Principes mathématiques de la philosophie naturelle. Tome 1 / Isaac Newton ; [trad. du latin d'après l'éd. de 1726 par [...]

PRINCIPES MATHÉMATIQUES

DE LA

PHILOSOPHIE NATURELLE.

Isaac NEWTON
1642-1727

Isaac NEWTON

PRINCIPES MATHÉMATIQUES

DE LA

PHILOSOPHIE NATURELLE

TOME I

ÉDITIONS
JACQUES GABAY

25, rue du D^r Roux 92330 Sceaux

ISBN 2-87647-070-5

PRINCIPES
MATHÉMATIQUES
DE LA
PHILOSOPHIE NATURELLE,

Par feue Madame la Marquise DU CHASTELLET.

TOME PREMIER.

A PARIS,

Chez { DESAINT & SAILLANT, rue S. Jean de Beauvais, LAMBERT, Imprimeur-Libraire, rue & à côté de la Comédie Françoise, au Parnasse.

M. D. CCLIX.

AVEC APPROBATION ET PRIVILÉGE DU ROI.

AVERTISSEMENT DE L'ÉDITEUR.

CET Ouvrage eſt compoſé de deux Parties. La premiere eſt une traduction du texte littéral des *Principes Mathématiques de la Philoſophie Naturelle*. Il eſt preſque ſuperflu d'avertir qu'elle a été faite ſur la derniere édition de 1726, édition qui l'emporte ſur toutes les précédentes par rapport aux corrections ſuggerées par des idées poſtérieures, & par les remarques de quelques célebres Mathématiciens. L'illuſtre Interpréte, plus jalouſe de ſaiſir l'eſprit de l'Auteur, que ſes paroles, n'a pas craint en quelques endroits d'ajouter ou de tranſpoſer quelques idées pour donner au ſens plus de clarté. En conſéquence on trouvera ſouvent *Newton* plus intelligible dans cette traduction que dans l'original; & même que dans la traduction Angloiſe. En effet on s'eſt tellement attaché dans cette derniere au texte littéral de l'Auteur, que s'il y a quelque ambiguité dans le Latin, on la retrouve dans l'Anglois. Tant de timidité donneroit lieu de ſoupçonner l'Auteur d'avoir foiblement entendu ſon original, & d'avoir uſé de la reſſource ordinaire en pareil cas : c'eſt de rendre les mots quand on ne peut rendre les choſes. Nous aimons pourtant mieux penſer que cette ſcrupuleuſe fidélité vient d'un autre motif, & l'attribuer à un certain reſpect ſi juſtement acquis à cet immortel Ouvrage, reſpect qui a engagé ſon Traducteur à le rendre trait pour trait.

A l'égard de la confiance que le Public doit avoir dans cette traduction, il ſuffit de dire qu'elle a été faite par feue Madame la Marquiſe *du Châtelet*, & qu'elle a été revûe par M. *Clairault*.

La ſeconde partie de l'Ouvrage eſt un Commentaire des endroits des principes, relatifs au ſyſtême du monde. Ce Commentaire eſt lui-même diviſé en deux parties, dans la premiere deſquelles on expoſe de la maniere la plus ſenſible, les principaux phénoménes dépendans de l'attraction : ces découvertes juſqu'à préſent hériſſées de tant d'épines, ſeront déſormais acceſſibles à tous les Lecteurs capables de quelque attention, & qui auront de légeres notions des Mathématiques.

A cette partie du Commentaire en ſuccéde une plus ſçavante. On y donne par analyſe la ſolution des plus beaux problêmes du ſyſtême du monde : on y examine la forme qu'ont réellement ou qu'auroient les orbites des planétes dans les différentes hypothéſes de peſanteur, l'attraction qu'exerceroient des corps de différentes figures, la réfraction de la lumiere, effet de l'attraction des parties inſenſibles des corps, la théorie de la figure de la terre & celle des marées. Toutes ces recherches ſont tirées pour la plupart ou des Ouvrages de M. *Clairault*, ou des cahiers qu'il donnoit en forme de leçons à M. le Comte *du*

Châtelet Lomont, fils de l'illustre Marquise. L'avant derniere section est un excellent précis de son Traité sur la *figure de la terre*. La dissertation du Sçavant M. *Daniel Bernoulli*, qui a remporté le prix proposé pour la question des marées forme le fond de la derniere : elle est de plus augmentée de diverses notes & éclaircissemens que l'Auteur a communiqués.

On s'étonnera sans doute que ce Commentaire ne s'étende pas plus loin; mais je l'ai déja dit, son Auteur a cru devoir se borner à ce qui concerne plus particulierement le systême du monde. Dans cette vûe, il n'a pas jugé nécessaire de commenter la partie des Principes qui contient la théorie des fluides. D'ailleurs cette théorie a été traitée par tant de mains, & en particulier avec tant de succès par MM. *Daniel Bernoulli* & d'*Alembert*, dont les écrits sont entre les mains de tout le monde, qu'il devenoit superflu d'y toucher. A l'égard de la théorie des Cometes, on trouve dans la premiere partie du Commentaire un article entier qui les concerne & qui doit suffire. La détermination géométrique de la forme de leurs orbites est contenue dans le problême général des trajectoires, & c'est dans les traités d'Astronomie qu'on doit chercher la maniere d'en déterminer la forme & la position d'après les observations. M. *le Monnier* a suffisamment rempli cet objet dans ses élémens d'Astronomie, & ceux qui ne trouveroient pas une clarté suffisante dans le texte même du troisiéme livre des Principes de *M. Newton*, peuvent recourir à ces élémens comme à un excellent Commentaire.

Il n'y a que la théorie des planétes secondaires dont le manque dans cet Ouvrage sembleroit plus difficile à justifier ; mais au tems où *M. Clairault* travailloit avec *Madame du Châtelet*, il étoit encore trop peu content, & de ce que *Newton* avoit fait sur ce sujet, & de ses idées propres, pour lui en rien communiquer. Cette partie intéressante du systême du Monde n'a reçu que depuis peu cette perfection qui lui manquoit. Pour suppléer à ce défaut, on doit consulter la piéce de *M. Clairault* qui a remporté le prix de l'Académie de Petersbourg sur la *théorie de la Lune*, & la premiere partie de l'Ouvrage que *M. d'Alembert* vient de publier sous le titre de *Recherches sur quelques points importans du systême du Monde*.

C'est-là tout ce qu'en qualité d'Editeurs nous avons à dire de cet Ouvrage. M. de Voltaire a pris la peine de tracer le caractere de la sçavante Dame qui en est l'Auteur. La Préface Historique qu'on lit à la suite de cet Avertissement est de cet homme célebre.

PRÉFACE HISTORIQUE.

CETTE traduction que les plus ſavans Hommes de France devoient faire, & que les autres doivent étudier, une femme l'a entrepriſe & achevée à l'étonnement & à la gloire de ſon pays. Gabrielle-Emilie de Breteuil, Marquiſe du Châtelet, eſt l'Auteur de cette Traduction, devenue néceſſaire à tous ceux qui voudront acquérir ces profondes connoiſſances, dont le monde eſt redevable au grand Newton.

C'eût été beaucoup pour une femme de ſçavoir la Géométrie ordinaire, qui n'eſt pas même une introduction aux vérités ſublimes contenues dans cet Ouvrage immortel. On ſent aſſez qu'il falloit que Madame la Marquiſe du Chaſtelet fût entrée bien avant dans la carriére que Newton avoit ouverte, & qu'elle poſſédât ce que ce grand homme avoit enſeigné. On a vu deux prodiges : l'un, que Newton ait fait cet Ouvrage ; l'autre, qu'une Dame l'ait traduit & l'ait éclairci.

Ce n'étoit pas ſon coup d'eſſai, elle avoit auparavant donné au Public une explication de la Philoſophie de Léibnitz ſous le titre d'Inſtitutions de Phyſique, addreſſées à ſon fils, auquel elle avoit enſeigné elle-même la Géométrie.

Le Diſcours préliminaire qui eſt à la tête de ſes Inſtitutions eſt un chef d'œuvre de raiſon & d'éloquence : elle a répandu dans le reste du Livre une méthode & une clarté que Léibnitz n'eut jamais, & dont ses idées ont besoin, soit qu'on veuille seulement les entendre, soit qu'on veuille les réfuter.

Après avoir rendu les imaginations de Léibnitz intelligibles, son esprit qui avoit acquis encore de la force & de la maturité par ce travail même, comprit que cette Métaphysique si hardie, mais si peu fondée, ne méritoit pas ses recherches. Son ame étoit faite pour le sublime, mais pour le vrai. Elle sentit que les monades & l'harmonie préétablies devoient être mises avec les trois élémens de Descartes, & que des systêmes qui n'étoient qu'ingénieux, n'étoient pas dignes de l'occuper. Ainsi, après avoir eu le courage d'embellir Léibnitz, elle eut celui de l'abandonner : courage bien rare dans quiconque a embrassé une opinion, mais qui ne coûta guères d'efforts à une ame qui étoit passionnée pour la vérité.

Défaite de tout esprit de systême, elle prit pour sa régle celle de la Société Royale de Londres, *Nullius in verba* ; & c'est parce que la bonté de son esprit l'avoit rendue ennemie des partis & des systêmes, qu'elle se donna toute entiére à Newton. En effet Newton ne fit jamais de systême, ne supposa jamais rien, n'enseigna aucune vérité qui ne fût fondée sur la plus sublime Géométrie ou sur des expériences incontestables. Les conjectures qu'il a hazardées à la fin de son Livre sous le nom de Recherches, ne sont que des doutes, il ne les donne que pour tels ; & il seroit presque impossible que celui qui n'avoit jamais affirmé que des vérités évidentes, n'eût pas douté de tout le reste.

Tout ce qui eſt donné ici pour principe, eſt en effet digne de ce nom, ce ſont les premiers reſſorts de la nature, inconnus avant lui : & il n'eſt plus permis de prétendre à être Phyſicien ſans les connoître.

Il faut donc bien ſe garder d'enviſager ce Livre comme un ſyſtême, c'eſt-à-dire comme un amas de probabilités qui peuvent ſervir à expliquer bien où mal quelques effets de la Nature.

S'il y avoit encore quelqu'un d'aſſez abſurde pour ſoutenir la matiére ſubtile & la matiére cannellée, pour dire que la terre eſt un ſoleil encrouté, que la lune a été entraînée dans le tourbillon de la terre, que la matiére ſubtile fait la peſanteur, & toutes ces autres opinions romaneſques ſubſtituées à l'ignorance des Anciens, on diroit : Cet homme eſt Cartéſien. S'il croyoit aux monades, on diroit : Il eſt Léibnitien ; mais on ne dira pas de celui qui ſçait les élémens d'Euclide, Qu'il eſt Euclidien : ni de celui qui ſçait d'après Galilée en quelle proportion les corps tombent, Qu'il eſt Galiléiſte. Auſſi en Angleterre ceux qui ont appris le calcul infinitéſimal, qui ont fait les expériences de la lumiére, qui ont appris les loix de la gravitation, ne ſont point appellés Newtoniens : c'eſt le privilége de l'erreur de donner ſon nom à une Secte.

Si Platon avoit trouvé des vérités, il n'y eût point eu de Platoniciens, & tous les hommes auroient appris peu à peu ce que Platon avoit enſeigné ; mais parce que dans l'ignorance qui couvre la terre, les uns s'attachoient à une erreur, les autres à une autre, on combatoit ſous différents étendards : il y avoit des Péripatéticiens, des Platoniciens, des Épicuriens, des Zénoniſtes, en attendant qu'il y eût des Sages.

Si on appelle encore en France Newtoniens les Philoſophes qui ont joint leurs connoiſſances à celles dont Newton a gratifié le genre humain, ce n'eſt que par un reſte d'ignorance & de préjugé. Ceux qui ſçavent peu & ceux qui ſçavent mal, ce qui compoſe une multitude prodigieuſe, s'imaginérent que Newton n'avoit fait autre choſe que combattre Deſcartes, à peu près comme avoit fait Gaſſendi : ils entendirent parler de ſes découvertes, & ils les prirent pour un ſyſtême nouveau. C'eſt ainſi que quand Harvée eut rendu palpable la circulation du ſang, on s'éleva en France contre lui : on appella Harvéiſtes & Circulateurs ceux qui oſoient embraſſer la vérité nouvelle que le Public ne prenoit que pour une opinion. Il le faut avouer, toutes les découvertes nous ſont venues d'ailleurs, & toutes ont été combatues. Il n'y a pas juſqu'aux expériences que Newton avoit faites ſur la lumiere, qui n'ayent eſſuyé parmi nous de violentes contradictions. Il n'eſt pas ſurprenant après cela que la gravitation univerſelle de la matiere ayant été démontrée, ait été auſſi combatue.

Il a fallu, pour établir en France toutes les ſublimes vérités que nous devons à Newton, laiſſer paſſer la génération de ceux qui ayant vieilli dans les erreurs de Deſcartes, *turpè putaverunt parere minoribus, & quæ imberbes didicêre, ſenes perdenda fateri.*

Madame du Châtelet a rendu un double ſervice à la poſtérité en traduiſant le Livre des Principes, & en l'enrichiſſant d'un Commentaire. Il eſt vrai

que

que la Langue Latine dans laquelle il est écrit, est entendue de tous les sçavans ; mais il en coute toujours quelques fatigues à lire des choses abstraites dans une Langue étrangere : d'ailleurs le Latin n'a pas de termes pour exprimer les vérités mathématiques & Physiques qui manquoient aux anciens.

Il a fallu que les modernes créassent des mots nouveaux pour rendre ces nouvelles idées. C'est un grand inconvénient dans les Livres de sciences, & il faut avouer que ce n'est plus gueres la peine d'écrire ces Livres dans une Langue morte, à laquelle il faut toujours ajouter des expressions inconnues à l'antiquité, & qui peuvent causer de l'embarras. Le Français qui est la Langue courante de l'Europe, & qui s'est enrichi de toutes ces expressions nouvelles & nécessaires, est beaucoup plus propre que le Latin à répandre dans le monde toutes ces connoissances nouvelles.

A l'égard du Commentaire Algébrique, c'est un Ouvrage au dessus de la traduction. Madame du Châtelet y travailla sur les idées de M. Clairaut : elle fit tous les calculs elle-même, & quand elle avoit achevé un Chapitre, M. Clairaut l'examinoit & le corrigeoit. Ce n'est pas tout, il peut dans un travail si pénible échaper quelque méprise ; il est très-aisé de substituer en écrivant un signe à un autre ; M. Clairaut faisoit encore revoir par un tiers les calculs, quand ils étoient mis au net, de sorte qu'il est moralement impossible qu'il se soit glissé dans cet Ouvrage une erreur d'inattention ; & ce qui le seroit du moins autant, c'est qu'un Ouvrage où M.Clairaut a mis la main, ne fût pas excellent en ſon genre.

Autant qu'on doit s'étonner qu'une femme ait été capable d'une entrepriſe qui demandoit de ſi grandes lumieres & un travail ſi obſtiné, autant doit-on déplorer ſa perte prématurée. Elle n'avoit pas encore entierement terminé le Commentaire, lorſqu'elle prévit que la mort pouvoit l'enlever; elle étoit jalouſe de ſa gloire & n'avoit point cet orgueil de la fauſſe modeſtie, qui conſiſte à paroître mépriſer ce qu'on ſouhaite, & à vouloir paroître ſupérieure à cette gloire véritable, la ſeule récompenſe de ceux qui ſervent le Public, la ſeule digne des grandes ames, qu'il eſt beau de rechercher, & qu'on n'affecte de dédaigner que quand on eſt incapable d'y atteindre.

Elle joignit à ce goût pour la gloire, une ſimplicité qui ne l'accompagne pas toujours, mais qui eſt ſouvent le fruit des études ſérieuſes. Jamais femme ne fut ſi ſavante qu'elle, & jamais perſonne ne mérita moins qu'on dît d'elle, C'eſt une femme ſavante: elle ne parloit jamais de ſcience qu'à ceux avec qui elle croyoit pouvoir s'inſtruire, & jamais n'en parla pour ſe faire remarquer. On ne la vit point raſſembler de ces Cercles où il ſe fait une guerre d'eſprit, où l'on établit une eſpéce de tribunal, où l'on juge ſon ſiecle, par lequel, en récompenſe, on eſt jugé très-ſéverement. Elle a vécu longtems dans des ſociétés où l'on ignoroit ce qu'elle étoit, & elle ne prenoit pas garde à cette ignorance.

Née avec une éloquence ſinguliere, cette éloquence ne ſe déployoit que quand elle avoit des objets dignes d'elle. Ces Lettres où il ne s'agit que de montrer de l'eſprit, les petites fineſſes, ces tours délicats que l'on donne à des choſes ordinaires, n'entroient point dans l'immenſité de ſes talents; le mot propre, la préciſion, la juſteſſe & la force étoient le caractère de ſon éloquence; elle eût plûtôt écrit comme Paſcal & Nicole, que comme Madame de Sevigné. Mais cette fermeté ſévère & cette trempe vigoureuſe de ſon eſprit ne le rendoient pas inacceſſible aux beautés de ſentiments: les charmes de la Poëſie & de l'Eloquence la pénétroient, & jamais oreille ne fut plus ſenſible à l'harmonie. Elle ſavoit par cœur les meilleurs vers, & ne pouvoit ſouffrir les médiocres. C'étoit un avantage qu'elle eut ſur Newton, d'unir à la profondeur de la Philoſophie, le goût le plus vif & le plus délicat pour les Belles Lettres.

On ne peut que plaindre un Philoſophe réduit à la ſéchereſſe des vérités, & pour qui les beautés de l'imagination & du ſentiment ſont perdues.

Dès ſa tendre jeuneſſe elle avoit nourri ſon eſprit de la lecture des bons Auteurs, en plus d'une Langue; elle avoit commencé une traduction de l'Enéïde dont j'ai vû pluſieurs morceaux remplis de l'ame de ſon Auteur: elle apprit depuis l'Italien & l'Anglais. Le Taſſe & Milton lui étoient auſſi familiers que Virgile: elle fit moins de progrès dans l'Eſpagnol, parce qu'on lui dit qu'il n'y a gueres, dans cette Langue, qu'un Livre célébre, & que ce Livre eſt frivole.

L'étude de ſa Langue fut une de ſes principales occupations : il y a d'elle des remarques manuſcrites, dans leſquelles on découvre, au milieu de l'incertitude de la Grammaire, cet eſprit philoſophique qui doit dominer par tout, & qui eſt le fil de tous les labyrinthes.

Parmi tant de travaux que le ſavant le plus laborieux eût à peine entrepris, qui croiroit qu'elle trouvât du tems, non ſeulement pour remplir tous les devoirs de la ſociété, mais pour en rechercher avec avidité tous les amuſemens ? Elle ſe livroit au plus grand monde comme à l'étude : tout ce qui occupe la ſociété étoit de ſon reſſort, hors la médiſance. Jamais on ne l'entendit relever un ridicule, elle n'avoit ni le tems, ni la volonté de s'en appercevoir ; & quand on lui diſoit que quelques perſonnes ne lui avoient pas rendu juſtice, elle répondoit qu'elle vouloit l'ignorer. On lui montra un jour je ne ſais quelle miſérable brochure dans laquelle un auteur, qui n'étoit pas à portée de la connoître, avoit oſé mal parler d'elle. Elle dit que ſi l'auteur avoit perdu ſon tems à écrire ces inutilités, elle ne vouloit pas perdre le ſien à les lire, & le lendemain ayant ſçu qu'on avoit renfermé l'auteur de ce libelle, elle écrivit en ſa faveur, ſans qu'il l'ait jamais ſçu.

Elle fut regrettée à la Cour de France, autant qu'on peut l'être dans un pays où les intérêts perſonnels font ſi aiſément oublier tout le reſte. Sa mémoire a été précieuſe à tous ceux qui l'ont connue particuliérement, & qui ont été à portée de voir l'étendue de ſon eſprit & la grandeur de ſon ame.

Il eût été heureux pour ſes amis qu'elle n'eût pas entrepris cet ouvrage dont les ſavants vont jouir. On peut dire d'elle, en déplorant ſa deſtinée, *periit arte ſua.*

Elle ſe crut frappée à mort long-tems avant le coup qui nous l'a enlevée : dès lors elle ne ſongea plus qu'à employer le peu de tems qu'elle prévoioit lui reſter à finir ce qu'elle avoit entrepris, & à dérober à la mort ce qu'elle regardoit comme la plus belle partie d'elle même. L'ardeur & l'opiniatreté du travail, des veilles continuelles, dans un tems où le repos l'auroit ſauvée, amenerent enfin cette mort qu'elle avoit prévue. Elle ſentit ſa fin approcher, & par un mélange ſingulier de ſentiments qui ſembloient ſe combattre, on la vit regretter la vie, & regarder la mort avec intrépidité : la douleur d'une ſéparation éternelle affligeoit ſenſiblement ſon ame, & la Philoſophie dont cette ame étoit remplie lui laiſſoit tout ſon courage. Un homme qui s'arrachant triſtement à ſa famille qui le pleure, & qui fait tranquillement les préparatifs d'un long voyage, n'eſt que le faible portrait de ſa douleur & de ſa fermeté : de ſorte que ceux qui furent les témoins de ſes derniers momens ſentoient doublement ſa perte par leur propre affliction & par ſes regrets, & admiroient en même tems la force de ſon eſprit, qui mêloit à des regrets ſi touchans une conſtance ſi inébranlable.

PRÉFACE

DE MONSIEUR NEWTON

à la premiere édition des Principes en 1686.

LES Anciens, comme nous l'apprend Pappus,* firent beaucoup de cas de la Méchanique dans l'interprétation de la nature, & les modernes ont enfin, depuis quelque tems, rejetté les formes substantielles & les qualités occultes, pour rappeller les Phénomenes naturels à des loix mathématiques. On s'est proposé dans ce Traité de contribuer à cet objet, en cultivant les Mathématiques en ce qu'elles ont de rapport avec la Philosophie naturelle.

Les anciens partagerent la Méchanique en deux classes; l'une théorique, qui procéde par des démonstrations exactes; l'autre pratique. De cette derniere ressortissent tous les Arts qu'on nomme Méchaniques, dont cette science a tiré sa dénomination: mais comme les Artisans ont coutume d'opérer peu exactement, de là est venu qu'on a tellement distingué la Méchanique de la Géométrie, que tout ce qui est exact, s'est rapporté à celle-ci, & ce qui l'étoit moins, à la premiere. Cependant les erreurs que commet celui qui exerce un art, sont de l'artiste

* *Coll. Math. Liv.* 8. *proœm.*

& non de l'art. Celui qui opere moins exactement eſt un Méchanicien moins parfait, & conſéquemment celui qui opérera parfaitement, ſera le meilleur.

La Géométrie appartient en quelque choſe à la Méchanique; car c'eſt de cette derniere que dépend la deſcription des lignes droites & des cercles ſur leſquels elle eſt fondée. Il eſt effectivement néceſſaire que celui qui veut s'inſtruire dans la Géométrie ſache décrire ces lignes avant de prendre les premieres leçons de cette ſcience : après quoi on lui apprend comment les problèmes ſe réſolvent par le moyen de ces opérations. On emprunte de la Méchanique leur ſolution : la Géométrie enſeigne leur uſage, & ſe glorifie du magnifique édifice qu'elle éleve en empruntant ſi peu d'ailleurs. La Géométrie eſt donc fondée ſur une pratique méchanique, & elle n'eſt autre choſe qu'une branche de la Méchanique univerſelle qui traite & qui démontre l'art de meſurer. Mais comme les Arts uſuels s'occupent principalement à remuer les corps, de-là il eſt arrivé que l'on a aſſigné à la Géométrie, la grandeur pour objet, & à la Méchanique, le mouvement: ainſi la Méchanique théorique ſera la ſcience démonſtrative des mouvemens qui réſultent des forces quelconques, des forces néceſſaires pour engendrer des mouvemens quelconques.

Les anciens qui ne conſidérerent gueres autrement la peſanteur que dans le poids à remuer, cultiverent cette partie de la Méchanique dans leurs cinq puiſſances qui regardent les arts manuels; mais nous qui avons pour objet, non les Arts, mais l'avancement de la Philosophie, ne nous bornant pas à considérer seulement les puissances manuelles, mais celles que la nature employe dans ses opérations, nous traitons principalement de la pesanteur, la légéreté, la force électrique, la résistance des fluides & les autres forces de cette espéce, soit attractives, soit répulsives: c'est pourquoi nous proposons ce que nous donnons ici comme les principes Mathématiques de la Philosophie naturelle. En effet toute la difficulté de la Philosophie paroit consister à trouver les forces qu'employe la nature, par les Phénomenes du mouvement que nous connoissons, & à démontrer ensuite, par là, les autres Phénomenes. C'est l'objet qu'on a eu en vue dans les propositions générales du I. & II. Livre, & on en donne un exemple dans le III. en expliquant le système de l'Univers: car on y détermine par les propositions Mathématiques démontrées dans les deux premiers Livres, les forces avec lesquelles les corps tendent vers le Soleil & les Planetes; après quoi, à l'aide des mêmes propositions Mathématiques, on déduit de ces forces, les mouvemens des Planetes, des Cometes, de la Lune & de la Mer. Il seroit à desirer que les autres Phénomenes que nous présente la nature, pussent se dériver aussi heureusement des principes méchaniques: car plusieurs raisons me portent à soupçonner qu'ils dépendent tous de quelques forces dont les causes sont inconnues, & par lesquelles les particules des corps sont poussées les unes vers les autres, & s'unissent en figures régulières, ou sont repoussées & se fuyent mutuellement; & c'est l'igno-

rance

rance où l'on a été jusques ici de ces forces, qui a empêché les Philosophes de tenter l'explication de la nature avec succès. J'espére que les principes que j'ai posés dans cet Ouvrage pourront être de quelque utilité à cette maniere de philosopher, ou à quelque autre plus véritable, si je n'ai pas touché au but.

L'ingénieux M. Halley, dont le sçavoir s'étend à tous les genres de littérature, a non seulement donné ses soins à cette Edition, en corrigeant les fautes de l'impression, & en faisant graver les figures: mais il est celui qui m'a engagé à la donner. Car après avoir obtenu de moi ce que j'avois démontré sur la forme des orbites planétaires, il ne cessa de me prier d'en faire part à la Société Royale, dont les instances & les exhortations gracieuses me déterminèrent à songer à publier quelque chose sur ce sujet. J'y travaillai; mais après avoir entamé la question des irrégularités de la Lune, & diverses autres concernant les loix & la mesure de la pesanteur & des autres forces, les figures que décriroient les corps attirés par des forces quelconques, les mouvemens de plusieurs corps entre eux, ceux qui se font dans des milieux résistans, les forces, les densités & les mouvemens de ces milieux, les orbes enfin des Cométes; je pensai qu'il étoit à propos d'en différer l'édition jusques à un autre tems, afin d'avoir le loisir de méditer sur ce qu'il restoit à trouver, & de donner un ouvrage complet au public: ce que je fais à présent. A l'égard des mouvemens lunaires, ce que j'en dis étant encore imparfait, je l'ai renfermé dans les corrolaires de la proposition LXVI. du I. Livre, de crainte d'être obligé d'expoſer & de démontrer chaque point en particulier: ce qui m'auroit engagé dans une prolixité ſuperflue, & auroit troublé la ſuite des propoſitions.

J'ai mieux aimé placer dans quelques endroits, quoique peu convenables, des choſes que j'ai trouvées trop tard, plûtôt que de changer les numero des oppoſitions & des citations qui s'y rapportoient.

Je prie les ſçavans de lire cet Ouvrage avec indulgence, & de regarder les défauts qu'ils y trouveront, moins comme dignes de blame, que comme des objets qui méritent une recherche plus approfondie & de nouveaux efforts.

A Cambridge, du Collége de la Trinité, le 8. Mai 1686.

IS. NEWTON.

PRÉFACE DE L'AUTEUR

à la tête de la seconde Edition.

CETTE seconde Édition paroit corrigée dans plusieurs Articles & avec quelques additions. Dans la seconde Section du premier Livre on a rendu plus facile la maniere de trouver les forces nécessaires pour faire mouvoir un corps dans des orbites données; & dans la Section VII. du second Livre, on a recherché avec plus de soin, la théorie de la résistance des fluides, qu'on confirme par de nouvelles expériences. Dans le III. Livre, on déduit d'une façon plus complette, la théorie de la Lune & la précession des Equinoxes, & l'on a ajouté à la théorie des Cometes un plus grand nombre d'exemples d'orbites calculées, & avec plus de soin: ce qui lui donne une nouvelle confirmation.

A Londres, ee 28. *Mars* 1713.

I S. NEWTON.

PRÉFACE DE L'AUTEUR

à la troisiéme édition.

DANS cette troisiéme Edition, dont a eu soin M. Camberton, Docteur en médecine, très-habile dans ces matieres; on explique plus au long quelques points concernant la résistance des milieux, & on a ajouté quelques nouvelles expériences sur la chute des graves dans l'air. On explique aussi avec plus de détail dans le Livre troisiéme, la démonstration qui prouve que la Lune est retenue dans son orbite par la force de la gravité. Le même Livre est augmenté des Observations nouvelles faites par M. Pound sur la proportion des axes de Jupiter entre eux, de même que de quelques autres concernant la Comete de 1680, faites en Allemagne par M. Kirch, & qui ne nous sont parvenues que depuis peu. Elles montrent de nouveau combien les orbites paraboliques approchent de celles des Cometes. On détermine avec plus d'exactitude l'orbite de cette Comete fameuse, suivant les calculs de M. Halley, & cela dans l'ellipse; d'où l'on fait voir que cette Comete se mouvant dans une orbite de cette forme, eut pendant neuf signes, un cours qui ne fut pas moins régulier que celui des Planetes dans leurs orbites propres. On y a enfin ajouté la détermination de l'orbite de la Cométe de 1723, calculée par M. Bradley, Professeur d'Astronomie à Oxford.

A Londres le 12 *Janvier* 1725-6.

IS. NEWTON.

PREFACE DE M. CÔTES

Sur la présente Edition des Principes mathématiques de la Philosophie Naturelle de M. NEWTON.

NOUS DONNONS enfin au Public une nouvelle Édition de la Philosophie de M. de Newton, désirée depuis long-tems, & supérieure aux précédentes, par les corrections & les augmentations que l'Auteur y a faites. La Table des Matières est suffisante pour faire connoître au Lecteur tout ce que renferme cet excellent Ouvrage; & la Préface de M. Newton l'instruira pareillement des additions & des changemens qu'il a jugé nécessaires & convenables. Nous n'avons donc ici qu'à exposer en peu de mots quelle est la méthode dont il fait usage dans cette nouvelle Philosophie.

On peut rapporter à trois différentes classes tous les Auteurs qui ont entrepris de traiter la Physique. On a vu d'abord des Philosophes qui ont donné à chaque espéce particulière de corps des qualités occultes & propres à chacun, d'où ils ont ensuite fait dépendre d'une manière encore plus occulte les Phénomenes dont nous sommes témoins. C'est-là le fondement de la Philosophie de l'Ecole, enseignée par *Aristote* & par les Péripatéticiens. Selon eux, chaque effet particulier dépend absolument d'une certaine Nature propre à chacun des corps qui en est le sujet ou la cause; mais ils gardent un profond silence sur la cause & le principe de cette Nature. Puis donc qu'ils ont laissé les choses pour ne s'occuper que des mots; on ne doit les regarder tout au plus que comme les inventeurs d'une espèce de jargon philosophique, & non comme les auteurs d'une véritable Philosophie.

D'autres ont pris le parti d'abandonner des mots vuides de sens, & se sont flattés d'acquérir une gloire plus solide par des travaux plus réels. Ils ont donc posé pour principe, que toute la matière en général est de même nature ou homogêne; & que la variété que l'on rémarque dans tout corps en particulier par sa configuration extérieure, ne dépend que de quelques affections très-simples en elles-mêmes, & très-faciles à concevoir. Rien de mieux que de procéder ainsi du plus simple au plus composé; pourvu néanmoins que l'on ne donne pas à ces propriétés primitives & primordiales d'autres modes ni d'autres bornes que celles que la Nature a préscrites elle-même. Mais bientôt ces derniers Philosophes admîrent à leur gré telles grandeurs & telles figures qu'ils jugerent à-propos; imaginerent au besoin des mouvemens & des positions respectives dans les parties composantes des corps : enfin ils forgerent des fluides invisibles, doués d'une subtilité miraculeuse, agités par des mouvemens sécrets, capables de pénétrer les pores de tous les Corps, comme si la matiere n'opposoit aucune résistance ; & par-là ils tomberent dans des réveries aussi ridicules que celles des Anciens, en négligeant de s'instruire & d'examiner la véritable constitution de la nature ; connoissance qu'on ne doit pas assurément chercher dans des conjectures trompeuses, puisque les observations les plus incontestables ont encore bien de la peine à nous la procurer.

Venons à la troisiéme classe, à ceux qui dans leur Philosophie ne réconnoissent d'autre regle que l'expérience. Ces derniers, bien convaincus que l'on doit, autant qu'il est possible, faire dépendre les effets des causes les plus simples, n'admettent cependant aucun principe qui ne soit prouvé par des observations constantes. Ils ne font point d'hypotèses, & n'en reçoivent aucunes en physique, si ce n'est pour les soumettre à l'examen & reconnoître leur vérité ou leur fausseté par une discussion éxacte & rigoureuse. Ils employent dans cette recherche les deux méthodes connues de tout le monde, l'Analyse & la Synthèse. Avec le secours de la première, de quelques Phénomenes choisis adroitement, ils déduisent les forces de la Nature, & les loix les plus simples qui dérivent de ces mêmes forces ; ils exposent ensuite synthétiquement l'ordre & la disposition des autres qui dépendent immédiatement de ces premieres. C'est-là sans doute la meilleure Philosophie, & c'est aussi celle qu'a choisie notre illustre Auteur & qu'il a cru justement préférable à toute autre. C'est la seule qu'il ait jugée digne de ses soins & de ses travaux, & qu'il ait cru devoir perfectionner & embellir. L'explication du système du Monde qui se déduit si facilement de sa Théorie de la gravité, est à la fois une heureuse application de cette nouvelle philosophie, & un modèle que l'on ne peut trop imiter. Quelques Philosophes, avant M. Newton, ont soupçonné que la pesanteur pouvoit être une propriété commune à tous les corps ; d'autres l'ont imaginé gratuitement : notre Philosophe est le premier & le seul qui ait pu le démontrer par les Phénomenes, & en faire le fondement inébranlable des Théories les plus brillantes.

Je n'ignore pas que des personnages illustres & de grand nom dans les Sciences n'ont accordé qu'avec peine leur suffrage à ce nouveau principe ; peut-être par un effet de certains préjugés, qui faisoient une impression trop forte sur leur esprit : je sçais même, qu'ils ont quelquefois préféré des conjectures vagues à des vérités certaines. Mon dessein n'est point d'attaquer ici leur réputation, mais seulement de mettre mon Lecteur en état de porter un jugement équitable, par une exposition abrégée des découvertes du Chevalier Newton, sur la matière dont il est question.

Commençons donc d'abord par ce qu'il y a de plus simple & de plus à notre portée : jettons les yeux sur notre globe, & voyons quelle est la nature de la gravité dans les Corps sublunaires ; afin d'être plus assurés dans nos recherches, lorsque nous en serons aux Corps célestes qui se trouvent si éloignés de notre habitation. Tous les Philosophes sont d'accord pour admettre une gravitation générale de tous les Corps terrestres vers notre globe. On est convaincu par un grand nombre d'expériences, qu'il n'y a pas de Corps vraiment léger. Ce que l'on appelle légereté n'est qu'une propriété relative & apparente ; ce n'est pas une légereté absolue & véritable ; on sçait qu'elle dépend d'une gravité plus puissante des Corps environnants.

Cela posé, puisque les Corps gravitent vers la terre, il faut aussi que la terre gravite également vers les Corps ; car il est aisé de prouver, comme on va le faire tout à l'heure, que l'action de la gravité est égale & réciproque. Imaginons la masse de la terre partagée en deux parties quelconques, égales ou inégales. Si les efforts ou les poids de chaque partie l'une vers l'autre n'étoient pas égaux, la plus foible céderoit nécessairement à la plus forte, & les deux parties ainsi unies continueroient de se mouvoir à l'infini vers le point du ciel opposé à la direction de la plus pésante ; ce qui est absolument contraire à l'expérience ; il faut donc dire que les poids des parties sont dans un parfait équilibre, c'est-à-dire, que l'action de la gravité est égale & réciproque.

Les poids des corps également éloignés du centre de la terre sont comme les quantités de matière qu'ils renferment. C'est une suite nécessaire de l'égalité d'accélération des corps qui tombent par la seule force de leur pesanteur ; car il est évident que des forces qui impriment à des corps inégaux des dégrès égaux de vitesse, doivent être proportionelles à la quantité de matiére qu'il faut mettre en mouvement. D'ailleurs on est maintenant assuré que tous les corps reçoivent une égale accélération ; puisque, dans le vuide de Boile, ils décrivent tous des espaces égaux en tems égaux ; n'étant plus différemment arrêtés par la résistance de l'air. La même vérité est encore prouvée avec plus d'exactitude par l'expérience des pendules.

Les forces attractives * des corps à distances égales sont comme les quantités de matiére contenues dans ces mêmes corps. Car puis-

* On remarquera ici que M. Côtes employe le mot de force attractive pour exprimer la pesanteur, comme a fait M. Newton. En général, toutes ces expressions, force attractive, attraction, gravité, gravitation, pesanteur, ne signifient rien autre chose que cette tendance de tous les corps vers un centre commun de pesanteur, soit que cette tendance qui produit réellement une force, soit occasionnée dans les corps par un méchanisme que nous ignorons ; soit que

que les corps gravitent vers la terre, & que celle-ci gravite vers les corps avec des momens égaux, le poids de la terre sur un corps quelconque, ou, ce qui est la même chose, la force avec laquelle un corps attire la terre, sera égale à la pesanteur de ce même corps vers la terre. Mais dans chaque corps, le poids est proportionel à la quantité de matiére: donc la force avec laquelle un corps attire la terre, ou, ce qui revient au même, la force absolue de ce corps sera comme la même quantité de matiére qu'il renferme.

Il suit de-là que la force attractive (ou la pesanteur) des corps résulte des forces attractives (ou des pesanteurs) de chaque partie qui les composent; puisque cette force de gravitation augmente ou diminue selon que la quantité de matière augmente ou diminue. Il faut regarder l'action de la terre comme le résultat des actions réunies de toutes ses parties; & par conséquent il faut que tous les corps terrestres s'attirent avec des forces absolues qui soient en raison de la matiére attirante. Telle est la nature de la gravité sur la terre: voyons maintenant ce qu'elle est dans les cieux.

C'est une loi de la Nature reçue de tous les Philosophes, qu'un corps restera toujours en repos, ou continuera de se mouvoir en ligne droite, tant qu'il ne sera point soumis à l'action de forces étrangeres qui l'obligent de changer de situation. Il suit de-là que les corps qui se meuvent dans des courbes, & qui par conséquent s'écartent continuellement des lignes droites qui touchent leurs orbites, sont aussi continuellement retenus dans cette route curviligne par l'action d'une force qui leur est perpétuellement appliquée. Donc, pendant que les planetes décrivent leurs trajectoires, elles seront continuellement détournées des tangentes à chaque point de la courbe, par l'action répetée d'une force toujours présente.

Il y encore un principe qu'il faut accorder, & que l'on démontre géométriquement, c'est que lorsque des corps mus dans une courbe qui se trouve sur un même plan décrivent autour d'un point fixe ou mobile des aires proportionelles aux tems, ils sont poussés par des forces qui tendent vers ce même point: donc puisque tous les Astronômes conviennent que les Planetes principales décrivent autour du soleil des aires proportionelles aux tems, de même que les satellites de chacune de ces Planetes du premier ordre autour de ces mêmes Planetes; il faut conclure que la force qui les détourne continuellement des tangentes de leurs orbites pour les faire circu-

plutôt elle soit une propriété continuellement imprimée à la matiére par un pur effet de la volonté du Créateur, qui veut produire par-là tous les Phénomenes dont nous sommes témoins. Il ne s'agit ici que du fait; les noms sont indifférens & présenteroient tous les mêmes difficultés pour quiconque n'entreroit pas bien dans l'esprit de l'Auteur. Voyez à ce sujet le Chapitre II. des Discours de M. de Maupertuis, sur la Fig. des Astres, pag. 16 de la nouvelle édition. On ne peut rien de plus lumineux que cette excellent morceau, qui est une discussion (vraiement) métaphysique sur l'attraction, comme son titre l'annonce.

ler dans ces mêmes courbes, eſt auſſi continuellement dirigée vers les corps qui ſe trouvent aux foyers de ces orbites. C'eſt donc avec raiſon que l'on peut appeller cette force une force *centripete* à l'égard du corps *circulant*; & une force *attractive* à l'égard du corps *central*, quelle que ſoit la cauſe qui produit cette force.

De plus, il eſt pareillement démontré géométriquement que ſi pluſieurs corps ſe meuvent uniformément dans des cercles concentriques, de maniére que les quarrés des temps périodiques ſoient entr'eux comme les cubes des diſtances au centre commun; les forces de chacun de ces corps ſeront réciproquement comme les quarrés des mêmes diſtances. On démontre avec la même facilité que, ſi des corps font leurs révolutions dans des orbites qui ne différent preſque pas du cercle, & dont les abſides ſoient fixes; les forces centripetes de ces corps ſeront comme les quarrés des diſtances. Or de l'aveu conſtant de tous les Aſtronomes toutes les planetes ſe trouvent dans l'un ou l'autre cas; donc leurs forces centripetes ſont réciproquement comme les quarrés de leurs diſtances au centre. Si l'on nous objecte que les abſides des orbites de chaque Planete, & particuliérement de la Lune, ne ſont pas dans un repos parfait; mais qu'ils ont un mouvement fort lent ſuivant l'ordre des ſignes; on peut répondre que, quand même nous accorderions que cette erreur vient de ce que la loi de la force centripete s'éloigne tant ſoit peu de la raiſon doublée inverſe des diſtances; néanmoins il eſt aiſé de calculer juſqu'où peut aller l'erreur qui ſuit de cette fauſſe ſuppoſition, & de faire voir qu'elle eſt abſolument inſenſible. En effet, quoique la loi de la force centripete de la Lune qui eſt la plus ſujette à être troublée dans ſes mouvemens, ſurpaſſe un peu le rapport de la raiſon doublée; néanmoins elle en approche ſoixante fois davantage que de la raiſon triplée. On peut encore réfuter cette objection plus ſolidement en ſoutenant, comme il eſt démontré dans cet Ouvrage, que ce mouvement des abſides ne vient pas de ce que l'intenſité des forces centripetes s'éloigne de la raiſon doublée, mais qu'il dépend réellement d'une cauſe totalement différente : ainſi il faudra toujours admettre comme un principe inconteſtable, que les Planetes principales tournent autour du Soleil, & les ſecondaires autour des premieres, par l'action de forces centripetes qui ſuivent précíſément la raiſon inverſe des quarrés des diſtances.

De ce que l'on vient de dire, il ſuit évidemment que les Planetes ſont rétenues dans leurs orbites par une force qui agit continuellement ſur elles; que cette force eſt toujours dirigée vers le centre de ces orbites; qu'elle augmente à meſure que les Planetes approchent du centre, & qu'elle diminue à meſure qu'elles s'en éloignent;

que l'augmentation croît comme le quarré de la diſtance décroît. Examinons préſentement par une comparaiſon bien établie, ſi la peſanteur qui fait tomber les corps ſur notre globe n'eſt pas de même nature que les forces centripetes qui rétiennent les Planetes dans leurs orbites. Le moyen de s'en aſſurer, c'eſt de voir ſi l'on ne pourra pas trouver de part & d'autre les mêmes loix & les mêmes propriétés : pour y parvenir, commençons par chercher quelle eſt la force centripete de la lune qui eſt le corps le plus proche de notre globe.

Les eſpaces rectilignes parcourus en tombant par des corps quelconques depuis le point de répos, pendant un tems donné, ſont proportionels aux forces qui les pouſſent; c'eſt une propoſition démontrée dans toute la rigueur géométrique : donc la force centripete de la Lune parcourant ſon orbite, ſera à la force de la peſanteur ſur la ſurface de la terre, comme l'eſpace que la lune décriroit en deſcendant vers la terre, dans un temps infiniment petit en vertu de ſa force centripete, ſi elle n'avoit point de mouvement de révolution, eſt à l'éſpace que parcourt dans le même tems un corps près de la ſurface de la terre par la ſeule force de la peſanteur. Le premier des eſpaces dont on vient de parler eſt égal au ſinuſ-verſe de l'arc décrit par la lune, pendant le même tems; puiſque ce ſinuſ-verſe meſure la quantité dont la force centripete a écarté la lune de la tangente; cet eſpace peut ſe calculer par la connoiſſance du tems périodique de la lune & de ſa diſtance au centre. L'autre eſpace dont nous avons parlé, ſe déduit de la théorie des pendules, ſuivant les expériences de M. *Huyghens*. Si l'on fait le calcul on trouvera que le premier eſpace eſt au ſecond, ou, ce qui revient au même, que la force centripete qui retient la lune dans ſon orbite eſt à la force de la peſanteur ſur la ſurface de la terre, comme le quarré du demi diamétre de la terre eſt au quarré du demi diamétre de l'orbite de la lune. D'ailleurs, ſuivant ce qui précéde, la force centripete de la lune dans ſon orbite eſt à la force centripete de la lune auprès de la ſurface de la terre dans la même raiſon ; donc la force centripete de la lune & la force de la peſanteur ſur la ſurface de la terre ſont entierement égales. Ce ne ſont donc point deux forces diſtinctes & différentes, mais préciſément une ſeule & même force; car ſi ces deux forces avoient lieu en même tems & ſe trouvoient néanmoins diſtinguées l'une de l'autre près de la ſurface de la terre, les corps tomberoient deux fois plus vîte que par la ſeule force de la peſanteur. Il eſt donc certain que cette force centripete qui retient la lune dans ſon orbite en l'écartant de la tangente, par attraction ou par impulſion, n'eſt autre choſe que la force de la peſanteur terreſtre qui s'étend juſques à la lune; & la raiſon ſeule nous fait voir que cette force peut avoir ſon effet à des diſtances encore plus grandes, puiſque nous ne pouvons pas obſerver la moindre diminution ſenſible au ſommet des plus hautes montagnes. La lune gravite donc vers la terre, & par une action réciproque la terre gravite vers la lune : on verra cette propoſition confirmée dans cet Ouvrage, lorſqu'il eſt queſtion du flux & reflux de la mer & de la préceſſion des Équinoxes, Phénomenes qui dépendent tous deux de l'action combinée de la lune & du ſoleil ſur la terre. Cette même comparaiſon que l'on vient de faire nous apprend en même tems la loi ſuivant laquelle décroît la force de la peſanteur dans les grandes diſtances de la terre ; car puiſque la peſanteur des corps terreſtres ne différe pas de la force centripete de la lune, qui décroît en raiſon des quarrés des diſtances ; la peſanteur ſuivra donc auſſi la même loi, & diminuera dans la même proportion.

