + \Delta t_R) \qquad \text{d'où} \quad w(-\Delta t_A + \Delta t_R) = 0 \qquad \textit{i.e.} \quad \Delta t_R = \Delta t_A$$

D'où on déduit la vitesse d'écoulement de la rivière,

$$D = 2v\Delta t_A \qquad v = \frac{D}{2\Delta t_A} = \frac{5\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{h}} = 5\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}.$$

La seconde approche, plus élégante et plus immédiate, consiste à analyser les trajectoires dans le **référentiel de la rivière**, où, une fois tombé à l'eau sous le pont, **le chapeau est immobile**. La succession des événements vus dans $\mathcal{R}'$ est représentée figure 2.

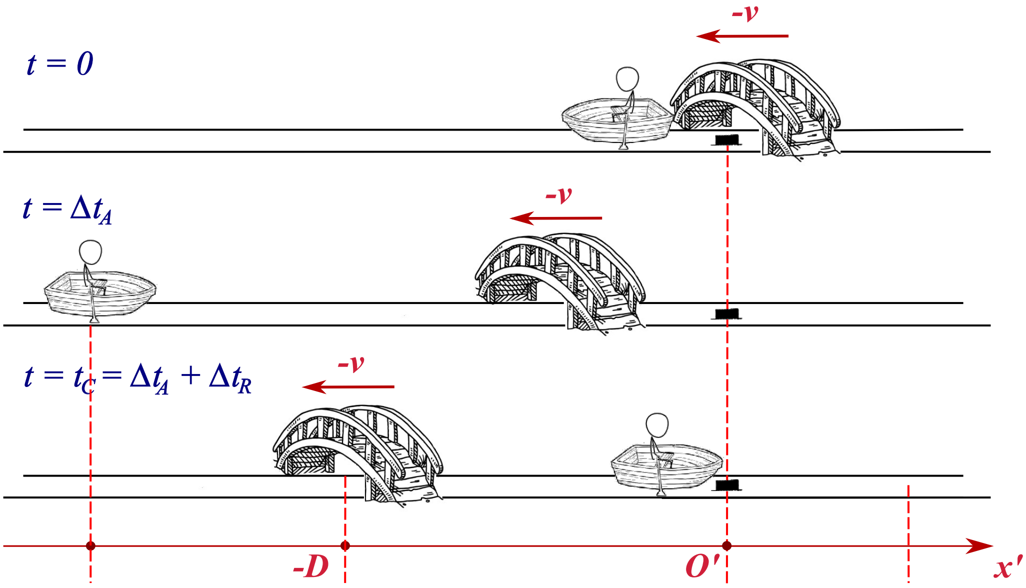


Fig. 2 – Trajectoires du pont, du pêcheur et de son chapeau vues dans le référentiel de la rivière.

Entre la perte de son chapeau et sa récupération, la trajectoire du pêcheur consiste en un aller-retour sur l'eau, à la vitesse $u'_x = -w$ à l'aller, puis $u'_x = +w$ au retour, jusqu'à rejoindre son chapeau. Dans le référentiel de la rivière, il est évident que les durées des voyages aller et retour **sont égales**. On retrouve alors le résultat précédent, de manière immédiate,

$$x'_{\text{pêcheur}}(t_C) = 0 = -w\Delta t_A + w\Delta t_R \qquad \text{d'où} \quad \Delta t_A = \Delta t_R$$

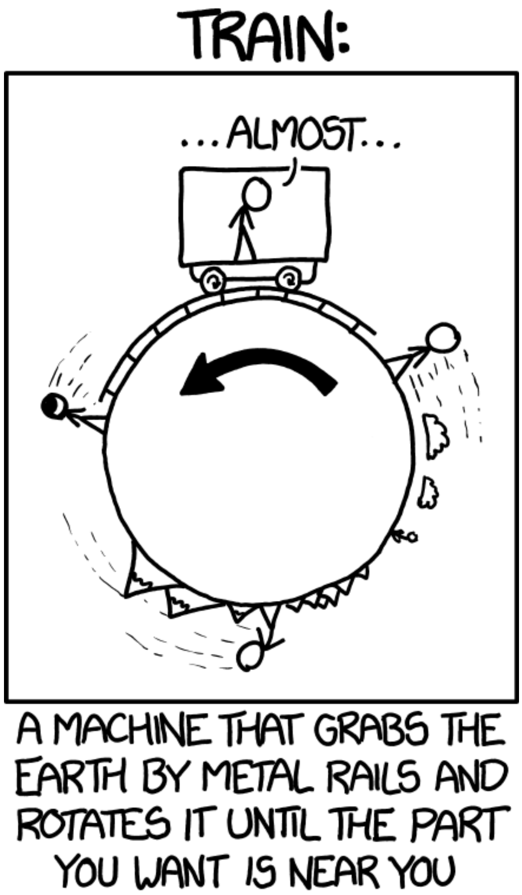
À ce moment, le pont, qui était à l'abscisse $x' = 0$ au moment de la chute du chapeau, est désormais à l'abscisse :

$$x'_{\text{pont}}(t_C) = -D = -v(\Delta t_A + \Delta t_R) = -2v\Delta t_A$$

D'où on déduit immédiatement la vitesse de la rivière par rapport à ses berges :

$$v = \frac{D}{2\Delta t_A} = \frac{5\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{h}} = 5\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}.$$

Ce problème souligne l'importance du choix du référentiel dans l'analyse d'un problème de cinématique, que ce soit en mécanique classique ou relativiste.



XKCD : https://xkcd.com/1366/