Venons préſentement aux autres planetes. Puiſque les révolutions des planetes principales autour du ſoleil, celles des Satellites de Jupiter & de Saturne, autour de ces deux Planetes ſont des phénomenes de même nature que la révolution de la lune autour de la terre ; puiſqu'il eſt démontré de plus que les forces centripetes de ces planetes ſont dirigées vers le centre du ſoleil, & que celles des Satellites de Jupiter & de Saturne ſont pareillement dirigées vers le centre de chacune de ces deux planetes, comme la force centripete de la lune eſt elle-même dirigée vers le centre de la terre ; enfin puiſque toutes ces forces ſont réciproquement proportionelles aux quarrés de leurs diſtances, de même que la force de la lune (comparée à celle des corps terreſtres) eſt réciproquement comme le quarré de ſa diſtance : il faudra donc conclure que toutes ces forces ſont de même eſpèce. Ainſi de même que la lune gravite ſur la terre, & la terre ſur la lune ; de même auſſi toutes les planetes ſécondaires graviteront vers les planetes principales, & celles-ci graviteront toutes vers leurs Satellites ; de même enfin toutes les planetes graviteront vers le ſoleil, & le ſoleil gravitera vers toutes les planetes.

Il faut donc reconnoître que le ſoleil gravite ſur toutes les planetes, & que toutes les planetes péſent réciproquement ſur celui-ci. Car pendant que les Satellites accompagnent leur planete principale, ils ſont en même tems leurs révolutions autour du ſoleil, ainſi que cette même planete : donc il eſt prouvé par le même raiſonnement que les planetes principales & ſécondaires péſent vers le ſoleil, & que le ſoleil péſe vers elles. On a encore outre cela d'autres preuves de la peſanteur des planetes ſécondaires vers le ſoleil, déduites des inégalités du mouvement de la lune, dont on trouvera une théorie exacte expoſée avec toute la ſagacité poſſible dans la troiſiéme partie de cet Ouvrage.

On peut encore déduire du mouvement des Cometes que la force attractive du soleil se fait sentir à des distances énormes dans toutes les parties de l'étendue. En effet ces corps, après avoir parcouru un intervalle immense, s'approchent continuellement du soleil; & quelquefois ils sont si près de ce globe qu'ils paroissent presque le toucher lorsqu'ils se trouvent dans leur périhélie. C'est envain que les Astronômes des siécles précédents ont cherché à établir une théorie de ces nouvelles planetes; cette découverte étoit réservée à notre siécle, & à notre illustre Auteur, qui nous a donné des méthodes aussi faciles dans la pratique quelles sont conformes aux observations. Il est donc évident que les Cometes se meuvent dans des sections coniques qui ont leur foyer au centre du soleil; & que les rayons menés du soleil aux différents points de leurs trajectoires décrivent des aires proportionelles aux tems. Il suit encore évidemment de ces Phénomenes, & l'on peut aussi le démontrer géométriquement, que les forces qui rétiennent les Cometes dans leurs orbites sont dirigées vers le soleil, & que leur intensité est en raison inverse des quarrés de leurs distances au centre de ce même astre. Donc les Cometes gravitent vers le soleil, & par conséquent la force attractive du soleil s'étend non-seulement aux différentes planetes qui se trouvent à des distances finies, & qui sont presque toutes dans un même plan; mais elle agit encore sur les Cometes qui se trouvent placées dans toutes les différentes parties du Ciel, & à toutes sortes de distances. Telle est donc la nature des corps pesants, qu'ils font sentir leur action à toutes les distances imaginables sur tous les autres corps pesants. Il suit encore de-là que les Planetes & les Cometes s'attirent mutuellement, & que tous ces corps gravitent réciproquement les uns vers les autres; & cette conséquence se trouve confirmée par les inégalités des mouvemens de Jupiter & de Saturne, connues des Astronomes, & causées par les actions réciproques de ces planetes les unes sur les autres. Le mouvement si lent des apsides, & dont on a parlé ci-devant, vient encore à l'appui de cette vérité, & dépend de causes entierement semblables.

Il faut reconnoître maintenant d'après tout ce que l'on vient de voir, que la terre, le soleil & tous les corps célestes qui accompagnent le soleil ont une gravitation réciproque les uns vers les autres, par laquelle ils paroissent s'attirer. Donc chacune de leurs parties, si petite qu'elle soit, a pareillement une force d'attraction proportionelle à sa masse, suivant ce que l'on a dit plus haut sur les corps terrestres: à différentes distances, les forces de ces mêmes parties seront réciproquement comme les quarrés des distances; car il est encore démontré que les globes qui attirent, suivant cette loi, doivent être composés de parties attirantes dans la même raison.

Les conséquences que l'on vient de déduire, sont fondées sur cet axiome reçu de tous les Philosophes, que les effets de même genre dont les propriétés connues sont les mêmes, ont aussi les mêmes causes, d'où naissent les mêmes propriétés, quoique ces causes ne soient pas encore connues. Qui doute en effet, si c'est la pesanteur qui fait tomber les pierres en Europe, que ce ne soit aussi la même pesanteur qui les fasse tomber en Amérique ? Si la pesanteur est réciproque entre la terre & les pierres en Europe, qui pourra nier qu'elle ait la même propriété en Amérique ? Si la force attractive de la terre ou d'une pierre est le résultat des forces attractives des parties dans l'Europe ; ne faut-il pas aussi qu'en Amérique elle résulte d'une pareille combinaison ? Si la force de la pesanteur se trouve dans toutes les espéces de corps, & se fait sentir à toutes sortes de distances en Europe, pourquoi voudrions-nous soutenir qu'elle n'auroit pas aussi les mêmes propriétés en Amérique ? Cette regle est la base de toute la Philosophie ; supprimez la & vous ne pourrez plus rien établir d'universel. On ne connoît la nature de chaque chose que par les observations & les expériences, & de-là il suit que nous ne jugeons que par cette régle d'analogie.

Puis donc que tous les corps terrestres & célestes que nous pouvons observer, ou sur lesquels nous pouvons faire des expériences, sont des corps pesants ; il faudra dire que la pesanteur est une propriété qui convient à tous les corps ; & de même que nous n'en pouvons concevoir aucuns qui ne soient étendus, mobiles & impénétrables, nous ne pouvons pas non plus en concevoir qui ne soient pesants. C'est par l'expérience que nous connoissons l'étendue, la mobilité & l'impénétrabilité des corps, & c'est aussi par l'expérience que nous connoissons leur gravité. Tous les corps que nous avons pu observer sont étendus, mobiles & impénétrables ; & nous en concluons que tous, ceux même sur lesquels nous n'avons pas pu faire d'observations, sont pareillement étendus, mobiles & impénétrables. Tous les corps que nous avons pu observer sont pesants, & nous concluons légitimement de même que ceux sur lesquels nous n'avons point fait d'expériences, sont aussi des corps pesants. Si l'on nous dit que les corps des étoiles fixes n'ont point de gravité, parce que l'on n'a pas encore pu l'observer, on pourra nous prouver aussi par le même raisonnement que ces corps ne sont ni étendus, ni mobiles, ni impénétrables ; car on n'a pas encore observé ces propriétés dans les fixes. Mais à quoi bon m'arrêter plus long-temps ? il faut que la pesanteur soit une des propriétés primitives de tous les corps, ou que l'on cesse de regarder comme telle leur étendue, leur mobilité, leur impénétrabilité; il faut que l'on puisse expliquer exactement les phénomenes de la nature par la loi de la pesanteur, ou que l'on renonce à en donner une explication raisonnable en faisant usage de l'étendue, de la mobilité & de l'impénétrabilité des corps.

Je ne doute pas qu'on ne désaprouve cette conclusion, & qu'on ne me reproche de ramener les qualités occultes. On ne cesse de nous objecter que la gravité est une qualité de cette espèce, & qu'on doit bannir absolument de la philosophie toutes les explications fondées sur de pareilles causes: mais nous pouvons répondre que l'on ne doit pas appeller occultes des qualités dont l'existence est évidemment démontrée par l'expérience; mais celles-là seulement qui n'en ont qu'une imaginaire, & qui ne sont prouvées en aucune maniére. Ceux qui ont réellement recours aux qualités occultes sont ceux qui, pour expliquer les mouvemens de la nature, ont imaginé des tourbillons d'une matière qu'ils forgent à plaisir, & qui ne tombe sous aucun sens.

Faudra-t-il donc rejetter la gravité de tous les ouvrages philosophiques, comme une qualité occulte, par ce que l'on ignore jusqu'à présent la cause de cette même gravité? En établissant de pareils principes, que l'on prenne garde de donner dans des absurdités manifestes, & de ruiner par-là tous les fondemens de la Philosophie. En effet toutes les causes sont liées les unes aux autres par une chaîne non interrompue, & se déduisent les unes des autres en allant du plus simple au plus composé. Si vous arrivez une fois à la cause la plus simple, il ne vous sera pas possible de remonter plus haut; car on ne peut pas donner une explication méchanique de la cause la plus simple; & si cela se pouvoit, dès-lors elle cesseroit d'être telle. Il faudra donc traiter de qualités occultes les causes de cette nature, & les bannir de la Philosophie; ce qui ne peut avoir lieu, que l'on n'exclue pareillement toutes celles qui dépendent immédiatement des premieres, & celles qui se déduisent des secondes, & ainsi de suite jusqu'à ce que l'on ait absolument supprimé toutes les causes des phénomenes qu'il faut expliquer.

D'autres regardent la gravité comme un effet surnaturel, & veulent que ce soit un miracle perpétuel, d'où ils concluent qu'il faut la rejetter, puisque les causes surnaturelles ne doivent point avoir lieu en physique. Une objection si misérable, & qui renverse toute philosophie, mérite à peine que l'on y réponde; car suivant cette idée, ils se trouvent réduits à l'une de ces deux extrémités, ou de soutenir, contre toute évidence, que la pésanteur n'est pas une propriété commune à tous les corps; ou de regarder comme surnaturel tout ce qui ne dépend pas des autres propriétés des corps, ou d'une cause méchanique. Il est cependant constant qu'il y a dans les corps des propriétés primitives, & qui par cette raison ne peuvent dépendre d'autres propriétés : que l'on examine donc si ces propriétés ne sont pas surnaturelles, & par conséquent dans le cas d'être réjettées; qu'on voye enfin ce que deviendroit la Philosophie avec de tels raisonnemens.

Il a encore une autre espèce de Philosophes qui ne rejettent la Physique céleste de M. Newton que parce qu'elle est opposée au systême de Descartes, & ne paroît pas pouvoir s'accorder avec les principes de ce Philosophe. Nous ne pouvons pas les empécher de suivre leur sentiment; mais il faut qu'ils se conduisent de même à notre égard, & qu'ils ne refusent pas aux autres une liberté qu'ils veulent qu'on leur accorde. Qu'il nous soit donc permis d'embrasser la Philosophie de Newton, & de nous y attacher, parce qu'elle nous paroît plus véritable; qu'il nous soit permis de préférer des causes prouvées par les phénomenes à des causes fictices, & qui ne sont confirmées par aucune expérience. Une vraie Philosophie ne doit employer dans l'explication de la nature que des causes vraiment existantes; elle ne doit point chercher les loix par lesquelles le Tout-puissant auroit pu produire l'ordre admirable qui regne dans cet univers, s'il avoit jugé à-propos de les employer; mais seulement celles qu'il a réellement établies par un acte libre de sa volonté. En effet, nous pouvons croire raisonnablement qu'un même effet peut être produit par plusieurs causes différentes; mais la vraie cause pour un Philosophe, est celle qui produit actuellement l'effet dont il est question : la bonne Philosophie n'en réconnoît point d'autres. Dans les pendules, le même mouvement de l'éguille qui marque les heures peut dépendre également d'un poids suspendu, ou d'un ressort enfermé dans la machine. Si l'on a devant soi une horloge mise en mouvement par un poids, ce seroit une chose ridicule d'imaginer un ressort, & de vouloir expliquer le mouvement de l'éguille par cette hypotèse faite avec trop de précipitation; car il falloit d'abord considérer attentivement la construction intérieure de la machine, afin de reconnoître par expérience le vrai principe du mouvement proposé : on peut porter à-peu-près le même jugement de ces Philosophes qui commencent par établir que l'espace immense des Cieux est rempli d'une matière extrêmement subtile, & veulent ensuite que cette même matière soit mise dans un mouvement continuel par les tourbillons qu'elle a formés; car il pourroit arriver qu'ils expliquassent tous les Phénomenes par leurs hypotèses, & l'on ne pourroit pas dire pour cela qu'ils nous eussent donné une vraie Philosophie, ni qu'ils eussent découvert les vraies causes des mouvemens célestes; à moins qu'ils ne nous ayent démontré l'une de ces deux propositions, ou que les causes qu'ils nous donnent existent réellement, ou qu'il n'en pourroit éxister d'autres.

Si donc nous faisons voir que l'attraction des corps a réellement lieu dans la nature ; si nous montrons de plus comment on peut expliquer tous les mouvemens célestes par cette propriété ; dès-lors c'est nous faire une objection ridicule & sans force, que de vouloir nous prouver que l'on doit expliquer ces mêmes mouvemens par les tourbillons, quand même nous aurions accordé la possibilité d'une telle explication. Mais il s'en faut de beaucoup, car on ne peut expliquer ces phénomenes en aucune manière par le moyen des tourbillons, c'est une chose si bien prouvée par notre Auteur, démontrée par des raisons si solides, que ce seroit vouloir s'occuper sérieusement de rêveries que de consacrer sans aucun fruit son tems & ses travaux, à rétablir un édifice misérable & chimérique par des éclaircissemens ou des commentaires également inutiles.

En effet, si les corps des Planetes & des Cometes sont emportés autour du Soleil par des tourbillons ; il faut que les corps emportés & les parties du tourbillon voisines de ces corps ayent la même vitesse & la même direction ; il faut par conséquent qu'elles ayent la même densité ou une même force directement proportionelle à la quantité de matiere. Or il est constant que les Planetes & les Cometes, lorsqu'elles se trouvent dans la même partie du Ciel, ont néanmoins des vitesses & des directions différentes. Il est donc nécessaire que les mêmes parties du fluide céleste, qui sont à égales distances du soleil tournent dans le même tems avec des directions & des vitesses différentes ; car il faut une direction & une vitesse déterminée pour le passage des Planetes ; & il faut dans le même tems une autre vitesse & une autre direction pour le passage des Cometes. Comme ce Phénomene est absolument inexplicable, de deux choses l'une, ou il faudra convenir que tous les corps célestes ne sont pas emportés par un tourbillon ; ou il faudra dire que ce n'est pas un seul tourbillon qui produit tous ces mouvemens ; mais plusieurs qui sont différents les uns des autres, & qui occupent le même espace du Ciel, qu'ils parcourent dans le même tems avec des vitesses & des directions différentes.

Si l'on suppose qu'un même espace contient différents tourbillons, qui se pénétrent mutuellement & font leurs révolutions avec des mouvemens différents ; comme d'ailleurs tous les mouvemens doivent être parfaitement analogues à ceux des corps qu'ils entraînent, lesquels font leurs révolutions avec une régularité surprenante dans des sections coniques tantôt fort excentriques, tantôt presque circulaires ; on peut demander avec raison comment il peut se faire que ces mouvemens se conservent en entier sans jamais avoir été troublés depuis tant de siécles par les actions diverses de la matiere qu'ils rencontrent sans cesse. Si de plus on fait attention que ces mouvemens imaginaires sont plus composés & plus difficiles à expliquer que les mouvemens réels & véritables des Planetes & des Cometes; on sera bientôt convaincu, ainsi que nous, qu'ils ont été gratuitement introduits dans la Philosophie; car toute cause doit être plus simple que son effet. Si l'on accorde une fois la liberté d'imaginer tout ce que l'on voudra, on verra bientôt quelqu'un nous assurer que toutes les Planetes & les Cometes sont ainsi que notre terre environnées d'atmospheres; & d'abord cette hypothèse paroît plus conforme à la raison. On nous dira ensuite que ces atmospheres, par leur nature, se meuvent autour du soleil & décrivent des sections coniques; & ce mouvement peut encore se concevoir plus facilement qu'un semblable mouvement propre à divers tourbillons qui se pénétrent mutuellement: enfin on établira bientôt, comme une chose absolument hors de doute, que les Planetes & les Cometes sont emportées autour du soleil par leurs atmosphéres, & l'on triomphera d'avoir ainsi découvert les causes des mouvemens célestes. Mais quiconque rejette une pareille fiction doit aussi à plus forte raison rejetter la premiere; car ces deux hypothèses n'en font absolument qu'une seule.

Galilée a démontré qu'une pierre jettée & mue dans une parabole ne quitte la ligne droite que par la force de la pesanteur, qui est pourtant une qualité occulte. Mais il faut espérer que quelque Philosophe plus fin & plus adroit imaginera un jour une autre cause; il supposera quelque matiere subtile, invisible, inpalpable, qui ne peut tomber sous aucun sens, mais qui se trouve dans les environs de la surface de la terre; il soutiendra que cette matiere se meut dans toutes sortes de directions, qu'elle obeit à toutes sortes de mouvemens différents & même opposés, & enfin qu'elle décrit toutes sortes de lignes paraboliques; ensuite il aura bientôt expliqué d'une maniere brillante pourquoi la pierre quitte la ligne droite; & par-là s'attirera l'approbation d'un vulgaire ignorant. Cette pierre, nous dira-t-il, nage dans un fluide subtil, & en suivant son cours, elle doit nécessairement se conformer au mouvement du milieu dans lequel elle se trouve. Or ce fluide se meut dans des lignes poraboliques; donc il faut absolument que la pierre décrive une parabole. Qui n'admirera un si grand Philosophe, un génie si perçant? est-il possible d'expliquer les Phénomenes de la nature d'une maniere plus claire, plus à la portée même du commun, & enfin par des causes plus méchaniques, la matière & le mouvement? Qui ne rira au contraire de ce pauvre *Galilée*, qui employe le plus grand appareil de Géométrie pour ramener de nouveau des qualités occultes que l'on avoit si sagement bannies de la Philosophie : mais rougissons de nous amuser à des puerilités de cette nature, & parlons enfin sérieusement.

Tout se réduit à ce qui suit : il y a un nombre infini de Cometes, leurs mouvemens sont extremement réguliers, & elles suivent précisément les mêmes loix que les Planetes ; elles se meuvent dans des sections coniques ; leurs trajectoires sont extrêmement excentriques ; il y en a dans toutes les parties du Ciel ; elles parcourent les espaces célestes, & passent auprès des Planetes avec la plus grande facilité ; souvent même elles marchent contre l'ordre des signes : tous ces Phénomenes sont confirmés par les observations astronomiques, & ne peuvent s'expliquer par les tourbillons. Bien plus ils ne peuvent pas même exister si les Planetes se trouvent entraînées par des tourbillons ; enfin le mouvement des Cometes devient absolument impossible, si l'on ne bannit de l'univers, cette matière subtile qui ne doit son éxistence qu'à l'imagination, & si on ne la fait rentrer dans le néant dont on l'avoit tirée.

Examinons encore cette matière & voyons plus en détail ce qui suit de l'hypothèse des tourbillons. Si les Planetes sont ainsi emportées autour du soleil ; suivant ce que l'on a déja dit, les parties du tourbillon qui environnent la Planete doivent être de même densité qu'elle ; ainsi toute la matière qui environne le périmétre du grand orbe sera aussi dense que la terre, & celle qui se trouve entre ce grand orbe & celui de Saturne aura autant ou plus de densité ; car pour qu'un tourbillon puisse subsister, il faut que les parties les moins denses soient vers le centre & que les plus denses s'en éloignent. En effet, puisque les quarrés des tems périodiques des Planetes sont comme les cubes des distances au Soleil, il faut que les tems périodiques des parties de chaque tourbillon voisines de la Planete suivent à-peu-près le même rapport : or il suit de la que les forces centrifuges de ces mêmes parties sont en raison inverse des quarrés des distances. Donc celles qui sont plus éloignées ont moins de force centrifuge, & par conséquent si elles ont moins de densité elles céderont à la plus grande force avec laquelle les parties plus voisines du centre tâchent de s'en écarter ; donc les plus denses monteront tandis que les moins denses descendront : il y aura ainsi un changement continuel de lieu jusqu'à ce que toute la matiére du tourbillon se trouve tellement disposée qu'elle puisse demeurer en équilibre. Si deux fluides de différente pesanteur spécifique sont contenus dans un même vase, on sçait que le plus pesant va toujours au fond ; & c'est par une raison presque toute semblable que les parties les plus denses d'un tourbillon s'écartent du centre en vertu d'une plus grande force centrifuge. Il faut donc réconnoître que toute la partie du tourbillon qui se trouve au-dehors de l'orbe de la terre, par rapport au soleil, aura une densité & par conséquent une force d'inertie proportionnée à la quantité de matiére, laquelle densité sera au moins égale à la densité & à l'inertie de notre terre; d'où il suit que les Cometes éprouveront une résistance considérable & très-sensible dans leur mouvement, pour ne pas dire capable de le détruire absolument, comme cela est plus que probable. Il est néanmoins certain par la régularité des mouvemens de ces mêmes Cometes, qu'elles n'éprouvent pas la moindre résistance sensible, & par conséquent qu'elles ne trouvent nulle part aucune matiére qui puisse leur résister, ou ce qui revient au même, qui ait quelque densité ou quelque force d'inertie. Car la résistance des milieux ne vient que de l'inertie de la matiére fluide, ou de la viscosité ou ténacité des parties de ce même fluide. Celle qui vient de cette derniere cause est très-petite & peut à peine être observée dans les fluides connus, à moins que le dégré de viscosité ou ténacité ne se trouve très-considérable, comme cela se voit dans l'huile ou le miel. La résistance que l'on éprouve dans l'eau, dans l'air, dans le vif-argent & autres fluides de cette espéce qui n'ont point de viscosité est presque toute de même nature que celle dont nous avons parlé d'abord, & ne peut pas être diminuée par de nouveaux dégrés de subtilité, tant que la densité à laquelle elle est toujours proportionelle, reste la même. Tout ceci est démontré par notre illustre Auteur avec toute la clarté possible, dans sa belle Théorie de la résistance des milieux; Théorie qui se trouve exposée avec beaucoup plus de précision dans cette nouvelle Edition, & qui est encore confirmée davantage par les expériences sur la chute des corps.

On sait que les corps en mouvement le communiquent peu à peu au fluide environnant; cette communication produit une perte, & cette perte rallentit nécessairement la vitesse. La diminution de vitesse est donc proportionelle au mouvement communiqué, lequel est lui-même comme la densité du fluide lorsque la vitesse est connue: donc la diminution de mouvement ou la résistance sera aussi comme la même densité du fluide, & rien ne peut la supprimer, à moins que le fluide qui vient choquer les parties postérieures du corps en mouvement ne lui rende ce qu'il a perdu par la résistance du milieu. Mais c'est ce que l'on ne peut dire, à moins que l'impression du fluide sur les parties postérieures du corps ne soit égale à celle que le même corps exerce sur les parties du fluide qui lui sont directement opposées; c'est-à-dire, à moins que la vitesse relative avec laquelle le fluide revient frapper le corps par derriere ne soit égale à celle avec laquelle le corps frappe le fluide; ou, ce qui revient au même, à moins que la vitesse absolue du fluide recurrent ne ſoit double de celle du fluide répouſſé par le corps; ce qui eſt abſolument impoſſible. On ne peut donc en aucune maniere ſupprimer la réſiſtance des fluides, du moins celle que produiſent la denſité & l'inertie; d'où il faut conclure que les fluides céleſtes n'ont aucune force d'inertie puiſqu'ils n'oppoſent aucune réſiſtance; qu'il n'y a pareillement aucune force qui communique le mouvement, puiſqu'il n'y a point de force d'inertie; point de force qui puiſſe produire le plus léger changement dans les corps en général ou en particulier, puiſqu'il n'y a point de force qui puiſſe communiquer le mouvement; en un mot que ces fluides n'ont aucune efficacité, puiſqu'ils n'ont aucun moyen de produire le changement. Pourquoi donc ne pas regarder comme ridicule & indigne d'un Philoſophe, une hypothèſe qui n'a point de fondement & ne peut en aucune maniére ſervir à expliquer les loix & les phénomenes de la nature? Ceux qui veulent que l'univers ſoit rempli de matiére, & en même tems ſoutiennent que cette matiére n'a point de force d'inertie; établiſſent réellement l'éxiſtence du vuide dont ils ne ſuppriment que le nom; car puiſqu'il n'y a aucune maniére & aucune raiſon de diſtinguer une telle matiére du vuide, il eſt évident que ce n'eſt plus qu'une diſpute de mots. Si malgré tout cela, il y a encore des perſonnes ſi fort attachées à la matiére qu'elles veuillent croire qu'il n'eſt pas poſſible d'admettre un eſpace abſolument vuide de corps, voyons enfin où cette aſſertion les conduira.

Diront-ils que ce plein dans lequel ils imaginent que l'univers eſt conſtruit, eſt un effet de la volonté de Dieu qui a tout diſpoſé de cette maniére afin de trouver pour les opérations de la nature une reſſource toujours préſente dans cette matiére ſubtile qui pénétre & remplit tout; quoique nous ayons déja prouvé que l'on ne peut avancer cette propoſition, puiſqu'il eſt démontré par les phénomenes des Cometes qu'une telle matiére ne peut avoir aucune éfficacité? Avanceront-ils que Dieu a voulu établir ce plein, pour une fin que nous ne connoiſſons pas, ce qui ſeroit une autre abſurdité, puiſque l'on pourroit prouver par le même raiſonnement toute autre diſpoſition & tout autre méchaniſme qu'il plairoit d'imaginer pour expliquer le ſyſtême de l'univers? Oſeroient-ils enfin nous aſſurer que ce plein univerſel n'eſt pas dépendant de la volonté de Dieu, mais qu'il doit ſon éxiſtence à une certaine néceſſité de la nature? Il faut donc qu'ils retombent dans toutes les impiétés de la plus mépriſable de toutes les ſectes, de ceux qui ſont aſſez ſtupides pour croire que tout ſe fait au hazard, & non par une Providence ſouverainement intelligente; de ces hommes qui s'imaginent que la matiére a toujours exiſté néceſſairement & en tout lieu, qu'elle eſt infinie & éternelle. Si on leur accordoit ce principe, il s'enſuit auſſi de là qu'elle doit être abſolument uniforme & homogène dans toute ſon étendue; car la variété des formes eſt directement oppoſée à la néceſſité de l'éxiſtence : elle ſera auſſi par la même raiſon immobile; car ſi elle ſe meut néceſſairement vers un certain point de l'étendue, avec une certaine viteſſe déterminée; par une égale néceſſité elle ſera auſſi en mouvement vers un autre point de l'étendue avec une viteſſe différente; mais il eſt évident qu'elle ne peut ſe mouvoir en même-tems vers différents lieux & avec des viteſſes différentes; elle eſt donc néceſſairement immobile. Donc il n'a pas pu réſulter de cette matiére un monde auſſi beau & auſſi admirable que le nôtre, par la variété des formes & des mouvemens; cet ouvrage ne peut donc être qu'un effet de la volonté ſouverainement libre d'un Dieu qui prévoit tout & qui gouverne tout.

C'eſt là qu'il faut chercher la ſource & l'origine de toutes ces loix que nous appellons *loix de la nature*, dans leſquelles on retrouve à chaque inſtant les marques ſenſibles d'une intelligence infinie, ſans jamais y découvrir le moindre trait qui puiſſe nous les faire regarder comme néceſſaires. Se flatter de pouvoir découvrir les principes d'une vraie phyſique & les loix de la nature par la ſeule force de ſon génie, en fermant les yeux ſur tout ce qui nous environne, pour ne conſulter que la lumiére d'une raiſon intérieure; c'eſt établir que le monde exiſte néceſſairement, & que les loix dont il s'agit ſont des ſuites immédiates de cette néceſſité : ou ſi l'on eſt perſuadé que cet Univers eſt l'ouvrage d'un Dieu; c'eſt avoir aſſez d'orgueil pour imaginer qu'un être auſſi petit, auſſi foible que l'homme, connoît néanmoins avec évidence ce que Dieu pouvoit faire de mieux. Toute Philoſophie ſaine & véritable eſt uniquement appuyée ſur les phénomenes. Si les mêmes phénomenes nous conduiſent de gré ou de force à des principes dans leſquels on voit briller évidemment l'intelligence & le pouvoir abſolu d'un Etre ſouverainement ſage & puiſſant; ce n'eſt pas une raiſon de les rejetter, parce qu'ils déplairont à quelques particuliers; que ce ſoit pour ces gens-là des miracles ou des qualités occultes, on ne doit point leur imputer les noms que la malice peut leur donner; à moins qu'on ne veuille nous avouer tout ſimplement que la philoſophie doit être fondée ſur l'Athéiſme; mais il ne faut pas alterer & corrompre la Philoſophie pour des hommes de cette eſpéce; l'ordre de la nature doit être auſſi ſacré qu'il eſt immuable.

Les gens de bien & les juges équitables dans cette matiére regarderont certainement comme la plus excellente maniére de traiter la Philoſophie, celle qui eſt fondée ſur les expériences & les obſervations. Nous ne pouvons expoſer ici la gloire & l'éclat que cette nouvelle Philoſophie reçoit de l'excellent Ouvrage de notre illuſtre

Auteur. Rien de plus juſte que le reſpectueux étonnement avec lequel ceux qui ont approfondi ces matiéres ne ceſſent d'admirer la force & la grandeur de cet heureux génie occupé à réſoudre les problèmes les plus difficiles, & ſi ſupérieur à tout ce que l'on pouvoit attendre de l'eſprit humain : il a, pour ainſi dire, déchiré le voile de la nature pour nous en découvrir les plus admirables myſtères : il a mis ſous nos yeux une expoſition ſi élégante du ſyſtême de l'univers, un enſemble ſi beau & ſi parfait, qu'Alphonſe * lui-même n'auroit plus rien à déſirer ni pour l'harmonie, ni pour la ſimplicité, ſi ce prince vivoit encore. Nous pouvons maintenant contempler de plus près la majeſté de la nature, jouir plus que jamais d'un ſpectacle ſi doux ; adorer & ſervir avec plus d'ardeur le Maître & le Créateur de toutes choſes, & c'eſt là le plus grand avantage que l'on puiſſe retirer de la Philoſophie. Il faut être aveugle pour ne pas voir dans le meilleur & le plus ſage de tous les ouvrages, la ſageſſe & la bonté infinie de celui qui en eſt l'auteur ; mais c'eſt le comble de la folie que de ne vouloir pas le reconnoître.

Ce grand Ouvrage de M. Newton ſera donc un ſolide rempart que les impies & les athées ne pourront jamais renverſer ; c'eſt là qu'il faut chercher des armes ſi l'on veut les combattre avec ſuccès. Il y a déja longtems que cette importante vérité a été reconnue, par un illuſtre Profeſſeur du Collége de la Trinité, M. Richard *Bentley*, qui fait à la fois la gloire de ſon ſiécle & l'ornement de notre Académie. Ce grand homme auſſi recommandable par une vaſte érudition que par la protection qu'il accorde à tous les Savants, eſt auſſi le premier qui l'ait démontré avec autant de force que d'élégance dans ſes diſcours académiques, ſi univerſellement eſtimés, & qui ont été publiés en latin & en anglois. Je me fais un plaiſir de réconnoître ici combien je lui ſuis redevable à toutes ſortes d'égards, & je ne doute point que le Lecteur ne ſoit pareillement diſpoſé à lui payer le tribut de l'eſtime dûe à ſon ſçavoir & à ſon mérite. Lié depuis long-temps d'une maniére intime avec notre illuſtre Auteur ; & d'ailleurs auſſi ſenſible à cette gloire qu'à celle qu'il reçoit de ſes ouvrages, qui font les délices de toutes les perſonnes lettrées, il a ſçu rendre un ſervice également important au nom de ſon ami & au progrès des ſciences. Les exemplaires de la

* Alphonſe roi de Caſtille vivoit vers le milieu du XIII ſiécle : il donna des ſommes prodigieuſes pour faire conſtruire de nouvelles tables aſtronomiques. On rapporte de lui un trait ſingulier qui revient à cet article. Lorſque les Aſtronomes qu'il avoit choiſis pour faire cet Ouvrage lui préſentèrent leur ſyſtême, qui ſe trouvoit embarraſſé d'une infinité de cercles qu'ils avoient cru néceſſaires pour expliquer les différents mouvements des aſtres : *Si Dieu* dit ce Prince, *m'eut conſulté lorſqu'il créa l'Univers, tout auroit été dans un ordre meilleur & plus ſimple* : Ironie adroite qui part moins d'un principe d'impiété, que d'un génie naturellement connoiſſeur, qui ſe doutoit bien que le méchaniſme de l'Univers devoit être beaucoup plus ſimple que celui qu'on lui propoſoit.

derniére édition des Principes étoient devenus très-rares & se vendoient à un prix éxorbitant. Il ne cessa de faire les plus vives instances à M. Newton, & détermina enfin cet homme, aussi supérieur aux autres par sa modestie que par son sçavoir, à laisser paroître sous ses auspices & à ses dépens cette nouvelle édition que l'on a revue d'un bout à l'autre, & qui se trouve enrichie de diverses additions importantes que l'on y a faites; enfin c'est par son crédit que je reçus dans le même tems une somme considérable qui me fut donnée, pour veiller à ce que cet Ouvrage fût exécuté avec tout le soin & toute la correction possible.

A Cambridge, le 12 *Mai* 1713.

ROGER COTES, Associé du Collége de la Trinité, & Professeur d'Astronomie & de Physique expérimentale.

Avertissement sur les Planches de cet Ouvrage.

COMME on n'a pas voulu multiplier inutilement les Planches & les Figures, lorsque l'on trouvera une même Figure sous deux numéro, on regardera cette Figure comme si c'étoit deux Figures séparées.

Les Planches qui étoient absolument nécessaires dans cet Ouvrage, & d'autres obstacles qu'on ne pouvoit pas prévoir, ont empêché jusqu'ici la publication des *Principes de Newton*, qu'on se proposoit de mettre en vente dès l'année 1756.

ERRATA.

PRÉFACE de M. Côtes, *p.* xxiv, avant derniere *lig.* au lieu de cette, *lisez* cet; & au lieu de vraiement, *lisez* vraiment.

Préface de M. Newton, *p.* xviij, *lig.* 8, oppositions; *lisez* propositions.

Préface de M. Newton à la troisiéme édition, *p.* xx, *lig.* 2, Camberton, *lisez* Pemberton.

Ier Volume, *p.* 38, Lemme 2e *cottez* en marge, Fig. *6.*

Page 39, Lemme 4e *cottez* en marge, Fig. 7 & 8.

Page 40, Lemme 6e *cottez* en marge, Fig. 9.

Page 94, *lig.* 3, le point coïncide; *lis.* le point M. coïncide.

Ibidem, *ligne* 22, la droite *trp.* *lisez* la droite *tr.*

Page 293, à la marge, Fig. 29; *lisez* Fig. 26.

Page 297, à la marge, *ligne* 12, Fig. 27; *lisez* Fig. 28.

IIe Volume, *page* 35, vers le bas, *mettez* Figure 1re à la marge.

Commentaire, *page* 161, *ligne* 12; je fais les lignes A P, *lisez* A S.

Page 164, *ligne* 4, de la Sphere P S, *lisez* P Q.

Ibidem, au bas de la page, Fig. 6; *lisez* Fig. 7.

Page 198, vers le bas de la page; le canal A B, *lisez* le canal K L;

Page 212, *ligne* 10, les particules *s*, *lisez* les particules S.

Page 219, vers le bas de la page, ou à, *lisez* on a.

Page 237, *ligne* 14, on aura par le rapport $\frac{\frac{2}{15}ce\delta}{\frac{2}{3}ce+\frac{8}{15}ce\delta}$

Lisez on aura pour le rapport $\frac{\frac{2}{15}ce\delta}{\frac{2}{3}ce+\frac{6}{15}ce\delta}$

Page 283, vers le haut de la page, *mettez* à la marge Fig. 4.

SUR LA PHYSIQUE.

SUR LA PHYSIQUE DE NEWTON*

A MADAME

LA MARQUISE DU CHASTELET.

TU m'appelles à toi, vaste & puissant génie,
Minerve de la France, immortelle Emilie.
Je m'éveille à ta voix, je marche à ta clarté,
Sur les pas des vertus & de la vérité.
Je quitte *Melpomène* & les jeux du Théâtre,
Ces combats, ces lauriers, dont je fus idolâtre.
De ces triomphes vains mon cœur n'est plus touché.
Que le jaloux *Rufus*, à la terre attaché,
Traîne au bord du tombeau la fureur insensée
D'enfermer dans un vers une fausse pensée;
Qu'il arme contre moi ses languissantes mains,
Des traits qu'il destinoit au reste des humains;
Que quatre fois par mois un ignorant *Zoïle*
Eléve en frémissant une voix imbécille;
Je n'entends point leurs cris que la haine a formés.
Je ne vois point leurs pas dans la fange imprimés.
Le charme tout-puissant de la Philosophie,
Eléve un esprit sage au-dessus de l'envie.
Tranquille au haut des cieux, que *Newton* s'est soumis,
Il ignore en effet s'il a des ennemis.
Je ne les connois plus. Déja de la carriére
L'auguste vérité vient m'ouvrir la barriére;

* Cette Lettre est imprimée au-devant des Elémens de Newton, donnés au Public par M. de Voltaire en 1738 & 1742.

Déja ces tourbillons, l'un par l'autre pressés,
Se mouvant sans espace, & sans régles entassés,
Ces fantômes sçavans à mes yeux disparoissent.
Un jour plus pur me luit; les mouvemens renaissent;
L'espace, qui de Dieu contient l'immensité,
Voit rouler dans son sein l'Univers limité,
Cet Univers si vaste à notre foible vûe,
Et qui n'est qu'un atôme, un point dans l'étendue.
Dieu parle, & le cahos se dissipe à sa voix.
Vers un centre commun tout gravite à la fois.
Ce ressort si puissant, l'ame de la nature,
Etoit enseveli dans une nuit obscure.
Le compas de *Newton*, mesurant l'Univers,
Leve enfin ce grand voile, & les Cieux sont ouverts.
Il découvre à mes yeux, par une main sçavante,
De l'astre des saisons la robe étincelante;
L'émeraude, l'azur, le pourpre, le rubis,
Sont l'immortel tissu dont brillent ses habits.
Chacun de ses raïons dans sa substance pure,
Porte en soi les couleurs dont se peint la nature,
Et confondus ensemble ils éclairent nos yeux,
Ils animent le monde, ils emplissent les Cieux.
Confidens du Très-haut, substances éternelles,
Qui brûlez de ses feux, qui couvrez de vos aîles
Le Trône où votre Maître est assis parmi vous,
Parlez; du grand *Newton* n'étiez-vous point jaloux?
La mer entend sa voix. Je vois l'humide empire
S'élever, s'avancer vers le Ciel qui l'attire:
Mais un pouvoir central arrête ses efforts;
La mer tombe, s'affaisse, & roule vers ses bords.

Comêtes, que l'on craint à l'égal du tonnerre,
Ceſſez d'épouvanter les peuples de la terre;
Dans une ellipſe immenſe achevez votre cours;
Remontez, deſcendez près de l'aſtre des jours;
Lancez vos feux, volez; & revenant ſans ceſſe,
Des mondes épuiſés ranimez la vieilleſſe.

Et toi, ſœur du ſoleil, aſtre qui dans les Cieux
Des ſages éblouis trompois les faibles yeux,
Newton de ta carriére a marqué les limites:
Marche, éclaire les nuits, tes bornes ſont preſcrites.

Terre, change de forme, & que la peſanteur,
En abaiſſant le Pôle, éléve l'Equateur.
Pôle, immobile aux yeux, ſi lent dans votre courſe,
Fuyez le char glacé des ſept Aſtres de l'Ourſe: *
Embraſſez dans le cours de vos longs mouvemens
Deux cens ſiécles entiers par de-là ſix mille ans.

Que ces objets ſont beaux! Que notre ame épurée
Vole à ces vérités dont elle eſt éclairée!
Oui, dans le ſein de Dieu, loin de ce corps mortel,
L'eſprit ſemble écouter la voix de l'Eternel.

Vous, à qui cette voix ſe fait ſi bien entendre,
Comment avez-vous pû, dans un âge encor tendre,
Malgré les vains plaiſirs, ces écueils des beaux jours,
Prendre un vol ſi hardi, ſuivre un ſi vaſte cours,
Marcher après *Newton* dans cette route obſcure
Du labyrinthe immenſe où ſe perd la nature?
Puiſſé-je auprès de vous, dans ce Temple écarté,
Aux regards des François montrer la Vérité,

* C'eſt la Période de la preſſion des Equinoxes, laquelle s'accomplit en vingt-ſix mille neuf cens ans, ou environ.

Tandis * qu'Algaroti, ſûr d'inſtruire & de plaire,
Vers le Tibre étonné conduit cette Etrangére.
  Que de nouvelles fleurs il orne ſes attraits,
Le compas à la main j'en tracerai les traits;
De mes crayons groſſiers je peindrai l'immortelle;
Cherchant à l'embellir, je la rendrois moins belle.
Elle eſt, ainſi que vous, noble, ſimple & ſans fard,
Au-deſſus de l'éloge, au-deſſus de mon art.

* M. Algaroti, jeune Vénitien, faiſoit imprimer alors à Veniſe un Traité ſur la Lumiére, dans lequel il expliquoit l'Attraction. Il y a eu ſept éditions de ſon Livre, lequel a été fort mal traduit en françois.

PRINCIPES

PRINCIPES
MATHÉMATHIQUES
DE LA
PHILOSOPHIE NATURELLE.

DÉFINITIONS.

DÉFINITION PREMIERE.

La quantité de matiere se mesure par la densité & le volume pris ensemble.

DÉFINITIONS.

L'Air devenant d'une densité double est quadruple en quantité, lorsque l'espace est double, & sextuple, si l'espace est triple. On en peut dire autant de la neige & de la poudre condensées par la liquéfaction ou la compression, aussi-bien que dans tous les corps condensés par quelque cause que ce puisse être.

Je ne fais point attention ici au milieu qui passe librement entre les parties des corps, supposé qu'un tel milieu éxiste. Je désigne

DÉFINITIONS.

la quantité de matiere par les mots de *corps* ou de *masse*. Cette quantité se connoît par le poids des corps : car j'ai trouvé par des expériences très-éxactes sur les pendules, que les poids des corps sont proportionnels à leur masse ; je rapporterai ces expériences dans la suite.

DÉFINITION II.

La quantité de mouvement est le produit de la masse par la vitesse.

Le mouvement total est la somme du mouvement de chacune des parties ; ainsi la quantité du mouvement est double dans un corps dont la masse est double, si la vîtesse reste la même ; mais si on double la vîtesse, la quantité du mouvement sera quadruple.

DÉFINITION III.

La force qui réside dans la matiere (vis insita) *est le pouvoir qu'elle a de résister. C'est par cette force que tout corps persévere de lui-même dans son état actuel de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite.*

Cette force est toujours proportionnelle à la quantité de matiere des corps, & elle ne différe de ce qu'on appelle *l'inertie de la matiere*, que par la maniere de la concevoir : car l'inertie est ce qui fait qu'on ne peut changer sans effort l'état actuel d'un corps ; soit qu'il se meuve, soit qu'il soit en repos ; ainsi on peut donner à la force qui réside dans les corps le nom très-expressif de *force d'inertie.*

Le corps éxerce cette force toutes les fois qu'il s'agit de changer son état actuel, & on peut la considérer alors sous deux différens aspects, ou comme *résistante*, ou comme *impulsive* : comme résistante, en tant que le corps s'oppose à la force qui tend à lui faire changer d'état ; comme impulsive, en tant que le même corps fait effort pour changer l'état de l'obstacle qui lui résiste.

On attribue communément la résistance aux corps en repos ; & la force impulsive à ceux qui se meuvent ; mais le mouvement

& le repos, tels qu'on les conçoit communément, ne ſont que reſpectifs : car les corps qu'on croit en repos ne ſont pas toujours dans un repos abſolu.

DÉFINITION IV.

La force imprimée (vis impreſſa) *eſt l'action par laquelle l'état du corps eſt changé, ſoit que cet état ſoit le repos, ou le mouvement uniforme en ligne droite.*

Cette force conſiſte uniquement dans l'action, & elle ne ſubſiſte plus dans le corps, dès que l'action vient à ceſſer. Mais le corps perſévere par ſa ſeule force d'inertie dans le nouvel état dans lequel il ſe trouve. La force imprimée peut avoir diverſes origines, elle peut être produite par le *choc*, par la *preſſion*, & par la *force centripete*.

DÉFINITION V.

La force centripete eſt celle qui fait tendre les corps vers quelque point, comme vers un centre, ſoit qu'ils ſoient tirés ou pouſſés vers ce point, ou qu'ils y tendent d'une façon quelconque.

La gravité qui fait tendre tous les corps vers le centre de la terre ; la force magnétique qui fait tendre le fer vers l'aimant, & la force, quelle qu'elle ſoit, qui retire à tout moment les planétes du mouvement rectiligne, & qui les fait circuler dans des courbes, ſont des forces de ce genre.

La pierre qu'on fait tourner par le moyen d'une fronde, agit ſur la main, en tendant la fronde, par un effort qui eſt d'autant plus grand, qu'on la fait tourner plus vîte, & elle s'échape auſſitôt qu'on ne la retient plus. La force éxercée par la main pour retenir la pierre, laquelle eſt égale & contraire à la force par laquelle la pierre tend la fronde, étant donc toujours dirigée vers la main, centre du cercle décrit, eſt celle que j'appelle *force centripete*. Il en eſt de même de tous les corps qui ſe meuvent en rond, ils font tous effort pour s'éloigner du centre de leur révolution ; & ſans le ſecours de quelque force qui s'oppoſe à cet effort & qui les retient dans leurs orbes, c'eſt-à-dire, de quelque *force centripete*, ils s'en iroient en ligne droite d'un mouvement uniforme.

Un projectile ne retomberoit point vers la terre, s'il n'étoit point animé par la force de la gravité, mais il s'en iroit en ligne droite dans les cieux avec un mouvement uniforme, ſi la réſiſtance de l'air étoit nulle. C'eſt donc par ſa gravité qu'il eſt retiré de la ligne droite, & qu'il s'infléchit ſans ceſſe vers la terre ; & il s'infléchit plus ou moins, ſelon ſa gravité & la vîteſſe de ſon mouvement. Moins la gravité du projectile ſera grande par rapport à ſa quantité de matiére, plus il aura de vîteſſe ; moins il s'éloignera de la ligne droite, & plus il ira loin avant de retomber ſur la terre.

Ainſi, ſi un boulet de canon étoit tiré horiſontalement du haut d'une montagne, avec une vîteſſe capable de lui faire parcourir un eſpace de deux lieues avant de retomber ſur la terre : avec une vîteſſe double, il n'y retomberoit qu'après avoir parcouru à peu près quatre lieues, & avec une vîteſſe décuple, il iroit dix fois plus loin ; (pourvû qu'on n'ait point d'égard à la réſiſtance de l'air,) & en augmentant la vîteſſe de ce corps, on augmenteroit à volonté le chemin qu'il parcoureroit avant de retomber ſur la terre, & on diminueroit la courbure de la ligne qu'il décriroit ; en ſorte qu'il pourroit ne retomber ſur la terre qu'à la diſtance de 10, de 30, ou de 90 degrès ; ou qu'enfin il pourroit circuler autour, ſans y retomber jamais, & même s'en aller en ligne droite à l'infini dans le ciel.

Or, par la même raiſon qu'un projectile pourroit tourner autour de la terre par la force de la gravité, il ſe peut faire que la lune par la force de ſa gravité, (ſuppoſé qu'elle gravite) ou par quelqu'autre force qui la porte vers la terre, ſoit détournée à tout moment de la ligne droite pour s'approcher de la terre, & qu'elle ſoit contrainte à circuler dans une courbe, & ſans une telle force, la lune ne pourroit être retenue dans ſon orbite.

Si cette force étoit moindre qu'il ne convient, elle ne retireroit pas assez la lune de la ligne droite; & si elle étoit plus grande, elle l'en retireroit trop, & elle la tireroit de son orbe vers la terre. La quantité de cette force doit donc être donnée; & c'est aux Mathématiciens à trouver la force centripete nécessaire pour faire circuler un corps dans un orbite donné, & à déterminer réciproquement la courbe dans laquelle un corps doit circuler par une force centripete donnée, en partant d'un lieu quelconque donné, avec une vîtesse donnée.

La quantité de la force centripete peut être considérée comme *absolue*, *accélératrice & motrice.*

DÉFINITION VI.

La quantité absolue de la force centripete est plus grande ou moindre, selon l'efficacité de la cause qui la propage du centre.

C'est ainsi que la force magnétique est plus grande dans un aimant que dans un autre, suivant la grandeur de la pierre, & l'intensité de sa vertu.

DÉFINITION VII.

La quantité accélératrice de la force centripete est proportionnelle à la vîtesse qu'elle produit dans un temps donné.

La force magnétique du même aimant est plus grande à une moindre distance, qu'à une plus grande. La force de la gravité est plus grande dans les plaines, & moindre sur le sommet des hautes montagnes, & doit être encore moindre (comme on le prouvera dans la suite) à de plus grandes distances de la terre, & à des distances égales, elle est la même de tous côtés; c'est pourquoi elle accélére également tous les corps qui tombent, soit qu'ils soient légers ou pesans, grands ou petits, abstraction faite de la résistance de l'air.

DÉFINITION VIII.

La quantité motrice de la force centripete eſt proportionnelle au mouvement qu'elle produit dans un temps donné.

Le poids des corps eſt d'autant plus grand, qu'ils ont plus de maſſe ; & le même corps péſe plus près de la ſurface de la terre, que s'il étoit tranſporté dans le ciel. La quantité motrice de la force centripete eſt la force totale avec laquelle le corps tend vers le centre, & proprement ſon poids ; & on peut toujours la connoître en connoiſſant la force contraire & égale qui peut empêcher le corps de deſcendre.

J'ai appellé ces différentes quantités de la force centripete, *motrices*, *accélératrices*, & *abſolues*, afin d'être plus court.

On peut, pour les diſtinguer, les rapporter *aux corps* qui ſont attirés vers un centre, *aux lieux* de ces corps, & *au centre* des forces.

On peut rapporter la force centripete motrice au corps, en la conſidérant comme l'effort que fait le corps entier pour s'approcher du centre, lequel effort eſt compoſé de celui de toutes ſes parties.

La force centripete accélératrice peut ſe rapporter au lieu du corps, en conſidérant cette force en tant qu'elle ſe répand du centre dans tous les lieux qui l'environnent, pour mouvoir les corps qui s'y rencontrent.

Enfin on rapporte la force centripete abſolue au centre, comme à une certaine cauſe ſans laquelle les forces motrices ne ſe propageroient point dans tous les lieux qui entourent le centre ; ſoit que cette cauſe ſoit un corps central quelconque, (comme l'aimant dans le centre de la force magnétique, & la terre dans le centre de la force gravitante,) ſoit que ce ſoit quelqu'autre cauſe qu'on n'apperçoit pas. Cette façon de conſidérer la force centripete eſt purement mathématique : & je ne prétends point en donner la cauſe phyſique.

La force centripete accélératrice eſt donc à la force centripete motrice, ce que la vîteſſe eſt au mouvement; car de même que la quantité de mouvement eſt le produit de la maſſe par la vîteſſe, la quantité de la force centripete motrice eſt le produit de la force centripete accélératrice par la maſſe; car la ſomme de toutes les actions de la force centripete accélératrice ſur chaque particule du corps eſt la force centripete motrice du corps entier. Donc à la ſurface de la terre où la force accélératrice de la gravité eſt la même ſur tous les corps, la gravité motrice ou le poids des corps eſt proportionnel à leur maſſe; & ſi on étoit placé dans des régions où la force accélératrice diminuât, le poids des corps y diminueroit pareillement; ainſi il eſt toujours comme le produit de la maſſe par la force centripete accélératrice. Dans les régions où la force centripete accélératrice ſeroit deux fois moindre, le poids d'un corps ſousdouble ou ſoustriple ſeroit quatre fois ou ſix fois moindre.

Au reſte, je prens ici dans le même ſens les attractions & les impulſions accélératrices & motrices, & je me ſers indifféremment des mots d'*impulſion*, d'*attraction*, ou de *propenſion* quelconque vers un centre : car je conſidere ces forces mathématiquement & non phyſiquement; ainſi le Lecteur doit bien ſe garder de croire que j'aie voulu déſigner par ces mots une eſpece d'action, de cauſe ou de raiſon phyſique; & lorſque je dis que les centres attirent, lorſque je parle de leurs forces, il ne doit pas penſer que j'aie voulu attribuer aucune force réelle à ces centres que je conſidere comme des points mathématiques.

S C H O L I E.

Je viens de faire voir le ſens que je donne dans cet Ouvrage à des termes qui ne ſont pas communément uſités. Quant à ceux de *temps*, d'*eſpace*, de *lieu* & de *mouvement*, ils ſont connus de tout le monde; mais il faut remarquer que pour n'avoir conſidéré ces quantités que par leurs relations à des choſes ſenſibles, on eſt tombé dans pluſieurs erreurs.

DÉFINITIONS.

Pour les éviter, il faut distinguer le temps, l'espace, le lieu, & le mouvement, en *absolus* & *relatifs*, *vrais* & *apparens*, *mathématiques* & *vulgaires*.

I. Le temps absolu, vrai & mathématique, sans relation à rien d'extérieur, coule uniformément, & s'appelle *durée*. Le temps relatif, apparent & vulgaire, est cette mesure sensible & externe d'une partie de durée quelconque (égale ou inégale) prise du mouvement : telles sont les mesures d'*heures*, de *jours*, de *mois*, &c. dont on se sert ordinairement à la place du temps vrai.

II. L'espace absolu, sans relation aux choses externes, demeure toujours similaire & immobile.

L'espace relatif est cette mesure ou dimension mobile de l'espace absolu, laquelle tombe sous nos sens par sa relation aux corps, & que le vulgaire confond avec l'espace immobile. C'est ainsi, par exemple, qu'un espace, pris au dedans de la terre ou dans le ciel, est déterminé par la situation qu'il a à l'égard de la terre.

L'espace absolu & l'espace relatif sont les mêmes d'espece & de grandeur; mais ils ne le sont pas toujours de nombre; car, par exemple, lorsque la terre change de place dans l'espace, l'espace qui contient notre air demeure le même par rapport à la terre, quoique l'air occupe nécessairement les différentes parties de l'espace dans lesquelles il passe, & qu'il en change réellement sans cesse.

III. Le lieu est la partie de l'espace occupée par un corps, & par rapport à l'espace, il est ou relatif ou absolu.

Je dis que le lieu est une partie de l'espace, & non pas simplement la situation du corps, ou la superficie qui l'entoure : car les solides égaux ont toujours des lieux égaux, quoique leurs superficies soient souvent inégales, à cause de la dissemblance de leurs formes; les situations, à parler exactement, n'ont point de quantité, ce sont plutôt des affections des lieux, que des lieux proprement dits.

De même que le mouvement ou la translation du tout hors de ſon lieu eſt la ſomme des mouvemens ou des tranſlations des parties hors du leur ; ainſi le lieu du tout eſt la ſomme des lieux de toutes les parties, & ce lieu doit être interne, & être dans tout le corps entier (*& propterea internus & in corpore toto.*)

IV. Le mouvement abſolu eſt la tranſlation des corps d'un lieu abſolu dans un autre lieu abſolu, & le mouvement relatif eſt la tranſlation d'un lieu relatif dans un autre lieu relatif ; ainſi dans un vaiſſeau pouſſé par le vent, le lieu relatif d'un corps eſt la partie du vaiſſeau dans laquelle ce corps ſe trouve, ou l'eſpace qu'il occupe dans la cavité du vaiſſeau ; & cet eſpace ſe meut avec le vaiſſeau ; & le repos relatif de ce corps eſt ſa permanence dans la même partie de la cavité du vaiſſeau. Mais le repos vrai du corps eſt ſa permanence dans la partie de l'eſpace immobile, où l'on ſuppoſe que ſe meut le vaiſſeau & tout ce qu'il contient. Ainſi, ſi la terre étoit en repos, le corps qui eſt dans un repos relatif dans le Vaiſſeau auroit un mouvement vrai & abſolu, dont la vîteſſe ſeroit égale à celle qui emporte le vaiſſeau ſur la ſurface de la terre ; mais la terre ſe mouvant dans l'eſpace, le mouvement vrai & abſolu de ce corps eſt compoſé du mouvement vrai de la terre dans l'eſpace immobile, & du mouvement relatif du vaiſſeau ſur la ſurface de la terre ; & ſi le corps avoit un mouvement relatif dans le vaiſſeau, ſon mouvement vrai & abſolu ſeroit compoſé de ſon mouvement relatif dans le vaiſſeau, du mouvement relatif du vaiſſeau ſur la terre, & du mouvement vrai de la terre dans l'eſpace abſolu. Quant au mouvement relatif de ce corps ſur la terre, il ſeroit formé dans ce cas de ſon mouvement relatif dans le vaiſſeau, & du mouvement relatif du vaiſſeau ſur la terre. Enſorte que ſi la partie de la terre où ſe trouve ce vaiſſeau avoit un mouvement vrai vers l'orient, avec une vîteſſe diviſée en 10010 parties : que le vaiſſeau fût emporté vers l'occident avec 10 parties de cette vîteſſe ; & que le Pilote ſe promenât dans le vaiſſeau vers l'orient, avec une partie de cette même vîteſſe : ce Pilote auroit un mouvement réel & abſolu dans l'eſpace im-

DÉFINITIONS.

mobile, avec 10001 parties de vîteſſe vers l'orient, & un mouvement relatif ſur la terre vers l'occident avec 9 parties de vîteſſe.

On diſtingue en aſtronomie le temps abſolu du temps relatif par l'*équation du temps*. Car les jours naturels ſont inégaux, quoiqu'on les prenne communément pour une meſure égale du temps; & les Aſtronomes corrigent cette inégalité, afin de meſurer les mouvemens céleſtes par un temps plus éxact.

Il eſt très poſſible qu'il n'y ait point de mouvement parfaitement égal, qui puiſſe ſervir de meſure éxacte du temps; car tous les mouvemens peuvent être accélérés & retardés, mais le temps abſolu doit toujours couler de la même maniére.

La durée ou la perſévérance des choſes eſt donc la même, ſoit que les mouvemens ſoient prompts, ſoit qu'ils ſoient lents, & elle ſeroit encore la même, quand il n'y auroit aucun mouvement; ainſi il faut bien diſtinguer le temps de ſes meſures ſenſibles, & c'eſt ce qu'on fait par l'équation aſtronomique. La néceſſité de cette équation dans la détermination des Phénomènes ſe prouve aſſez par l'expérience des horloges à pendule, & par les obſervations des Eclipſes des ſatellites de Jupiter.

L'ordre des parties de l'eſpace eſt auſſi immuable que celui des parties du temps; car ſi les parties de l'eſpace ſortoient de leur lieu, ce ſeroit, ſi l'on peut s'exprimer ainſi, ſortir d'elles-mêmes. Les temps & les eſpaces n'ont pas d'autres lieux qu'eux-mêmes, & ils ſont les lieux de toutes les choſes. Tout eſt dans le temps, quant à l'ordre de la ſucceſſion: tout eſt dans l'eſpace, quant à l'ordre de la ſituation. C'eſt là ce qui détermine leur eſſence, & il ſeroit abſurde que les lieux primordiaux ſe mûſſent. Ces lieux ſont donc les lieux abſolus, & la ſeule tranſlation de ces lieux fait les mouvemens abſolus.

Comme les parties de l'eſpace ne peuvent être vûes ni diſtinguées les unes des autres par nos ſens, nous y ſuppléons par des meſures ſenſibles. Ainſi nous déterminons les lieux par les poſitions & les distances à quelque corps que nous regardons comme immobile, & nous mesurons ensuite les mouvemens des corps par rapport à ces lieux ainsi déterminés : nous nous servons donc des lieux & des mouvemens relatifs à la place des lieux & des mouvemens absolus ; & il est à propos d'en user ainsi dans la vie civile : mais dans les matieres philosophiques, il faut faire abstraction des sens ; car il se peut faire qu'il n'y ait aucun corps véritablement en repos, auquel on puisse rapporter les lieux & les mouvemens.

Le repos & le mouvement relatifs & absolus sont distingués par leurs *propriétés*, leurs *causes* & leurs *effets*. La propriété du repos est que les corps véritablement en repos y sont les uns à l'égard des autres. Ainsi, quoiqu'il soit possible qu'il y ait quelque corps dans la région des fixes, ou beaucoup au-delà, qui soit dans un repos absolu, comme on ne peut pas connoître par la situation qu'ont entr'eux les corps d'ici-bas, si quelqu'un de ces corps conserve ou non sa situation par rapport à ce corps éloigné, on ne sçauroit déterminer, par le moyen de la situation que ces corps ont entr'eux, s'ils sont véritablement en repos.

La propriété du mouvement est que les parties qui conservent des positions données par rapport aux touts participent aux mouvemens de ces touts ; car si un corps se meut autour d'un axe, toutes ses parties font effort pour s'éloigner de cet axe, & s'il a un mouvement progressif, son mouvement total est la somme des mouvemens de toutes ses parties. De cette propriété il suit, que si un corps se meut, les corps qu'il contient, & qui sont par rapport à lui dans un repos relatif, se meuvent aussi ; & par conséquent le mouvement vrai & absolu ne sçauroit être défini par la translation du voisinage des corps extérieurs, que l'on considére comme en repos. Il faut que les corps extérieurs soient non seulement regardés comme en repos, mais qu'ils y soient véritablement : autrement les corps qu'ils renferment, outre leur translation du voisinage des ambians, participeront encore au mouvement vrai des ambians, & s'ils ne changeoient point de position par rapport aux parties des ambians, ils ne seroient pas pour cela véritablement en repos ; mais ils seroient seulement considérés comme en repos. Les corps ambians sont à ceux qu'ils contiennent, comme toutes les parties extérieures d'un corps sont à toutes ses parties intérieures, ou comme l'écorce est au noyau. Or l'écorce étant muë, le noyau se meut aussi, quoiqu'il ne change point sa situation par rapport aux parties de l'écorce qui l'environnent.

Il suit de cette propriété du mouvement qu'un lieu étant mû, tout ce qu'il contient se meut aussi, & par conséquent qu'un corps qui se meut dans un lieu mobile, participe au mouvement de ce lieu. Tous les mouvemens qui s'éxécutent dans des lieux mobiles ne sont donc que les parties des mouvemens entiers & absolus. Le mouvement entier & absolu d'un corps est composé du mouvement de ce corps dans le lieu où l'on le suppose, du mouvement de ce lieu dans le lieu où il est placé lui-même, & ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un lieu immobile, comme dans l'éxemple du Pilote dont on a parlé ci-dessus. Ainsi les mouvemens entiers & absolus ne peuvent se déterminer qu'en les considérant dans un lieu immobile : & c'est pourquoi j'ai rapporté ci-dessus les mouvemens absolus à un lieu immobile, & les mouvemens relatifs à un lieu mobile. Il n'y a de lieux immobiles que ceux qui conservent à l'infini dans tous les sens leurs situations respectives; & ce sont ces lieux qui constituent l'espace que j'appelle *immobile*.

Les causes par lesquelles on peut distinguer le mouvement vrai du mouvement relatif sont les forces imprimées dans les corps pour leur donner le mouvement: car le mouvement vrai d'un corps ne peut être produit ni changé que par des forces imprimées à ce corps même; au lieu que son mouvement relatif peut être produit & changé, sans qu'il éprouve l'action d'aucune force : il ſuffit qu'il y ait des forces qui agiſſent ſur les corps par rapport auſquels on le conſidere, puiſque ces corps étant mûs, la relation dans laquelle conſiſte le repos ou le mouvement relatif change, de même, le mouvement abſolu d'un corps peut changer, ſans que ſon mouvement relatif change; car ſi les forces qui agiſſent ſur ce corps agiſſoient en même temps ſur ceux par rapport auſquels on le conſidere, & en telle ſorte que les relations reſtaſſent toujours les mêmes, le mouvement relatif, qui n'eſt autre choſe que ces relations, ne changeroit point. Ainſi le mouvement relatif peut changer, tandis que le mouvement vrai & abſolu reſte le même, & il peut ſe conſerver auſſi, quoique le mouvement abſolu change; il eſt donc ſûr que le mouvement abſolu ne conſiſte point dans ces ſortes de relations.

Les effets par leſquels on peut diſtinguer le mouvement abſolu du mouvement relatif, ſont les forces qu'ont les corps qui tournent pour s'éloigner de l'axe de leur mouvement; car dans le mouvement circulaire purement relatif, ces forces ſont nulles, & dans le mouvement circulaire vrai & abſolu elles ſont plus ou moins grandes, ſelon la quantité du mouvement.

Si on fait tourner en rond un vaſe attaché à une corde juſqu'à-ce que la corde, à force d'être torſe, devienne en quelque ſorte infléxible; ſi on met enſuite de l'eau dans ce vaſe, & qu'après avoir laiſſé prendre à l'eau & au vaſe l'état de repos, on donne à la corde la liberté de ſe détortiller, le vaſe acquérera par ce moyen un mouvement qui ſe conſervera très long temps: au commencement de ce mouvement la ſuperficie de l'eau contenue dans le vaſe reſtera plane, ainſi qu'elle l'étoit avant que la corde ſe détortillât; mais enſuite le mouvement du vaſe ſe communiquant peu à peu à l'eau qu'il contient, cette eau commencera à tourner, à s'élever vers les bords, & à devenir concave, comme je l'ai éprouvé, & ſon mouvement s'augmentant, les bords de cette eau s'éléveront de plus en plus, juſqu'à-ce que ſes révolutions s'achevant dans des temps égaux à ceux dans leſquels le vaſe fait un tour entier, l'eau sera dans un repos relatif par rapport à ce vase. L'ascension de l'eau vers les bords du vase marque l'effort qu'elle fait pour s'éloigner du centre de son mouvement, & on peut connoître & mesurer par cet effort le mouvement circulaire vrai & absolu de cette eau, lequel est entiérement contraire à son mouvement relatif; car dans le commencement où le mouvement relatif de l'eau dans le vase étoit le plus grand, ce mouvement n'excitoit en elle aucun effort pour s'éloigner de l'axe de son mouvement: l'eau ne s'élevoit point vers les bords du vase, mais elle demeuroit plane, & par conséquent elle n'avoit pas encore de mouvement circulaire vrai & absolu : lorsqu'ensuite le mouvement relatif de l'eau vint à diminuer, l'ascension de l'eau vers les bords du vase marquoit l'effort qu'elle faisoit pour s'éloigner de l'axe de son mouvement; & cet effort, qui alloit toujours en augmentant, indiquoit l'augmentation de son mouvement circulaire vrai. Enfin ce mouvement vrai fut le plus grand, lorsque l'eau fut dans un repos relatif dans le vase. L'effort que faisoit l'eau pour s'éloigner de l'axe de son mouvement, ne dépendoit donc point de sa translation du voisinage des corps ambians, & par conséquent le mouvement circulaire vrai ne peut se déterminer par de telles translations.

Le mouvement vrai circulaire de tout corps qui tourne est unique, & il répond à un seul effort qui est sa mesure naturelle & éxacte ; mais les mouvemens relatifs sont variés à l'infini ; selon toutes les relations aux corps extérieurs ; & tous ces mouvemens, qui ne sont que des relations, n'ont aucun effet réel, qu'en tant qu'ils participent du mouvement vrai & unique. De-là il suit que dans le systême de ceux qui prétendent que nos cieux tournent au-dessous des cieux des Etoiles fixes, & qu'ils emportent les Planetes par leurs mouvemens : toutes les parties des cieux, & les Planetes qui sont en repos par rapport aux cieux qui les environnent se meuvent réellement ; car elles changent leur position entre elles (au contraire de ce qui arrive aux corps qui sont dans un repos abſolu) & étant tranſportées avec les cieux qui les entourent, elles font effort, ainſi que les parties des touts qui tournent, pour s'éloigner de l'axe du mouvement.

Les quantités relatives ne ſont donc pas les véritables quantités dont elles portent le nom, mais ce ſont les meſures ſenſibles, (éxactes ou non éxactes) que l'on employe ordinairement pour les meſurer. Or comme la ſignification des mots doit répondre à l'uſage qu'on en fait, on auroit tort ſi on entendoit par les mots de *temps*, d'*eſpace*, de *lieu* & de *mouvement*, autre choſe que les meſures ſenſibles de ces quantités, excepté dans le langage purement mathématique. Lorſqu'on trouve donc ces termes dans l'Ecriture, ce ſeroit faire violence au texte ſacré, ſi au lieu de les prendre pour les quantités qui leur ſervent de meſures ſenſibles, on les prenoit pour les véritables quantités abſolues, ce ſeroit de même aller contre le but de la Philoſophie & des Mathématiques, de confondre ces mêmes meſures ſenſibles ou quantités relatives avec les quantités abſolues qu'elles meſurent.

Il faut avouer qu'il eſt très difficile de connoître les mouvemens vrais de chaque corps, & de les diſtinguer actuellement des mouvemens apparens, parce que les parties de l'eſpace immobile dans leſquelles s'éxécutent les mouvemens vrais, ne tombent pas ſous nos ſens. Cependant il ne faut pas en déſeſpérer entiérement; car on peut ſe ſervir, pour y parvenir, tant des mouvemens apparens, qui ſont les différences des mouvemens vrais, que des forces qui ſont les cauſes & les effets des mouvemens vrais. Si, par éxemple, deux globes attachés l'un à l'autre par le moyen d'un fil de longueur donnée viennent à tourner autour de leur centre commun de gravité, la tenſion du fil fera connoître l'effort qu'ils font pour s'écarter du centre du mouvement, & donnera par ce moyen la quantité du mouvement circulaire. Enſuite, ſi en frappant ces deux globes en même-temps, dans des ſens oppoſés, & avec des forces égales, on augmente ou on diminue le mouvement circulaire, on connoîtra par l'augmentation ou la diminution de la tenſion du fil, l'augmentation ou la diminution du mouvement; & enfin on trouvera par ce moyen les côtés de ces globes où les forces doivent être imprimées pour augmenter le plus qu'il eſt poſſible le mouvement, c'eſt-à-dire, les côtés qui ſe meuvent parallélement au fil, & qui ſuivent ſon mouvement; connoiſſant donc ces côtés & leurs oppoſés qui précédent le mouvement du fil, on aura la détermination du mouvement.

On parviendroit de même à connoître la quantité & la détermination de ce mouvement circulaire dans un vuide quelconque immenſe, où il n'y auroit rien d'extérieur ni de ſenſible à quoi on pût rapporter le mouvement de ces globes.

Si dans cet eſpace il ſe trouvoit quelques autres corps très éloignés qui conſervaſſent toujours entr'eux une poſition donnée, tels que ſont les étoiles fixes, on ne pourroit ſçavoir par la tranſlation relative des globes, par rapport à ces corps, s'il faudroit attribuer le mouvement aux globes, ou s'il le faudroit ſuppoſer dans ces corps; mais ſi en faiſant attention au fil qui joint les globes, on trouvoit ſa tenſion telle que le mouvement des globes le requiert; alors non-ſeulement on verroit avec certitude que ce ſont les globes qui ſe meuvent, & que les autres corps ſont en repos; mais on auroit la détermination du mouvement de ces globes par leurs tranſlations relatives à l'égard des corps.

On fera voir plus amplement dans la ſuite comment les mouvemens vrais peuvent ſe connoître par leurs cauſes, leurs effets, & leurs différences apparentes, & comment on peut connoître au contraire par les mouvemens vrais ou apparens leurs cauſes & leurs effets, & c'eſt principalement dans cette vûe qu'on a compoſé cet Ouvrage.

AXIOMES,
OU
LOIX DU MOUVEMENT.

PREMIERE LOI.

Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, & ne le contraigne à changer d'état.

Les projectiles par eux-mêmes persévérent dans leurs mouvemens, mais la résistance de l'air les retarde, & la force de la gravité les porte vers la terre. Une toupie, dont les parties se détournent continuellement les unes les autres de la ligne droite par leur cohérence réciproque, ne cesse de tourner, que parceque la résistance de l'air la retarde peu à peu. Les planettes & les cométes qui sont de plus grandes masses, & qui se meuvent dans des espaces moins résistans, conservent plus long-temps leurs mouvemens progressifs & circulaires.

Axiomes, ou Loix du Mouvement.

II. LOI.

Les changemens qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice, & se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée.

Si une force produit un mouvement quelconque, une force double de cette premiere produira un mouvement double, & une force triple un mouvement triple, soit qu'elle ait été imprimée en un seul coup, soit qu'elle l'ait été peu à peu & successivement, & ce mouvement, étant toujours déterminé du même côté que la force génératrice, sera ajoûté au mouvement que le corps est ſuppoſé avoir déja, s'il conſpire avec lui ; ou en ſera retranché, s'il lui eſt contraire, ou bien ſera retranché ou ajoûté en partie, s'il lui eſt oblique ; & de ces deux mouvemens il s'en formera un ſeul, dont la détermination ſera compoſée des deux premieres.

III. LOI.

L'action eſt toujours égale & oppoſée à la réaction ; c'eſt-à-dire, que les actions de deux corps l'un ſur l'autre ſont toujours égales, & dans des directions contraires.

Tout corps qui preſſe ou tire un autre corps eſt en même-temps tiré ou preſſé lui-même par cet autre corps. Si on preſſe une pierre avec le doigt, le doigt eſt preſſé en même-temps par la pierre. Si un cheval tire une pierre par le moyen d'une corde, il eſt également tiré par la pierre : car la corde qui les joint & qui eſt tendue des deux côtés, fait un effort égal pour tirer la pierre vers le cheval, & le cheval vers la pierre ; & cet effort s'oppoſe autant au mouvement de l'un, qu'il excite le mouvement de l'autre.

Si un corps en frappe un autre, & qu'il change ſon mouvement, de quelque façon que ce ſoit, le mouvement du corps choquant ſera auſſi changé de la même quantité & dans une direction contraire par la force du corps choqué, à cauſe de l'égalité de leur preſſion mutuelle.

Par ces actions mutuelles, il ſe fait des changemens égaux, non pas de vîteſſe, mais de mouvement, pourvû qu'il ne s'y mêle aucune cauſe étrangere ; car les changemens de vîteſſe qui ſe font de la même maniére dans des directions contraires doivent être réciproquement proportionnels aux maſſes, à cauſe que les changemens de mouvement ſont égaux. Cette loi a lieu auſſi dans les attractions, comme je le prouverai dans le ſcholie ſuivant.

COROLLAIRE I.

Un corps poussé par deux forces parcourt, par leurs actions réunies, la Diagonale d'un parallélogramme dans le même temps, dans lequel il auroit parcouru ses côtés séparément.

Si le corps, pendant un temps donné, eut été transporté de *A* en *B*, d'un mouvement uniforme par la seule force *M* imprimée en *A*; & que par la seule force *N*, imprimée dans le même lieu *A*, il eut été transporté de *A* en *C*, le corps par ces deux forces réunies sera transporté dans le même temps dans la diagonale *AD* du parallélogramme *ABCD*; car puisque la force *N* agit selon la ligne *AC* parallele à *BD*, cette force, selon la seconde loi du mouvement, ne changera rien à la vîtesse avec laquelle ce corps s'approche de cette ligne *BD*, par l'autre force *M*. Le corps s'approchera donc de la ligne *BD* dans le même temps, soit que la force *N* lui soit imprimée, soit qu'elle ne le soit pas; ainsi à la fin de ce temps il sera dans quelque point de cette ligne *BD*. On prouvera de la même maniére qu'à la fin de ce même temps le corps sera dans un point quelconque de la ligne *CD*. Donc il sera nécessairement dans le point d'intersection *D* de ces deux lignes, & par la premiere loi il ira d'un mouvement rectiligne de *A* en *D*. Fig. 1.

COROLLAIRE II.

D'où l'on voit qu'une force directe AD *est composée des forces obliques quelconques* AB *&* BD, *& réciproquement qu'elle peut toujours se résoudre dans les forces obliques quelconques* AB *&* BD. *Cette résolution & cette composition des forces se trouve confirmée à tout moment dans la méchanique.*

Supposons que du centre *O* d'une rouë partent des rayons inégaux *OM*, *ON*, qui soutiennent par des fils *MA*, *NP* des poids *A* & *P*, & qu'on cherche les forces de ces poids pour faire tourner cette rouë. Fig. 2.

On menera d'abord par le centre *O* la droite *KOL* perpendiculaire en *K* & en *L* aux fils *MA*, *NP*, & du centre *O* & de l'intervalle *OL*, le plus grand des intervalles *OK*, *OL* on décrira un cercle. On tirera ensuite par le centre *O*, & par l'intersection *D* de ce cercle avec le fil *MA* la droite *O D* à laquelle on menera par *A* la parallele *AC*, terminée en *C* par la droite *DC*, qui lui est perpendiculaire. Cela posé, comme il est indifférent que les points K, *L*, *D*, des fils soient attachés ou non au plan de la rouë, les poids feront le même effet, soit qu'ils soient attachés aux points *K* & *L*, soit qu'ils soient attachés aux points *D* & *L*.

Fig. 2.

Soit donc exprimée la force totale du corps *A* par la ligne *AD*, & soit cette force décomposée dans les deux forces *AC*, & *CD*, la premiere *AC* tirant le rayon *OD* dans sa direction, ne contribue point au mouvement de la rouë; mais la seconde *DC* tirant le rayon *OD* perpendiculairemeut, fait le même effet que si elle tiroit perpendiculairement le rayon *OL* égal à *OD*, c'est-à-dire qu'elle sera équivalente au poids *P*, pourvû que ce poids soit au poids *A*, comme la force *DC* est à la force *DA*, ou, ce qui revient au même (à cause des triangles semblables *ADC*, *DOK*) comme *OK* à *OD* ou *OL*: Donc si les poids *A* & *P* sont pris dans la raison renversée des rayons *OK*, *OL*, ausquels ils sont appliqués, ils seront en équilibre, ce qui est la propriété si connue du levier, de la balance, & du treüil. Si l'un des poids est à l'autre dans une plus grande raison, sa force en sera d'autant plus grande pour mouvoir la rouë.

Supposons présentement que le poids *p* égal au poids *P*, soit en partie soutenu par le fil *Np*, & en partie par le plan *p G*, on menera *p H* & *NH*, la premiere perpendiculaire à l'horison, & l'autre au plan *p G*, & prenant *p H* pour exprimer la force avec laquelle le corps *p* tend en en bas, on décomposera cette force dans les deux *p H* & *NH*. Imaginant ensuite que le poids *p*, au lieu d'être attaché au fil *Np*, fut arrêté par un plan *p Q* perpendiculaire à la direction *Np*, & coupant le plan *p G*, dans une ligne parallele à l'horiſon, il eſt clair que les forces avec leſquelles le corps preſſeroit les plans pQ, pG, qui le retiendroient dans cette ſuppoſition, ſeroient exprimées, la premiere par pN, & la ſeconde par HN. Donc en ſupprimant le plan pQ, & laiſſant le fil Np qui fait abſolument le même effet, la tenſion de ce fil ſera la même force pN avec laquelle le plan pQ étoit preſſé.

Ainſi la tenſion du fil, lorſqu'il eſt dans la ſituation oblique pN, eſt à la tenſion du même fil, lorſqu'il a, comme dans le cas précédent, la ſituation perpendiculaire PN, comme pN à pH. C'eſt pourquoi ſi le poids p eſt au poids A dans la raiſon compoſée de la raiſon réciproque des moindres diſtances du centre de la rouë aux fils pN & AM, & de la raiſon directe de pH à pN; ces poids auront une égale force pour faire mouvoir la rouë, & ſeront par conſéquent en équilibre, ce dont tout le monde peut reconnoître la vérité. Fig. 1

Le poids p, en s'appuyant ſur ces deux plans obliques, eſt dans le même cas qu'un coin entre les deux ſurfaces internes du corps qu'il fend: & on peut connoître par-là les forces du coin & du marteau: puiſqu'en effet la force avec laquelle le corps p, preſſe le plan pQ, eſt à la force avec laquelle ce même corps eſt pouſſé vers ces plans, ſuivant la ligne perpendiculaire pH, par la force de ſa gravité ou par les coups du marteau, comme pN à pH; & à la force par laquelle il preſſe l'autre plan pG, comme pN à HN.

On peut par une ſemblable décompoſition des forces trouver la force de la vis; car la vis n'eſt autre choſe qu'un coin mû par un levier, ce qui fait voir la fécondité de ce Corollaire, & fournit de nouvelles preuves de ſa vérité; il peut ſervir de baſe à toute la méchanique dans laquelle on a employé juſqu'à préſent tant de différens principes.

On en tire aiſément, par éxemple, les forces de toutes les machines compoſées de rouës, de tambours, de poulies, de leviers, de cordes tendues, de poids montans directement ou obliquement,

& enfin de toutes les puiſſances dont les machines ſont ordinairement compoſées ; on en tireroit auſſi les forces néceſſaires aux tendons pour mouvoir les membres des animaux.

COROLLAIRE III.

La quantité de mouvement, qui réſulte de la ſomme de tous les mouvemens vers le même côté, & de leurs différences vers des côtés oppoſés, ne change point par l'action des corps entr'eux.

L'action & la réaction ſont égales, ſuivant la troiſiéme loi; donc par la ſeconde elles produiſent dans les mouvemens des changemens égaux dans des directions oppoſées. Donc ſi les mouvemens ſe font du même côté; ce qui ſera ajoûté au mouvement du corps chaſſé, doit être ôté du mouvement de celui qui le ſuit, enſorte que la ſomme des mouvemens demeure la même qu'auparavant. Si les corps viennent de deux côtés oppoſés, il faudra retrancher également du mouvement de ces deux corps, & par conſéquent la différence des mouvemens vers des côtés oppoſés demeurera toujours la même.

Suppoſons, par éxemple, que la boule *A* ſoit triple de la boule *B*, & qu'elle ait deux parties de vîteſſe, & que *B* la ſuive dans la même ligne droite avec 10 parties de vîteſſe, le mouvement du corps *A* ſera à celui du corps *B*, comme 6 à 10: Prenant donc 6 & 10 pour exprimer les quantités de mouvement de ces corps, 16 ſera la ſomme de leurs mouvemens.

Lorſque ces corps viendront à ſe rencontrer, ſi le corps *A* gagne 3, 4 ou 5 parties de mouvement, le corps *B* en perdra autant, enſorte que le corps *A*, après la réfléxion continuant ſon chemin avec 9, 10 ou 11 parties de mouvement, le corps *B*, ira avec 7, 6 ou 5, & la ſomme ſera toujours de 16 parties comme auparavant. Si le corps *A* gagne 9, 10, 11 ou 12 parties, & qu'il pourſuive par conſéquent ſon chemin après le choc avec 15, 16, 17 ou 18 parties de mouvement; le corps *B* perdant tout ce que le corps *A* gagne, continuera de ſe mouvoir vers le même côté avec une partie de mouvement, après en avoir perdu 9, ou il restera en repos, ayant perdu les 10 parties de mouvement progressif qu'il avoit, ou il retournera vers le côté opposé avec un degré de mouvement, après avoir perdu tout ce qu'il avoit & même une partie de plus (si je puis m'exprimer ainsi), ou bien enfin il retournera vers le côté opposé avec deux parties de mouvement, après avoir perdu 12 parties de son mouvement progressif. Ainsi les sommes des mouvemens conspirans 15+1 ou 16+0, & les différences des mouvemens opposés 17−1 & 18−2, seront toujours 16 parties comme avant le choc & la réfléxion: Connoissant donc la quantité de mouvement avec laquelle les corps se meuvent après la réfléxion, on trouvera la vîtesse de chacun, en supposant que cette vîtesse soit à la vîtesse avant la réfléxion, comme le mouvement après la réfléxion est au mouvement avant la réfléxion. Ainsi dans le dernier cas, où le corps *A* avoit 6 parties de mouvement avant la réfléxion, & 18 après, & 2 de vîtesse avant la réflexion; ou trouveroit que la vîtesse après la téfléxion seroit 6, en disant, comme 6 parties de mouvement avant la réfléxion, sont à 18 parties après la réfléxion; ainsi 2 de vîtesse avant la réfléxion sont à 6 de vîtesseaprès la réfléxion.

Si les corps n'étoient pas sphériques, ou que se mouvant suivant diverses lignes droites, ils vinssent à se choquer obliquement, pour trouver leur mouvement après la réfléxion; il faudra commencer par connoître la situation du plan qui touche tous les corps choquans au point de concours: Ensuite (par le Cor. 2.) on décomposera le mouvement de chaque corps en deux mouvemens, l'un perpendiculaire & l'autre parallele à ce plan tangent: & comme les corps n'agissent les uns sur les autres que selon la ligne perpendiculaire au plan tangent, les mouvemens paralleles seront les mêmes après & avant la réfléxion; & les mouvemens perpendiculaires éprouveront des changemens égaux vers les côtés opposés; ensorte que la somme des mouvemens conspirans & la différence des mouvemens opposés, resteront toujours les mêmes qu'auparavant. C'eſt de ces ſortes de réfléxions que viennent ordinairement les mouvemens circulaires des corps autour de leurs centres; mais je ne conſidérerai point ces cas dans la ſuite, parce qu'il ſeroit trop long de démontrer tout ce qui y a rapport.

COROLLAIRE IV.

Le centre commun de gravité de deux corps ou de pluſieurs corps ne change point ſon état de mouvement ou de repos, par l'action réciproque de ces corps; ainſi le centre commun de gravité de tous les corps qui agiſſent les uns ſur les autres (ſuppoſé qu'il n'y ait aucune action ni aucun obſtacle extérieur) eſt toujours en repos, ou ſe meut uniformément en ligne droite.

Car, ſi deux points ſe meuvent uniformément en ligne droite, & que leur diſtance ſoit diviſée en raiſon donnée, le point de diviſion ſera en repos, ou il ſe mouvera uniformément en ligne droite. C'eſt ce qu'on trouvera démontré ci-après dans le Lemme 23 & dans ſon Corollaire, pour le cas où les deux points ſe meuvent dans le même plan; & ce qui ſe démontre facilement par la même méthode pour le cas où les deux points ſeroient dans des plans différens. Donc, ſi des corps quelconques ſe meuvent uniformément en ligne droite, le commun centre de gravité de deux de ces corps, ou ſera en repos, ou ſe mouvera uniformément en ligne droite; parce que la ligne, qui joint les centres de ces corps, ſera diviſée par leur centre commun de gravité dans une raiſon donnée. De même le commun centre de gravité de ces deux corps & d'un troiſiéme, ſera en repos ou ſe mouvera uniformément en ligne droite; à cauſe que la ligne qui joint le centre commun de gravité de ces deux corps, & le centre du troiſiéme ſera encore diviſée par le commun centre de gravité de ces trois corps en raiſon donnée. Enfin le commun centre de gravité de ces trois corps & d'un quatriéme quelconque ſera en repos ou ſera mû uniformément en ligne droite; parce que la ligne qui joint le centre commun de gravité de ces trois corps, & le centre du quatriéme ſera

diviſée

divisée par le centre commun de gravité de ces quatre corps en raison donnée & ainsi à l'infini. Donc dans un systême de corps, dont les actions réciproques les uns sur les autres ne sont point troublées par aucune action ou empêchement externe, & dont par conséquent chacun se meut uniformément en ligne droite, le commun centre de gravité de tous ces corps sera en repos ou sera mû uniformément en ligne droite.

De plus, dans un systême composé de deux corps qui agissent l'un sur l'autre, les distances des centres de chacun de ces corps à leur commun centre de gravité étant en raison réciproque de la masse de ces corps; les mouvemens relatifs de ces corps, pour s'éloigner ou pour s'approcher de ce centre commun de gravité, seront égaux entr'eux. Donc, ni les changemens égaux qui se font dans le mouvement de ces corps en sens contraire, ni par conséquent leur action mutuelle l'un sur l'autre, ne changeront rien à l'état de leur centre commun de gravité qui ne sera ni accéléré ni retardé, & qui ne recevra enfin aucune altération dans son état de mouvement ou de repos.

Puisque dans un systême de plusieurs corps, le centre de gravité de deux quelconques de ces corps qui agissent l'un sur l'autre, ne change point d'état par cette action; & que le commun centre de gravité des autres, avec lesquels cette action n'a aucun rapport, n'en souffre aucune altération; la distance de ces deux centres sera divisée par le centre commun de tous ces corps dans des parties réciproquement proportionnelles aux sommes totales des corps dont ils sont les centres; & par conséquent ces deux centres conservant leur état de repos ou de mouvement, le centre commun de tous ces corps conservera aussi le sien; car il est clair que le centre commun de tous ces corps ne changera point son état de repos ou de mouvement par les actions de deux quelconques de ces corps entr'eux.

Or, dans un tel systême, toutes les actions des corps les uns sur les autres, ou sont éxercées entre deux corps, ou sont composées d'actions entre deux corps ; & par conséquent elles ne produisent aucun changement dans l'état de repos ou de mouvement du centre commun de tous ces corps. C'est pourquoi comme ce centre est en repos, ou qu'il se meut uniformément en ligne droite, lorsque les corps n'agissent point les uns sur les autres ; il continuera de même, malgré l'action réciproque de ces corps, à être en repos, ou à se mouvoir uniformément en ligne droite, pourvû qu'il ne soit point tiré de son état par des forces étrangeres.

La loi d'un systême de plusieurs corps est donc la même que celle d'un corps seul, quant à la permanence dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite où ils se trouvent. Et le mouvement progressif d'un corps ou d'un systême de corps, doit toujours s'estimer par le mouvement de leur centre de gravité.

COROLLAIRE V.

Les mouvemens des corps enfermés dans un espace quelconque sont les mêmes entr'eux, soit que cet espace soit en repos, soit qu'il se meuve uniformément en ligne droite sans mouvement circulaire.

Car les différences des mouvemens qui tendent vers le même côté, & les sommes de ceux qui tendent vers des côtés opposés, sont les mêmes au commencement du mouvement dans l'un & l'autre cas (par l'hypothèse,) mais c'est de ces sommes ou de ces différences qu'on tire l'effort avec lequel les corps se choquent mutuellement : Donc par la seconde loi les effets du choc seront les mêmes dans ces deux cas ; & par conséquent les mouvemens de ces corps entr'eux, dans un de ces cas, demeureront égaux à leurs mouvemens entr'eux dans l'autre cas, ce que l'expérience confirme tous les jours. Car les mouvemens qui se font dans un vaisseau sont les mêmes entr'eux, soit que le vaisseau marche uniformément en ligne droite, soit qu'il soit en repos.

COROLLAIRE VI.

Si des corps se meuvent entr'eux d'une façon quelconque, & qu'ils soient poussés par des forces accélératrices égales, & qui agissent sur eux, suivant des lignes paralleles, ils continueront à se mouvoir entr'eux de la même maniere que si ces forces ne leur avoient pas été imprimées.

Car ces forces agissant également (par rapport à la quantité de matiére des corps à mouvoir) & suivant des lignes paralleles, elles feront mouvoir tous ces corps avec des vîtesses égales par la seconde loi. Ainsi elles ne changeront point les positions & les mouvemens de ces corps entr'eux.

SCHOLIE.

Les principes que j'ai expliqué jusqu'à présent sont reçus de tous les Mathématiciens, & confirmés par une infinité d'expériences. Les deux premieres loix du mouvement & les deux premiers Corollaires ont fait découvrir à *Galilée* que la descente des graves est en raison doublée du temps, & que les Projectiles décrivent une Parabole; ce qui est conforme à l'expérience, si on fait abstraction de la résistance de l'air qui retarde un peu tous ces mouvemens.

La gravité étant uniforme, elle agit également à chaque particule égale de temps, ainsi elle imprime au corps qui tombe des vîtesses & des forces égales : & dans le temps total elle lui imprime une force totale & une vîtesse totale proportionnelle au temps. Mais les espaces décrits dans des temps proportionnels, sont comme les vîtesses & les temps conjointement; c'est-à-dire, en raison doublée des temps. Donc, lorsque les corps sont jettés en enhaut, la gravité leur imprime des forces & leur ôte des vîtesses proportionnelles au temps. Ainsi les temps que ces corps mettent à monter à la plus grande hauteur, sont comme les vîtesses que la gravité leur fait perdre, & ces hauteurs sont comme les temps multipliés par les vîtesses, ou en raison doublée des vîtesses. Le mouvement d'un corps jetté suivant une ligne droite quelconque, eſt donc compoſé du mouvement de projection & du mouvement que la gravité lui imprime. Enſorte que ſi le corps *A*, par le ſeul mouvement de projection peut décrire dans un temps donné la droite *A B*, & que par le ſeul mouvement qui le porte vers la terre, il puiſſe décrire la ligne *A C* dans le même temps : en achevant le Parallélogramme *A B C D*, ce corps, par un mouvement compoſé, ſera à la fin de ce temps au lieu *D*; & la courbe *A E D* qu'il décrira ſera une Parabole que la droite *A B* touchera au point *A*, & dont l'ordonnée *B D* ſera proportionnelle à AB^2.

Fig. 3.

C'eſt ſur ces mêmes loix & ſur leurs corollaires qu'eſt fondée la théorie des oſcillations des Pendules, vérifiée tous les jours par l'expérience. Par ces mêmes loix le Chevalier *Chriſtophe Wrenn*, *J. Wallis* S. T. D. & *Chrétien Hugens*, qui ſont ſans contredit les premiers Géométres des derniers temps ont découvert, chacun de leur côté, les loix du choc & de la réfléxion des corps durs; ils communiquerent preſqu'en même temps leurs découvertes à la Société Royale; ces découvertes s'accordent parfaitement ſur ce qui concerne ces loix: *Wallis* fut le premier qui en fit part à la Société Royale; enſuite *Wrenn*, & enfin *Hugens*; mais ce fut *Wrenn* qui les confirma par des Expériences faites avec des Pendules devant la Société Royale: leſquelles le célébre *Mariotte* a rapportées depuis dans un Traité qu'il a compoſé exprès ſur cette matiere.

Pour que cette théorie s'accorde parfaitement avec l'expérience; il faut faire attention, tant à la réſiſtance de l'air, qu'à la force élaſtique des corps qui ſe choquent. Soient *A* & *B* des corps ſphériques ſuſpendus à des fils paralleles & égaux, *A C*, *B D*, attachés aux centres *C* & *D*, & ſoient décrits autour de ces points comme centre, & des intervalles *AC*, *BD*, les demi-cercles *E A F*, *G B H* ſéparés chacun en deux parties égales par les rayons *A C*, *B D*. Si on éleve le corps *A* juſqu'au point quelconque *R* de l'arc *E A F*, & qu'ayant ôté le corps *B*, on laiſſe tomber le corps *A*, & que ce corps, après une oſcillation, revienne au point *V*, *R V*,

Fig. 4.

ſera le retardement cauſé par la réſiſtance de l'air. Si on prend alors ST égale à la quatriéme partie de RV, & placée en telle ſorte que $RS = VT$, ST exprimera à peu près le retardement que le corps A éprouve en deſcendant de S vers A.

Qu'on remette préſentement le corps B à ſa place, & qu'on laiſſe tomber le corps A, du point S, ſa vîteſſe au point A où il doit ſe réfléchir, ſera la même, ſans erreur ſenſible, que s'il tomboit du point T dans le vuide. Cette vîteſſe ſera donc exprimée par la corde de l'arc TA; car c'eſt une propoſition connue de tous lès Géométres, que la vîteſſe d'un corps ſuſpendu par un fil eſt au point le plus bas de ſa chute, comme la corde de l'arc qu'il a parcouru en tombant.

Suppoſons que le corps A parvienne après la réfléxion en s, & le corps B en k, qu'on ôte encore le corps B, & qu'on trouve le lieu v duquel laiſſant tomber le corps A, ils reviennent après une oſcillation au lieu r, de plus que st ſoit la quatriéme partie de rv placée en telle ſorte que $rs = tv$, tA exprimera la vîteſſe que le corps A avoit en A l'inſtant d'après la réfléxion. Car t ſera le lieu vrai & corrigé auquel le corps A devroit remonter, ſi l'on faiſoit abſtraction de la réſiſtance de l'air. On corrigera par la même méthode le lieu k, auquel le corps B remonte; & on trouverà le lieu l auquel il auroit dû remonter dans le vuide, & par ce moyen on fera ces expériences auſſi éxactement dans l'air que dans le vuide. Enfin pour avoir le mouvement du corps A, au lieu A, immédiatement avant la réfléxion, il faudra multiplier le corps A, ſi je puis m'exprimer ainſi, par la corde de l'arc TA, qui exprime ſa vîteſſe; enſuite il faut le multiplier par la corde de l'arc tA, pour avoir ſon mouvement au lieu A, immédiatement après la réfléxion. De même, il faudra multiplier le corps B, par la corde de l'arc Bl, pour avoir ſon mouvement immédiatement après la réfléxion.

Par la même méthode, lorſque les deux corps tomberont en même temps de deux hauteurs différentes, on trouvera le mouvement de l'un & de l'autre, tant avant qu'après la réfléxion ; & l'on pourra toujours, par ce moyen, comparer ces mouvemens entr'eux, & en conclure les effets de la réfléxion.

Suivant cette méthode, dans les expériences que j'ai fait avec des Pendules de 10 pieds de long ausquels j'avois suspendu tantôt des corps égaux, tantôt des corps inégaux, & que j'avois fait se choquer en tombant de très haut, comme de 8, 12 & 16 pieds, j'ai toujours trouvé, à des différences près, lesquelles étoient moindres que trois pouces dans les mesures, que lorsque les corps se rencontroient directement, les changemens de mouvement vers les points opposés étoient toujours égaux, & que par conséquent la réaction étoit toujours égale à l'action. Lorsque le corps *A*, par éxemple, ayant 9 parties de mouvement venoit à choquer le corps *B* en repos, & qu'après avoir perdu 7 parties de mouvement, il continuoit après la réfléxion à se mouvoir avec deux parties, le corps *B* rejaillissoit avec ces 7 parties.

Si les deux corps alloient l'un vers l'autre, *A* avec 12 parties de mouvement & *B* avec 6, & qu'après le choc *A* s'en retournât avec 2 parties, *B* s'en retournoit avec 8, & il y avoit 14 parties de détruites de chaque côté. Car si du mouvement de *A* on en ôte d'abord 12 parties, il ne lui reste rien : si on ôte ensuite 2 autres parties, il en naît deux parties de mouvement en sens contraire : de même en ôtant 14 parties du mouvement du corps *B*, il en naît 8 parties vers le côté opposé.

Lorsque les deux corps alloient vers le même côté, *A* plus vîte avec 14 parties de mouvement, & *B* plus lentement avec 5 parties, & qu'après la réfléxion le corps *A* continuoit de se mouvoir avec 5 parties, le corps *B* continuoit alors à se mouvoir avec 14 parties, ensorte qu'il avoit acquis les neuf parties que le corps *A* avoit perdu ; il en étoit de même dans tous les autres cas. La quantité de mouvement n'étoit jamais changée par le choc, elle se retrouvoit toujours ou dans la somme des mouvemens conspirans ou dans la différence des mouvemens opposés ; & j'ai attribué les erreurs d'un ou deux pouces que j'ai trouvé dans les mesures à la difficulté de prendre ces mesures avec assez d'exactitude; car il étoit difficile de faire tomber les Pendules dans le même instant, ensorte que les corps se rencontrassent dans le lieu le plus bas *AB*; & de marquer exactement les lieux *s* & *k* ausquels les corps remontoient après le choc; & il pouvoit encore s'y mêler d'autres causes d'erreur, comme l'inégale densité des parties des corps suspendus, leur différente texture, &c.

Et afin qu'on ne m'objecte pas que la loi que j'ai voulu prouver par ces Expériences suppose les corps ou parfaitement durs, ou parfaitement élastiques, & que nous ne connoissons point de tels corps, j'ajouterai que ces Expériences réussissent aussi-bien sur les corps mols que sur les corps durs, & que par conséquent la vérité de ce principe ne dépend point de la dureté des corps; car si on veut l'appliquer aux cas où les corps ne sont pas parfaitement durs, il faudra seulement diminuer la réfléxion dans une certaine proportion relative à la quantité de la force élastique.

Dans la théorie de *Wrenn* & d'*Hugens*, les corps absolument durs, après s'être choqués, s'éloignent l'un de l'autre avec la même vîtesse qu'ils avoient dans le choc. On peut l'assurer avec encore plus de certitude des corps parfaitement élastiques. Dans les corps qui ne sont pas parfaitement élastiques, la vîtesse avec laquelle ils s'en retournent après le choc, doit être diminuée relativement à la force élastique; & parce que cette force (pourvû que les parties des corps ne soient point altérées par la collision, ou qu'elles ne souffrent point d'extension comme celle que cause le marteau) est constante & déterminée, ainsi que je l'ai remarqué; elle fait que les corps rejaillissent avec une vîtesse relative qui est à la vîtesse qu'ils avoient avant le choc dans une raison donnée.

Je fis aussi cette expérience avec des pelottes de laine très serrées. Je commençai par déterminer la quantité de la force élastique, en faisant tomber les Pendules & en mesurant la réfléxion :

AXIOMES, OU LOIX DU MOUVEMENT.

& ensuite connoissant cette force, j'en conclus les réfléxions pour d'autres cas, & je trouvai que les expériences y répondoient. Les pelottes s'éloignoient toujours l'une de l'autre après le choc avec une vîtesse relative, qui étoit à leur vîtesse relative dans le choc, comme 5 à 9 environ. Les boules d'acier rejaillissoient à peu près avec leur même vîtesse : les boules de liége rejaillissoient avec une vîtesse un peu moindre ; & dans les boules de verre ces vîtesses étoient à peu près comme 15 à 16. ainsi la troisieme loi se trouve confirmée dans le choc & dans la réfléxion des corps par la théorie, & la théorie, l'est par l'expérience. Je vais faire voir qu'elle l'est aussi dans les attractions.

Imaginez entre les deux corps *A* & *B* un obstacle quelconque qui les empéche de se joindre. Si un de ces corps comme *A* est plus attiré vers *B*, que *B* vers *A*, l'obstacle sera plus pressé par le corps *A* que par le corps *B* ; ainsi il ne sera point en équilibre. La plus forte pression prévaudra, & il arrivera que le systême, composé de ces deux corps & de l'obstacle qui est entre deux, se mouvera en ligne droite vers *B*, & qu'il s'en ira à l'infini dans le vuide avec un mouvement continuellement accéléré, ce qui est absurde. & contraire à la premiere loi du mouvement ; car par cette premiere loi, ce systême doit persévérer dans son état de repos ou de mouvement en ligne droite ; ainsi ces deux corps doivent presser également cet obstacle, & être par conséquent tirés également l'un vers l'autre.

J'en ai fait l'expérience sur le fer & sur l'aimant. Si on pose l'aimant & le fer chacun séparément dans de petits vaisseaux sur une eau dormante, & que ces petits vaisseaux se touchent, ni l'un ni l'autre ne sera mû ; mais ils soutiendront par l'égalité de leur attraction les efforts mutuels qu'ils font l'un sur l'autre, & étans en équilibre, ils resteront en repos.

De même, la gravité entre la terre & ses parties est mutuelle ; Fig. 5. car supposé que la terre *FI* fût coupée par un plan *EG* en deux parties *EGF*, *EGI* : les poids mutuels de ces parties l'une sur l'autre, l'autre, seront égaux; car si la plus grande partie *EGI* est coupée par un autre plan *HK* parallele au premier, en deux parties *EGHK* & *HIK*, desquelles *HIK* = *EFG*: il est clair que la partie du milieu *EGHK* ne sera portée par son propre poids ni vers l'une, ni vers l'autre de ces parties, mais qu'elle restera en équilibre entr'elles.

Quant à la partie *HIK*, elle pressera de tout son poids la partie du milieu vers l'autre partie *EFG*; donc la force avec laquelle la partie *EGI*, composée des parties *HKI* & *EGHK*, tend vers la troisiéme partie *EFG*, est égale au poids de la partie *HIK*, c'est-à-dire au poids de la troisiéme partie *EFG*. Ainsi le poids de deux parties *EGI*, *EFG*, l'une sur l'autre est égal, ce que je voulois prouver. Et si ces poids n'étoient pas égaux, toute la terre qui nage librement dans l'éther céderoit au plus grand de ces poids, & s'en iroit à l'infini.

De même que les corps qui se choquent se font équilibre, quand leurs vîtesses sont réciproquement comme leurs forces d'inertie (*ut vires insitæ* :) les puissances qui agissent dans la méchanique se contrebalancent & détruisent leurs efforts mutuels, quand leurs vîtesses dans la direction des forces sont réciproquement comme ces forces. Ainsi des poids attachés aux bras d'une balance font des efforts égaux pour la mouvoir, lorsque ces poids sont réciproquement comme les vîtesses qu'auroient les bras de la balance en haut & en bas, si elle venoit à osciller; c'est-à-dire, que ces poids sont en équilibre, lorsque les bras de la balance montent & descendent perpendiculairement, s'ils sont entr'eux réciproquement comme la distance du point de suspension au fléau de la balance; & si les bras de la balance montent & descendent obliquement, soit qu'ils soient soutenus par des plans obliques, ou que quelqu'autre obstacle les empêche de monter & de descendre perpendiculairement, les poids seront en équilibre, lorsqu'ils seront entr'eux réciproquement, comme l'ascension & la descension perpendiculaire des bras de la balance; parce-

AXIOMES, OU LOIX DU MOUVEMENT.

que la force de la gravité eſt toujours dirigée perpendiculairement vers la terre.

De même, dans la poulie ou dans le mouffle, ſi la force de la main qui tire la corde directement, eſt au poids qui monte directement ou obliquement, comme la vîteſſe de ſon aſcenſion perpendiculaire à la vîteſſe de la main qui tire la corde, il y aura équilibre.

Dans les Horloges & les autres machines dont la conſtruction dépend du jeu de pluſieurs rouës, les forces contraires qui ſont des efforts pour les mouvoir & pour les retenir, ſe contrebalanceront mutuellement, ſi elles ſont entr'elles réciproquement comme les vîteſſes des parties des rouës auſquelles elles ſont imprimées.

La force de la vis pour preſſer un corps eſt à la force de la main qui tourne la manivelle, comme la vîteſſe circulaire de la manivelle dans la partie où la main la fait tourner, eſt à la vîteſſe progreſſive de la vis vers le corps qu'elle preſſe.

Les forces avec leſquelles le coin preſſe les deux côtés du bois qu'il fend, ſont à la force avec laquelle le marteau frappe le coin, comme le chemin que fait le coin dans la direction de la force que lui impriment les coups du marteau, eſt à la vîteſſe avec laquelle les parties du bois cedent au coin ſelon les lignes perpendiculaires aux faces du coin. Il en eſt de même dans toutes les machines dont l'efficacité conſiſte en cela ſeulement, qu'en diminuant la vîteſſe on augmente la force & réciproquement; & c'eſt par-là qu'on réſout ce Problême dans toutes les eſpeces de machines, *que le poids étant donné, la force néceſſaire pour le mouvoir eſt donnée*, ou ce qui eſt la même choſe, *que la réſiſtance étant donnée, la force néceſſaire pour la ſurmonter eſt donnée auſſi.* Car lorſque les machines ſeront conſtruites de façon que la vîteſſe de la puiſſance ſoit à celle de la réſiſtance en raiſon renverſée des forces; la puiſſance égalera la réſiſtance: & ſi on augmente la vîteſſe de la puiſſance, elle vaincra auſſitôt la réſiſtance.

Si la diſparité des vîteſſes eſt aſſez grande pour vaincre toute espéce de résistance, tant celle qu'oppose la pesanteur des corps qu'on veut élever, que celle qui vient de la cohésion des corps qu'on veut séparer, & que celle qui est produite par le frottement des corps qui glissent les uns sur les autres, la force restante produira une accélération de mouvement qui lui sera proportionnelle, & qui sera partagée entre les parties de la machine, & le corps résistant; mais je ne me suis pas proposé ici de donner un Traité de Méchanique, j'ai voulu montrer seulement combien la troisiéme loi du mouvement est vraie, & combien son usage est étendu; car si on estime l'action de l'agent par sa force multipliée par sa vîtesse, & qu'on estime de même la réaction du corps résistant par la vîtesse de chacune de ses parties multipliées par les forces qu'elles ont pour résister en vertu de leur cohésion, de leur attrition, de leur poids, & de leur accélération; l'action & la réaction se trouveront égales entr'elles, dans les effets de toutes les machines. Et toutes les fois qu'une action s'exécute par le moyen d'une machine, & qu'elle parvient à être imprimée dans un corps résistant, sa derniere détermination est toujours contraire à la détermination de la réaction de ce corps.

DU MOUVEMENT DES CORPS.

LIVRE PREMIER.

SECTION PREMIERE.

De la méthode des premieres & dernieres raiſons employée dans tout cet Ouvrage.

LEMME PREMIER.

Les quantités & les raiſons des quantités qui tendent continuellement à devenir égales pendant un temps fini, & qui avant la fin de ce temps approchent tellement de l'égalité, que leur différence eſt plus petite qu'aucune différence donnée, deviennent à la fin égales.

Du Mouvement des Corps.

SI on le nie, qu'on ſuppoſe qu'elles ſoient à la fin inégales, & que leur derniere différence ſoit D, puiſqu'elles ne peuvent pas approcher plus près de l'égalité que de cette différence donnée D, leur différence ne ſera donc pas plus petite que toute différence donnée, ce qui eſt contre l'hypothéſe.

LEMME II.

Si dans une figure quelconque AacE, *comprise entre les droites* Aa, AE, *& la courbe* acE, *on inscrit un nombre quelconque de Parallélogrammes* Ab, Bc, Cd, &c. *compris sous les bases égales* AB, BC, CD, *&c. & sous les côtés* Bb, Cc, Dd, *&c. parallèles au côté* Aa *de la figure ; & qu'on acheve les parallélogrammes* akbl, bLcm, cMdn, *&c. qu'on diminue ensuite la largeur de ces parallélogrammes, & qu'on augmente leur nombre à l'infini : les dernieres raisons qu'auront entr'elles la figure inscrite* AKbLcMdD, *la circonscrite* AalbmcndoE, *& la curviligne* AabcdE, *seront des raisons d'égalité.*

Car la différence de la figure inscrite & de la figure circonscrite, est la somme des parallélogrammes *Kl*, *Lm*, *Mn*, *Do*, c'est-à-dire (à cause de l'égalité de toutes les bases) que cette différence est égale au rectangle *ABla* fait sur l'une des bases *Kb* & sur la somme *Aa*, de toutes les hauteurs ; mais ce rectangle, à cause que sa largeur diminue à l'infini, deviendra plus petit qu'aucun rectangle donné. Donc (par le Lemme premier) la figure inscrite, la figure circonscrite, & à plus forte raison la figure curviligne intermédiaire seront à la fin égales. *C. Q. F. D.*

LEMME III.

Les dernieres raisons de ces mêmes figures seront encore des raisons d'égalité, quoique les bases AB, BC, CD, *&c. des parallélogrammes soient inégales, pourvû qu'elles diminuent toutes à l'infini.*

Soit AF la plus large de ces bases, & soit achevé le parallélogramme *FAaf*. Ce parallélogramme sera plus grand que la différence de la figure inscrite & de la figure circonscrite ; mais sa largeur AF diminuant à l'infini, il sera plus petit qu'aucun rectangle donné. Donc &c. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. D'où il suit que la derniere somme de tous les parallélogrammes qui s'évanouissent coïncidera dans toutes ses parties avec la figure curviligne.

Cor. 2. Et à plus forte raiſon la figure rectiligne, compriſe ſous les cordes des arcs évanouiſſans *ab*, *bc*, *cd*, &c. coïncidera à la fin avec la figure curviligne.

Cor. 3. Il en ſera de même de la figure rectiligne circonſcrite qui eſt compriſe ſous les tangentes de ces mêmes arcs.

Cor. 4. Et par conſéquent ces dernieres figures (quant à leurs périmétres *a c E*) ne ſont pas rectilignes, mais les limites curvilignes des figures rectilignes.

LEMME IV.

Si dans deux figures AacE, PprT, *on inſcrit, comme ci-deſſus, deux ſuites de parallélogrammes, dont le nombre ſoit le même, & que lorſque leurs largeurs diminuent à l'infini, les dernieres raiſons des parallélogrammes de l'une des figures aux parallélogrammes de l'autre, chacun à chacun, ſoient les mêmes ; ces deux figures* AacE, PprT *feront entr'elles dans cette même raiſon.*

Car la proportion qu'un des parallélogrammes de la premiere figure a avec celui qui lui répond dans la ſeconde, eſt la même que celle de la ſomme de tous les parallélogrammes de la premiere figure, à la ſomme de tous les parallélogrammes de la ſeconde, & par conſéquent la même que celle qui eſt entre les deux figures, en ſuppoſant toutefois, que, ſelon le Lemme 3. la raiſon de la premiere figure à la ſomme de tous les parallélogrammes qu'elle renferme, ſoit une raiſon d'égalité, auſſi-bien que celle de la ſeconde figure à la ſomme de tous les Parallélogrammes qui y ſont renfermés. *C. Q. F. D.*

Cor. D'où il ſuit, que ſi deux quantités d'un genre quelconque ſont partagées dans un même nombre de parties quelconques, & que ces parties, lorſque leur nombre augmente & que leur grandeur diminue à l'infini, ſoient entr'elles en raiſon donnée, la premiere à la premiere, la ſeconde à la ſeconde, & ainſi de ſuite : les touts ſeront entr'eux dans cette même raiſon donnée ; car ſi on repréſente les parties de ces touts par les parallélogrammes des figures de ce Lemme, les ſommes de ces parties ſeront comme les sommes des parallélogrammes ; & par conséquent, lorsque le nombre de ces parties & des Parallélogrammes augmente, & que leur grandeur diminue à l'infini, les touts seront dans la derniere raison d'un Parallélogramme à l'autre : c'est-à-dire, par l'hypothèse, dans la derniere raison d'une partie à l'autre.

LEMME V.

Tous les côtés homologues des figures semblables sont proportionnels, tant dans les figures curvilignes que dans les rectilignes, & leurs aires sont en raison doublées de ces côtés.

LEMME VI.

Si un arc de cercle quelconque ACB *donné de position, est soutenu par la corde* AB, *& qu'au point* A *placé dans le milieu de sa courbure continue, il soit touché par une droite* AD *prolongée des deux côtés, & que les points* A *&* B *s'approchent l'un de l'autre jusqu'à ce qu'ils coïncident ; l'angle* BAD, *compris sous la tangente & la corde diminuera à l'infini, & s'évanouira à la fin.*

Car si cet angle ne s'évanouissoit pas, l'arc ACB & la tangente AD contiendroient un angle rectiligne, & par conséquent la courbure au point A ne seroit point continue, ce qui est contre l'hypothèse.

LEMME VII.

Les mêmes choses étant posées, la derniere raison qu'ont entr'elles l'arc, la corde & la tangente, est la raison d'égalité.

Car pendant que le point B s'approche du point A, supposons que les lignes AB, AD soient prolongées jusqu'aux points éloignés b & d, & qu'on méne la ligne bd parallele à la sécante BD; & qu'on prenne de plus Acb toujours semblable à l'arc ACB. Lorsque les points A & B coïncideront, l'angle dAb s'évanouira par le Lemme précédent ; donc les droites Ab, Ad, qui restent toujours de grandeur finie, & l'arc intermédiaire Acb coïncideront & seront par conséquent égales. Donc les droites AB, AD, & l'arc intermédiaire ACB, qui leur sont toujours proportionnels,

nels, s'évanouiront, & auront pour derniere raiſon la raiſon d'égalité. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Ainſi, ſi par *B* on méne une droite *BF* parallele à la tangente *AD*, laquelle *BF* coupe toujours en *F* une ligne quelconque *AF* qui paſſe par *A*, la raiſon de cette droite *BF* à l'arc évanouiſſant *ACB*, ſera à la fin la raiſon d'égalité, puis qu'achevant le parallélogramme *AFBD*, cette raiſon eſt la même que celle qu'à la droite *AD* avec le même arc *ACB*. Fig. 10.

Cor. 2. Et ſi par *B* & par *A* on tire pluſieurs droites *BE*, *BD*, *AF*, *AG*, qui coupent la tangente *AD* & ſa parallele *BF*, la derniere raiſon de l'arc *AB* de la corde & de toutes les parties coupées *AD*, *AE*, *BF*, *BG* entr'elles ſera la raiſon d'égalité.

Cor. 3. Et par conſéquent toutes ces lignes pourront être priſes l'une pour l'autre dans tous les cas où l'on ſe ſervira de la méthode des premieres & dernieres raiſons.

LEMME VIII.

Si les droites données AR, BR, *l'arc* ACB, *la corde* AB, *& la tangente* AD, *forment trois triangles* RAB, RACB, RAD, *& que les points* A *&* B *s'approchent l'un de l'autre : ces triangles, qui s'évanouiront, ſeront à la fin ſemblables, & leur derniere raiſon ſera la raiſon d'égalité.*

Pendant que *B* s'approche de *A*, imaginons qu'on prolonge *AB*, *AD*, *AR*, en *b*, *d*, *r*, qu'on méne *rbd* parallele à *RD*, & qu'on prenne l'arc *Acb* toujours ſemblable à l'arc *ACB*, lorſque les points *A* & *B* coïncideront, l'angle *bAd* s'évanouira, & les trois triangles *rAb*, *rAcb*, *rAd*, qui reſtent toujours de grandeur finie coïncideront, & ſeront par conſéquent égaux & ſemblables. Donc les triangles *RAB*, *RACB*, *RAD*, qui leur ſont toujours ſemblables & proportionnels, ſeront à la fin égaux & ſemblables entr'eux. *C. Q. F. D.* Fig. 9.

Cor. Donc ces triangles pourront être pris l'un pour l'autre dans tous les cas où l'on employera la méthode des premieres & dernieres raiſons.

LEMME IX.

Soient données de position la droite A E *&* *la courbe* A B C, *qui se coupent sous un angle donné* A, *& soient menées de cette droite sous un autre angle donné les ordonnées* B D, C E, *qui rencontrent la courbe en* B, *& en* C, *si on suppose ensuite que les points* B *&* C *s'approchent l'un & l'autre continuellement du point* A ; *les aires des triangles* A B D, A C E, *seront à la fin entr'elles en raison doublée des côtés.*

Fig. 11. Pendant que les points *B* & *C* s'approchent du point *A*, imaginons toujours que la ligne *AD* soit prolongée à des points très éloignés *d* & *e*, & en telle sorte que *A d* & *A e* soient toujours proportionnelles à *AD* & à *AE*, de plus que les ordonnées *d b*, *e c*, tirées paralleles aux ordonnées *D B*, *E C*, rencontrent en *b* & *c* les lignes *A B*, *A C* prolongées ; enfin que *A b c* soit une courbe semblable à *A B C* & *A g*, une droite qui touche les deux courbes en *A*, & coupe les ordonnées *D B*, *E C*, *d b*, *e c*, en *F*, *G*, *f*, *g*. Cela posé, lorsque les points *B* & *C* coïncideront avec le point *A*, la longueur *A e* restant la même, l'angle *c A g* s'évanouira, les aires curvilignes *A b d*, *A c e* coïncideront avec les aires rectilignes *A f d*, *A g e*, & par conséquent elles seront (par le Lemme 5.) en raison doublée des côtés *A d*, *A e* ; mais les aires *A B D*, *A C E* sont toujours proportionnelles à ces aires, & les côtés *A D*, *A E* à ces côtés. Donc les aires *A B D*, *A C E* sont à la fin en raison doublée des côtés *A D*, *A E*. C. Q. F. D.

LEMME X.

Les espaces qu'une force finie fait parcourir au corps qu'elle presse, soit que cette force soit déterminée & immuable, soit qu'elle augmente ou diminue continuellement, sont dans le commencement du mouvement en raison doublée des temps.

Que les lignes *A D*, *A E* représentent les temps, & les ordonnées *D B*, *E C* les vîtesses produites ; les espaces décrits avec ces vîtesses seront comme les aires *A B D*, *A C E* qui auroient été décrites par la *fluxion* de ces ordonnées, c'eſt-à-dire (par le Lemme 9.) que ces eſpaces ſeront dans le commencement du mouvement en raiſon doublée des temps *AD*, *AE*. C. Q. F. D.

Cor. 1. De-là on tire aiſément, que lorſque des corps qui parcoureroient dans des temps proportionnels des parties ſemblables de figures ſemblables, ſont ſollicités par de nouvelles forces quelconques égales & appliquées de la même maniére, les déviations cauſées par ces forces, c'eſt-à-dire, les diſtances des points où les corps ſont arrivés réellement aux points où ils ſeroient arrivés ſans l'action de ces forces, ſont entr'elles à peu près comme les quarrés des temps dans leſquels ces déviations ont été produites.

Cor. 2. Et les déviations cauſées par des forces proportionnelles & appliquées de même aux parties ſemblables de figures ſemblables, ſont en raiſon compoſée des forces & des quarrés des temps.

Cor. 3. Il en eſt de même des eſpaces quelconques que les corps preſſés par des forces diverſes décrivent. Ces eſpaces ſont encore dans le commencement du mouvement, comme les forces multipliées par les quarrés des temps.

Cor. 4. Donc, dans le commencement du mouvement, les forces ſont comme les eſpaces décrits directement, & inverſement comme les quarrés des temps.

Cor. 5. Et les quarrés des temps ſont comme les eſpaces décrits directement, & inverſement comme les forces

S C H O L I E.

Lorſqu'on compare des quantités indéterminées de différent genre, & qu'on dit que l'une d'elles eſt en raiſon directe ou inverſe d'une autre : on entend par-là que la premiere augmente ou diminue dans la même raiſon que la derniere, ou dans la raiſon inverſe ; & lorſqu'on dit qu'une quantité eſt directement ou inverſement, comme pluſieurs de ces quantités, cela ſignifie qu'elle augmente ou diminue en raiſon compoſée des raiſons dans leſquelles ces autres quantités augmentent ou diminuent, ou dans la raiſon compoſée des raiſons renverſées de ces raiſons. Si on dit, par éxemple, que *A* eſt directement comme *B* & comme *C*, & inverſement comme *D*: cela veut dire que A augmentera ou diminuera en même raiſon que $B \times C \times \frac{1}{D}$ ou que les quantités *A* & $\frac{BC}{D}$ ſont entr'elles en raiſon donnée.

LEMME XI.

Dans toutes les courbes qui ont une courbure finie au point de contact, la ſouſtendante évanouiſſante d'un angle de contact eſt à la fin en raiſon doublée de la ſouſtendante de l'arc qu'elle termine.

Cas 1. Soient *AbB* cet arc, *AD* ſa tangente, *BD* la ſouſtendante de l'angle de contact, laquelle eſt perpendiculaire à la tangente, & *AB* la ſouſtendante de l'arc. Soient enſuite *AG* & *BG* perpendiculaires à *AD* & à *AB*, & ſoit *G* la rencontre de ces perpendiculaires. Cela poſé, imaginons que les points *D*, *B*, *G*, deviennent les points *d*, *b*, *g*, & que le point *I* ſoit la derniere interſection des lignes *AG*, *BG*, lorſque les points *B* & *D* ſont arrivés en *A*; il eſt clair que la diſtance *GI* peut être moindre qu'aucune diſtance aſſignable; mais à cauſe qu'on peut faire paſſer des cercles par les points *A*, *B*, *G*, & par les points *A*, *b*, *g*. on a $AB^2 = AG \times BD$ & $Ab^2 = Ag \times bd$; donc AB^2 eſt à Ab^2 en raiſon compoſée des raiſons de *AG*, à *Ag* & de *BD* à *bd*. Mais comme on peut ſuppoſer la diſtance *GI* plus petite qu'aucune longueur aſſignable, la différence entre la raiſon de *AG* à *Ag* & la raiſon d'égalité peut être moindre qu'aucune différence aſſignable; donc la différence de la raiſon de AB^2 à Ab^2 à la raiſon de *BD* à *bd*, peut être moindre que toute différence aſſignable. Donc (par le Lemme 1.) la derniere raiſon de AB^2 à Ab^2 ſera la même que la derniere raiſon de *BD* à *bd*. *C. Q. F. D.*

Fig. 12.

Cas 2. Suppoſé que *BD* ſoit incliné ſur *AD*, ſelon un angle quelconque donné, la derniere raiſon de *BD* à *bd* reſtera toujours la même, & ſera par conſéquent la même que la raiſon de AB^2 à Ab^2. *C. Q. F. D.*

Cas. 3. Quand même l'angle *D* ne feroit point donné, & que la droite *BD* convergeroit vers un point donné, ou qu'elle feroit tirée fuivant une loi quelconque; les angles *D* & *d*, formés felon la même loi, tendroient toujours à devenir égaux, & à la fin leur différence deviendroit moindre que toute différence donnée, c'eft-à-dire, (par le Lemme 1.) qu'ils feroient égaux à la fin, & par conféquent les lignes *BD*, *bd* feroient entr'elles dans la même raifon qu'auparavant. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Comme les tangentes *AD*, *Ad*, les arcs *AB*, *Ab*, & leurs finus *BC*, *bc* deviennent à la fin égaux aux cordes *AB*, *Ab*, leurs quarrés font auffi à la fin comme les foustendantes *BD*, *bd*.

Cor. 2. Et ces quarrés feront auffi entr'eux à la fin comme les fléches des arcs, lefquelles coupent les cordes en deux parties égales, & convergent vers un point donné; car ces fléches font comme les foustendantes *BD*, *bd*.

Cor. 3. Donc, lorfqu'un corps avec une vîteffe donnée décrit un arc, la fléche de cet arc eft en raifon doublée du temps pendant lequel il eft décrit.

Cor. 4. Les triangles rectilignes *ADB*, *Adb* font à la fin en raifon triplée des côtés *AD*, *Ad*, & en raifon fefquiplée des côtés *DB*, *db*; puifqu'ils font en raifon compofée des côtés *AD*, *DB*, & *Ad*, *db*, de même les triangles *ABC*, *Abc*, font à la fin en raifon triplée des côtés *BC*, *bc*. J'appelle raifon fefquiplée la raifon fousdoublée de la raifon triplée, parce qu'elle eft compofée de la raifon fimple & de la raifon fousdoublée.

Cor. 5. Comme *DB*, *db* deviennent à la fin paralleles, & en raifon doublée de *AD* & de *Ad*, les dernieres aires curvilignes *ADB*, *Adb* feront (par la nature de la parabole,) les deux tiers des triangles rectilignes *ABD*, *Abd*; & les fegmens *AB*, *Ab*, les tiers de ces mêmes triangles, & de-là ces aires & ces fegmens feront en raifon triplée, tant des tangentes *AD*, *Ad*, que des cordes & des arcs *AB*, *Ab*.

SCHOLIE.

Au reste, dans toutes ces démonstrations nous supposons que l'angle de contact n'est ni infiniment plus grand que les angles de contact contenus entre la tangente & la corde des cercles; ni infiniment plus petit que ces mêmes angles, c'est-à-dire que nous supposons que la courbure au point A n'est ni infiniment petite, ni infiniment grande, mais que le rayon osculateur AI, est d'une grandeur finie; car si on prenoit DB proportionnelle à AD^3, aucun cercle ne pourroit passer par le point A entre la tangente AD & la courbe AB; & en ce cas l'angle de contact seroit infiniment plus petit que les angles de contact circulaires; & par le même raisonnement, si on fait successivement DB proportionnel à AD^4, AD^5, AD^6, AD^7, &c. on aura une série infinie d'angles de contact, dont chacun sera infiniment plus petit que celui qui le précéde, & si l'on fait successivement BD proportionnelle à AD^2, $AD^{\frac{3}{2}}$ $AD^{\frac{4}{3}}$ $AD^{\frac{5}{4}}$, $AD^{\frac{6}{5}}$, $AD^{\frac{7}{6}}$, &c. on aura une autre suite infinie d'angles de contact, dont le premier sera du même genre que les angles de contact circulaires; le second sera infiniment plus grand; le troisiéme infiniment plus grand que le second, & ainsi de suite. De plus, entre deux quelconque de ces angles on peut insérer une suite d'angles intermédiaire, laquelle sera infinie des deux côtés, & telle que chacun des angles qui la composeront sera infiniment plus grand, ou infiniment plus petit que celui qui le précéde. Entre les termes AD^2 & AD^3, par éxemple, on peut insérer la série $AD^{\frac{13}{6}}$, $AD^{\frac{11}{5}}$, $AD^{\frac{9}{4}}$, $AD^{\frac{7}{3}}$, $AD^{\frac{5}{2}}$, $AD^{\frac{8}{3}}$, $AD^{\frac{11}{4}}$, $AD^{\frac{14}{5}}$, $AD^{\frac{17}{6}}$, &c. Enfin on pourra encore insérer entre deux angles quelconques de cette derniere série, une nouvelle série d'angles intermédiaires toujours infiniment plus grands les uns que les autres; car la nature ne connoît point de bornes.

Ce qu'on a démontré des lignes courbes & des superficies qu'elles renferment, peut s'appliquer facilement aux surfaces courbes des solides & aux solides mêmes. J'ai commencé par ces Lemmes; pour éviter de déduire de longues démonstrations *ad absurdum*, selon la méthode des anciens Géométres.

J'aurois eu des démonstrations plus courtes par la méthode des indivisibles; mais parce que l'hypothése des indivisibles me paroît trop dure à admettre, & que cette méthode est par conséquent peu géométrique; j'ai mieux aimé employer celle des premieres & dernieres raisons des quantités qui naissent & s'évanouissent; & j'ai commencé par faire voir, le plus briévement que j'ai pu, ce que deviennent les quantités, lorsqu'elles atteignent leurs limites. Je démontrerai par cette méthode tout ce qu'on démontre par celle des indivisibles; mais en ayant prouvé le principe, je m'en servirai avec plus de sécurité.

Ainsi, lorsque dans la suite je considérerai des quantités comme composées de particules déterminées, & que je prendrai pour des lignes droites de petites portions de courbes; je ne désignerai point par-là des quantités indivisibles, mais des quantités divisibles évanouissantes; de même, ce que je dirai des sommes & des raisons, doit toujours s'entendre non des particules déterminées, mais des limites des sommes & des raisons des particules évanouissantes; & pour sentir la force de mes démonstrations, il faudra toujours se rappeller la méthode que j'ai suivie dans les Lemmes précédens.

On peut dire, contre ce principe des premieres & dernieres raisons, que les quantités qui s'évanouissent n'ont point de derniere proportion entr'elles; parce qu'avant de s'évanouir, la proportion qu'elles ont n'est pas la derniere, & que lorsqu'elles sont évanouies, elles n'en ont plus aucune. Mais on pourroit soutenir par le même raisonnement qu'un corps qui parvient d'un mouvement uniformément retardé à un certain lieu où son mouvement s'éteint, n'a point de derniere vîtesse; Car, diroit-on, avant que ce corps soit parvenu à ce lieu, il n'a pas encore sa derniere vîtesse, & quand il l'a atteint, il n'en a aucune, puisqu'alors son mouvement est éteint. Or, la réponse à cet argument est facile;

on doit entendre par la derniere vîtesse de ce corps celle avec laquelle il se meut, non pas avant d'avoir atteint le lieu où son mouvement cesse, non pas après qu'il a atteint ce lieu, mais celle qu'il a dans l'instant même qu'il atteint ce dernier lieu & avec laquelle son mouvement cesse. Il en est de même de la derniere raison des quantités évanouissantes, il faut entendre par cette raison celles qu'ont entr'elles des quantités qui diminuent, non pas avant de s'évanouir, ni après qu'elles sont évanouies; mais celle qu'elles ont dans le moment même qu'elles s'évanouissent. De la même maniere, la premiere raison des quantités naissantes est celle que les quantités qui augmentent ont au moment qu'elles naissent, & la premiere ou derniere somme de ces quantités est celle qui répond au commencement ou à la fin de leur éxistence, c'est-à-dire, au moment qu'elles commencent à augmenter ou qu'elles cessent de diminuer.

Il y a une certaine borne que la vîtesse d'un corps peut atteindre à la fin de son mouvement, & qu'elle ne sçauroit passer; c'est cette vîtesse qui est la derniere vîtesse du corps. Il en est de même des limites & des proportions de toutes les quantités qui commencent & cessent. Comme cette limite est certaine & définie, c'est un problême très géométrique que de la déterminer; car on peut regarder comme géométriques tous les problêmes où il s'agit de déterminer avec précision quelque quantité.

On objectera peut-être que si les dernieres raisons qu'ont entr'elles les quantités qui s'évanouissent sont données, les dernieres grandeurs de ces quantités seront aussi données; & qu'ainsi toute quantité sera composée d'indivisibles, au contraire de ce qu'*Euclide* a démontré des incommensurables dans le dixiéme Livre de ses élémens. Mais cette objection porte sur une supposition fausse; car les dernieres raisons qu'ont entr'elles les quantités qui s'évanouissent ne sont pas en effet les raisons des dernieres quantités, ou de quantités déterminées & indivisibles, mais les limites dont les raisons des quantités qui décroissent à l'infini approchent

sans

ſans ceſſe, limites dont elles peuvent toujours approcher plus près que d'aucune différence donnée, qu'elles ne peuvent jamais paſſer, & qu'elles ne ſauroient atteindre, ſi ce n'eſt dans l'infini.

On comprendra ceci plus clairement dans les quantités infiniment grandes. Si deux quantités, dont la différence eſt donnée, augmentent à l'infini, leur derniere raiſon ſera donnée, & ſera certainement la raiſon d'égalité; cependant les dernieres, ou les plus grandes quantités auſquelles répond cette raiſon, ne ſeront point des quantités données. Donc, lorſque je me ſervirai dans la ſuite, pour être plus clair, des mots de *quantités évanouiſſantes*, de *quantités dernieres*, de *quantités très petites*, il ne faut pas entendre par ces expreſſions des quantités d'une grandeur déterminée, mais toujours des quantités qui diminuent à l'infini.

SECONDE SECTION.

De la recherche des forces centripetes.

PROPOSITION I. THÉOREME I.

*Dans les mouvemens curvilignes des corps, les aires décrites * autour d'un centre immobile, ſont dans un même plan immobile, & ſont proportionnelles au temps.*

Suppoſé que le temps ſoit diviſé en parties égales, & que dans la premiere partie de ce temps, le corps, par la force qui lui a été imprimée, décrive la ligne AB: ſuivant la premiere loi du mouvement dans un ſecond temps égal au premier, il décriroit, ſi rien ne l'en empêchoit, la droite $BC = AB$; Donc en tirant au centre S, les rayons AS, BS, cS, les aires ASB, BSc ſeroient égales. Suppoſé que lorſque ce corps eſt arrivé en B, la force Fig. 13.

* Les aires décrites par un corps autour d'un centre ſont les eſpaces terminés par les rayons qui partent de ce centre, & par l'arc ſur lequel s'appuient ces rayons.

Du mouvement des Corps.

centripete agiſſe ſur lui par un ſeul coup, mais aſſez puiſſant pour l'obliger à ſe détourner de la droite *Bc* & à ſuivre la droite *BC*. Si on tire la ligne *Cc* parallele à *BS*, laquelle rencontre *BC* en *C*, à la fin de ce ſecond temps, le corps (ſelon le 1. Corollaire des loix) ſera en *C* dans le même plan que le triangle *ASB*.

En tirant enſuite la ligne *SC*, le triangle *SBC* ſera égal au triangle *SBc*, à cauſe des paralleles *SB*, *Cc*, donc il ſera auſſi égal au triangle *SAB*.

De même, ſi la force centripete agit ſucceſſivement ſur le corps en *C*, *D*, *E*, *&c.* & qu'elle lui faſſe décrire à chaque petite portion de temps les droites *CD*, *DE*, *EF*, &c. ces lignes ſeront toutes dans le même plan; & le triangle *SCD* ſera égal au triangle *SBC*, le triangle *SDE* au triangle *SCD*, & le triangle *SEF* au triangle *SDE*. Ce corps décrira donc en des temps égaux des aires égales dans un plan immobile : & en compoſant, les ſommes des aires quelconques *SADS*, *SAFS* ſeront entr'elles comme les temps employés à les décrire.

Qu'on imagine maintenant que le nombre des triangles augmente & que leur largeur diminue à l'infini; il eſt clair (par le Cor. 4. du Lemme 3.) que leur dernier périmétre *ADF*, ſera une ligne courbe. Donc la force centripete, qui retire le corps à tout moment de la tangente de cette courbe, agit ſans interruption, & les aires quelconques *SADS*, *SAFS*, qui étoient proportionnelles aux temps employés à les décrire, leur ſeront encore proportionnelles dans ce cas. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. La vîteſſe d'un corps attiré vers un centre immobile dans un eſpace non réſiſtant, eſt réciproquement comme la perpendiculaire tirée de ce centre à la ligne qui touche la courbe au lieu où le corps ſe trouve; car la vîteſſe de ce corps aux lieux *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, eſt proportionnelle aux baſes *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF* des triangles égaux; & ces baſes ſont entr'elles en raiſon réciproque des perpendiculaires qui leur ſont abaiſſées du centre.

Cor. 2. Si on fait un parallélogramme *ABCV*, ſur les cordes *AB*, *BC*, de deux arcs ſucceſſivement parcourus par le même corps en des temps égaux dans des eſpaces non réſiſtans, & que la diagonale *BV* de ce parallélogramme ait la même poſition que celle qu'elle a à la fin, lorſque ces arcs diminuent l'infini, cette diagonale prolongée paſſera par le centre des forces.

Cor. 3. Si on fait les parallélogrammes *ABCV*, *DEFZ*, ſur les cordes *AB*, *BC* & *DE*, *EF* des arcs décrits en temps égaux dans des eſpaces non réſiſtans, les forces en *B* & en *E* ſeront entr'elles dans la derniere raiſon des diagonales *BV*, *EZ*, lorſque ces arcs diminueront à l'infini; car les mouvemens du corps, ſuivant les lignes *BC* & *EF*, ſont compoſés (par le Cor. 1. des loix) des mouvemens ſuivant les lignes *Bc*, *BV* & *Ef*, *EZ*: or, *BV* & *EZ*, qui ſont égales à *Cc*, & à *Ff*, ont été parcourues par les impulſions de la force centripete en *B* & en *E*, ſelon ce qui a été démontré dans cette propoſition; donc elles ſont proportionnelles à ces impulſions.

Cor. 4. Les forces par leſquelles les corps, qui ſe meuvent dans des eſpaces libres, ſont détournés du mouvement rectiligne & contraints à décrire des courbes, ſont entr'elles comme les fléches des arcs évanouiſſants parcourus en temps égaux, & ces fléches convergent vers le centre des forces, & coupent les cordes des arcs évanouiſſants en deux parties égales; car ces fléches ſont la moitié des diagonales dont on vient de parler dans le Cor. 3.

Cor. 5. Ainſi ces mêmes forces ſont à la force de la gravité, comme les fléches des arcs décrits ſont aux fléches verticales des arcs paraboliques que les projectiles décrivent dans le même temps.

Cor. 6. Tout ce qui a été démontré juſqu'ici ſera encore vrai, par le Cor. 5. des loix, lorſque les plans dans leſquels les corps ſe meuvent, & les centres des forces placés dans ces plans, au lieu d'être en repos, ſe mouveront uniformément en ligne droite.

Du mouvement des Corps.

PROPOSITION II. THÉOREME II.

La force centripete d'un corps qui se meut dans une ligne courbe décrite sur un plan, & qui parcourt autour d'un point immobile, ou mû uniformément en ligne droite, des aires proportionnelles au temps, tend nécessairement à ce point.

Cas 1. Tout corps qui se meut dans une courbe est détourné du mouvement rectiligne par une force qui agit sur lui, par la premiere loi; & cette force qui contraint le corps à se détourner de la ligne droite, & à décrire en temps égaux les petits triangles égaux SAB, SBC, SCD, &c. autour du point immobile S, agit au lieu B suivant une ligne parallele à cC, par la seconde loi, c'est-à-dire, suivant la ligne BS; & au lieu C suivant une ligne parallele à dD, c'est-à-dire suivant la ligne SC, &c. Elle agit donc toujours selon des lignes qui tendent à ce point immobile S. *C. Q. F. D.*

Cas. 2. Et par le Corollaire 5. des loix, le mouvement du corps est le même, soit que la superficie dans laquelle s'éxécute ce mouvement soit en repos, soit qu'elle se meuve uniformément en ligne droite en emportant avec elle le centre, la courbe décrite, & le corps décrivant.

Cor. 1. Dans les espaces ou milieux non résistans, si les aires ne sont pas proportionnelles au temps, les forces centripetes ne tendent pas au concours des rayons; mais elles déclinent vers le côté vers lequel le corps se meut si la description des aires est accélérée; & elles déclinent vers le côté opposé si elle est retardée.

Cor. 2. Dans les milieux résistans, si la description des aires est accélérée, les directions des forces déclinent aussi vers le côté vers lequel le mouvement du corps est dirigé.

SCHOLIE.

Le corps peut être animé par une force centripete composée de plusieurs forces. Dans ce cas, le sens de la Proposition précédente eſt, que la force qui réſulte de toutes les autres tend au point *S*. De plus, ſi quelqu'autre force agit continuellement ſelon une ligne perpendiculaire à la ſuperficie décrite, le corps ſe détournera du plan de ſon mouvement; mais la quantité de la ſuperficie décrite n'augmentera ni ne diminuera, ainſi on peut la négliger dans la compoſition des forces.

PROPOSITION III. THÉOREME III.

Si un corps décrit autour d'un autre corps qui ſe meut d'une façon quelconque des aires proportionnelles au temps, la force qui anime le premier eſt composée d'une force qui tend vers le ſecond, & de toute la force accélératrice par laquelle ce ſecond corps eſt animé.

Soit le premier corps *L* & le ſecond *T*: Si une force nouvelle égale & contraire à celle qui agit ſur le corps *T*, agit ſur ces deux corps, ſelon des lignes paralleles, le premier corps *L* continuera, par le Cor. 6. des loix, à décrire autour du corps *T* les mêmes aires qu'auparavant; mais la force qui agiſſoit ſur le corps *T* ſera détruite par cette nouvelle force qu'on a ſuppoſé lui être égale & contraire. Donc, par la premiere loi, ce corps *T* abandonné à lui-même demeurera en repos, ou ſe mouvera uniformément en ligne droite; & le corps *L*, qui eſt animé alors par la différence de ces forces, c'eſt-à-dire par la force reſtante, continuera à décrire des aires proportionnelles au temps autour du corps *T*. Donc par le Théor. 2. la différence de ces forces tend vers le corps *T* comme à ſon centre. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Il ſuit de-là, que ſi un corps *L* décrit autour d'un autre corps des aires proportionnelles au temps, & que de la force totale qui preſſe le corps *L*, ſoit ſimple, ſoit compoſée de pluſieurs forces, ſelon le Cor. 2. des loix, on ſouſtrait toute la force accélératrice qui agit ſur l'autre corps; la force reſtante par laquelle le corps *L* eſt animé, tendra tout entiere vers l'autre corps *T* comme centre.

Cor. 2. Et ſi ces aires ne s'éloignent pas beaucoup d'être proportionnelles au temps, la force restante sera à peu près dirigée vers le corps T.

Cor. 3. Et réciproquement, si la force restante tend à peu près vers le corps T, les aires seront à peu près proportionnelles au temps.

Cor. 4. Si le corps L décrit autour du corps T des aires qui s'éloignent beaucoup de la proportionnalité des temps, & que ce corps T soit en repos, ou qu'il se meuve uniformément en ligne droite, la force centripete qui tend vers ce corps est nulle, ou bien elle est mêlée & composée avec d'autres forces très puissantes; & la force totale, composée de toutes ces forces, s'il y en a plusieurs, sera dirigée vers un autre centre mobile ou immobile. Il en est de même, lorsque le corps T se meut d'un mouvement quelconque, pourvû que l'on prenne pour force centripete, celle qui reste après qu'on a soustrait la force totale qui agit sur le corps T.

SCHOLIE.

Comme la description des aires égales en temps égaux marque que le corps qui décrit ces aires éprouve l'action d'une force qui agit sur lui, qui le retire du mouvement rectiligne, & qui le retient dans son orbite; pourquoi ne prendrions-nous pas dans la suite cette description égale des aires pour l'indice d'un centre autour duquel se fait tout mouvement circulaire dans des espaces non résistans?

PROPOSITION IV. THÉOREME IV.

Les corps qui parcourent uniformément différens cercles sont animés par des forces centripetes qui tendent au centre de ces cercles, & qui sont entr'elles comme les quarrés des arcs décrits en temps égal, divisés par les rayons de ces cercles.

Ces forces tendent au centre des cercles par la Proposition 2. & le Corollaire 2. de la Proposition 1. & elles sont entr'elles, par le Corollaire 4. de la Propoſition 1. comme les ſinus verſes des arcs décrits dans de très petits temps égaux, c'eſt-à-dire par le Lemme 7. comme les quarrés de ces mêmes arcs diviſés par les diamétres de leurs cercles. Or, comme ces petits arcs ſont proportionnels aux arcs décrits dans des temps quelconques égaux, & que les diamétres ſont comme les rayons, les forces ſeront comme les quarrés des arcs quelconques décrits dans des temps égaux diviſés par les rayons. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Comme ces arcs ſont proportionnels aux vîteſſes des corps, les forces centripetes ſeront en raiſon compoſée de la raiſon doublée des vîteſſes directement, & de la raiſon ſimple des rayons inverſement.

Cor. 2. Et comme les temps périodiques ſont en raiſon compoſée de la raiſon directe des rayons, & de la raiſon inverſe des vîteſſes; les forces centripetes ſeront en raiſon compoſée de la raiſon directe des rayons, & de la raiſon doublée inverſe des temps périodiques.

Cor. 3. Donc, ſi les temps périodiques ſont égaux, & que les vîteſſes ſoient par conſéquent comme les rayons; les forces centripetes ſeront auſſi comme les rayons: & au contraire.

Cor. 4. Si les temps périodiques & les vîteſſes ſont en raiſon ſousdoublée des rayons; les forces centripetes ſeront égales entre elles: & au contraire.

Cor. 5. Si les temps périodiques ſont comme les rayons, & que par conſéquent les vîteſſes ſoient égales, les forces centripetes ſeront en raiſon renverſée des rayons: & au contraire.

Cor. 6. Si les temps périodiques ſont en raiſon ſeſquiplée des rayons, & que par conſéquent les vîteſſes ſoient réciproquement en raiſon ſousdoublée des rayons; les forces centripetes ſeront réciproquement comme les quarrés des rayons: & au contraire.

Cor. 7. Et généralement, ſi le temps périodique eſt comme une puiſſance quelconque R^n du rayon, & que par conſéquent la vîtesse soit réciproquement comme la puissance R^{n-1} du rayon, la force centripete sera réciproquement comme la puissance R^{2n-1} du rayon : & au contraire.

Cor. 8. On peut trouver de la même maniere tout ce qui concerne les temps, les vîtesses & les forces avec lesquelles les corps décrivent des parties semblables de figures quelconques semblables, qui ont leurs centres posés de même dans ces figures ; il ne faut pas pour ces cas d'autres démonstrations que les précédentes, pourvû qu'on substitue la description égale des aires au mouvement uniforme, & qu'on mette les distances des corps aux centres à la place des rayons.

Cor. 9. Il suit aussi de la même démonstration, que l'arc qu'un corps décrit pendant un temps quelconque en tournant uniformément dans un cercle en vertu d'une force centripete donnée, est moyen proportionnel entre le diamétre de ce cercle & la ligne que le corps parcoureroit en tombant par la même force donnée & pendant le même temps.

SCHOLIE.

Le cas du Corollaire 6. est celui des corps céléstes, (comme nos Compatriotes *Hook*, *Wren* & *Halley* l'ont chacun conclu des observations) c'est pourquoi j'expliquerai fort au long dans la suite de cet Ouvrage tout ce qui a rapport à la force centripete qui décroît en raison doublée des distances au centre.

De plus, par la Proposition précédente & par ses Corollaires, on peut trouver la proportion qui est entre la force centripete & une force quelconque connue, telle que la gravité ; car si le corps tourne dans un cercle concentrique à la terre par la force de la gravité, la gravité sera sa force centripete : or, connoissant d'un côté la descente des graves, & de l'autre le temps de la révolution, & l'arc décrit dans un temps quelconque, on aura par le Corollaire 9. de cette Proposition la proportion cherchée entre la gravité & la force centripete. C'est par des propositions sembla-

bles

bles que M. *Hugens*, dans son excellent Traité *de Horollogio oscillatorio*, a comparé la force de la gravité avec les forces centrifuges des corps qui circulent.

On pourroit encore démontrer cette proposition de cette maniere. Soit supposé un Polygone d'un nombre de côtés quelconques inscrit dans un cercle. Si le corps, en parcourant les côtés de ce Poligone avec une vîtesse donnée, est réfléchi par le cercle à chacun des angles de ce Poligone, la force avec laquelle ce corps frappe le cercle à chaque réfléxion sera comme sa vîtesse : donc la somme des forces en un temps donné sera comme cette vîtesse multipliée par le nombre des réfléxions, c'est-à-dire, (si le Poligone est donné d'espece) comme la ligne parcourue dans ce temps, laquelle doit être augmentée ou diminuée dans la raison qu'elle a elle-même au rayon de ce cercle; c'est-à-dire, comme le quarré de cette ligne divisé par le rayon : ainsi si les côtés du Poligone diminuant à l'infini, le Poligone vient à coïncider enfin avec le cercle, la somme des forces sera alors comme le quarré de l'arc parcouru dans un temps donné divisé par le rayon. C'est là la mesure de la force centrifuge avec laquelle le corps presse le cercle; & cette force est égale & contraire à la force par laquelle ce cercle repousse continuellement le corps vers le centre.

PROPOSITION V. PROBLÉME I.

Trouver le point auquel tendent comme centre des forces qui font parcourir une courbe donnée, lors qu'on connoît la vîtesse du corps à chaque point de cette courbe.

Que les lignes PT, TQV, VR, qui se rencontrent aux points T & V, touchent la courbe donnée dans les points P, Q, R, que l'on mene ensuite par ces points & perpendiculairement aux tangentes les droites PA, QB, RC, réciproquement proportionnelles aux vîtesses dans les mêmes points; c'est-à-dire, de sorte que PA soit à QB comme la vîtesse au point Q est à la vîtesse au point P, & que QB soit à RC comme la vîtesse au point R à la vîtesse Fig. 14.

au point *Q*. Cela fait, ſoient menées à angles droits par les extrémités *A*, *B*, *C*, de ces perpendiculaires les lignes *AD*, *DBE*, *EC*, qui ſe rencontrent en *D* & en *E*: & en tirant les lignes *TD*, *VE*, elles ſe rencontreront au centre cherché *S*.

Car les perpendiculaires tirées du centre *S* aux tangentes *PT*, *QT* ſont (par le Cor. 1. de la Prop. 1.) réciproquement comme les vîteſſes du corps aux points *P* & *Q*; donc par la conſtruction elles ſeront comme les perpendiculaires *AP*, *BQ* directement, c'eſt-à-dire, comme les perpendiculaires abaiſſées du point *D* ſur ces tangentes. D'où l'on tire facilement, que les points *S*, *T*, *D* ſont dans une même ligne droite. On prouvera par le même raiſonnement que les points *S*, *E*, *V* ſont auſſi dans une même ligne droite; donc le centre *S* ſe trouvera dans l'interſection des lignes *TD*, *VE*. C. Q. F. D.

PROPOSITION VI. THÉORÉME V.

Si un corps décrit autour d'un centre immobile un orbe quelconque dans un eſpace non réſiſtant, & qu'on ſuppoſe que la fléche de l'arc naiſſant que ce corps parcourt dans un temps infiniment petit, & qui partage ſa corde en deux parties égales, paſſe, étant prolongée par le centre des forces: la force centripete dans le milieu de l'arc ſera en raiſon directe de cette fléche, & en raiſon doublée inverſe du temps.

Par le Cor. 4. de la Prop. 1. la fléche dans un temps donné eſt comme la force; donc, en augmentant le temps en une raiſon quelconque, la fléche (par les Cor. 2. & 3. du Lemme 11.) augmentera dans la raiſon doublée du temps; car l'arc augmente en même raiſon que le temps, donc la fléche eſt en raiſon ſimple de la force, & en raiſon doublée du temps, & ſouſtrayant de part & d'autre la raiſon doublée du temps, la force ſera en raiſon directe de la fléche, & en raiſon doublée inverſe du temps. *C. Q. F. D.*

On pourroit auſſi démontrer facilement cette Propoſition par le Cor. 4. du Lemme 10.

Cor. 1. Si le corps P en tournant autour du centre S décrit la courbe APQ, & que cette courbe soit touchée par la ligne ZPR en un point quelconque P, que d'un autre point quelconque Q de cette courbe, on tire QR paralléle à SP, & qu'on abaisse QT perpendiculaire sur SP : la force centripete sera réciproquement comme la quantité que devient $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$ lorsque les points P & Q coïncident ; car QR est égale à la fléche de l'arc double de QP, dont le milieu est P, & le double du triangle SQP ou $SP \times QT$ est proportionnel au temps dans lequel cet arc double est décrit ; ainsi on peut l'écrire à la place de ce temps.

Fig. 15.

Cor. 2. On prouvera par le même raisonnement que la force centripete est réciproquement comme la quantité $\frac{SY^2 \times QP^2}{QR}$ pourvû que SY soit abaissée perpendiculairement du centre des forces sur la tangente PR de l'orbite ; car les rectangles $SY \times QP$ & $SP \times QT$ sont égaux.

Cor. 3. Si l'orbe PQ est un cercle dont la droite PV, qui passe par le corps & par le centre des forces, soit une corde, ou que cet orbe PQ ait pour cercle osculateur le cercle dont la corde est PV, la force centripete sera réciproquement comme la quantité $SY^2 \times PV$; car dans cette supposition $PV = \frac{QP^2}{QR}$

Cor. 4. Les mêmes choses étant posées, la force centripete est dans la raison doublée directe de la vîtesse, & dans la raison inverse de la corde PV ; car par le Cor. 1. de la Propos. 1. la vîtesse est réciproquement comme la perpendiculaire SY.

Cor. 5. Donc, si on a une figure curviligne quelconque APQ, & dans cette figure un point donné S, vers lequel la force centripete soit perpétuellement dirigée, on pourra trouver la loi de la force centripete, par laquelle un corps quelconque P sera retiré à tout moment du mouvement rectiligne & retenu dans

DU MOUVEMENT DES CORPS.

le périmetre de cette figure, en cherchant la valeur du solide $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$, ou celle du solide $SY^2 \times PV$, qui sont réciproquement proportionnels à cette force. Nous en donnerons des exemples dans les Problémes suivans.

PROPOSITION VII. PROBLÉME II.

Trouver la loi de la force centripete qui tend à un point donné, & qui fait décrire à un corps la circonférence d'un cercle.

Fig. 16. Soient $VQPA$ la circonférence du cercle; S le point donné vers lequel la force fait tendre le corps comme à son centre; P un lieu quelconque où l'on suppose le corps arrivé; Q le lieu consécutif; PRZ la tangente du cercle au point P; & PV la corde qui passe par S. Soient de plus VA le diametre qui passe par V; AP la corde tirée de A à P; QT une perpendiculaire à PV, laquelle étant prolongée rencontre la tangente PR en Z; RL la parallele à PV qui passe par Q, & qui rencontre le cercle en L, & la tangente PZ en R.

Cela posé, à cause des triangles semblables ZQR, ZTP, VPA; on aura RP^2, c'est-à-dire, $QR \times RL : QT^2 :: AV^2 : PV^2$; donc $\frac{QR \times RL \times PV^2}{AV^2} = QT^2$; multipliant présentement cette équation par $\frac{SP^2}{QR}$, & écrivant PV au lieu de RL, ce qui est permis lorsque les points P & Q coïncident, on aura $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2} = \frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$ donc, par les Corol. 1. & 5. de la Prop. 6. la force centripete sera réciproquement comme $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2}$ c'est-à dire, à cause que AV^2 est donné, réciproquement comme le quarré de la distance ou hauteur SP multipliée par le cube de la corde PV. C.Q.F.T.

AUTRE SOLUTION.

Soit menée la perpendiculaire SY sur la tangente PR prolongée; à cause des triangles semblables SYP, VPA, on aura

$AV : PV :: SP : SY$. Donc $\frac{SP \times PV}{AV} = SY$, & $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2} = SY^2 \times PV$. Donc par les Cor. 3. & 5. de la Prop. 6. la force centripete est réciproquement comme $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2}$, c'est-à-dire, à cause que AV est donnée, réciproquement comme $SP^2 \times PV^3$ C. Q. F. T.

Cor. 1. Donc, si le point donné S, auquel la force centripete tend sans cesse, se trouve dans la circonférence de ce cercle, comme en V; la force centripete sera réciproquement comme la cinquiéme puissance de la hauteur SP.

Cor. 2. La force par laquelle le corps P décrit le cercle $APTV$ autour du centre S des forces, est à la force par laquelle ce même corps P peut tourner dans le même tems périodique & dans le même cercle autour d'un autre centre quelconque de forces R, comme $SP \times RP^2$ à SG^3, SG étant une droite menée parallelement à RP, & terminée par la tangente PG. Fig. 17.

Car par la construction, la premiere force est à la derniere comme $RP^2 \times PT^3$ à $SP^2 \times PV^3$ c'est-a-dire, comme $SP \times PR^2$ à $\frac{SP^3 \times PV^3}{PT^3}$, ou bien, à cause des triangles semblables PSG, TPV, comme $SP \times PR^2$ à SG^3.

Cor. 3. La force par laquelle le corps P circule dans un orbe quelconque autour d'un centre de forces S, est à la force, par laquelle ce même corps P peut circuler dans le même temps périodique & dans le même orbe autour d'un autre centre quelconque R de forces, comme $SP \times RP^2$ à SG^3, c'est-à-dire, comme la distance du corps au premier centre des forces S, multipliée par le quarré de la distance au second centre R, est au cube de la ligne SG tirée du premier centre S parallelement à la distance du second centre, & terminée par la tangente PG de l'orbite. Car les forces dans cet orbe sont les mêmes à un de ses points quelconques P, que dans le cercle qui a la même courbure.

PROPOSITION VIII. PROBLÉME III.

On demande la loi de la force centripete dans le cas où le corps décrivant un demi-cercle PQA *tend continuellement vers un point* S *si éloigné, que toutes les lignes* PS, RS *tirées à ce point peuvent être regardées comme paralleles.*

Fig. 18. Par le centre C de ce demi cercle, soit tiré le demi diametre CA coupé perpendiculairement en M & en N par les directions de la force centripete. Tirant CP, on aura, à cause des triangles semblables, CPM, PZT & RZQ, $CP^2 : PM^2 :: PR^2 : QT^2$ & par la nature du cercle $PR^2 = QR \times \overline{RN + QN} =$ (les points Q & P coïncidant) $QR \times 2\,PM$. Donc $CP^2 : PM^2 :: QR \times 2\,PM : QT^2$ donc $\frac{QT^2}{QR} = \frac{2PM^3}{CP^2}$ & $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR} = \frac{2PM^3 \times SP^2}{CP^2}$; donc, par les Corol. 1. & 5. de la Prop. 6. la force centripete est réciproquement comme $\frac{2PM^3 \times SP^2}{CP^2}$, c'est-à-dire (en négligeant la raison déterminée de $\frac{2SP^2}{CP^2}$) réciproquement comme PM^3. *C. Q. F. T.*

On tireroit facilement la même chose de la Proposition précédente.

SCHOLIE.

Par un raisonnement à peu près semblable, on trouveroit que si le corps décrivoit une ellipse, une hiperbole, ou une Parabole; en vertu d'une force centripete dirigée à un point très-éloigné, cette force centripete seroit encore réciproquement comme le cube de l'ordonnée qui tend à ce point.

PROPOSITION IX. PROBLÉME IV.

Supposé que le corps tourne dans une spirale PQS *qui coupe tous les rayons* SP, SQ, *&c. sous un angle donné: on demande la loi de la force centripete qui tend au centre de cette spirale.*

Fig. 19. Soit supposé constant l'angle indéfiniment petit PSQ, la figure

$SPRQT$, ayant tous ses angles constans, sera donnée d'espece; donc $\frac{QT}{QR}$ sera donnée aussi; donc $\frac{QT^2}{QR}$ sera comme SP, parce-que, comme on vient de le dire, $SPRQT$ est donnée d'espece.

Supposons présentement que l'angle PSQ change selon une loi quelconque, la droite QR qui soustend l'angle de contact QPR changera, par le Lemme 11. en raison doublée de PR ou de QT. De-là il suit, que la raison de $\frac{QT^2}{QR}$ demeurera la même qu'auparavant, c'est-à-dire qu'elle sera encore comme SP. C'est pourquoi $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR}$ sera comme SP^3; donc par les Corol. 1. & 5. de la Prop. 6. la force centripete sera réciproquement proportionnelle au cube de la distance SP. *C. Q. F. T.*

AUTRE SOLUTION.

La perpendiculaire SY abaissée sur la tangente, & la corde PV du cercle osculateur étant en raison donnée avec SP, SP^3 est proportionnel à $SY^2 \times PV$, c'est-à-dire, par les Cor. 3. & 5. de la Prop. 6. réciproquement proportionnel à la force centripete.

LEMME XII.

Tous les parallélogrammes décrits autour des diametres quelconques conjugués d'une ellipse ou d'une hyperbole donnée sont égaux entr'eux.

Cette Proposition est claire par les Coniques.

PROPOSITION X. PROBLÉME V.

Un corps circulant dans une ellipse : on demande la loi de la force centripete qui tend au centre de cette ellipse.

Soient CA, CB les demi axes de l'ellipse; GP, DK d'autres diametres conjugués; PF, QT des perpendiculaires à ces diametres; Qv une ordonnée au diametre GP; si on acheve le parallélogramme $QvPR$, on aura par les coniques $Pv \times vG : Qv^2$ :: Fig. 20.

$PC^2 : CD^2$. Mais à cause des triangles semblables QvT, PCF, $Qv^2 : QT^2 :: PC^2 : PF^2$. Donc, en composant ces raisons, on aura $Pv \times vG : QT^2 :: PC^2 : CD^2$, & $PC^2 : PF^2$, ou $vG : \frac{QT^2}{Pv} :: PC^2 : \frac{CD^2 \times PF^2}{PC^2}$. Si on écrit présentement QR pour Pv, que l'on mette, à cause du Lemme 12. $BC \times CA$ à la place de $CD \times PF$, & que l'on suppose vG égale à $2PC$, ainsi qu'on le doit lorsque les points P & Q coïncident, on aura, en multipliant les extrémes & les moyens, $\frac{QT^2 \times PC^2}{QR} = \frac{2BC^2 \times CA^2}{PC}$. Donc, par le Cor. 5. de la Prop. 6. la force centripete sera réciproquement comme $\frac{2BC^2 \times AC^2}{PC}$; c'est-à-dire, à cause que $2CB^2 \times CA^2$ est donnée, réciproquement comme $\frac{1}{PC}$; ou, ce qui revient au même, directement comme la distance PC. *C. Q. F. T.*

AUTRE SOLUTION.

Sur la droite PG de l'autre côté du point T par rapport à P, soit pris le point u en sorte que $Tu = Tv$. Soit pris ensuite uV à vG, comme DC^2 à PC^2. Puisque les coniques donnent $Qv^2 : Pv \times vG :: DC^2 : PC^2$, on aura $Qv^2 = Pv \times uV$, & ajoûtant le rectangle $uP \times Pv$ de part & d'autre, il est clair que le quarré de la corde de l'arc PQ sera égal au rectangle $VP \times Pv$; donc le cercle qui touche la section conique en P & qui passe par le point Q passera aussi par le point V. Supposez à présent que les points P & Q se confondent, la raison de uV à vG, qui est la même que la raison de DC^2 à PC^2, deviendra la raison de PV à PG ou de PV à $2PC$; donc $PV = \frac{2DC^2}{PC}$, donc, par le Cor. 3. de la Propos. 6. la force par laquelle le corps P fait sa révolution dans l'ellipse, sera réciproquement comme $\frac{2DC^2}{PC} \times PF^2$, c'est-à-dire, à cauſe que $2 DC^2 \times PF^2$ eſt donné, que cette force ſera directement comme P C. *C. Q. F. T.*

Cor. 1. La force eſt donc comme la diſtance du corps au centre de l'ellipſe : & réciproquement, ſi la force eſt comme la diſtance, le corps décrira ou une ellipſe dont le centre ſera le même que le centre des forces, ou le cercle dans lequel l'ellipſe peut ſe changer.

Cor. 2. Les temps périodiques des révolutions qui ſe font autour du même centre ſont égaux dans toutes les ellipſes; car ces temps ſont égaux dans les ellipſes ſemblables (par les Cor. 3. & 8. de la Prop. 4.) ; mais dans les ellipſes qui ont le grand axe commun, ils ſont les uns aux autres directement comme les aires elliptiques totales, & inverſement comme les particules de ces aires décrites en temps égal, c'eſt-à-dire directement comme les petits axes, & inverſement comme les vîteſſes des corps dans les ſommets principaux, ou directement comme les petits axes, & inverſement comme les ordonnées au même point de l'axe commun. Mais ces deux raiſons directes & inverſes qui compoſent la raiſon des temps ſont alors égales ; donc les temps ſont égaux.

SCHOLIE.

Si le centre de l'ellipſe s'éloigne à l'infini, & qu'elle devienne une parabole, le corps ſe mouvera dans cette parabole ; & la force tendant alors à un centre infiniment diſtant, elle deviendra uniforme. C'eſt le cas traité par *Galilée*. Si (en changeant l'inclinaiſon du plan au cône coupé) la parabole ſe change en une hiperbole, le corps ſe mouvera dans le périmetre de cette hyperbole, la force centripete ſe changeant alors en force centrifuge ; & de même que dans le cercle ou l'ellipſe, ſi les forces tendent au centre de la figure placé ſur l'abſciſſe, en augmentant ou diminuant les ordonnées en une raiſon donnée quelconque, ou en changeant l'angle d'inclinaiſon des ordonnées ſur l'abſciſſe, ces forces augmenteront ou diminueront toujours en raiſon des diſtances au centre, pourvû que les temps périodiques demeurent égaux : ainsi dans toutes les courbes, si les ordonnées augmentent ou diminuent dans une raison donnée quelconque, ou que l'angle de ces ordonnées change d'une façon quelconque, le temps périodique & le centre des forces, qu'on suppose placé à volonté sur l'abscisse, demeurans les mêmes, les forces centripetes aux extrémités des ordonnées correspondantes seront entr'elles comme les distances au centre.

TROISIÉME SECTION.

Du mouvement des corps dans les Sections coniques excentriques.

PROPOSITION XI. PROBLEME VI.

Un corps faisant sa révolution dans une ellipse ; on demande la loi de la force centripete, lorsqu'elle tend à un de ses foyers.

Soient S le foyer de l'ellipse, E la rencontre de SP avec le diametre DK, x celle de la même ligne SP avec l'ordonnée QV, $QxPR$ le parallélogramme fait sur Px & Qx. On voit d'abord
Fig. 21. que EP est égale au demi grand axe AC ; car menant par l'autre foyer H la droite HI parallele à DK, il est clair que EI sera égale à SE à cause de l'égalité qui est entre CH & CS, & par conséquent PE sera égale à la moitié de la somme de PI & de PS, ou, ce qui revient au même, à AC, moitié de la somme de PS & de PH, puisqu'il suit de ce que HI est parallele à RP, & de ce que les angles HPZ & IPR sont égaux, que $HP = PI$. Abaissant ensuite QT perpendiculaire à SP, & nommant L le parametre du grand axe, c'est-à-dire $\frac{2BC^2}{AC}$; on verra que $L \times QR : L \times Pv :: QR : Pv$, c'est-à-dire $:: PE$ ou $AC : PC$; mais $L \times Pv : Gv \times vP :: L : Gv$ & $Gv \times vP : Qv^2 :: PC^2 : CD^2$; de plus, $Qv^2 : Qx^2$ en raison d'égalité (Cor. 2. Lem. 7.)

lorsque les points P & Q coïncident, & Qx^2 ou $Qv^2 : QT^2 ::$ $EP^2 : PF^2$, c'est-à-dire $:: CA^2 : PF^2$ ou (Lem. 12.) $:: CD^2 :$ CB^2; donc, en composant toutes ces raisons on aura $L \times QR :$ $QT^2 ::$ $AC \times L \times PC^2 \times CD^2$ ou $:: 2\,CB^2 \times PC^2 \times CD^2 :$ $PC \times Gv \times CD^2 \times CB^2$ ou $:: 2\,PC : Gv$. Or, puisque $2\,PC$ & Gv sont égales lorsque les points P & Q coïncident, les quantités $L \times QR$ & QT^2 qui leur sont proportionnelles seront donc égales aussi. Multipliant présentement ces quantités égales par $\frac{SP^2}{QR}$, on aura $L \times SP^2 = \frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$. Donc par les Corol. 1. & 5. de la Prop. 6. la force centripete sera réciproquement comme $L \times SP^2$, c'est-à-dire en raison renversée de SP^2. *C. Q. F. T.* Fig. 21.

AUTRE SOLUTION.

Comme la force qui tend au centre de l'ellipse, & par laquelle le corps P peut faire sa révolution dans cette courbe, est par le Cor. 1. de la Prop. 10. proportionnelle à la distance CP du corps au centre C de l'ellipse; en menant CE parallele à la tangente PR de l'ellipse, on verra par le Cor. 3. de la Prop. 7. que la force par laquelle ce même corps P feroit sa révolution autour d'un autre point quelconque S de l'ellipse, seroit comme $\frac{PE^3}{SP^2}$ Fig. 21. en supposant que E soit la rencontre de CE & de la droite SP, tirée au point S. Donc, lorsque le point S sera le foyer, & que par conséquent PE sera constante, la force centripete sera comme $\frac{1}{SP^2}$. *C. Q. F. T.*

Dans ce Probléme, ainsi que dans le Probl. 5. on pourroit se contenter d'appliquer la conclusion trouvée pour le cas de l'ellipse à celui de la Parabole & de l'hyperbole; mais à cause de l'importance de ce Probléme, & de l'étendue de son usage dans les Propositions suivantes, j'ai cru qu'il ne seroit pas inutile de démontrer en particulier les cas de la parabole & de l'hyperbole.

PROPOSITION XII. PROBLÉME VII.

Supposé qu'un corps se meuve dans une hiperbole; on demande la loi de la force centripete qui tend au foyer de cette courbe.

Fig. 22.

Que CA, CB soient les demi axes de l'hyperbole; PG, KD d'autres diametres conjugués; PF une perpendiculaire au diametre KD; & Qv une ordonnée au diametre PG. Qu'on tire SP, qui coupe le diametre DK en E, & l'ordonnée Qv en x, & qu'on acheve le parallélogramme $QRPx$; il est clair que EP sera égale au demi axe transversal AC; car tirant par l'autre foyer H de l'hiperbole la ligne HI parallele à EC, CH étant égale à CS, EI sera égale à ES, & par conséquent EP sera la moitié de la différence des lignes PS & PI, c'est-à-dire, (à cause que IH, PR sont paralleles, & que les angles IPR, HPZ sont égaux) qu'elle sera égale à la moitié de la différence des lignes PS & PH, c'est-à-dire que $EP = AC$.

Cela posé, tirant QT perpendiculaire sur SP, & nommant L le parametre principal de l'hiperbole ou $\frac{2BC^2}{AC}$, on aura $L \times QR : L \times Pv :: QR : Pv$ ou $:: Px : Pv$, c'est-à-dire, à cause des triangles semblables Pxv, PEC, $:: PE : PC$, ou $:: AC : PC$. On aura aussi, $L \times Pv : Gv \times Pv :: L : Gv$; & par la nature des coniques $Gv \times vP : Qv^2 :: PC^2 : CD^2$. De plus Qx^2 QT^2, ou (ce qui revient au même, Cor. 2. Lem. 7. lorsque les points P & Q coïncident) $Qv^2 : QT^2 :: EP^2 : PF^2$, c'est-à-dire, $:: CA^2 : PF^2$, ou Lemme 12. $:: CD^2 : CB^2$, & en composant toutes ces raisons, on aura $L \times QR : QT^2 :: AC \times L \times PC^2 \times CD^2$ ou $2BC^2 \times PC^2 \times CD^2 : PC \times Gv \times CD^2 \times CB^2$, c'est-à-dire $:: 2PC : Gv$: mais lorsque les points P & Q coïncident, $2PC = Gv$. Donc les quantités $L \times QR$ & QT^2 qui leur sont proportionnelles seront aussi égales, & en multipliant ces quantités égales par $\frac{SP^2}{QR}$, on aura $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR} = L \times SP^2$.

Donc, par les Cor. 1. & 5. de la Prop. 6. la force centripete sera réciproquement comme $L \times SP^2$, c'est-àdire, en raison renversée du quarré de la distance SP. *C. Q. F. T.*

AUTRE SOLUTION.

Si on cherche la force en prenant le centre C de l'hiperbole pour centre des forces, on la trouvera proportionnelle à la distance CP. Donc, par le Cor. 3. de la Prop. 7. la force qui tend au foyer S sera comme $\frac{PE^3}{SP^2}$; c'est-à-dire, à cause que PE est donnée, réciproquement comme SP^2. *C. Q F. T.* Fig. 22.

On démontrera de la même maniere que si cette force centripete se change en une force centrifuge, le corps décrira l'hiperbole conjuguée.

LEMME XIII.

Le Parametre d'un diametre quelconque d'une parabole, est quadruple de la distance du sommet de ce diametre au foyer de la Figure.

Cela se démontre par les coniques.

LEMME XIV.

La perpendiculaire, tirée du foyer d'une parabole à sa tangente, est moyenne proportionnelle entre les distances du foyer au point de contact, & au sommet principal de la Figure.

Soient AP une parabole, S son foyer, A son sommet principal, P le point de contact, PO une ordonnée au diametre principal, PM une tangente qui rencontre le diametre principal en M, & SN la ligne perpendiculaire tirée du foyer sur la tangente. Ayant tiré AN, il suivra de l'égalité des lignes MS & SP, MN & NP, MA & AO, que les droites AN & OP sont paralleles, & par conséquent que le triangle SAN est rectangle en A, & semblable aux triangles égaux SNM, SNP; donc $PS : SN :: SN : SA$. *C. Q. F. D.* Fig. 23.

Cor. 1. Donc $PS^2 : SN^2 :: PS : SA$.

Cor. 2. A cause que SA est donnée, SN^2 sera proportionnelle à PS.

Cor. 3. Le concours d'une tangente quelconque PM & de la droite SN, tirée perpendiculairement du foyer sur cette tangente, tombera sur la droite AN qui touche la parabole à son sommet principal.

PROPOSITION XIII. PROBLÊME VIII.

Supposé qu'un corps décrive une parabole, on demande la loi de la force centripete qui tend au foyer de cette courbe.

La construction demeurant la même que dans le Lemme précédent, soient P le lieu de la parabole dans lequel on suppose d'abord le corps, & Q le lieu consécutif, de ce lieu Q tirez QR parallele à SP, & QT perpendiculaire sur cette ligne SP, que v soit la rencontre de PG avec la parallele Qv à la tangente, & x la rencontre de la même parallele Qv avec SP, parce que les triangles Pxv, SPM sont semblables, & que les côtés SM, SP de l'un de ces triangles sont égaux, les côtés Px ou QR, & Pv de l'autre triangle seront aussi égaux. Mais, par les coniques, le quarré de l'ordonnée Qv est égal au rectangle sous le parametre & le segment du diametre Pv, c'est-à-dire, par le Lemme 13. au rectangle $4PS \times Pv$ ou $4PS \times QR$; & par le Cor. 2. du Lemme 7. les points P & Q coïncidant, la raison de Qv à Qx devient la raison d'égalité. Donc, dans ce cas, $Qx^2 = 4PS \times QR$. De plus, à cause des triangles semblables QxT, SPN, $Qx^2 : QT^2 :: PS : SN^2$; c'est-à-dire, Cor. 1. Lem. 14. $:: PS : SA$, ou $:: 4PS \times QR : 4SA \times QR$. Donc $QT^2 = 4SA \times QR$. Multipliant ensuite cette égalité par $\frac{SP^2}{QR}$, on aura $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR} = SP^2 \times 4SA$, ce qui apprend, Cor. 1. & 5. de la Prop. 6. que la force centripete est réciproquement comme $SP^2 \times 4SA$, c'est à-dire, à cause que $4SA$ est donnée que cette force est en raison renversée du quarré de la distance SP. *C. Q. F. T.*

Fig. 24.

Cor. 1. Des trois dernieres Propositions on tire, que si un corps quelconque attiré continuellement vers un centre par une force réciproquement proportionnelle au quarré des distances part d'un lieu P, suivant une droite quelconque PR, & avec une vîtesse quelconque, ce corps se mouvera dans une section conique qui aura pour l'un de ses foyers le centre des forces, & réciproquement; car le foyer, le point de contact, & la position de la tangente étant donnés, on peut décrire la section conique qui aura à ce point une courbure donnée: & deux orbites qui se touchent, & qui sont décrites avec la même vîtesse & la même force centripete ne sçauroient différer entr'elles.

Cor. 2. Si la vîtesse avec laquelle le corps part du lieu P est celle qui peut lui faire décrire la petite ligne PR dans un espace de temps fort court, & que la force centripete puisse faire parcourir à ce même corps dans le même temps l'espace QR: le corps décrira une section conique, dont le parametre sera ce que devient la quantité $\frac{QT^2}{QR}$, lorsque les petites lignes PR & QR diminuent à l'infini. Fig. 25.

Dans ces Corollaires je rapporte le cercle à l'ellipse, & j'excepte le cas où le corps descend en ligne droite au centre.

PROPOSITION XIV. THÉORÉME VI.

Si plusieurs corps font leurs révolutions autour d'un centre commun, & que les forces centripetes soient réciproquement en raison doublée de leurs distances à ce centre, les parametres principaux de leurs orbes seront en raison doublée des aires qu'ils décrivent en temps égal.

Car, par le Cor. 2. de la Prop. 13. le parametre L est égal à ce que devient la quantité $\frac{QT^2}{QR}$ lorsque les points P & Q coïncident; mais la petite ligne QR est dans un temps donné comme la force centripete qui la fait décrire, c'est-à-dire, par Fig. 25.

Du Mouvement des Corps.

l'hipothèse, en raison renversée de SP^2, Donc $\frac{QT^2}{QR}$ est proportionnelle à $QT^2 \times SP^2$, c'est-à-dire, que le parametre L est en raison doublée de l'aire $QT \times SP$. *C.Q.F.D.*

Fig. 25.

Corol. Donc l'aire elliptique totale, & le rectangle formé par les axes, qui lui est proportionnel, est en raison composée de la raison sousdoublée du parametre, & de la raison du temps périodique; car l'aire totale est proportionnelle à l'aire $QT \times SP$ décrite dans un temps donné, & multipliée par le temps périodique.

PROPOSITION XV. THÉOREME VII.

Les mêmes choses étant posées, les temps périodiques dans les ellipses, sont en raison sesquiplée de leurs grands axes.

Puisque le petit axe est moyen proportionnel entre le grand axe & le parametre, le rectangle formé par les axes est donc en raison composée de la raison sousdoublée du paramétre & de la raison sesquiplée du grand axe; mais ce rectangle, par le Cor. de la Prop. 14. est en raison composée de la raison sousdoublée du parametre, & de la raison du temps périodique. Otant donc de part & d'autre la raison sousdoublée du parametre, il restera la raison sesquiplée du grand axe, qui sera la même que la raison du temps périodique. *C.Q.F.D.*

Corol. Les temps périodiques sont donc les mêmes dans les ellipses, & dans les cercles, dont les diametres sont égaux aux grands axes des ellipses.

PROPOSITION XVI. THÉORÉME VIII.

Les mêmes choses étant posées, si par les points où l'on suppose les corps dans chaque orbite on mene des tangentes, & qu'on abbaisse du foyer commun des perpendiculaires sur les tangentes, les vitesses de ces corps seront en raison composée de la raison inverse de ces perpendiculaires

perpendiculaires, & de la raison directe sousdoublée des parametres principaux.

Du foyer S à la tangente PR tirez la perpendiculaire SY, la vîtesse du corps P sera réciproquement en raison sousdoublée de la quantité $\frac{SY^2}{L}$; car cette vîtesse est comme le petit arc PQ décrit dans une particule de temps donnée, c'est-à-dire, par le Lemme 7. comme la tangente PR, ou ce qui revient au même, (à cause que $PR : QT :: SP : SY$) comme $\frac{SP \times QT}{SY}$, c'est-à-dire, comme SY réciproquement & $SP \times QT$ directement; or $SP \times QT$ est comme l'aire décrite en un temps donné, c'est-à-dire par la Prop. 14. en raison sousdoublée du parametre. *C. Q. F. D.* Fig. 26.

Cor. 1. Les parametres principaux sont en raison composée de la raison doublée des perpendiculaires, & de la raison doublée des vîtesses.

Cor. 2. Les vîtesses des corps, dans les plus grandes & les moindres distances du foyer commun, sont en raison composée de la raison inverse des distances, & de la raison directe sousdoublée des parametres principaux; car alors les perpendiculaires sont les distances elles-mêmes.

Cor. 3. Donc la vîtesse, dans une section conique à la plus grande ou à la plus petite distance du foyer, est à la vîtesse dans un cercle à la même distance du centre, en raison sousdoublée du parametre au double de cette distance.

Cor. 4. Les vîtesses des corps qui font leurs révolutions dans des ellipses sont les mêmes dans leurs moyennes distances du foyer commun, que celles des corps qui circulent dans des cercles aux mêmes distances; c'est-à-dire, par le Cor. 6. de la Prop. 4. que ces vîtesses sont en raison inverse sousdoublée des distances. Car les perpendiculaires sont moitié des petits axes, & les petits axes sont comme les moyennes proportionnelles entre les moyennes distances & les parametres. Composant donc la raison inverse des perpendiculaires avec la raison sousdoublée directe des parametres, il en viendra la raison sousdoublée inverse des distances.

Cor. 5. Dans la même figure, ou même dans diverses figures, pourvû que les parametres principaux soient égaux, la vîtesse du corps est réciproquement comme la perpendiculaire tirée du foyer à la tangente.

Cor. 6. Dans la parabole, la vîtesse est réciproquement en raison sousdoublée de la distance du corps au foyer; dans l'ellipse elle varie plus que dans cette raison, & moins dans l'hyperbole. Pour démontrer ces trois vérités, il suffit de remarquer (Cor. 2. Lem. 14.) que la perpendiculaire abbaissée du foyer sur la tangente de la parabole est en raison sousdoublée de la distance; que dans l'ellipse cette perpendiculaire est dans une plus grande raison, & que dans l'hiperbole elle est dans une moindre raison.

Cor. 7. Dans la parabole, la vîtesse, à une distance quelconque du foyer, est à la vîtesse dans un cercle à la même distance du centre en raison sousdoublée de deux à un. Dans l'ellipse elle est dans une moindre raison, & dans une plus grande dans l'hiperbole; car, par le Cor. 2. de cette Proposition, la vîtesse au sommet de la parabole est dans cette proportion, &, par les Corol. 6. de cette Proposition & de la Proposition 4. cette proportion se conserve à toutes les distances. D'où il suit qu'à chaque point de la parabole, la vîtesse est égale à la vîtesse du corps qui feroit sa révolution dans un cercle à la moitié de la distance du centre; que dans l'ellipse elle est moindre, & plus grande dans l'hiperbole.

Cor. 8. La vîtesse d'un corps qui circule dans une section conique quelconque est à la vîtesse d'un corps qui fait sa révolution dans un cercle à la distance de la moitié du parametre principal, comme cette distance est à la perpendiculaire abaissée du foyer de la section sur la tangente. La démonstration en est évidente par le Cor. 5.

Cor. 9. Donc, puiſque (*Cor.* 6. Prop. 4.) la vîteſſe d'un corps qui tourne dans ce cercle ſeroit à la vîteſſe d'un corps qui tourne dans un autre cercle quelconque en raiſon ſousdoublée inverſe des diſtances, la vîteſſe d'un corps qui tourne dans une ſection conique ſera à la vîteſſe de celui qui tourne dans un cercle à la même diſtance, comme la moyenne proportionnelle entre cette diſtance commune & la moitié du parametre principal de la ſection conique eſt à la perpendiculaire abaiſſée du foyer commun ſur la tangente de cette ſection conique.

PROPOSITION XVII. PROBLÈME IX.

Suppoſant que la force centripete ſoit réciproquement proportionnelle au quarré de la diſtance au centre, & que la quantité abſolue de cette force ſoit connue, on demande la courbe qu'un corps décrit en partant d'un lieu donné, avec une vîteſſe donnée, ſuivant une ligne droite donnée.

Que la force centripete qui tend au point *S* ſoit celle qui fait circuler le corps *p* dans une orbite donnée *pq*, & que la vîteſſe de ce corps au point *p* ſoit connue. Que le corps *P* parte du lieu *P*, ſuivant la ligne *PR* avec une vîteſſe donnée, & qu'en vertu de cette vîteſſe & de la force centripete, il décrive la ſection conique *PQ*. Que la droite *PR* touche cette courbe en *P*, & que *pr* touche pareillement l'orbite *pq* en *p*; ſi l'on imagine des perpendiculaires tirées du point *S* à ces tangentes; il eſt clair, par le Cor. 1. de la Prop. 16. que le principal parametre de la ſection conique cherchée ſera au principal parametre de l'orbite donnée, en raiſon compoſée de la raiſon doublée des perpendiculaires, & de la raiſon doublée des vîteſſes, ainſi il ſera donné. Soit *L* le parametre de la ſection conique cherchée, le foyer *S* de cette même ſection étant auſſi donné, en faiſant l'angle *RPH* égal au complément à deux droits de l'angle *RPS*, on aura la poſition de la ligne *PH*, qui paſſe par l'autre foyer; car tirant *SK* perpendiculaire à *PH*, Fig. 27. & 28.

& ſuppoſant que BC ſoit le demi axe conjugué, on aura, $SP^2 - 2KP \times PH + PH^2 = SH^2 = 4CH^2 = 4BH^2 - 4BC^2 = \overline{SP+PH}^2 - L \times \overline{SP+PH} = SP^2 + 2SP \times PH + PH^2 - L \times \overline{SP+PH}$, & ajoûtant de part & d'autre $2KP \times PH - SP^2 - PH^2 + L \times \overline{SP+PH}$, il viendra $L \times \overline{SP+PH} = 2SP \times PH + 2KP \times PH$ ou $SP + PH : PH :: 2SP + 2KP : L$. d'où PH eſt donnée tant de longueur que de poſition.

Si la vîteſſe du corps au point P eſt telle que le parametre L ſoit moindre que $2SP + 2KP$, la ligne PH tombera du même côté de la tangente PR que la ligne PS; ainſi la courbe ſera une ellipſe, & comme ſes foyers S & H ſeront donnés, ſon grand axe $SP + PH$ ſera auſſi donné.

Fig. 27.

Si la vîteſſe du corps eſt telle, que le parametre L ſoit égal à $2SP + 2KP$, la ligne PH ſera infinie, & par conſéquent la courbe ſera une parabole dont l'axe SH parallele à la ligne PK ſera donné.

Si le corps part du lieu P avec une vîteſſe encore plus grande, il faudra prendre la ligne PH de l'autre côté de la tangente; ainſi la tangente paſſant entre les foyers, la courbe ſera une hiperbole dont l'axe principal ſera égal à la différence des lignes SP & PH, & ſera par conſéquent donné.

Dans tous ces cas, ſi l'on ſuppoſe que le corps P ſe meuve dans la ſection conique ainſi trouvée, il eſt clair, par les Prop. 11. 12. & 13. que la force centripete ſera réciproquement comme le quarré de la diſtance du corps au centre S des forces; ainſi la ligne PQ repréſentera éxactement celle que le corps décrira par une telle force en partant du lieu donné P, avec une vîteſſe donnée, & ſuivant une ligne droite PR donnée de poſition. *C. Q. F. F.*

Cor. 1. Dé-là, le ſommet principal D, le parametre L, & le foyer S étant donnés, on aura dans toute ſection conique l'autre foyer H, en prenant DH à DS, comme le parametre à la différence entre le parametre & $4DS$; car la proportion $SP + PH$:

$PH :: 2SP + 2PK : L$ devient dans le cas de ce Corollaire, $DS + DH : DH :: 4DS : L$, & en divisant on aura $DS : DH :: 4DS - L : L$.

Cor. 2. Ainsi, si la vîtesse du corps dans le sommet principal D est donnée, on trouvera facilement l'orbite, en déterminant d'abord son parametre par cette condition (Cor. 3. de la prop. 16.) qu'il soit au double de la distance DS en raison doublée de cette vîtesse donnée à la vîtesse du corps qui tourne dans un cercle à la distance DS, & en prenant ensuite DH à DS, comme le parametre est à la différence entre le parametre & $4DS$. Fig. 27.

Cor. 3. De-là, si le corps se meut dans une section conique quelconque, & qu'il soit dérangé de son orbite par une impulsion quelconque ; on pourra connoître la nouvelle orbite dans laquelle il circulera ensuite, en composant le mouvement que ce corps a déja avec le mouvement que cette impulsion seule lui auroit imprimé; car par ce moyen on aura le mouvement du corps lorsqu'il part du lieu donné dans lequel il a reçu l'impulsion suivant une ligne droite donnée de position.

Cor. 4. Et si ce corps est continuellement troublé dans sa révolution par quelque force qui lui soit imprimée extérieurement, on connoîtra à peu près la courbe qu'il décrira, en prenant les changemens que cette force produit dans plusieurs points quelconques, & en estimant par l'ordre de la série les changemens continuels dans les lieux intermédiaires.

SCHOLIE.

Si le corps P par une force centripete qui tend à un point quelconque donné R, se meut dans le périmetre d'une section conique quelconque donnée, dont le centre soit C; & qu'on cherche la loi de la force centripete : on n'aura qu'à mener CG parallele au rayon RP, & qui rencontre la tangente PG en G, & cette force sera, par le Cor. 1. & la Scholie de la Prop. 10. & par le Cor. 3. de la Prop. 7. comme $\frac{CG^3}{RP^2}$. Fig. 29.

Du Mouvement des Corps.

QUATRIÈME SECTION.

De la détermination des orbes elliptiques, paraboliques & hiperboliques, lorsque l'un des foyers est donné.

LEMME XV.

Si des foyers S & H *d'une hiperbole ou d'une ellipse quelconque, on tire à un troisiéme point quelconque* V *deux lignes droites* SV, HV, *l'une desquelles* HV *soit égale à l'axe principal de la figure, c'est-à-dire, à l'axe dans lequel les foyers se trouvent, & qu'on éleve sur le milieu de l'autre ligne* SV *la perpendiculaire* TR, *cette perpendiculaire touchera en quelque point la section conique; & réciproquement, si elle la touche, la ligne* HV *sera égale à l'axe principal de la Figure.*

Fig. 30.

Soient, le point *R* la rencontre de la perpendiculaire *TR* avec la ligne *HV* prolongée, s'il est néceſſaire, & *SR* la droite tirée de *S* à ce point *R*; les lignes *TS*, *TV* étant égales, les lignes *SR* & *VR* le feront auſſi, ainsi que les angles *TRS*, *TRV*; donc, le point *R* sera à la section conique, & la perpendiculaire *TR* sera tangente de cette section au point *R*. L'inverse se démontreroit de même. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION XVIII. PROBLÊME X.

Le foyer, & les axes principaux étant donnés, décrire les trajectoires elliptiques & hiperboliques qui passent par des points donnés, & qui touchent des droites données de position.

Fig. 31.

Soit *S* le foyer commun de ces trajectoires, *AB* une ligne égale à l'axe principal d'une quelconque de ces trajectoires, *P* un point par lequel cette courbe doit paſſer, & *TR* une ligne qu'elle doit toucher : soit de plus le cercle *HG* décrit du centre *P* & de l'intervalle $AB - SP$, si l'orbite est une ellipse, ou $AB + SP$, si c'est une hiperbole : abaissant ensuite sur la tangente *TR* la perpendiculaire *ST* prolongée en *V*, en sorte que $TV = ST$, du centre *V* & de l'intervalle *AB* décrivez le cercle *FH*.

Par cette méthode, soit qu'on ait les deux points *P* & *p*, ou les deux tangentes *TR* & *tr*, ou le point *P* & la tangente *TR*, on décrira toujours deux cercles. Soit *H* leur intersection commune, décrivant alors une trajectoire qui ait pour axe principal l'axe donné, & les points *S* & *H* pour foyers, le Probléme sera résolu. Car cette trajectoire passera par le point *P*, à cause que $PH + SP$ dans l'ellipse, & $PH - SP$ dans l'hiperbole, seront égales à l'axe. De plus, par le Lemme précédent, la ligne *TR* touchera cette trajectoire. On prouvera par le même raisonnement ou qu'elle passera par les deux points *P* & *p*, ou qu'elle aura pour tangentes les lignes *TR*, *tr*. C. Q. F. F. Fig. 31.

PROPOSITION XIX. PROBLÉME II.

Autour d'un foyer donné décrire une trajectoire parabolique, qui passe par des points donnés, & qui touche des lignes droites données de position.

S étant le foyer, *P* un point de la trajectoire à décrire, & *TR* une tangente de cette trajectoire, du centre *P*, & de l'intervalle *PS* soit décrit le cercle *FG*, & soit abaissé de *S* sur la tangente *TR* la perpendiculaire *ST* qu'on prolongera en *V*, ensorte que $TV = ST$. On décrira un autre cercle *fg* de la même maniere si on a une autre point donné *p*; ou bien on trouvera un autre point *v* si on a une autre tangente *tr*; cela fait on ménera la droite *IF* qui touche les deux cercles *FG*, *fg*, si les deux points *P* & *p* sont donnés, ou qui passe par les deux points *V* & *v*, si les deux tangentes *TR* & *tr* sont données, ou enfin qui touche le cercle *FG*, & passe par le point *V*, si on a le point *P*, & la tangente *TR*. Fig. 32.

Abaissant ensuite sur *FI* la perpendiculaire *SI*, coupée en deux parties égales au point *K*, & décrivant sur l'axe *SK* une parabole dont le sommet principal soit *K*, le Probléme sera résolu. Car cette parabole, à cause que *SK*, *IK* sont égales, ainsi que *SP* & *FP*, passera par le point *P*, &, par le Lemme 14. Cor. 3. elle aura *TR* pour tangente, à cause que *ST* & *TV* sont égales, & que l'angle *STR* est droit. *C. Q. F. F.*

PROPOSITION XX. PROBLÉME XII.

Décrire une trajectoire quelconque donnée d'espece, autour d'un foyer donné, laquelle passe par des points donnés, & touche des lignes droites données de position.

Fig. 33. *Cas* 1. Soit proposé d'abord de décrire la trajectoire *ABC* qui passe par deux points *B* & *C*, & qui ait pour foyer le point donné *S*.

Comme cette trajectoire est donnée d'espece, la raison de l'axe principal à la distance des foyers sera donnée. Prenez *KB* à *BS*, & *LC* à *SC* dans cette raison; décrivez deux cercles des centres *B* & *C*, & des intervalles *BK* & *CL*; sur la droite *KL* qui touche ces cercles en *K* & en *L*, abaissez la perpendiculaire *SG*, & coupez cette ligne *SG* en *A* & en *a*, en sorte que *GA* soit à *AS*, & *Ga* à *aS*, comme *KB* à *BS*; & des sommets *A*, *a*, & sur l'axe *Aa* décrivez ensuite une trajectoire, le Probléme sera résolu.

Car soit *H* l'autre foyer de la Figure décrite, puisqu'on a, $GA : AS :: Ga : aS$, on aura, en divisant, $Ga - GA$ ou $Aa : aS - AS$ ou *SH* dans la même raison, & par conséquent dans la raison qui est entre l'axe principal de la Figure cherchée & la distance de ses foyers. La Figure décrite est donc de la même espece que la Figure à décrire. Et comme *KB* est à *BS* & *LC* à *CS* dans la même raison, cette courbe passera par les points *B* & *C*, comme il est clair par les coniques.

Fig. 34. *Cas* 2. Soit proposé maintenant de décrire autour du foyer *S* donné, une trajectoire qui soit touchée quelque part par les deux lignes *TR* & *tr*.

Abaissez du foyer sur ces tangentes les perpendiculaires ST, St, & prolongez ces perpendiculaires en V, & en v, en sorte que TV & tv soient égales à TS & à tS. Coupez la ligne Vv en deux parties égales au point O, élevez ensuite la perpendiculaire indéfinie OH, & coupez en K & en k la droite VS prolongée indéfiniment, en sorte que VK soit à KS & Vk à kS, comme l'axe principal de la trajectoire à décrire est à la distance des foyers. Enfin sur le diametre Kk décrivez un cercle qui coupe la ligne OH en H; & tracez une trajectoire dont les foyers soient S & H, & l'axe principal une ligne égale à VH; & le Probléme sera résolu.

Car coupant kK en deux parties égales au point X, & tirant les lignes HX, HS, HV, Hv: puisque $VK:KS::Vk:kS$, & par conséquent $::VK+Vk:KS+kS$ & $::Vk-VK:kS-KS$, c'est-à-dire $::2VX:2KX$, & $::2KX:2SX$, ou ce qui revient au même $::VX:HX$ & $::HX:SX$; les triangles VXH, HXS sont semblables: ce qui donne $VH:HS::VX:XH$, c'est-à-dire $::VK:KS$. De-là il suit que l'axe principal VH de la trajectoire décrite est à la distance SH de ses foyers, dans la même raison que celle qui est entre l'axe principal de la trajectoire à décrire & la distance de ses foyers, & que par conséquent la trajectoire est de l'espece demandée. De plus, comme VH & vH sont égales à l'axe principal, & que les lignes VS, vS sont coupées en deux parties égales par les perpendiculaires TR, tr, il est clair, par le Lemme 15. que la trajectoire décrite aura encore la propriété demandée d'être touchée par les droites TR, tr. C. Q. F. F. Fig. 34.

Cas 3. Le foyer S étant donné, on demande une trajectoire qui touche la droite TR en un point donné R. Fig. 35.

Sur la droite TR abaissez la perpendiculaire ST, & prolongez la en V, en sorte que $TV = ST$. Tirez ensuite VR & coupez en k & en K la droite VS prolongée indéfiniment en sorte que VK soit à SK & Vk à Sk comme l'axe principal de l'ellipse à décrire eſt à la diſtance des foyers; ayant décrit enſuite ſur le diametre Kk un cercle qui coupe en H la droite VR prolongée, tracez une trajectoire dont les foyers ſoient S & H, & qui ait pour axe principal une ligne égale à VH, & le Probléme ſera réſolu.

Car il eſt clair, par ce qui a été démontré dans le ſecond cas, que $VH : SH :: VK : SK$, & par conſéquent comme l'axe principal de la trajectoire à décrire eſt à la diſtance entre ſes foyers, la trajectoire décrite ſera donc de même eſpece que la trajectoire à décrire. De plus, il eſt clair par les coniques, que cette trajectoire ſera touchée au point R par la droite TR qui coupe l'angle VRS en deux parties égales. *C. Q. F. F.*

Fig. 36. & 37. *Cas* 4. Soit enfin propoſé de décrire autour du foyer S la trajectoire APB qui ſoit touchée par la droite TR, & qui paſſe par un point quelconque P donné hors de la tangente, & qui ſoit ſemblable à la Figure apb décrite des foyers s, h, & ſur l'axe principal ab.

Abaiſſez ſur la tangente TR la perpendiculaire ST, & prolongez-la en V, en ſorte que $TV = ST$. Faites les angles hsq, shq reſpectivement égaux aux angles VSP, SPV, du centre q & d'un intervalle qui ſoit à ab, comme SP à VS, décrivez un cercle qui coupe la figure apb en p, joignez les points s & p & tirez SH qui ſoit à sh, comme SP à sp, & qui faſſe l'angle PSH égal à l'angle psh, & l'angle VSH égal à l'angle psq. Enſuite, des foyers H & S ſur l'axe principal AB égal à la diſtance VH, décrivez la ſection conique, & le Probléme ſera réſolu.

Car ſi on tire sv qui ſoit à sp, comme sh à sq, & qui faſſe l'angle vsp égal à l'angle hsq, & l'angle vsh égal à l'angle psq, les triangles svh, spq ſeront ſemblables, & par conſéquent on aura $vh : pq :: sh : sq$, c'eſt-à-dire, à cauſe des triangles ſemblables $VSP : hsq :: SV : SP$ ou $ab : pq$. Donc $vh = ab$. De plus, à cauſe des triangles ſemblables VSH, vsh $VH : SH :: vh : sh$, c'eſt-à-dire, que l'axe de la ſection conique

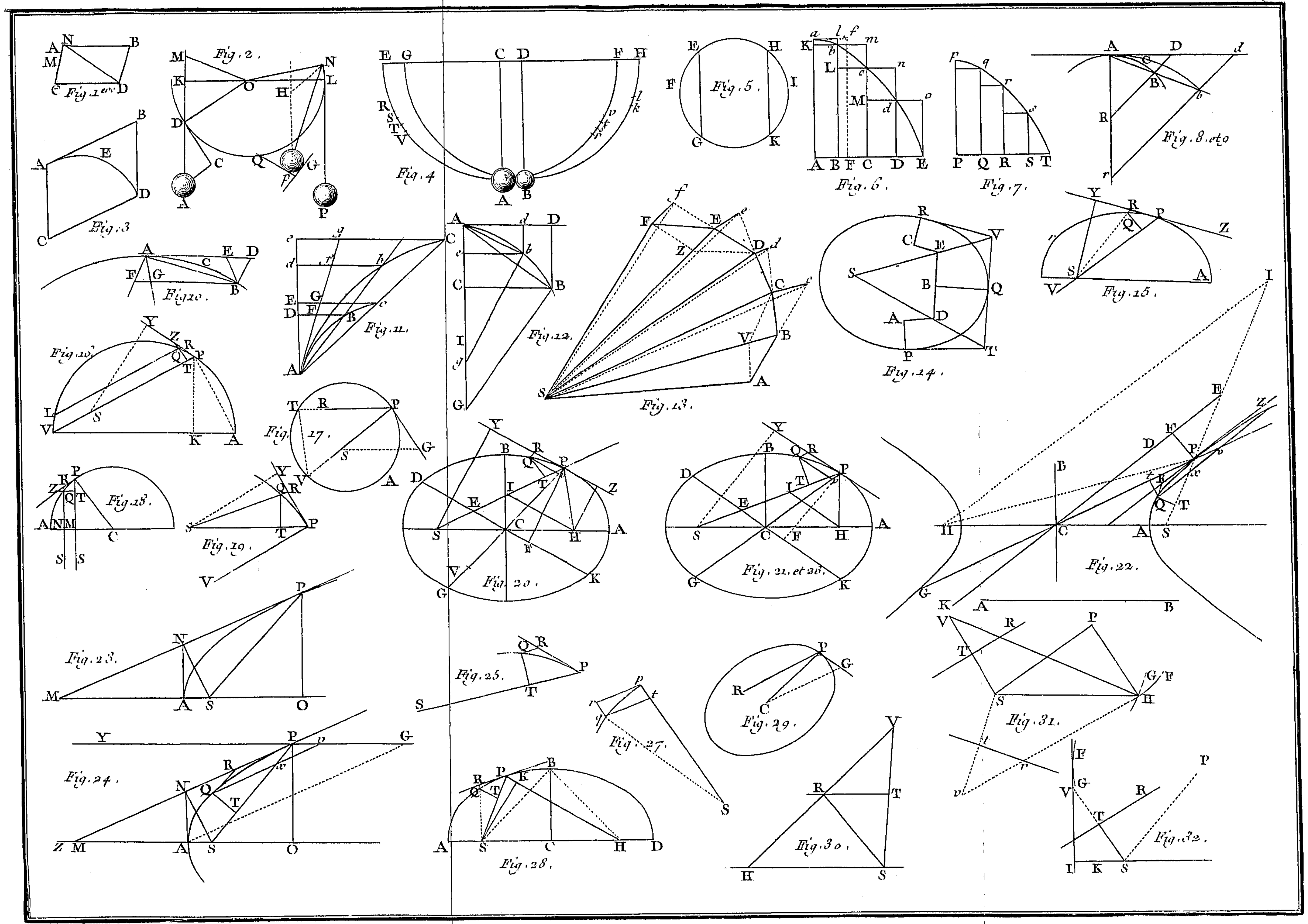


Fig. 1ere.
Fig. 2.
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8. et 9
Fig. 10.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21. et 26.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.

décrite eſt à l'intervalle de ſes foyers comme l'axe ab à l'intervalle sh des foyers; & par conſéquent la figure décrite eſt ſemblable à la figure aph. De plus, cette figure paſſe par le point P, parce que le triangle PSH, eſt ſemblable au triangle psh; & elle eſt touchée par la droite TR, à cauſe que ſon axe eſt égal à VH, & que VS eſt coupée en deux parties égales par TR. C. Q. F. F.

Fig. 36. & 37.

LEMME XVI.

Trouver un point, duquel tirant des lignes droites à trois points donnés, les différences de ces trois droites ſoient nulles ou données.

Cas 1. Soient A, B, C, les points donnés, & Z, le quatriéme point qu'il faut trouver; la différence des lignes AZ, BZ étant donnée, le point Z ſera à une hiperbole qui aura pour foyers les points A & B, & pour axe principal la différence donnée. Soit MN cet axe, prenant $PM : MA :: MN : AB$, élevant enſuite PR perpendiculaire ſur AB, & abaiſſant ZR perpendiculaire ſur PR; on aura, par la nature de l'hiperbole, $ZR : AZ :: MN : AB$. Par le même raiſonnement on trouvera que le point Z ſera à une autre hiperbole dont les foyers ſeront les points A & C, & l'axe principal la différence entre AZ & CZ, & on trouvera auſſi la droite QS perpendiculaire ſur AC, à laquelle QS, ſi on méne la perpendiculaire ZS d'un point quelconque Z de cette hiperbole, ZS ſera à AZ comme la différence entre AZ & CZ eſt à AC. Cela poſé, il eſt aiſé de remarquer que les raiſons de ZR & de ZS à AZ ſont données, & que par conſéquent celle que ZR & ZS ont entr'elles eſt donnée auſſi. Donc, ſi les droites RP, SQ prolongées ſe rencontrent en T, & qu'on tire TZ & TA, la figure $TRZS$ ſera donnée d'eſpece, & la droite TZ dans laquelle eſt placé le point cherché Z ſera donnée de poſition. De plus, la droite TA ſera donnée auſſi ainſi que l'angle ATZ; & parce que les raiſons de AZ & de TZ

Fig. 38.

à ZS sont données, celle de AZ & de TZ entr'elles sera donnée aussi, & par conséquent le triangle entier ATZ, dont le sommet est le point cherché Z, sera enfin donné. *C. Q. F. T.*

Cas 2. Si deux de ces trois lignes, comme AZ & BC, sont égales, tirez la droite TZ en sorte qu'elle partage la droite AB en deux parties égales, & cherchez ensuite le triangle ATZ comme ci-dessus.

Fig. 38.

Cas 3. Si ces trois lignes sont égales, le point Z sera placé dans le centre du cercle qui passe par les points A, B, C. C. Q. F. T.

Ce Probléme se résoud aussi par le livre des Touchantes d'*Apollonius*, restitué par *Viet*.

PROPOSITION XXI. PROBLÉME XIII.

Décrire une trajectoire autour d'un foyer donné, laquelle passe par des points donnés, & touche des droites données de position.

Que le foyer S, le point P, & la tangente TR soient donnés, & qu'il s'agisse de trouver l'autre foyer H.

Abaissez sur la tangente la perpendiculaire ST, & prolongez-la en Y, en sorte que $TY = ST$: YH, sera alors égale à l'axe principal. Tirez ensuite SP, HP, & SP sera la différence entre HP & l'axe principal. De la même maniere, si on a plusieurs tangentes TR, ou plusieurs points P, on trouvera toujours autant de lignes YH, ou PH, tirées de ces points Y ou P, au foyer H, lesquelles seront égales aux axes, ou en différeront de longueurs données SP, & ces lignes seront par conséquent égales entre elles, ou bien elles auront des différences données, & de-là il suit qu'on aura par le Lemme précédent l'autre foyer H. Ayant donc les foyers & la longueur de l'axe (qui sera YH, ou bien la droite égale à $PH \pm SP$, c'est-à-dire, $PH + PS$, si la trajectoire est une ellipse, & $PH - SP$, si c'est une hiperbole) on aura la trajectoire. *C. Q. F. F.*

Fig. 39.

SCHOLIE.

Lorsque la trajectoire est une hiperbole, je ne prends pour trajectoire qu'une des hyperboles opposées; car le corps, en persévérant dans son mouvement, ne peut jamais passer dans l'autre hyperbole.

Le cas où trois points sont donnés se résout plus facilement de cette maniere: Soient B, C, D les points donnés. Tirez les lignes BC, CD, & prolongez-les en E, & en F, en sorte que $EB:EC::SB:SC$, & que $FC:FD::SC:SD$. Ayant mené EF, & l'ayant prolongée, abaissez-lui les perpendiculaires SG, BH, ensuite sur GS prolongée infiniment prenez $GA:AS$ & $Ga:aS::HB:BS$; A sera le sommet, & Aa l'axe principal de la trajectoire, laquelle, selon que GA sera plus grand, égal, ou plus petit que AS, sera une ellipse, une parabole, ou une hiperbole. Dans le premier cas, le point a tombera du même côté que le point A, par rapport à la ligne GF; dans le second cas il s'éloignera à l'infini; & dans le troisiéme il tombera du côté opposé au point A, par rapport à la ligne GF. Car si on abaisse sur GF les perpendiculaires CI, DK, on aura, $IC:HB::EC:EB$, c'est-à-dire, $::SC:SB$, & réciproquement $IC:SC::HB:SB$ ou $::GA:SA$, & par un semblable raisonnement KD sera à SD dans la même raison. Donc, les points B, C, D sont à la section conique, dans laquelle toutes les droites tirées du foyer S à la courbe sont aux perpendiculaires abaissées des mêmes points de la courbe sur GF, dans cette raison donnée.

Fig. 40.

Le célébre Géometre *la Hire* a donné une solution à-peu-près semblable de ce Probléme au huitiéme Livre de ses Coniques, Prop. 25.

Du Mouvement des Corps.

CINQUIÉME SECTION.

De la détermination des Orbites lors qu'aucun des foyers n'est donné.

LEMME XVII.

Si d'un point quelconque P *d'une Section conique donnée, on mène les quatre droites* PQ, PR, PS, PT, *qui fassent chacune un angle donné avec chacun des quatre côtés indéfiniment prolongés* AB, CD,
Fig. 41. AC, DB *d'un trapeze quelconque* ABCD *inscrit dans la section conique, le rectangle des droites* PQ × PR *tirées à deux côtés opposés, sera en raison donnée au rectangle des droites* PS × PT *tirées aux deux autres côtés opposés.*

Cas 1. Supposons premierement que les lignes tirées aux côtés opposés soient paralleles à l'un ou à l'autre des côtés restans, que *PQ* & *PR*, par exemple, soient paralleles au côté *AC*, & *PS* & *PT* au côté *AB*; de plus, que deux de ces côtés opposés comme *AC* & *BD* soient paralleles l'un à l'autre. Dans ce cas, la droite qui coupe ces côtés paralleles en deux parties égales, sera un des diametres de la section conique, & coupera aussi la
Fig. 41. ligne *RQ* en deux parties égales. Soit *O* la rencontre de ce diametre & de *RQ*, *PO* sera une ordonnée à ce même diametre, & *OK* prise égale à *OP*, & placée sur son prolongement sera l'ordonnée opposée. Les points *A*, *B*, *P* & *K* étant donc à la section conique, il est clair (Prop. 17. 19. 21. 23. du Liv. III. des coniques d'*Apollonius*) à cause que *PK* coupe *AB* sous un angle donné, que le rectangle *PQ* × *QK* sera en raison donnée au rectangle *AQ* × *QB*. Mais *QK* = *PR*, puisque ces lignes sont les différences des lignes égales *OK*, *OP* & *OQ*, *OR*; donc les rectangles *PQ* × *QK*, & *PQ* × *PR* sont aussi égaux; & par

conféquent le rectangle $PQ \times PR$ eft au rectangle $AQ \times QB$, c'eft-à-dire au rectangle $PS \times PT$, en raifon donnée. *C. Q. F. D.*

Cas 2. Suppofons à préfent que les côtés oppofés AC, BD du trapeze ne foient point paralleles, tirez Bd parallele à AC & qui rencontre la droite ST en t, & la fection conique en d, tirez de plus Cd qui coupe la ligne PQ en r, & DM parallele à PQ & qui coupe Cd en M & AB en N, à caufe des triangles femblables BTt, DBN, on aura Bt, ou $PQ : Tt :: DN : NB$, & ainfi $Rr : AQ$ ou $PS :: DM : AN$. Multipliant alors les antécédens par les antécédens, & les conféquens par les conféquens, le rectangle $ND \times DM$ fera au rectangle $AN \times NB$, comme le rectangle $PQ \times Rr$ eft au rectangle $PS \times Tt$; mais par le cas 1. le rectangle $PQ \times Pr$ fera au rectangle $PS \times Pt$ dans la même raifon. Donc cette raifon fera auffi celle du rectangle $PQ \times PR$ au rectangle $PS \times PT$. C. Q. F. D. Fig. 42.

Cas 3. Suppofons enfin que les quatre lignes PQ, PR, PS, PT ne foient pas paralleles aux côtés AC, AB, mais qu'elles leur foient inclinées d'une façon quelconque.

Ayant tiré Pq, Pr paralleles à AC; Ps, Pt paralleles à AB; les angles des triangles PQq, PRr, PSs, PTt feront donnés, ainfi que les rapports de PQ à Pq, de PR à Pr, de PS à Ps, & de PT à Pt. Donc les raifons compofées de $PQ \times PR$ à $Pq \times Pr$ & de $PS \times PT$ à $Ps \times Pt$ feront données. Mais, par ce qui a été démontré ci-deffus, la raifon de $Pq \times Pr$ à $Ps \times Pt$ eft donnée. Donc la raifon de $PQ \times PR$ à $PS \times PT$ l'eft auffi. *C.Q.F.D.* Fig. 43.

LEMME XVIII.

Les mêmes chofes étant pofées, fi les points P *font tels que les rectangles des droites* PQ × PR, *menées à deux côtés oppofés du trapeze, foient en raifon donnée aux rectangles des lignes* PS × PT, *menées aux deux autres côtés; ces points* P *feront à une fection conique circonfcrite au trapeze.* Fig. 44.

Si par quelqu'un du nombre infini des points P, par le point p, par éxemple, & par les quatre points A, B, C, D, on imagine une ſection conique, je dis que cette ſection conique paſſera par tout autre point P trouvé de la même maniere. Si on le nie, qu'on ſuppoſe donc que AP coupe cette courbe en quelque point autre que P, comme en b. Tirant de ces points p & b, aux côtés du trapeze, & ſous les angles donnés les droites pq, pr, ps, pt, & bk, bn, bf, bd; on aura, par le Lemme 17, $pq \times pr : ps \times pt :: bk \times bn : bf \times bd$. Mais $PQ \times PR$ eſt à $PS \times PT$ dans la même raiſon, par l'hipotheſe. Donc, à cauſe que les trapezes $bkAf$, $PQAS$ ſont ſemblables, on aura $PQ : PS :: bk : bf$, & par conſéquent, en diviſant les termes de la premiere proportion par les termes correſpondans de celle-ci, on aura $bn : bd :: PR : PT$. Donc les trapezes équiangles $Dnbd$, $DRPT$ ſont ſemblables; d'où l'on tire que leurs diagonales Db, DP coïncident, & qu'ainſi le point b tombe dans l'interſection des droites AP, DP, c'eſt-à-dire, qu'il coïncide avec le point P, ou, ce qui revient au même, que le point P, quelque part qu'on le prenne, ſera à la ſection conique ainſi déterminée. *C. Q. F. D.*

Fig. 44.

Cor. De-là, ſi les trois droites PQ, PR, PS ſont menées du même point P ſous des angles donnés à autant d'autres droites AB, CD, AC données de poſition, & que le rectangle, ſous deux de ces lignes $PQ \times PR$, ſoit au quarré de la troiſiéme PS en raiſon donnée : le point P, d'où ces lignes ſeront tirées, ſera à la ſection conique que les lignes AB, CD touchent en A & en C; & réciproquement.

Fig. 44.

Car ſi la ligne BD coïncide avec la ligne AC, la poſition des trois lignes AB, CD, AC demeurant la même, & qu'enſuite la ligne PT coïncide auſſi avec la ligne PS : le rectangle $PS \times PT$ deviendra le quarré de PS, & les droites AB, CD qui coupoient la courbe dans les points A & B, C & D, ne pourront plus la couper dans ces points lorſqu'ils ſe confondent, mais alors elles la toucheront.

SCHOLIE.

Fig. 44.

On a pris dans ce Lemme le mot de *ſection conique* dans un ſens étendu, en ſorte qu'il renferme la ſection rectiligne qui paſſe par le ſommet du cône, & la circulaire parallele à ſa baze. Car ſi le point *p* tombe ſur la droite qui joint les points *A* & *D*, ou *C* & *B*, la ſection conique ſe changera en deux lignes droites, dont l'une eſt celle ſur laquelle le point *p* tombe, & l'autre la ligne droite qui joint les deux autres des quatre points donnés. Si deux angles oppoſés du trapeze ſont égaux, pris enſemble, à deux droits, que les quatre lignes *PQ*, *PR*, *PS*, *PT* ſoient menées à ſes côtés ou perpendiculairement ou ſous des angles égaux quelconques, & que le rectangle, ſous deux de ces lignes $PQ \times PR$, ſoit égal au rectangle ſous les deux autres $PS \times PT$, la ſection conique ſera un cercle. Ce ſera la même choſe, ſi les quatre lignes ſont menées ſous des angles quelconques, & que le rectangle de deux de ces lignes $PQ \times PR$ ſoit au rectangle des deux autres $PS \times PT$, comme le rectangle des ſinus des angles *S* & *T*, ſous leſquels les deux dernieres lignes *PS*, *PT* ont été menées, eſt au rectangle des ſinus des angles *Q* & *R* ſous leſquels on a mené les deux premieres *PQ*, *PR*.

Dans les autres cas, le lieu du point *P* ſera quelqu'une des trois figures qu'on appelle ordinairement *ſections coniques*.

On peut à la place du trapeze *ABCD* employer un quadrilatere, dont les deux côtés oppoſés ſe coupent mutuellement comme des diagonales. Il ſe peut auſſi que des quatre points *A*, *B*, *C*, *D* un ou même deux ſoient placés à une diſtance infinie : alors les côtés de la figure qui convergeoient précédemment vers ces points deviendront paralleles, & la ſection conique paſſera par les autres points, & s'étendra à l'infini du même côté que ces lignes devenues paralleles.

LEMME XIX.

Les quatre lignes AB, CD, AC, BD *étant données de position, trouver un point* P *tel qu'en tirant à ces quatre lignes les droites* PQ, PR, PS, PT *qui fassent avec elles des angles respectivement égaux à quatre angles donnés, le rectangle* $PQ \times QR$ *de deux de ces quatre lignes, soit au rectangle* $PS \times PT$ *des deux autres en raison donnée.*

Fig. 45. Ayant tiré une ligne quelconque AH par un des quatre points A, B, C, D, dans lesquels se rencontrent les lignes AB, CD, AC, BD, soit proposé de trouver sur cette ligne un point P qui ait la propriété demandée.

Pour y parvenir, supposant que H & I soient les points où cette ligne AH rencontre les lignes BD & CD, on remarquera que puisque tous les angles de la figure sont donnés, les raisons de PQ à PA & de PA à PS seront données, & que par conséquent la raison de PQ à PS le sera aussi. Otant donc cette raison de la raison donnée $PQ \times PR$ à $PS \times PT$, on aura la raison de PR à PT, & en ajoutant les raisons données de PI à PR, & de PT à PH, on aura la raison de PI à PH, & par conséquent le point P. *C. Q. F. T.*

Fig. 45.

Cor. 1. On tire de-là la maniere de mener une tangente à un point quelconque D du lieu des points P; car la corde PD devient tangente lorsque les points P & D coïncident, c'est-à-dire lorsque AH passe par le point D. Dans ce cas, la derniere raison des évanouissantes IP & PH se trouvera comme ci-dessus. Menant donc CF parallele à AD, qui rencontre BD en F, & qui soit coupée en E dans cette derniere raison, DE sera tangente, à cause que CF & l'évanouissante IH sont paralleles & coupées de même en E & en P.

Cor. 2. De-là suit encore la maniere d'avoir le lieu de tous les points P. Par l'un des points A, B, C, D, comme A, menez la tangente AE, & par un autre point quelconque B, menez BF

Fig. 46.

parallele à cette tangente, & trouvez par le Lemme 19. le point *F* où cette droite rencontre le lieu.

Coupez ensuite *B F* en deux parties égales au point *G*, la droite indéfinie *A G* sera la position d'un diametre auquel *B G* & *F G* seront ordonnées. La longueur *A H* de ce diametre se trouvera en déterminant le point *H* où *A G* rencontre le lieu; & son parametre sera à *A H* comme BG^2 à $AG \times GH$. Si *A G* ne rencontre point le lieu, la ligne *A H* étant infinie, le lieu sera une parabole, & le parametre du diametre *A G* sera $\frac{BG^2}{AG}$; mais si elle le rencontre quelque part, le lieu sera une hyperbole, lorsque les points *A* & *H* sont placés du même côté par rapport à *G*, & il sera un ellipse, lorsque le point *G* sera placé entre *A* & *H*, à moins que l'angle *A G B* ne fût droit; & que de plus BG^2 ne fut égal au rectangle $AG \times GH$; car dans ce cas le lieu seroit un cercle. Fig. 46.

De cette façon le Probléme des quatre lignes commencé par Euclide, & continué par *Apollonius* se trouve résolu dans ce Corollaire, non par le calcul, mais par une composition Géométrique telle que celle par laquelle les anciens l'ont cherché.

LEMME XX.

Si un parallélogramme quelconque ASPQ *a ses deux angles opposés* A *&* P *placés dans une section conique; & que les côtés* AQ, AS *d'un de ses angles étant prolongés rencontrent la même section conique en* B *&* C; *en tirant des points de concours* B *&* C *à un cinquième point quelconque* D *de la section conique les deux lignes* BD, CD *qui rencontrent en* T *& en* R *les deux autres côtés* PS, PQ *du parallélogramme prolongés indéfiniment: les parties* PR *&* PT *seront toujours entr'elles en raison donnée, & réciproquement, si ces parties sont entr'elles en raison donnée, le point* D *sera à la section conique qui passe par les quatre points* A, B, C, P. Fig. 47.

Cas 1. Soient tirés *B P*, *C P*, & du point *D* les droites *D G*, *D E*, dont la premiere *D G* soit parallele à *A B*, & rencontre *P B*,

PQ, CA en H, I, G; & dont la seconde DE soit parallele à AC, & rencontre PC, PS, AB, en F, K, E, à cause que $PQ : IQ$ (ou DE) $:: PB : BH :: PT : DH$, & que $PR : DF :: RC : DC :: IG$ (ou PS) $: DG$; on aura les deux proportions $PQ : PT :: DE : DH$ & $PR : PS :: DF : DS$, qui donneront étant composées $PQ \times PR : PS \times PT :: DE \times DF : DG \times DH$; mais par le Lemme 17. $DE \times DF : DG \times DH$ en raison donnée, de plus, PQ & PS sont données; donc la raison de PR à PT est donnée.

Fig. 47.

Cas 2. Si PR & PT sont supposées entr'elles en raison donnée, en reprenant le même raisonnement, on trouvera que le rectangle $DE \times DF$ est au rectangle $DG \times DH$ en raison donnée, & qu'ainsi, par le Lemme 18. le point D est à la section conique qui passe par les points A, B, C, P. C. Q. F. D.

Fig. 47.

Cor. 1. Donc, si on tire BC qui coupe PQ en r, & que sur PT on prenne Pt à pr, dans la même raison que PT à PR, Bt sera tangente de la section conique au point B; car supposez que le point D coïncide avec le point B, la corde BD s'évanouissant, BT deviendra tangente, & CD & BT coïncideront avec CB & Bt.

Fig. 47.

Cor. 2. Et réciproquement, si Bt est tangente, & que BD, CD se rencontrent en un point quelconque D de la section conique, on en concluera que $PR : PT :: pr : Pt$, & de même Bt étant toujours tangente, si $PR : PT :: Pr : Pt$, il s'ensuivra que les droites BD & CD se rencontreront dans un point quelconque D de la section conique.

Cor. 3. Une section conique ne peut couper une autre section conique en plus de quatre points; car supposant que cela pût être, imaginez que deux sections coniques eussent les cinq points A, B, C, P, O communs, & qu'elles fussent coupées l'une & l'autre par la ligne BD dans les points D, d; la droite Cd coupant la droite PQ en q, on auroit $PR : PT :: Pq : PT$, ce qui donneroit $PR = Pq$, contre l'hipothese.

Fig. 47.

LEMME XXI.

Si aux deux points donnés ou poles B, C *sont fixés les sommets de deux angles donnés* MBD, MCD, *& que l'on fasse parcourir la droite donnée* MN, *au concours* M *des côtés* BM *&* CM *de ces angles les deux autres côtés* BD *&* CD *des mêmes angles décriront par leur intersection une section conique. Et réciproquement, si les droites* BD, CD *décrivent par leur concours* D *une section conique qui passe par les points donnés* A, B, C, *& que les angles* DBM, DCM *soient pris respectivement égaux aux angles donnés* ABC, ACB, *la rencontre des côtés* BM, CM *se fera toujours dans une ligne droite donnée de position.* Fig. 48.

Supposant que N soit un point donné de la droite MN, par lequel on fasse passer les côtés BM, CM des angles mobiles, & que D soit le point dans lequel se rencontre les autres côtés des mêmes angles; soient tirées CN, BN, CP, BP, soient tirées ensuite du point P les droites PT, PR, qui rencontrent BD, CD en T & en R, & qui fassent l'angle BPT égal à l'angle donné BNM, & l'angle CPR égal à l'angle donné CNM, comme (par l'hipothese) les angles MBD, NBP sont égaux, ainsi que les angles MCD, NCP; en ôtant les angles communs NBD, NCD, il restera les angles égaux NBM & PBT, NCM & TCR. De-là il suit que les triangles NBM, PBT sont semblables, ainsi que les triangles NCM, PCR. C'est-pourquoi $PT : NM :: PB : NB$, & $PR : NM :: PC : NC$. Or les points B, C, N, P sont immobiles, donc PT & PR sont en raison donnée avec NM, ou, ce qui revient au même, elles sont en raison donnée l'une à l'autre; donc, par le Lemme 20. le point D, concours perpétuel des droites mobiles BT & CR, sera à la section conique qui passe par les points B, C, P. C. Q. F. D. Fig. 48.

Et réciproquement, si le point mobile D est à une section conique qui passe par les points donnés B, C, A; que les angles DBM, DCM soient respectivement égaux aux angles ABC, Fig. 49.

A C B; & que faiſant coïncider ſucceſſivement le point *D* avec les deux points donnés *p*, *P* de la ſection conique, on détermine les points *n* & *N* avec leſquels le point coïncide ſucceſſivement par cette opération, la droite *n N* ſera le lieu de tous les points *M*. Car ſuppoſez que le point *M* ſoit à quelque courbe; dans ce cas le lieu des points *D* déterminé par cette courbe, ſeroit une ſection conique qui paſſeroit par les cinq points *B*, *C*, *A*, *p*, *P*; mais, par ce qui a été démontré, le lieu des points *D*, lorſque les points *M* ſont dans une ligne droite, eſt encore une ſection conique qui paſſe par les mêmes points *B*, *C*, *A*, *p*, *P*. On auroit donc, par la ſuppoſition que le point *M* eſt dans une courbe, deux ſections coniques qui paſſeroient par les cinq mêmes points, ce qui eſt impoſſible par le Cor. 3. du Lemme 20. donc cette ſuppoſition eſt abſurde.

Fig. 49.

PROPOSITION XXII. PROBLÉME XIV.

Faire paſſer une trajectoire par cinq points donnés.

Soient donnés les cinq points *A*, *B*, *C*, *P*, *D*. D'un de ces points *A* ſoient menées les droites *A B*, *A C* à deux autres quelconques *B* & *C*, qu'on prend pour poles, & ſoient menées par le quatriéme point *P* deux lignes *T P S*, *P R Q* paralleles aux deux lignes *A B*, *A C*. Soient tirées enſuite des deux poles *B C*, au cinquiéme point *D* deux lignes indéfinies, dont l'une *B D T* rencontre *T P S* en *T*, & l'autre *C R D* rencontre *P R Q* en *R*. Cela fait, en tirant d'un point quelconque *t* de la droite indéfinie *S P T* la droite *t r p* parallele à *T R*, la rencontre *d* des lignes *C r d*, & *B t* ſera à la trajectoire cherchée; car ce point *d* (par le Lemme 20.) ſera à la ſection conique qui paſſe par les quatre points *A*, *B*, *C*, *P*; de plus, les lignes *R r*, *T t* s'évanouiſſants, le point *D* coïncide avec le point *d*. Donc la ſection conique paſſe par les cinq points *A*, *B*, *C*, *P*, *D*. C. Q. F. D.

Fig. 50.

AUTRE SOLUTION.

Fig. 51.

Joignez par des lignes droites trois quelconques *A*, *B*, *C*, des points donnés ; prenant ensuite les deux points *B* & *C* pour poles, appliqués successivement aux points *D* & *P*, les côtés *BA* & *CA* des angles *ABC*, *ACB*, & marquez les points *M* & *N* dans lesquels les autres côtés de ces angles se rencontrent dans ces deux positions. Cela fait, tirez la droite indéfinie *MN*, & faites parcourir cette ligne à l'intersection continuelle *m* des côtés *BL*, *CL* des angles *ABC*, *ACB* ; & vous aurez alors par l'intersection continuelle *d* des autres côtés de ces mêmes angles la trajectoire cherchée *PADdB*. Fig. 51.

Car le point *d* (par le Lemme 21.) sera à la section conique qui passe par les points *B*, *C* ; & lorsque le point *m* coïncidera avec les points *L*, *M*, *N*, le point *d*, par la construction, coïncidera avec les points *A*, *D*, *P*. Ainsi il décrira la section conique qui passe par les cinq points *A*, *B*, *C*, *P*, *D*. C. Q. F. F.

Cor. 1. On peut mener très-aisément par ce moyen une droite qui touche la trajectoire cherchée dans un point quelconque donné *B*. Car en faisant coïncider le point *d* avec le point *B*, la droite *Bd* sera la tangente cherchée. Fig. 51.

Cor. 2. De-là on aura le centre, le diametre, & le parametre de la trajectoire, comme dans le Cor. 2. du Lemme 19.

SCHOLIE.

La construction précédente deviendra un peu plus simple en tirant *BP*, & prenant sur cette ligne prolongée, s'il est besoin, $Bp : BP :: PR : PT$; & en tirant par *p* une ligne infinie *pe* parallele à *SPT* ; car il ne faudra que prendre sur cette ligne la partie *pe* égale à l'intervalle quelconque *Pr*, & tirer les lignes *Crd*, *Bed*, pour avoir par leur rencontre un point quelconque de la trajectoire. On verra aisément la raison de cette construction en remarquant, que puisque les raisons de *Pr* à *Pt*, de *PR* à *PT*, de *pB* à *PB*, & de *pe* à *Pt*, sont égales, il faut donc que *pe* & *Pr* soient égales entr'elles. Fig. 52.

Lorsqu'on ne voudra pas employer la construction méchanique de la seconde solution, celle-ci sera d'une grande commodité dans la pratique.

PROPOSITION XXIII. PROBLÊME XV.

Décrire une trajectoire qui passe par quatre points donnés & qui ait pour tangente une droite donnée de position.

Cas 1. Que la tangente *HB*, le point de contact *B*, & trois autres points *C*, *D*, *P* soient donnés. Joignez les points *B* & *C* par la ligne *BC*, tirez *PS* parallele à *BH* & *PQ* parallele à *BC*; achevez le parallélogramme *BSPQ*; tirez ensuite *BD* qui coupe *SP* en *T*, & *CD* qui coupe *PQ* en *R*. Enfin, ayant mené une droite quelconque *tr* parallele à *TR*, prenez sur *PQ* & sur *PS* les abscisses *Pr*, *Pt* respectivement proportionnelles aux lignes *PR*, *PT*; & le point *d*, concours des lignes *Cr*, *Bt*, sera toujours, par le Lemme 20. à la trajectoire qu'il falloit décrire. *C.Q.F.F.*

Fig. 53.

AUTRE SOLUTION.

Faisant tourner l'angle *CBH* autour du pole *B*, ainsi que le rayon rectiligne quelconque *DC*, prolongé des deux côtés, autour du pole *C*, soient marqués les points *M* & *N*, dans lesquels le côté *BC* de l'angle coupe ce rayon, lorsque l'autre côté *BH* concourt avec ce même rayon dans les points *P* & *D*. Faisant ensuite mouvoir le rayon *CD* & le côté *BC* de l'angle *CBH*, de maniere, que leur concours soit toujours dans la droite indéfinie *MN*, on aura alors par la rencontre continuelle de l'autre côté *BH* de l'angle *CBH*, avec le même rayon *CD*, la trajectoire cherchée.

Fig. 54.

Car, si dans les constructions du probléme précédent, le point *A* se confond avec le point *B*, les lignes *AC* & *CB* coïncideront, & la ligne *AB*, dans sa derniere position, deviendra la tangente *BH*; ce qui changera ces constructions dans celles qu'on vient de décrire. Le concours du côté *BH* & du rayon, décrira donc la section conique qui passe par les points *C*, *D*, *P*, & qui touche la droite *BH* au point *B*. *C.Q.F.F.*

Fig. 51. & 54.

Cas 2.

Cas 2. Soient donnés quatre points *B*, *C*, *D*, *P* placés hors de la tangente H I.

Tirez les lignes *BD*, *CP*, qui concourent en *G*, & qui rencontrent la tangente en *H* & en *I*. Coupez ensuite cette tangente en *A*, en sorte que *HA* soit à *IA*, comme le rectangle de la moyenne proportionnelle entre *CG* & *GP*, & de la moyenne proportionnelle entre *BH* & *HD* est au rectangle de la moyenne proportionnelle entre *DG* & *GB*, & de la moyenne proportionnelle entre *PI* & *IC*; & le point *A* sera le point de contact. Car si la ligne *HX*, parallele à la droite *PI*, coupe la trajectoire dans les points quelconques *X* & *Y*, il faudra, par les coniques, que la position du point *A* soit telle que AH^2 soit à AI^2, en raison composée de la raison du rectangle $XH \times HY$ au rectangle $BH \times HD$, ou du rectangle $CG \times GP$ au rectangle $DG \times GB$, & de la raison du rectangle $BH \times HD$ au rectangle $PI \times IC$. Ayant donc trouvé le point de contact *A*, on décrira la trajectoire comme dans le premier cas. Fig. 55. *C. Q. F. F.*

Il est à remarquer qu'on peut prendre le point *A* entre les points *H* & *I*, ou sur le prolongement de *HI*, ce qui donne deux solutions du Probléme.

PROPOSITION XXIV. PROBLÉME XVI.

Décrire une trajectoire qui passe par trois points donnés, & qui soit touchée par deux lignes droites données de position.

Par deux quelconques *B* & *D* des trois points donnés *B*, *C*, *D*, tirez la droite indéfinie *BD* qui rencontre les tangentes données *HI*, *KL* dans les points *H* & *K*, ensuite par le point *D*, & par le troisiéme point donné *C*, tirez la droite indéfinie *CD*, qui rencontre les mêmes tangentes aux points *I* & *L*. De plus, coupez ces lignes en *R* & en *S*, de sorte que *HR* soit à *KR* comme la moyenne proportionnelle entre *BH* & *HD* est à la moyenne proportionnelle entre *BK* & *KD*; & que *IS* soit à *LS* comme la moyenne proportionnelle entre *CI* & *ID* est à Fig. 56.

la moyenne proportionnelle entre CL & LD. Cela fait, soit que vous ayez pris les points R & S entre les points K & H, I & L, ou sur les prolongemens de KH & de IL, ainsi que cela est permis, vous aurez, par les rencontres de la ligne RS avec les tangentes HI & KL, les points d'attouchement A & P.

Fig. 56.

Car si on suppose que A & P soient les points d'attouchement placés quelque part dans les tangentes, & que par un point quelconque I, des points H, I, K, L, placé sur l'une ou l'autre tangente HI, on tire la droite IY parallele à l'autre tangente KL, & qui rencontre la courbe en X & en Y, & qu'on prenne IZ moyenne proportionnelle entre IX & IY: on aura, par les coniques, le rectangle $XI \times IY$ ou IZ^2 à LP^2, comme le rectangle $CI \times ID$ au rectangle $CL \times LD$, c'est-à-dire, par la construction, comme SI^2 à SL^2: d'où l'on tirera que $IZ : LP :: SI : SL$, & que par conséquent les points S, P, Z sont en ligne droite. De plus, les tangentes concourant au point G, on aura encore par les coniques le rectangle $XI \times IY$ ou $IZ^2 : IA^2 :: GP^2 : GA^2$, qui donne $IZ : IA :: GP : GA$. Donc, les points P, Z & A sont en ligne droite, & par conséquent les points S, P & A, y sont aussi. On prouvera par le même raisonnement que les points R, P & A, sont en ligne droite. Donc les points d'attouchement A & P sont dans la droite RS.

Ayant ainsi les points d'attouchement A & P, on décrira la trajectoire comme dans le premier cas du Probléme précédent. *C. Q. F. F.*

Dans cette Proposition, & dans le second Cas de la Proposition précédente les constructions sont les mêmes, soit que la droite XY coupe la trajectoire en X & en Y, soit qu'elle ne la coupe point; puisque les opérations qu'on a faites ne dépendent point de cette section. Or ayant démontré les constructions pour le cas où XY rencontre la trajectoire, il sera aisé d'en tirer la démonstration pour le cas où elle ne la rencontre pas; je ne m'y arrêterai donc pas de crainte d'être trop long.

Fig. 56.

LEMME XXII.

Changer les figures en d'autres figures du même genre.

Étant proposé de transformer la figure quelconque HGI, soient menées à volonté deux droites paralleles AO, BL qui coupent en A & en B une troisiéme droite quelconque AB donnée de position; soit de plus menée la parallele GD à OA par un point quelconque G de la figure donnée. Tirant ensuite du point O donné dans AO, au point D, la droite OD qui rencontre BL en d, & élevant sur ce point d la droite dg, qui fasse avec la droite BL un angle quelconque donné, & qui ait à Od la même raison que DG à OD; g sera le point qui dans la figure nouvelle hgi répond au point G, de la même maniere chaque point de la premiere figure donnera autant de points de la figure nouvelle; & si on imagine que le point G parcourre d'un mouvement continu tous les points de la premiere figure, le point g parcourrera de même, par un mouvement continu, tous les points de la nouvelle figure. Fig. 57.

Afin d'être plus clair, nous appellerons DG premiere ordonnée, & dg nouvelle ordonnée; AD premiere abscisse, & ad abscisse nouvelle; O pole, OD rayon coupant, OA premier rayon ordonné, & la droite Oa, qui acheve le parallélogramme $OABa$, nouveau rayon ordonné.

Cela posé, si le point G est à une ligne droite donnée de position, le point g sera aussi à une ligne droite donnée de position. Si le point G est à une section conique, le point g sera aussi à une section conique. Je mets ici le cercle au nombre des sections coniques. De plus, si le point G est à une ligne du troisiéme ordre, le point g sera de même à une ligne du troisiéme ordre; il en sera de même des courbes des ordres plus élevés, c'est-à-dire, que les deux lignes ausquelles seront les points G & g seront toujours du même degré.

Car Od étant à OD, dg à DG, & AB à AD, comme ad

à OA, on aura $AD = \frac{OA \times AB}{ad}$, & $DG = \frac{OA \times dg}{ad}$. Donc, si le point G est à une ligne droite, dans l'équation quelconque, qui exprime la relation entre l'abscisse AD & l'ordonnée DG, les indéterminées DG & AD n'ayant qu'une dimension, en écrivant dans cette équation $\frac{OA \times AB}{ad}$ pour AD & $\frac{OA \times dg}{ad}$ pour DG, on aura une équation nouvelle, dans laquelle la nouvelle abscisse ad & la nouvelle ordonnée dg n'auront aussi qu'une dimension, & cette équation exprimera par conséquent une ligne droite. Si AD & DG, ou seulement l'une des deux, avoit deux dimensions dans la premiere équation, ad & dg en auroient aussi deux dans la seconde; & il en seroit de même si elles avoient trois dimensions, ou des dimensions plus hautes. Ainsi les indéterminées ad, dg dans la seconde équation, & AD, DG dans la premiere, auront toujours le même nombre de dimensions, & par conséquent les lignes ausquelles sont les points G & g sont du même degré.

Fig. 57.

De plus, si une ligne droite touche la ligne courbe dans la premiere figure; la droite qui lui répondra dans la nouvelle figure touchera la courbe de la même maniere; & au contraire. Car si deux points d'une courbe quelconque s'approchent l'un de l'autre, & qu'ils se confondent dans la premiere figure, les mêmes points correspondans dans la figure nouvelle s'approcheront & se confondront aussi; donc, les droites qui joignent ces points deviendront en même temps tangentes des courbes dans l'une & l'autre figure.

Les démonstrations de ces Propositions pourroient être présentées d'une maniere plus conforme aux démonstrations géométriques ordinaires; mais je préfere la briéveté.

Si c'est une figure rectiligne qu'il faut transformer, il suffira de joindre par des lignes, dans la nouvelle figure, les points correspondans à ceux qui sont les intersections des lignes dont la premiere figure est composée. Si la figure à transformer est curviligne, il faut transporter dans la nouvelle figure les points, les tangentes, & les autres droites par lesquelles on peut décrire la courbe.

Ce Lemme sert à résoudre des Problémes très difficiles, en transformant les figures proposées en de plus simples. Car on peut transformer les lignes convergentes en des lignes paralleles, en prenant pour premier rayon ordonné une ligne droite quelconque qui passe par le point de concours des lignes convergentes; parce que, dans ce cas, le point de concours dans la nouvelle figure s'éloignera à l'infini, & ensuite lorsqu'on a résolu le Probléme dans la nouvelle figure, on n'aura plus qu'à repasser, par des opérations inverses, de la nouvelle figure à la premiere, & le Probléme sera résolu.

Ce Lemme est encore fort utile dans la solution des Problémes solides; car toutes les fois qu'on a deux sections coniques, de l'intersection desquelles dépend la solution du Probléme, on pourra transformer l'une ou l'autre, soit hiperbole ou parabole, en une ellipse; & ensuite l'ellipse se change aisément en un cercle. De la même maniere, dans les Problémes plans, la ligne droite & la section conique se changeront en une droite & un cercle.

PROPOSITION XXV. PROBLÉME XVII.

Décrire une trajectoire, qui passe par deux points donnés, & qui touche trois lignes droites données de position.

Par le concours de deux de ces tangentes, & par le concours de la troisiéme avec la ligne droite qui passe par les deux points donnés, tirez une droite indéfinie, & la prenant pour le premier rayon ordonné, changez la figure en une figure nouvelle, par le Lemme précédent. Dans cette nouvelle figure les deux tangentes qui concourroient seront paralleles entr'elles, & la troisiéme fera parallele à la droite qui passe par les deux points donnés. Que hi & kl représentent ces deux tangentes paralleles, ik la troisiéme tangente, hl la droite qui lui est parallele, & qui passe par les points a & b, par lesquels la section conique doit passer dans cette nouvelle figure, & que $hikl$ soit le parallélogramme formé par ces quatre lignes. Cela posé, soient coupées les droites hi, ik, kl, en c, d, e, ensorte que hc soit à $\sqrt{ah \times hb}$, ic à id, & ke à kd, comme $hi + kl$ à $ik + \sqrt{ah \times hb} + \sqrt{al \times lb}$, & les points c, d, e seront les points d'attouchement.

Fig. 58.

Car on voit, par les coniques, que $hc^2 : ah \times hb :: ic^2 : id^2 :: ke^2 : kd^2 :: el^2 : al \times lb$, ou ce qui revient au même que $hc : \sqrt{ah \times hb} :: ic : id :: ke : kd :: el : \sqrt{al \times lb}$, c'est-à-dire, (en ajoutant les antécédens ainsi que les conséquens) $:: hi + kl : ki + \sqrt{ah \times hb} + \sqrt{al \times bl}$, ce qui donne la construction qu'on vient d'énoncer.

Ayant donc les points d'attouchement c, d, e, dans la nouvelle figure, par des opérations inverses, on trouvera leurs points correspondans dans la premiere figure, & par le Problême 14. on décrira la trajectoire. *C. Q. F. F.*

Au reste, de la même maniere que les points a & b seront entre les points h & l, ou bien sur le prolongement de la ligne qui joint ces points, les points c, d, e doivent être pris entre les points h, i, k, l, ou bien sur les prolongemens des lignes qui joignent ces points. Lorsque l'un des points a & b sera entre les points h & l, & l'autre sur le prolongement de la ligne qui les joint, le Problême sera impossible.

PROPOSITION XXVI. PROBLÉME XVIII.

Décrire une trajectoire qui passe par un point donné, & qui touche quatre droites données de position.

De l'intersection de deux de ces tangentes quelconques on tirera à l'intersection des deux autres une droite indéfinie, & la prenant pour le premier rayon ordonné, on transformera la figure par le Lemme 22. en une figure nouvelle. Par ce moyen chaque paire de tangentes qui concouroit dans le premier rayon ordonné deviendra une paire de tangentes paralleles. LIVRE PREMIER. Fig. 59.

Soient $i\ k\ h\ l$ le parallélogramme formé par les quatre nouvelles tangentes, & p le point qui répond dans la nouvelle figure au point donné dans la premiere ; en tirant de ce point p au centre O du parallélogramme la droite pOq double de pO, q sera un autre point de la section conique. On n'aura donc plus, en se servant du Lemme 22. qu'à retrouver par une opération inverse le point qui répond à ce point q dans la premiere figure, & le Probléme sera réduit au précedent. *C. Q. F. F.*

LEMME XXIII.

Si deux lignes AC, BD, *données de position, sont terminées par les points donnés* A, B, *& qu'elles ayent entr'elles une raison donnée ; que de plus la droite* CD, *qui joint les points indéterminés* C, D, *soit coupée en* K *dans une raison donnée : le point* K *sera à une droite donnée de position.* Fig. 60.

E étant la rencontre des lignes AC, BD, soit pris sur BE l'intervalle BG qui soit à AE, comme BD à AC, soit prise ensuite FD qui soit toujours égale à la droite donnée EG ; on aura par la construction $EC : GD$, (ou EF) $:: AC : BD$, & par conséquent en raison donnée ; ainsi le triangle EFC est donné d'espece. Soit coupée maintenant CF en L, en sorte que $CL : CF :: CK : CD$; il est clair, à cause que cette raison est donnée, que le triangle EFL sera aussi donné d'espece ; donc le point L sera à la droite EL donnée de position. Tirant alors LK, il est clair que les triangles CLK, CDF seront semblables, & qu'à cause que FD est donnée, ainsi que la raison de LK à FD, la droite LK sera aussi donnée. Donc en prenant $EH = LK$, & en menant HK, cette droite sera donnée de position, & sera celle qui passe par tous les points K. *C. Q. F. D.* Fig. 60.

Corol. A cause que la figure $EFLC$ est donnée d'espece, les Fig. 60.

trois droites EF, EL & EC, ou GD, HK & EC auront des raisons données entr'elles.

LEMME XXIV.

Si trois droites touchent une section conique quelconque, & que deux de ces droites soient paralleles & données de position; celui des demi diametres de cette section conique qui sera le demi diametre parallele à ces deux lignes, sera moyen proportionnel entre les segmens de ces lignes compris entre les points d'attouchement, & la troisiéme tangente.

Soient AF, BG les deux paralleles qui touchent la section conique ADB en A & en B; EF la troisiéme droite qui touche la même courbe en I, & qui rencontre les deux premieres tangentes en F & en G; soit de plus CD le demi diametre de la figure parallele aux tangentes: il s'agit de démontrer que les lignes AF, CD, BG sont en proportion continue.

Fig. 61.

Pour le faire voir, soit prolongé le diametre MCD jusqu'à ce qu'il rencontre en H la tangente FG, & soit tiré le diametre conjugué ACB. En formant le parallélogramme $IKLC$; on aura, par la nature des sections coniques, $EC:CA::CA:CL::EC-CA:CA-CL$, ou $::EA:AL$, & par conséquent $EA:EA+AL$ (ou EL) $::EC:EC+CA$ (ou EB); donc, à cause que les triangles EAF, ELI, ECH, EBG sont semblables, $AF:LI::CH:BG$. Mais, par la nature des coniques, LI ou $CK:CD::CD:CH$; donc $AF:CD::CD:BG$. C. Q. F. D.

Cor. I. De-là, si deux tangentes FG, PQ se coupent en O, & rencontrent les tangentes paralleles AF, BG en F & G, P & Q; on aura $AF:BQ::AP:BG$, & par conséquent $::FP:GQ$; c'est-à-dire $::FO:OG$.

Cor. 2. Ainsi deux droites PG, FQ menées par les points P & G, F & Q auront leur commune intersection dans la droite ACB, qui passe par le centre de la figure, & par les points d'attouchement A & B.

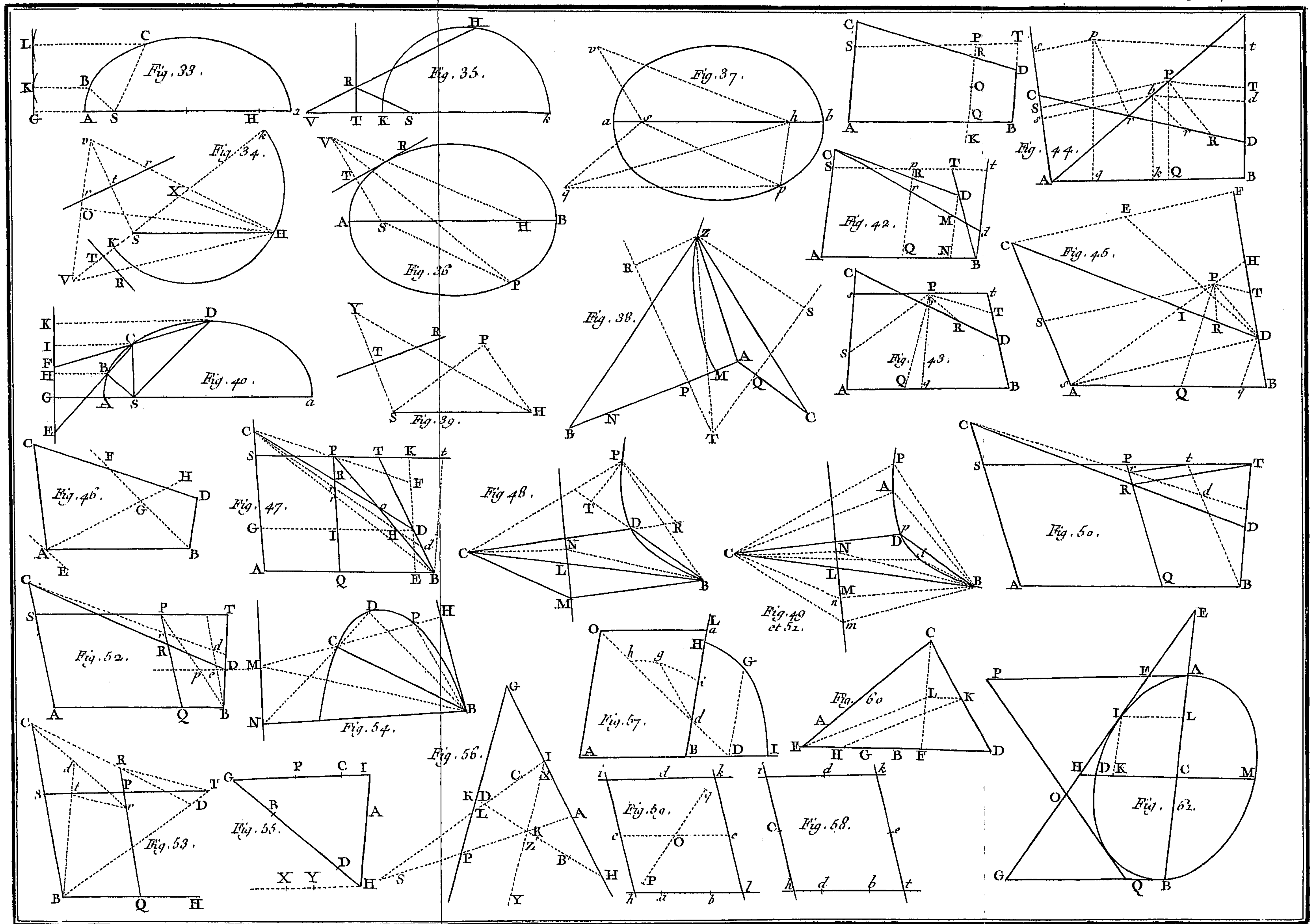


Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49 et 51.
Fig. 50.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60
Fig. 62.

LEMME XXV.

Si les quatre côtés d'un parallélogramme prolongés indéfiniment touchent une section conique quelconque, & qu'ils soient coupés par une cinquiéme tangente quelconque, en prenant sur deux côtés quelconques opposés de ce parallélogramme les segmens terminés à deux angles opposés, chacun de ces segmens sera au côté duquel il aura été retranché par la cinquiéme tangente, comme la partie de l'autre côté du parallélogramme, comprise entre le point d'attouchement & le troisiéme côté, est à l'autre segment.

ML, IK, KL, MI étant les quatre côtés d'un parallélogramme $MLIK$ qui touchent la section conique en A, B, C, D; & FQ une cinquiéme tangente qui coupe ces côtés en F, Q, H, E: si on prend les segmens ME, KQ des côtés MI, KI, on aura $ME : MI :: BK : KQ$, & si on prend les segmens KH, MF des côtés ML, KL, on aura $KH : KL :: AM : MF$. Fig. 62.

Car par le Corollaire premier du Lemme précédent, on aura $ME : MI :: AM$ ou $BK : BQ$; d'où l'on tire $ME : MI :: BK : KQ$. C. Q. F. D.

Par le même Corollaire on aura $KH : HL :: BK$ ou $AM : AF$, qui donne $KH : KL :: AM : MF$. C. Q. F. D.

Cor. 1. De-là, si le parallélogramme $IKLM$ décrit autour de la section conique est donné, le rectangle $KQ \times ME$ sera donné, ainsi que le rectangle $KH \times MF$, qui lui est égal, à cause que les triangles MFE, KQH sont semblables.

Cor. 2. Si on mene une sixiéme tangente eq qui rencontre les tangentes KI, MI, en q & en e; le rectangle $KQ \times ME$ étant égal au rectangle $Kq \times Me$, on aura $KQ : Me :: Kq : ME$, & par conséquent $:: Qq : Ee$.

Cor. 3. D'où, si on tire Eq & eQ, qu'on les coupe en deux parties égales, & qu'on tire une droite par les points de bisection, cette droite passera par le centre de la section conique. Car puisque $Qq : Ee :: KQ : Me$, il faut, par le Lemme 23. que la droite qui passe par le milieu de $E q$ & de $e Q$, passe aussi par le milieu de MK. Or, le milieu de MK est le centre de la section conique.

Fig. 62.

PROPOSITION XXVII. PROBLÊME XIX.

Décrire une trajectoire qui soit touchée par cinq lignes droites données de position.

Fig. 63.

Les tangentes ABG, BCF, GCD, FDE, EA étant données de position, coupez en deux parties égales aux points M & N les diagonales AF, BE de la figure quadrilatere $ABFE$ formée par quatre quelconques de ces tangentes, & par le Cor. 3. du Lem. 25. la droite MN menée par les points de bisection passera par le centre de la trajectoire. Coupez ensuite en deux parties égales dans les points P & Q les diagonales BD, GF de la figure quadrilatere $BGDF$, formée par quatre autres des cinq mêmes tangentes: & la droite PQ tirée par les points de bisection passera encore par le centre de la trajectoire; ainsi la rencontre O de MN & de PQ donnera la position de ce centre. Tirez ensuite KL parallele à une tangente quelconque BC, & à une telle distance de cette tangente, que le centre O soit placé au milieu de l'intervalle qui sépare ces paralleles, KL sera par ce moyen une nouvelle tangente de la trajectoire qu'il faut décrire. Que L & K soient les points où cette nouvelle tangente coupe deux quelconques GCD, FDE, des premieres, en menant des droites CK, FL par les points C & K, F & L où les tangentes paralleles CF, KL rencontrent les tangentes non paralleles CL, FK, on aura par la rencontre R de ces droites, & par le centre O la position de la ligne RO qui coupe les deux tangentes CF, KL dans les points où ces deux tangentes touchent la section conique cherchée, ainsi qu'il est aisé de s'en assurer par le Cor. 2. du Lemme 24. Trouvant ensuite les autres points de contact par la même méthode, il sera aisé de décrire la trajectoire par le Probl. 14.

SCHOLIE.

Les Problémes, dans lesquels les centres ou les asymptotes des trajectoires sont donnés, sont contenus dans les précédens; car, par le moyen des points de ces trajectoires qui seront donnés, de leurs tangentes, & du centre, on aura autant d'autres points, & d'autres tangentes prises de l'autre côté du centre & à égale distance. A l'égard des asymptotes on peut les regarder comme des tangentes, & leurs extrémités (si l'on peut s'exprimer ainsi) comme des points de contact. Imaginez donc que le point d'attouchement d'une tangente s'éloigne à l'infini; cette tangente deviendra asymptote, & les constructions des Problémes précédens se changeront dans les constructions des Problémes où l'asymptote est donnée.

Lorsque la trajectoire est décrite, on peut trouver ses axes & ses foyers par la méthode suivante. Dans la construction & la figure du Lemme 21. faites que les côtés *BP*, *CP* des angles mobiles *PBN*, *PCN*, par le concours desquels la trajectoire a été décrite, deviennent paralleles entr'eux, & qu'en conservant cette position, ils tournent dans cette figure autour de leurs poles *B* & *C*. Pendant ce mouvement les seconds côtés *CN*, *BN* de ces angles décriront par leur concours *K* ou *k* le cercle *BGKC*. Du centre *O* de ce cercle tirez la ligne *OH* qui rencontre le cercle en *K* & en *L*, & qui soit perpendiculaire sur la régle *MN*, sur laquelle ces seconds côtés *CN*, *BN* se sont rencontrés en décrivant la trajectoire: lorsque ces seconds côtés arrivés en *CK*, *BK* se couperont en *K* dans le point le plus proche de cette régle, les premiers côtés *CP*, *BP* seront alors paralleles au grand axe, & perpendiculaires au petit; ce seroit le contraire, si ces mêmes côtés concouroient au point le plus éloigné *L*. Donc, si le centre de la trajectoire est donné, on aura par ce moyen la longueur des axes, & la position des foyers s'en tirera tout de suite. Fig. 64. & 65.

Les quarrés des axes sont entr'eux comme *KH* à *LH*; ce qui donne un moyen facile de décrire par quatre points quelcon-

Fig. 64. & 65.

ques une trajectoire donnée d'espece. Car si on prend deux de ces points donnés pour les poles B & C, le troisiéme donnera les angles mobiles, PCK, PBK; & ces angles étant donnés, on connoîtra aussi-tôt le cercle $BGKC$. Or, la trajectoire étant donnée d'espece, la raison de OH à OK sera donnée, & par conséquent OH le sera aussi. Décrivant donc du centre O, & de l'intervalle OH un autre cercle, la droite qui touchera ce cercle, & qui passera par le concours des seconds côtés CK, BK, lorsque les premiers CP, PB concourent au quatriéme point donné, sera la régle MN par le moyen de laquelle on peut décrire facilement la trajectoire. Par la même méthode on pourra aussi inscrire un trapeze donné d'espece dans une section conique donnée quelconque toutes les fois que le cas sera possible.

Il y a encore d'autres Lemmes par lesquels on peut décrire des trajectoires données d'espece lorsqu'on a des points donnés, & des tangentes données. Tel est par exemple celui-ci. Si d'un point donné on méne à volonté une ligne droite, qui coupe une section conique donnée en deux points, & que l'intervale de ces intersections soit partagé en deux parties égales, le point de bisection sera à une autre section conique de la même espece que la premiere, & les axes de ces deux courbes seront paralleles entr'eux; mais je passe à des choses plus utiles.

LEMME XXVI.

Placer les trois côtés d'un triangle donné de grandeur & d'espece, ensorte que ses trois angles soient respectivement appliqués sur trois lignes données de position, mais qui ne sont pas toutes paralleles entr'elles.

Les trois lignes indéfinies AB, AC, BC, étant données de position, il s'agit de placer le triangle DEF de façon que son angle D soit placé sur la ligne AB, l'angle E sur la ligne AC, & l'angle F sur la ligne BC.

Fig. 66. & 67.

On commencera par décrire sur DE, DF, & EF les trois segmens de cercles DRE, DGF, EMF capables d'angles qui soient respectivement égaux aux angles BAC, ABC, ACB, en observant, pour la position de ces segmens sur les lignes DE, DF, EF, que les lettres $DRED$ ayent entr'elles le même ordre que les lettres $BACB$, les lettres $DGFD$ le même ordre que les lettres $ABCA$, & les lettres $EMFE$ le même ordre que les lettres $ACBA$.

Ayant ensuite achevé les cercles de ces segmens & marqué la rencontre G des deux premiers, dont les centres sont P & Q, on tirera GP & PQ, & l'on prendra Ga à AB, comme GP à PQ. Cela fait, du centre G & de l'intervalle Ga on décrira un cercle qui coupera le premier cercle DGE en a. Tirant alors aD & aE, ces deux droites couperont, l'une le second cercle DFG en b, l'autre le troisiéme cercle EMF en c: & l'on aura par ce moyen la figure $ABCdef$ égale & semblable à la figure demandée $abcDEF$. Fig. 66. & 67.

Pour le démontrer soit tiré Fc, & soit d'abord supposé que n soit le point où cette ligne rencontre aD, soient tirées ensuite aG, bG, QG, QD, PD. L'angle EaD étant égal par construction à l'angle CAB, & l'angle acF à l'angle ACB, le triangle anc sera équiangle au triangle ABC. Donc l'angle anc ou FnD, sera égal à l'angle ABC, & par conséquent à l'angle FbD; donc, le point n coïncidera avec le point b; de plus, l'angle GPQ, qui est la moitié de l'angle au centre GPD, est égal à l'angle à la circonférence GaD; & l'angle GQP, qui est la moitié de l'angle au centre GQD, est égal au complément à deux droits de l'angle à la circonférence GbD; donc, il est égal à l'angle Gba. De-là il suit que les triangles GPQ, Gab sont semblables, & que par conséquent $Ga:ab::GP:PQ$; c'est-à-dire, par la construction, $::Ga:AB$. Donc $ab=AB$; donc les triangles abc, ABC, que nous venons de prouver semblables, sont aussi égaux. Or, comme les angles D, E, F du triangle DEF sont appliqués respectivement sur les côtés ab, ac, bc du triangle abc, on n'a plus qu'à achever la figure $ABCdef$, de façon qu'elle

Du Mouvement des Corps.

soit égale & semblable à la figure *abcDEF*, & le Probléme sera resolu. *C. Q. F. F.*

Cor. On peut par cette méthode tirer une droite dont les parties données de longueur soient placées entre trois droites données de position. Car imaginant que le point *D* s'approche du côté *EF*, & que les côtés *DE*, *DF* deviennent le prolongement l'un de l'autre, le triangle *DEF* se changera en une droite, dont la partie donnée *DE* doit être placée entre les lignes données de position *AB*, *AC* & la partie donnée *DF* entre les lignes *AB*, *BC* données aussi de position; appliquant donc la construction précédente à ce cas, on résoudra le Probléme.

Fig. 66. & 67.

PROPOSITION XXVIII. PROBLÉME XX.

Décrire une trajectoire donnée d'espece & de grandeur, dont les parties données soient placées entre trois lignes droites données de position.

Qu'on ait à décrire une trajectoire semblable & égale à la courbe *DEF*, & coupée par trois lignes droites *AB*, *AC*, *BC* données de position, en des parties égales & semblables aux parties données *DF*, *FE* de cette courbe.

Fig. 68. & 69.

Tirez les droites *DE*, *EF*, *DF*, & placez par le Lemme 26 les angles *D*, *E*, *F* de ce triangle *DEF* sur ces lignes données de position, ensuite décrivez autour de ce triangle une trajectoire semblable & égale à la courbe *DEF*. *C. Q. F. F.*

LEMME XXVII.

Décrire un trapeze donné d'espece, dont les angles soient appliqués respectivement sur quatre lignes droites données de position, en supposant que ces quatre lignes ne soient ni toutes paralleles, ni convergentes à un seul point.

Fig. 70. & 71. Que les quatre droites *ABC*, *AD*, *BD*, *CE* soient données de position, la premiere coupant la seconde en *A*, la troisiéme en *B*, & la quatriéme en *C*; & qu'on se propose de décrire le trapeze *fghi* semblable au trapeze *FGHI* & placé en telle sorte que les quatre angles *f*, *g*, *h*, *i*, égaux respectivement aux angles *F*, *G*,

H, *I*, ſoient appliqués reſpectivement ſur les quatre lignes *A B C*, *A D*, *B D*, *C E*.

On commencera par tirer *F H* & par décrire ſur *F G*, *F H*, *F I* les trois ſegmens de cercle *F S G*, *F T H*, *F V I*; dont le premier *F S G* ſoit capable d'un angle égal à l'angle *B A D*, le ſecond *F T H* d'un angle égal à l'angle *C B D*, & le troiſiéme *F V I* d'un angle égal à l'angle *A C E*, en obſervant pour la poſition de ces ſegmens ſur les lignes *F G*, *F H*, *F I*, que l'ordre des lettres *F S G F* ſoit le même que celui des lettres *B A D B*, que l'ordre des lettres *F T H F* ſoit celui des lettres *C B D C*, & que l'ordre des lettres *F V I F* ſoit celui des *A C E A*. Fig. 70. & 71.

Ayant enſuite achevé les cercles de ces ſegmens, & tiré la ligne indéfinie *P Q*, qui joint les centres *P* & *Q* des deux premiers cercles *F S G*, *F T H*, on prendra ſur cette ligne la droite *Q R* qui ſoit à *P Q*, comme *B C* à *A B*, en obſervant pour la poſition de cette ligne *Q R*, que l'ordre des lettres *P*, *Q*, *R* ſoit le même que celui des lettres *A*, *B*, *C*; cela fait, du centre *R* & de l'intervalle *R F*, on décrira un quatriéme cercle *F N c* qui coupera le troiſiéme *F V I* en *c*, & l'on tirera *F c* qui coupera le premier cercle en *a*, & le ſecond en *b*. Menant alors les droites *a G*, *b H*, *c I*, on n'aura plus qu'à conſtruire la figure *A B C f g h i* ſemblable à la figure *a b c F G H I*, & le trapéze *f g h i* ſera celui qu'il falloit conſtruire.

Car ſuppoſant que les deux premiers cercles *F S G*, *F T H* ſe coupent en *K*, ſoient tirées *P K*, *Q K*, *R K*, *a K*, *b K*, *c K*, & ſoit prolongée *Q P* en *L*, les angles à la circonférence *F a K*, *F b K*, *F c K* étant moitié des angles *F P K*, *F Q K*, *F R K* au centre, ſeront égaux aux angles *L P K*, *L Q K*, *L R K*. Donc la figure *P Q R K* eſt équiangle, & ſemblable à la figure *a b c K*, ce qui donne *a b* : *b c* :: *P Q* : *Q R*, c'eſt-à-dire, :: *A B* : *B C*. De plus, les angles *f A g*, *f B h*, *f C i*, ſont égaux, par conſtruction, aux angles *F a G*, *F b H*, *F c I*. Donc la figure *A B C f g h i* eſt ſemblable à la figure *a b c F G H I*. Donc le trapéze *f g h i* ſera ſemblable au trapeze $FGHI$, & aura ses angles f, g, h, i respectivement appuyées sur les droites ABC, AD, BD, CE. C. Q. F. F.

Fig. 70. & 71. *Cor.* On peut mener par ce moyen une ligne droite, dont les parties soient placées suivant un ordre donné entre quatre droites données de position, & qui ayent entr'elles une proportion donnée. Car augmentant les angles FGH, GHI jusqu'à ce que les droites FG, GH, HI deviennent le prolongement l'une de l'autre, la construction précédente donnera la droite $fghi$, dont les parties fg, gh, hi, placées entre les quatre droites données de position AB & AD, AD & BD, BD, & CE, seront entr'elles comme les lignes, FG, GH, HI, & garderont le même ordre entr'elles. La même question peut se résoudre un peu plus vîte de la maniere suivante.

Fig. 72. & 73. Soient prolongées les droites AB & BD en K & en L, ensorte que $BK : AB :: HI : GH$; & $DL : BD :: GI : FG$; soit tiré ensuite KL, qui rencontre la droite CE en i, & soit prolongé iL en M, ensorte que $LM : iL :: GH : HI$. Cela fait, tirant la ligne MQ parallele à LB, & qui rencontre la droite AD en g, la ligne tirée de g à i rencontrera les lignes AB, BD en f & en h, & sera la ligne demandée.

Car en tirant AP parallele à BD & qui rencontre iL en P, on aura gM à Lh (gi à hi, Mi à Li, GI à HI, AK à BK,) & AP à BL dans la même raison. Coupant alors DL en R ensorte que DL soit à RL dans cette même raison, & marquant les points Q & S, où la droite Mg coupe les droites AB & AD, on aura, à cause des proportionnelles gS à gM, AS à AP; & DS à DL, les proportions $gS : Lh :: AS : BL :: DS : RL$; & $BL - RL : Lh - BL :: AS - DS : gS - AS$, c'est-à dire, $BR : Bh :: AD : Ag$, & par conséquent $:: BD : gQ$, & réciproquement $BR : BD :: Bh : gQ$, ou $:: fh : fg$. Mais par la construction, la ligne BL a été coupée en D & en R dans la même raison que la ligne FI en G & en H: Donc $BR : BD :: FH : FG$. donc $fh : fg :: FH : FG$. Or, comme on a aussi $gi : hi :: Mi : Li$, c'est-à-dire $::$

$GI:HI$, il eſt clair que la ligne fi eſt coupée en g & h de la même maniere que FI l'eſt en G & H. C. Q. F. F.

Dans la conſtruction de ce Corollaire, après qu'on a mené LK qui coupe CE en i, ſi on prolonge iE en V, enſorte qu'on ait $EV:Ei::FH:HI$, & qu'on tire Vf parallele à BD, on aura également la ſolution du Probléme. On l'auroit encore de même, ſi du centre i, & de l'intervalle IH on décrivoit un cercle qui coupât BD en X, & qu'on prolongeât iX en Y, en ſorte que $iY=IF$, & qu'on tirât enſuite Yf parallele à BD. Fig. 72. & 73.

Wren & *Wallis* ont donné autrefois d'autres ſolutions de ce Probléme.

PROPOSITION XXIX. PROBLÉME XXI.

Décrire une trajectoire donnée d'eſpece, qui ſoit coupée par quatre droites données de poſition, en des parties données d'eſpece, d'ordre & de proportion.

Qu'on ſe propoſe de décrire une trajectoire ſemblable à la courbe $FGHI$, & dont les parties ſemblables & proportionnelles aux parties FG, GH, HI de cette courbe ſoient placées entre les droites AB & AD, AD & BD, BD & CE données de poſition, la premiere entre les deux premieres; la ſeconde entre les deux ſecondes, & la troiſiéme entre les deux troiſiémes. Ayant tiré les droites FG, GH, HI, FI, ſoit décrit par le Lemme 27. le trapeze $fghi$, ſemblable au trapeze $FGHI$, & dont les angles f, g, h i ſoient appliqués ſuivant l'ordre preſcrit ſur les droites AB, AD, BD, CE. Cela fait, on n'aura plus qu'à décrire autour de ce trapeze une trajectoire ſemblable à la courbe $FGHI$, & le Probléme ſera réſolu. Fig. 74. & 75.

SCHOLIE.

Ce Probléme peut encore ſe conſtruire en cette ſorte: Ayant tiré FG, GH, HI, FI, prolongez GF en V, tirez FH & IG & faites les angles CAK, DAL égaux aux angles FGH, VFH. Suppoſant enſuite que les lignes AK, AL rencontrent la ligne Fig. 76. & 77.

Du Mouvement des Corps.

BD en *K* & en *L*, tirez *KM* & *LN*, dont la premiere *KM* fasse l'angle *AKM* égal à l'angle *GHI*, & soit à *AK*, comme *HI* à *GH*; & la seconde *LN* fasse l'angle *ALN* égal à l'angle *FHI*, & soit à *AL* comme *HI* à *FH*. Mais en plaçant ces lignes *AK*, *KM*, *AL*, *LN* ayez cette attention que leur situation soit telle à l'égard des lignes *AD*, *AK*, *AL*, que l'ordre des lettres *CAKMC*, *ALKA*, *DALND* soit le même que celui des lettres *FGHIF*.

Fig. 76. & 77. Cela fait, tirez la ligne *MN* qui rencontre *CE* en *i*; faites l'angle *iEP* égal à l'angle *IGF*, & prenez *PE* à *Ei* comme *FG* à *GI*. Tirez de plus par le point *P* la ligne *PQF*, qui fasse avec la ligne *ADE*, l'angle *PQE* égal à l'angle *FIG*; & observez, pour la position de ces lignes *PE* & *PQ* par rapport aux droites *CE*, *PE*, que l'ordre des lettres *PEiP*, *PEQP* soit le même que celui des lettres *FGHIF*. Marquant alors le point *f* où *PQ* rencontre la ligne droite *AB*, on n'aura qu'à décrire sur *if*, comme base, la figure *ifgh* semblable à *IFGH*, & en lui circonscrivant la trajectoire donnée d'espece, le Probléme sera résolu.

Après avoir appris à trouver les orbes, il reste à déterminer les mouvemens des corps dans ces orbes.

SIXIÉME SECTION.

De la détermination des mouvemens dans des Orbes donnés.

PROPOSITION XXX. PROBLÉME XXII.

Trouver pour un temps donné le lieu d'un corps qui se meut dans une Trajectoire Parabolique donnée.

Fig. 78. Soient *S* le foyer de la parabole, *A* son sommet, *P* le lieu cherché où le corps est arrivé en venant de *A*, ou bien celui

d'où il faut qu'il parte pour arriver en A dans le temps donné. Soit de plus $4AS \times M$ la ſurface de l'aire parabolique donnée par ce temps.

Fig. 78.

Ayant diviſé la ligne AS en deux parties égales au point G & élevé perpendiculairement à AS la droite GH égale à $3M$, on aura le lieu cherché P par l'interſection de la parabole & du cercle dont le centre eſt H, & le rayon HS. Car abaiſſant PO perpendiculaire ſur l'axe, & tirant PH, on aura $AG^2 + GH^2 = (HP^2 = \overline{AO - AG}^2 + \overline{PO - GH}^2) = AO^2 + PO^2 - 2GA \times AO - 2GH \times PO + AG^2 + GH^2$. D'où l'on tire $2GH \times PO (= AO^2 + PO^2 - 2GA \times AO) = AO^2 + \frac{3}{4}PO^2$. Ecrivant enſuite $AO \times \frac{PO^2}{4AS}$ au lieu de AO^2, diviſant tous les termes par $3PO$ & les multipliant par $2AS$, on aura $\frac{4}{3}GH \times AS (= \frac{1}{6}AO \times PO + \frac{1}{2}AS \times PO = \frac{AO + 3AS}{6} \times PO = \frac{4AO - 3SO}{6} \times PO =$ l'aire $APO - SPO) =$ l'aire APS. Mais à cauſe que $GH = 3M$, on a $\frac{4}{3}GH \times AS = 4AS \times M$. Donc l'aire APS a pour ſurface la quantité donnée $4AS \times M$.

Cor. 1. De-là on tire que GH eſt à AS, comme le temps pendant lequel le corps décrit l'arc AP eſt au temps pendant lequel il décrit l'arc compris entre le ſommet A & la perpendiculaire élevée du foyer S ſur l'axe.

Cor. 2. Si on imagine que le cercle ASP ſuive continuellement le corps P, la vîteſſe du point H ſera à la vîteſſe du corps au ſommet A, comme 3 à 8. Donc la ligne GH, & la ligne droite que le corps peut décrire dans le temps qu'il ſe meut de A vers P, avec la vîteſſe qu'il avoit au ſommet A, ſont entr'elles dans la même raiſon.

Cor. 3. Et réciproquement; on peut trouver le temps que le corps a employé à décrire un arc quelconque AP, en tirant AP & en élevant au milieu de cette ligne une perpendiculaire qui rencontre la droite GH en H.

Du MOUVEMENT DES CORPS.

LEMME XXVIII.

Les parties quelconques de toute figure ovale, déterminées par les coordonnées ou par d'autres droites tirées à volonté, ne peuvent jamais être trouvées par aucune équation d'un nombre fini de termes & de dimensions.

Soit donné dans l'ovale un point quelconque autour duquel, comme pole, tourne perpétuellement une ligne droite d'un mouvement uniforme, & soit imaginé en même temps sur cette ligne un point mobile allant toujours depuis le pole avec une vîtesse qui soit comme le quarré de la partie de cette ligne renfermée dans l'ovale, ce point décrira alors une spirale composée d'une infinité de Spires. Or si la portion d'aire ovale, coupée par cette droite, peut être trouvée par une équation d'un nombre fini de termes, on aura aussi, par la même équation, le rayon de la spirale qui est proportionnel à cette aire. Ainsi on pourra trouver par une équation finie tous les points d'une spirale, & par conséquent on pourra trouver aussi l'intersection d'une droite quelconque donnée de position, & d'une spirale par une équation finie; mais toute droite prolongée infiniment coupe une spirale en une infinité de points, & toute équation qui donne l'intersection quelconque de deux lignes doit donner toutes leurs intersections par autant de racines, & doit avoir par conséquent autant de dimensions qu'il y a d'intersections. Car on sçait que deux cercles se coupant en deux points, on ne peut avoir une de leurs intersections que par une équation du second degré qui donne en même temps l'autre point: & que deux sections coniques pouvant se couper en quatre points, on ne sçauroit avoir une de ces intersections que par une équation du quatrième degré, qui donne en même temps les trois autres, puisque si on cherche chacune des intersections à part, le calcul fondé sur les mêmes conditions sera le même, & donnera toujours un même résultat qui renfermera toutes les intersections, & les donnera

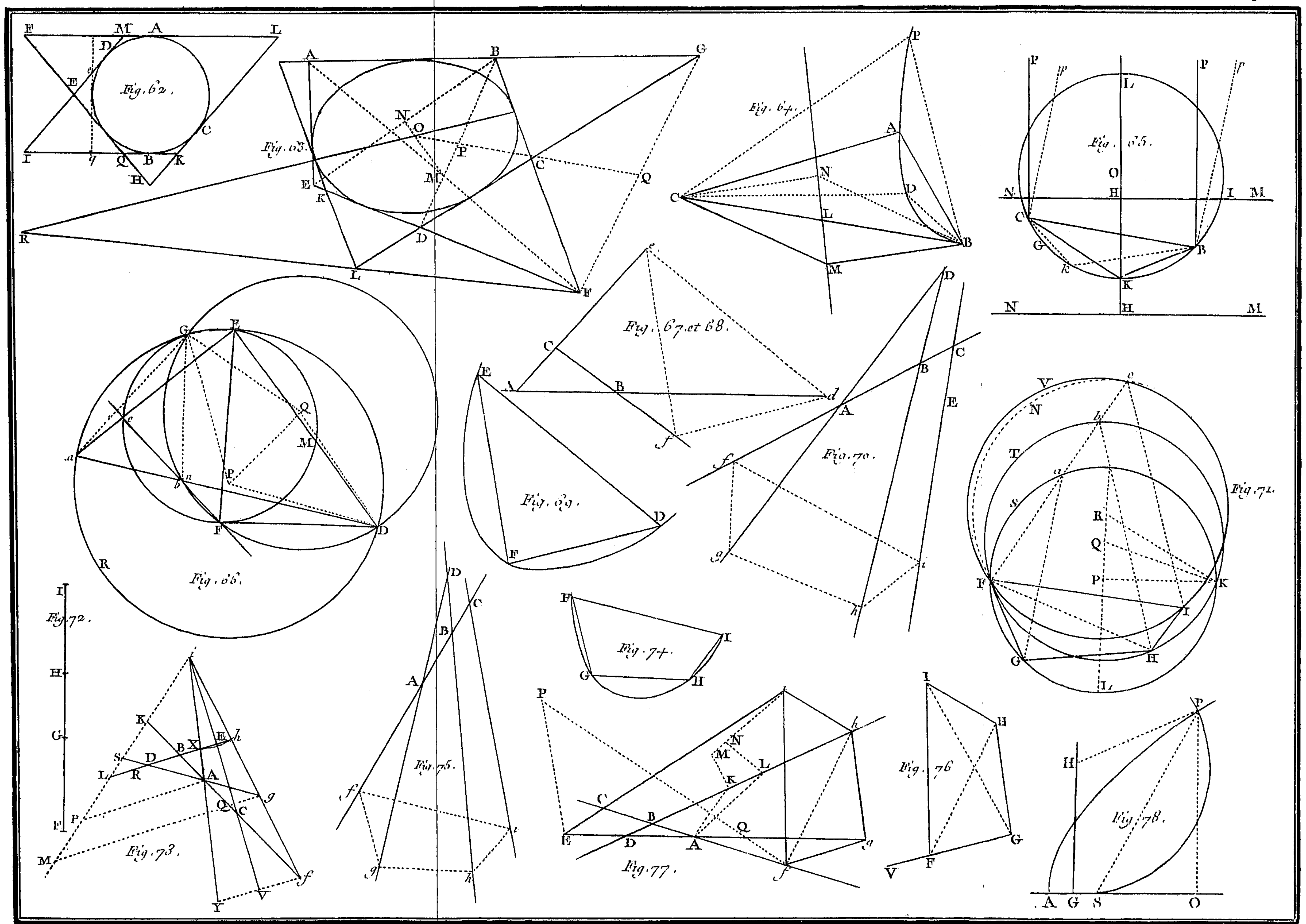


Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67. et 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78.

indifféremment. De même, les ſections coniques & les courbes du troiſiéme degré pouvant ſe couper en ſix points, leurs interſections ſe trouvent toutes à la fois par des équations de ſix dimenſions, & les interſections de deux courbes du troiſiéme degré pouvant être au nombre de neuf, elles ſe trouvent toutes en même temps par des équations de neuf dimenſions. Si cela n'arrivoit pas néceſſairement, on pourroit réduire tous les Problémes ſolides aux Problémes plans, & les ſurſolides aux Problémes ſolides. Je parle ici des courbes dont le degré eſt irréductible. Car ſi l'équation qui exprime une courbe, peut être réduite à un degré inférieur, la courbe ne ſera pas unique, mais elle ſera compoſée de deux ou pluſieurs courbes dont on peut trouver les interſections ſéparément par différents calculs. Les deux interſections des droites & des coniques ſe trouvent auſſi toujours par des équations de deux dimenſions, les trois interſections des droites & des courbes irréductibles du troiſiéme degré, par des équations de trois dimenſions, & les quatre interſections des droites & des courbes irréductibles du quatriéme degré, par des équations de quatre dimenſions, & ainſi à l'infini.

Or, la ſpirale étant une courbe ſimple & qu'on ne peut décompoſer en pluſieurs courbes, le nombre infini de ſes interſections avec une ligne droite ne ſera exprimé que par une équation d'un nombre infini de dimenſions & de racines, qui donnera toutes ces interſections à la fois, puiſque c'eſt la même loi & le même calcul pour toutes. Car ſi du pole on abaiſſe une perpendiculaire ſur la droite coupante, & que cette perpendiculaire ſe meuve avec la droite coupante autour du pole, les interſections de la ſpirale paſſeront mutuellement entr'elles, celle qui étoit la premiere ou la plus proche, ſera après une révolution la ſeconde, après deux révolutions elle ſera la troiſiéme, & ainſi de ſuite; & cependant l'équation ne changera point, à moins que la grandeur des quantités qui déterminent la poſition de la coupante ne change: or, comme ces quantités après chaque révolution retournent à leurs premieres grandeurs, l'équation reviendra à ſa premiere forme; ainſi une ſeule & même équation donnera toutes les interſections, & elle aura par conſéquent un nombre infini de racines qui les donneront toutes. On ne peut donc trouver d'une maniere générale une interſection quelconque d'une droite & d'une ſpirale par une équation finie, & par conſéquent il n'y a point d'ovale dont l'aire coupée par des droites à volonté puiſſe être exprimée par une telle équation.

En prenant le rayon de la ſpirale proportionnel au périmetre de l'ovale coupée, il ſera aiſé de prouver par le même raiſonnement qu'on ne peut exprimer la longueur de ce périmetre d'une façon générale par aucune équation finie. Au reſte, je parle ici des ovales qui ne ſont pas touchées par des figures conjuguées qui s'étendent à l'infini.

Cor. De-là on voit que l'aire elliptique décrite autour du foyer ne peut pas être exprimée dans un temps donné par une équation finie, & que par conſéquent elle ne peut être déterminée par la deſcription des courbes géométriquement rationnelles. J'appelle courbes géométriquement rationnelles, celles dont la relation entre les abſciſſes & les ordonnées peut être déterminée par des équations en termes finis. Les autres courbes, telles que les ſpirales, les quadratices, les trochoïdes, &c. je les nomme des courbes géométriquement irrationelles. Je vais montrer à couper l'aire elliptique proportionnellement au temps par une courbe de cette eſpece.

PROPOSITION XXXI. PROBLÉME XXIII.

Trouver pour un temps donné le lieu d'un corps qui ſe meut dans une trajectoire elliptique donnée.

Fig. 79. Que A ſoit le ſommet de l'ellipſe APB, S ſon foyer, O ſon centre, & qu'il s'agiſſe de trouver le lieu P du corps. Prolongez OA en G, en ſorte que $OG : OA :: OA : OS$; élevez la perpendiculaire GH, & du centre O & de l'intervalle OG décrivez

le cercle GEF; cela fait, prenant GEF pour cercle roulant, A pour point décrivant, & GH pour base, tracez la trochoïde ALI, & prenez GK qui soit à la circonférence $GEFG$ dans la même raison que le temps pendant lequel le corps décrit l'arc AP, en partant du point A, est au temps d'une révolution dans l'ellipse. Elevez ensuite la perpendiculaire KL qui rencontre la trochoïde en L, & vous aurez, en menant LP parallele à KG, le lieu cherché P. Fig. 76.

Pour le démontrer, soit décrit sur le diametre AB le demi cercle AQB, & soient tirées du point Q, où la droite PL rencontre ce demi cercle, les droites QS, QO aux points O & S; soit de plus prolongé OQ jusqu'à ce qu'elle rencontre l'arc EFG en F, & abaissez sur cette droite OQ la perpendiculaire SR; il est clair, à cause que l'aire APS est proportionnelle à l'aire AQS, c'est-à-dire à la différence entre le secteur OQA & le triangle OQS, ou à la différence des rectangles $\frac{1}{2} OQ \times AQ$, & $\frac{1}{2} OQ \times SR$, ou (ce qui revient au même $\frac{1}{2} OQ$ étant donné) à la différence entre l'arc AQ & la droite SR, ou bien encore (à cause que les raisons de SR au sinus de l'arc AQ, de OS à OA, de OA à OG, de AQ à GF, & par conséquent de $AQ - SR$ à $GF -$ le sinus de l'arc AQ, sont égales & données) à la droite GK différence entre GF & le sinus de l'arc AQ. C. Q. F. D.

SCHOLIE.

Au reste, comme la description de cette courbe est difficile, il vaut mieux employer une solution approchée. On commencera par trouver un angle B qui soit à l'angle de 57. 29578 degrés que soustend un arc égal au rayon, comme la distance SH des foyers est au diametre AB de l'ellipse; & une longueur quelconque L qui soit au rayon dans la même raison inverse; ce qui étant trouvé, le Probléme se construira ensuite par l'analyse suivante. Fig. 80.

Ayant trouvé par une méthode ou par une estime quelconque, un lieu P voisin du vrai lieu cherché p, & ayant tiré l'ordonnée PR à l'axe de l'ellipse, la proportion des diametres de l'ellipse donnera l'ordonnée RQ du cercle circonscrit AQB, laquelle est le sinus de l'angle AOQ pour le rayon AO, & coupe l'ellipse

Fig. 82. au point P. Il suffit de trouver cet angle en nombres approchés par un calcul grossier. Il faut connoître aussi l'angle proportionnel au temps, c'est-à-dire, l'angle qui est à quatre droits, comme le temps pendant lequel le corps décrit l'arc Ap est au temps d'une révolution dans l'ellipse. N étant cet angle, on prendra l'angle D à l'angle B, comme le sinus de l'angle AOQ est au rayon, & l'angle E à l'angle $N-AOQ+D$, comme la longueur L est à cette même longueur L diminuée du cosinus de l'angle AOQ, lorsque cet angle est moindre qu'un droit, & augmentée de ce même cosinus lorsqu'il est plus grand. On prendra ensuite l'angle F à l'angle B, comme le sinus de l'angle $AOQ+E$ au rayon, & l'angle G à l'angle $N-AOQ-E+F$, comme la longueur L est à cette même longueur L, diminuée du cosinus de l'angle $AOQ+E$ lorsque cet angle est moindre qu'un droit, & augmentée de ce même cosinus lorsqu'il est plus grand. On continuera de même à prendre l'angle H à l'angle B, comme le sinus de l'angle $AOQ+E+G$ au rayon; & l'angle I à l'angle $N-AOQ-E-G+H$, comme la longueur L est à cette même longueur L diminuée du cosinus de l'angle $AOQ+E+G$ lorsque cet angle est moindre qu'un droit, & augmentée de ce même cosinus lorsqu'il est plus grand, & l'opération pourra être continuée à l'infini. Enfin prenant l'angle AOq égal à l'angle $AOQ+$

Fig. 76. $E+G+I+$, &c. le cosinus Or de cet angle, & l'ordonnée Pr qui est au sinus qr comme le petit axe de l'ellipse est au grand, donneront le lieu corrigé p.

Lorsque l'angle $N-AOQ+D$ est négatif, le signe $+$ de E doit par tout se changer en $-$ & son signe $-$ en $+$. Il en est de même des signes de G & de I, lorsque les angles $N-AOQ-E+F$, & $N-AOQ-E-G+H$ deviennent négatifs.

Il eſt à remarquer que la ſuite infinie $AOQ + E + G + I +$ &c. converge ſi vîte, qu'il n'eſt preſque jamais beſoin d'aller au-delà du ſecond terme E; le calcul que je viens de donner eſt fondé ſur ce Théoréme, que l'aire APS eſt comme la différence entre l'arc AQ & la droite tirée du foyer S perpendiculairement ſur le rayon OQ.

On réſout le même Probléme pour l'hyperbole par un calcul à peu près ſemblable. O étant ſon centre, A ſon ſommet, S ſon foyer, & OK ſon aſymptote : on commencera par connoître la quantité de l'aire à retrancher proportionnelle au temps, & par tirer la droite SP qu'on eſtime pouvoir retrancher l'aire APS approchante de l'aire demandée. On tirera enſuite OP, & des points A & P on ménera les paralleles AI, PK à l'autre aſymptote. Cela fait, par la table des Logarithmes, on aura l'aire $AIKP$, ainſi que l'aire OPA qui lui eſt égale, laquelle étant retranchée du triangle OPS laiſſera l'aire APS. Diviſant par la ligne SN, tirée perpendiculairement du foyer S ſur la tangente TP, la double différence $2APS - 2A$ ou $2A - 2APS$ de l'aire A à retrancher & de l'aire APS retranchée, on aura la longueur de la corde PQ. Plaçant enſuite cette corde PQ entre A & P ſi l'aire retranchée APS eſt plus grande que l'aire A qu'il faut retrancher, ou du côté oppoſé ſi elle eſt plus petite, le point Q ſera un lieu plus approché du vraï, & en répétant la même opération on en approchera de plus en plus à l'infini. Fig. 81.

Ainſi par ces calculs on réſout le Probléme analytiquement & généralement; mais la méthode particuliere qui ſuit eſt plus propre aux uſages aſtronomiques.

AO, OB, OD étant les demi axes de l'ellipſe, L ſon parametre & D la différence entre la moitié OD du petit axe, & la moitié $\frac{1}{2}L$ du parametre; cherchez l'angle Y, dont le ſinus ſoit au rayon, comme le rectangle, ſous cette différence D & la moitié $AO + OD$ de la ſomme des axes, eſt au quarré du grand axe AB; cherchez auſſi l'angle Z dont le ſinus ſoit au Fig. 82.

Du mouvement des Corps.

rayon, comme le double rectangle, sous la distance SH des foyers, & cette différence D, est au triple quarré de la moitié AO du grand axe. Ces angles étant une fois trouvés, vous aurez ainsi le lieu cherché.

Prenez l'angle T proportionnel au temps pendant lequel l'arc BP est décrit, ou, pour parler comme les Astronomes, égal au mouvement moyen. Prenez de plus l'angle V, premiere équation du mouvement moyen, à l'angle Y, premiere plus grande équation, comme le sinus du double de l'angle T est au rayon; & l'angle X, seconde équation, à l'angle Z, seconde plus grande équation, comme le cube du sinus de l'angle T au cube du rayon. Cela fait, prenez l'angle BHP du mouvement moyen corrigé, égal, ou à la somme $T+X+V$ des angles T, V, X, si l'angle T est plus petit qu'un droit, ou à la différence $T+X-V$, si cet angle est plus grand qu'un droit, & moindre que deux droits. Enfin tirez SP au point P où HP rencontre l'ellipse, & l'aire BSP sera à très peu de chose près proportionnelle au temps.

Fig. 81. & 82.

Cette construction est assez courte, parce qu'en se contentant des deux ou trois premiers chifres, lorsqu'on détermine les petits angles V & X, qu'on peut, si on veut, ne prendre qu'en secondes, on a une solution du Probléme aussi éxacte qu'il est nécessaire pour la théorie des planetes; car dans l'orbe de Mars même, dont la plus grande équation du centre est de dix degrés, l'erreur passeroit à peine une seconde.

Au reste, connoissant l'angle BHP du mouvement moyen corrigé: l'angle BSP du mouvement vrai, & la distance SP sont aisés à trouver par une méthode très connue.

Jusqu'ici j'ai éxaminé le mouvement des corps dans des lignes courbes; mais il se peut faire que le mobile monte ou descende dans une ligne droite. Je vais donc expliquer ce qui a rapport à cette sorte de mouvement.

SEPTIÈME SECTION.

De l'ascension & de la descension rectiligne des corps.

PROPOSITION XXXII. PROBLÉME XXIV.

Supposant que la force centripete soit réciproquement proportionnelle au quarré de la distance au centre, trouver les espaces rectilignes que le corps parcourt en tombant dans des temps donnés.

Cas 1. Si le corps ne tombe pas perpendiculairement, il décrira (par le Cor. 1. de la Prop. 13.) quelque section conique dont le foyer sera dans le centre des forces. Soit $ARPB$ cette section conique, & S son foyer. Supposant d'abord que cette courbe soit une ellipse, on décrira sur son grand axe AB un demi cercle ADB, & l'on tirera par le lieu du corps tombant la ligne DPC perpendiculaire à l'axe; on tirera ensuite DS, PS, & l'on aura l'aire ASD proportionnelle au temps. Fig. 83.

L'axe AB restant le même, & la largeur de l'ellipse diminuant continuellement, l'aire ASD demeurera toujours proportionnelle au temps; & si l'on suppose que cette largeur diminue à l'infini, l'orbe APB coïncidant avec l'axe AB, & le foyer S avec l'extrémité B de l'axe, le corps descendra dans la droite AC, & l'aire ABD sera alors proportionnelle au temps. L'espace AC que le corps décrit dans le temps donné en tombant perpendiculairement du lieu A sera donc donné aussi-tôt que l'on prendra l'aire ABD proportionnelle au temps, & qu'on tirera du point D la ligne DC perpendiculaire sur la droite AB. *C. Q. F. T.*

Cas 2. Supposant présentement que la figure RPB soit une hyperbole, soit décrit sur son diametre principal AB une hyperbole équilatere BED: l'aire $SDEB$ sera proportionnelle au temps pendant lequel le corps P décrira l'arc PfB, parce que l'aire $SPfB$ est proportionnelle à ce temps; & que les aires Fig. 84.

CSP, $CBfP$, $SPfB$ sont aux aires CSD, $CBED$, $SDEB$, respectivement, dans la raison donnée de CP à CD.

Si on diminue ensuite à l'infini le parametre de l'hyperbole RPB, son premier axe restant le même, l'arc PB coïncidera avec la droite CB, le foyer S avec le sommet B, & la droite SD avec la droite BD; ainsi l'aire $BDEB$ sera proportionnelle au temps de la chute rectiligne CB.

Fig. 85.

Cas 3. Par le même raisonnement, si la figure RPB est une parabole, & que du même sommet principal B on décrive une autre parabole BED, qui demeurera toujours donnée pendant que la premiere parabole, dans le périmetre de laquelle le corps P se meut, vient à coïncider avec la ligne CB, par la diminution infinie de son parametre, le segment parabolique $BDEB$ sera proportionnel au temps de la chute rectiligne CB. C. Q. F. T.

PROPOSITION XXXIII. THÉORÉME IX.

Fig. 86. & 87.

Les choses trouvées ci-devant étant posées, la vîtesse du corps qui tombe est, dans un lieu quelconque C, *à la vîtesse du corps qui décrit un cercle au tour du centre* B, *à la distance* BC, *dans la raison sousdoublée de* AC, *(distance du corps au sommet ultérieur* A *du cercle ou de l'hyperbole équilatere,) au demi diametre principal* $\frac{1}{2}$ AB *de la figure.*

Soient O le milieu du diametre AB de l'une & de l'autre figure RPB, DEB; PT la tangente de la figure RPB en P; T la rencontre de cette tangente avec le diamettre commun AB prolongé, s'il est nécessaire; SY la perpendiculaire à cette tangente; BQ la perpendiculaire à AB; L le parametre de la figure RPB. Il est certain, par le Corol. 7. de la Propos. 16. que la vîtesse du corps, qui se meut dans la ligne RPB autour du centre S, est dans un lieu quelconque P, à la vîtesse du corps qui décrit un cercle autour du même centre & à la distance SP, en raison sousdoublée du rectangle $\frac{1}{2} L \times SP$ à SY^2. Or par les coniques $AC \times CB : CP^2 :: 2AO : L$; donc

$\frac{AO \times 2CP^2}{AC \times CB} = L$. Donc ces vîtesses sont entr'elles en raison sous- LIVRE PREMIER.

doublée de $\frac{CP^2 \times AO \times SP}{AC \times CB}$ à SY^2. De plus, on a encore Fig. 86. & 87.
par les coniques $CO : BO :: BO : TO$, & par conséquent $:: CB : BT$; d'où on tire $BO \mp CO : BO :: CT : BT$, c'est-à-dire, $AC : AO :: CP : BQ$; & par conséquent $\frac{CP^2 \times AO \times SP}{AC \times CB} = \frac{BQ^2 \times AC \times SP}{AO \times BC}$. Supposant présentement que la largeur CP de la figure RPB diminue à l'infini, ensorte que le point P coïncide avec le point C, le point S avec le point B, la ligne SP avec la ligne BC, & la ligne SY avec la ligne BQ, la vîtesse du corps qui descend dans la droite CB, sera à la vîtesse du corps qui décrit un cercle autour du centre B & à la distance CB dans la raison sousdoublée de $\frac{BQ^2 \times AC \times SP}{AO \times BC}$ à SY^2, c'est-à-dire, (à cause qu'en ce cas $SP = BC$ & $BQ^2 = SY^2$,) que ces vîtesses seront alors entr'elles dans la raison sousdoublée de AC à AO ou $\frac{1}{2}AB$. C. Q. F. D.

Cor. 1. Les points B & S coïncidant, on aura $TC : TS :: AC : AO$.

Cor. 2. Si la vîtesse d'un corps qui décrit un cercle autour du centre des forces étoit imprimée à ce corps suivant le rayon, & dans la direction opposée au centre, il parcoureroit en remontant un espace égal au diametre.

PROPOSITION XXXIV. THÉORÉME X.

Si la figure BED *est une parabole, la vîtesse du corps qui tombe est égale dans un lieu quelconque* C, *à la vîtesse avec laquelle ce corps peut décrire uniformément un cercle autour du centre* B *&* *à la moitié de sa distance* BC. Fig. 88.

La vîtesse du corps qui décrit la parabole RPB autour du centre S, est dans un lieu P, par le Corol. 7. de la Prop. 16, égale à la vîtesse du corps qui décrit uniformément un cercle autour du même centre S & à la distance $\frac{1}{2}$ SP. Supposant donc que la largeur CP de la parabole diminue à l'infini, ensorte que l'arc parabolique PfB coïncide avec la droite CB, la proposition sera prouvée, puisque le centre S se confondra avec le sommet B, & la distance SP avec la distance BC. C. Q. F. D.

Fig. 88.

PROPOSITION XXXV. THÉORÉME XI.

Fig. 89. & 90.

Les mêmes choses étant posées, l'aire de la figure DES *décrite autour du centre* S *est égale à l'aire qu'un corps peut décrire, en tournant uniformément pendant le même temps dans un cercle dont le centre est le même point* S, *& le rayon la moitié du parametre de la figure* DES.

Supposant que le corps aît parcouru la petite ligne Cc en tombant pendant un très-petit espace de temps, & que dans le même temps un autre corps K, en tournant uniformément dans le cercle OKk, ait décrit l'arc Kk autour du centre S; on élevera les perpendiculaires CD, cd qui rencontrent la figure DES en D & en d, on tirera SD, Sd, SK, Sk, l'on menera Dd qui rencontre l'axe AS en T, & l'on abaissera la perpendiculaire SY sur cette ligne.

Cas 1. Si la figure DES est une hyperbole équilatere, ou un cercle, & que son diametre transversal AS soit coupé en deux parties égales au point O, SO sera la moitié du parametre. Or comme $TC:TD::Cc:Dd$, & $TD:TS::CD:SY$, on aura $TC:TS::CD \times Cc:SY \times Dd$; mais $TC:TS::AC:AO$, par le Corol. 1. de la Prop. 33. Si on prend les dernieres raisons de ces lignes lorsque les points D & d coïncident: donc $AC:AO$ ou $SK::CD \times Cc:SY \times Dd$. De plus, par la Prop. 33. la vîtesse en C du corps qui descend est à la vîtesse du corps qui décrit un cercle autour du centre S & à la distance SC en raison sousdoublée de AC à AO ou SK, & cette vîtesse, par le Corol. 6. de la Prop. 4. est à la vîtesse du corps qui décrit le cercle OKk en raiſon ſousdoublée de SK à SC; ou, ce qui en eſt une ſuite évidente, la vîteſſe en C eſt à la vîteſſe dans le cercle OKk, c'eſt-à-dire, la petite ligne Cc eſt à l'arc Kk dans la raiſon ſousdoublée de AC à SC, ou dans la raiſon ſimple de AC à CD. Donc, comme il ſuit delà que $CD \times Cc = AC \times Kk$, la proportion précédente $AC : SK :: CD \times Cc : SY \times Dd$ ſe changera en $AC : SK :: AC \times Kk : SY \times Dd$, d'où l'on tirera $SK \times Kk = SY \times Dd$, c'eſt-à-dire que l'aire KSk eſt égale à l'aire SDd. De même, à chaque particule de temps, il y aura deux petites portions d'aires KSk & SDd, qui, en diminuant de grandeur, & en augmentant de nombre à l'infini, auront entr'elles à la fin la raiſon d'égalité; donc, par le Corol. du Lemme 4. les aires entiéres décrites dans le même temps ſeront toujours égales. *C. Q. F. D.* Fig. 89. & 90.

Cas 2. Si la figure DES eſt une parabole, on trouvera, comme ci-deſſus $CD \times Cc : SY \times Dd :: TC : TS$, c'eſt-à-dire :: 2 : 1; donc $\frac{1}{4}\ CD \times Cc = \frac{1}{2} SY \times Dd$; mais, par la Prop. 34. la vîteſſe du corps qui tombe eſt égale dans le lieu C à la vîteſſe avec laquelle le cercle dont le rayon eſt $\frac{1}{2}\ SC$ peut être décrit uniformément, & par le Corol. 6. de la Prop. 4. cette vîteſſe eſt à la vîteſſe avec laquelle le cercle dont le rayon eſt SK peut être décrit, dans la raiſon ſousdoublée de SK à $\frac{1}{2}\ SC$; donc la petite ligne Cc eſt à l'arc Kk dans la même raiſon, ou, ce qui revient au même, dans la raiſon de SK à $\frac{1}{2}\ CD$: or, delà il ſuit, que $\frac{1}{2}\ SK \times Kk = \frac{1}{4}\ CD \times Cc$, & par conſéquent $= \frac{1}{2}\ SY \times Dd$, c'eſt-à-dire, que l'aire KSk eſt égale à l'aire SDd, comme ci-deſſus. *C. Q. F. D.* Fig. 91.

PROPOSITION XXXVI. PROBLÉME XXV.

Déterminer le temps de la chute d'un corps qui tombe d'un lieu donné A. Fig. 92.

Sur le diametre AS, diſtance du corps au centre dans le commencement de la chute, décrivez le demi cercle ADS, Du Mouvement des Corps

ainsi que le demi cercle *OKH*, qui lui est égal, & qui est décrit autour du centre *S*. D'un lieu quelconque *C* du corps, élevez l'ordonnée *CD*, tirez *SD*, & faites le secteur *OSK* égal à l'aire *ASD*. Il est clair, par la Prop. 35. que le corps en tombant par *AC*, employera le même temps qu'il faudroit à un autre corps pour décrire l'arc *OK*, en tournant uniformément autour du centre *S*. *C.Q.F.F.*

Fig. 92.

PROPOSITION XXXVII. PROBLÉME XXVI.

Déterminer le temps de l'ascension ou de la descension d'un corps jetté d'un lieu donné, soit en en haut, ou en en bas.

Que le corps parte du lieu donné *G*, suivant la ligne *GS* avec une vîtesse quelconque. Prenez *AG* à $\frac{1}{2}$ *AS* en raison doublée de cette vîtesse à la vîtesse uniforme avec laquelle le corps peut circuler dans un cercle autour du centre *S*, & à la distance donnée *SG*. Si cette raison est celle de 2 à 1, le point *A* sera infiniment distant, & alors ce sera une parabole qu'il faudra décrire, son sommet étant *S*, son axe *SG*, & son parametre une ligne quelconque; ce qui est clair par la Prop. 34.

Fig. 93. 94. 95.

Si cette raison est moindre ou plus grande que celle de 2 à 1, ce sera ou un cercle, ou une hyperbole équilatere qu'il faudra décrire sur le diametre *SA*, comme il est évident par la Prop. 33. Dans chacun de ces cas décrivez le cercle *HkK* du cercle *S*, & d'une intervalle égal à la moitié du parametre. Elevez les perpendiculaires *GI*, *CD*, au lieu *G*, & à un autre lieu quelconque *C*, de l'espace parcouru en montant ou en descendant, lesquelles perpendiculaires rencontrant la section conique ou le cercle en *I* & en *D*. Tirant ensuite les lignes *SI*, *SD*, & faisant les secteurs *HSK*, *HSk* égaux aux segmens *SEIS*, *SEDS*, il est clair, par la Prop. 35. que le corps *G* parcourera l'espace *GC* dans le même temps qu'il faudroit au corps *K*, pour décrire l'arc *Kk*. C. Q. F. F.

PROPOSITION XXXVIII. THÉOREME XII.

La force centripete étant proportionnelle à la hauteur ou à la distance des lieux au centre, les temps, les vîtesses & les espaces décrits par les corps tombans sont respectivement proportionnels aux arcs, aux sinus droits & aux sinus verses de ces arcs.

Supposant que le corps tombe d'un lieu quelconque *A*, suivant une droite *AS*, soit décrit du centre *S* des forces, & de l'intervalle *A S* le quart du cercle *AE*, & soit *CD* le sinus droit d'un arc quelconque *A D*, le corps *A* décrira l'espace *A C* en tombant pendant le temps *A D*, & aura en *C* la vîtesse *C D*. Fig. 96.

C'est ce qu'il est aisé de démontrer par la Prop. 10. de la même maniere qu'on a démontré la Prop. 32. par la Prop. 11.

Cor. 1. Delà, le temps, dans lequel un corps tombant du lieu *A* parvient au centre *S*, est égal au temps dans lequel un autre corps décrit l'arc de cercle *A D E*.

Cor. 2. Les temps dans lesquels les corps tombent de lieux quelconques jusqu'au centre sont donc tous égaux les uns aux autres. Car par le Corol. 3. de la Prop. 4. tous les temps périodiques des corps qui tournent sont égaux.

PROPOSITION XXXIX. PROBLÉME XXVII.

La quadrature des courbes étant supposée, & le corps montant ou descendant dans une ligne droite qui passe par le centre vers lequel il est poussé, suivant une loi quelconque, on demande la vîtesse de ce corps en un point quelconque de cette droite, ainsi que le temps employé à y arriver : & réciproquement.

Que le corps *E* tombe d'un lieu quelconque *A* suivant la droite *A D E C*, & que *B F G* soit la courbe dont toutes les ordonnées *A B*, *D F*, *E G*, *&c.* soient proportionnelles aux forces en *A*, *D*, *E* vers le centre *C*, la vîtesse en un point quelconque *E* sera comme la racine quarrée de l'aire *A B E G*. C. Q. F. T. Fig. 97.

Que la courbe *V L M*, dont l'asymptote est *A B T*, soit celle

Du mouvement des Corps.

dont toutes les ordonnées EM ſoient réciproquement proportionnelles aux aires $ABGE$, l'aire $ABTVME$ repréſentera le temps pendant lequel le corps parcourera en tombant la ligne AE. C. Q. F. T.

Pour démontrer la premiere de ces deux aſſertions, ſoit priſe ſur la droite AE une très petite ligne DE donnée de longueur, & ſoit DLF le lieu de la ligne EMG, lorſque le corps étoit en D; ſi la force centripete eſt ſuppoſée celle qui convient pour que la vîteſſe du corps deſcendant ſoit proportionnelle à la racine quarrée de l'aire $ABGE$, cette aire ſera en raiſon doublée de la vîteſſe, c'eſt-à-dire, que ſi au lieu des vîteſſes en D & en E, on écrit V & $V+I$, l'aire $ABFD$ ſera comme V^2, & l'aire $ABGE$ comme $V^2 + 2VI + I^2$, d'où il réſultera que l'aire $DFGE$ ſera comme $2VI + I^2$, & par conſéquent $\frac{DFGE}{DE}$ ſera comme $\frac{2VI+I^2}{DE}$, c'eſt-à-dire, en prenant les premieres raiſons des quantités naiſſantes, que la longueur DF ſera comme la quantité $\frac{2VI}{DE}$, ou comme ſa moitié $\frac{I \times V}{DE}$.

Fig. 97.

Maintenant, le temps, pendant lequel le corps en tombant parcourt la petite ligne DE, eſt comme cette petite ligne directement, & la vîteſſe V inverſement; de plus, la force eſt comme l'incrément I de la vîteſſe directement, & comme le temps inverſement; donc ſi on prend les premieres raiſons des quantités naiſſantes, cette force ſera comme $\frac{I \times V}{DE}$, c'eſt-à-dire comme la longueur DF. Donc la force proportionnelle à DF ou à EG fera deſcendre le corps avec une vîteſſe qui ſera comme la racine de l'aire $ABGE$. C. Q. F. D.

La ſeconde aſſertion eſt facile à démontrer préſentement; car puiſque le temps, employé à parcourir une petite ligne DE d'une longueur quelconque donnée, eſt inverſement comme la vîtesse, & par conséquent inversement comme la ligne droite qui seroit la racine de l'aire $ABFD$, & que DL, & par conséquent l'aire naissante $DLME$ est comme la même droite inversement : le temps sera comme l'aire $DLME$: & la somme de tous les temps, comme la somme de toutes ces aires, c'est-à-dire, par le Corol. du Lemme 4. que le temps total employé à parcourir la ligne AE sera comme l'aire totale $ATVME$. C. Q. F. D.

Fig. 97.

Cor. 1. Si P est le lieu duquel le corps doit tomber, afin qu'étant pressé par une force centripete donnée & uniforme, telle qu'on suppose ordinairement la gravité, il acquiere au lieu D une vîtesse égale à celle qu'un autre corps poussé par une force quelconque a acquise au même lieu D, on aura le lieu A, d'où cet autre corps a commencé de tomber en prenant sur la perpendiculaire DF une ligne DR, qui soit à DF comme la force uniforme est à la force variable en D, & en coupant l'aire $ABFD$ égale au rectangle $PDRQ$. Car puisque l'aire $ABFD$ est à l'aire $DFGE$ comme V^2 à $2VI$, ou comme $\frac{1}{2}V$ à I, c'est-à-dire, comme la moitié de la vîtesse totale produite par la force variable est à l'incrément de cette vîtesse, & que de même l'aire $PQRD$ est à l'aire $DRSE$, comme la moitié de la vîtesse totale produite par la force uniforme est à l'incrément de cette vîtesse; que de plus ces incrémens, à cause de l'égalité des temps naissans, sont comme les forces génératrices, c'est-à-dire, comme les ordonnées DF, DR, ou, ce qui revient au même, comme les aires naissantes $DFGE$, $DRSE$; il s'ensuit que les aires totales $ABFD$, $PQRD$ seront l'une à l'autre comme les moitiés des vîtesses totales, & que par conséquent elles seront égales, ainsi que ces vîtesses.

Cor. 2. Ainsi, si d'un lieu quelconque D, on jette un corps en en haut ou en en bas avec une vîtesse donnée, & que la loi de la force centripete soit connue, on trouvera sa vîtesse dans un autre lieu quelconque e en élevant l'ordonnée eg, & prenant cette vîtesse à la vîtesse dans le lieu D, comme la racine du rectangle $PQRD$ augmenté de l'aire curviligne $DFge$, si le lieu e est plus bas que le lieu D, ou diminué de cette aire, s'il est plus haut, à la racine du rectangle $PQRD$.

Fig. 97. *Cor.* 3. On connoîtra aussi le temps en élevant l'ordonnée em réciproquement proportionnelle à la racine quarrée de $PQRD \pm DFge$, & prenant le temps pendant lequel le corps décrit la ligne De, au temps que l'autre corps poussé par une force uniforme a employé à tomber de P en D, comme l'aire curviligne $DLme$ est au rectangle $2PD \times DL$. Car le temps pendant lequel le corps, poussé par une force uniforme, a décrit la ligne PD est au temps pendant lequel ce même corps a décrit la ligne PE en raison sousdoublée de PD à PE, c'est-à-dire, (lorsque la petite ligne DE est naissante,) en raison de PD à $PD + \frac{1}{2} DE$ ou de $2PD$ à $2PD + DE$; d'où il suit que ce temps par PD est au temps par DE, comme $2PD$ à DE, ou, ce qui revient au même, comme le rectangle $2PD \times DL$ est à l'aire $DLME$, mais le temps par DE, soit que cette droite ait été parcourue en vertu de la force constante ou de la force variable, est au temps par De, parcourue en vertu de la force variable, comme l'aire $DLME$ est à l'aire $DLme$. Donc le temps par PD est au temps par De, comme $2PD \times DL$ à l'aire $DLme$.

HUITIÉME SECTION.

De la détermination des orbes que décrivent des corps sollicités par des forces centripetes quelconques.

PROPOSITION XL. THÉORÉME XIII.

Fig. 98. *Si deux corps, dont l'un est sollicité par une force centripete quelconque, tandis que l'autre monte ou descend dans une ligne droite par la même force, ont la même vîtesse à une même distance quelconque du centre, ces corps auront la même vîtesse à toutes les autres distances.*

Supposant qu'un corps tombe le long de la ligne AC vers le centre C, & qu'un autre corps se meuve dans la courbe $VIKk$

en partant du lieu V. Soient décrits du centre C, & d'intervalles quelconques CD, CE différens très peu l'un de l'autre, les cercles concentriques DI, EK qui rencontrent la droite AC en D & E, & la courbe VIK en I & K. Soit de plus abbaissée du point N où la droite IC rencontre KE la perpendiculaire NT sur IK. Soit enfin imaginé que les vîtesses aux points D & I sont égales, comme aux distances égales CD, CI, les forces centripetes seront égales. Représentons ces forces par les petites lignes égales DE, IN; si une de ces forces IN est décomposée, par le Corol. 2. des loix, en deux autres NT & IT, la force NT agissant selon la ligne NT perpendiculaire à la direction ITK du corps, elle ne changera rien à la vîtesse du corps dans cette direction, & sera toute employée à le retirer de la ligne droite; mais l'autre force IT agissant suivant la direction même du corps, elle sera toute employée à accélérer son mouvement, & dans un très petit temps donné elle produira une accélération qui sera proportionnelle à elle-même. Donc les accélérations que les corps reçoivent en D & en I, dans des temps égaux, (si on prend les premieres raisons des lignes naissantes DE, IN, IK, IT, NT) seront comme les lignes DE, IT: & dans des temps inégaux, elles seront comme ces lignes & les temps conjointement; mais les temps dans lesquels DE & IK sont parcourues, sont, à cause de l'égalité des vîtesses, comme ces lignes DE & IK, donc les accélérations des corps, suivant les lignes DE & IK, sont en raison composée de DE à IT, & de DE à IK; c'est-à-dire, comme DE^2 à $IT \times IK$, ou, ce qui revient au même, en raison d'égalité, à cause que $IT \times IK = IN^2 = DE^2$. Si donc les accélérations des corps dans leur passage de D & I à E & K sont égales, les vîtesses des corps en E & en K seront aussi égales, ainsi que dans tous les autres points suivans, pris à même distance du centre. *C. Q. F. D.* Fig. 98.

Et par le même raisonnement, les corps qui ont des vîtesses égales à égale distance du centre, sont également retardés en montant à des hauteurs égales. *C. Q. F. D.*

DU MOUVEMENT DES CORPS.

Cor. 1. Si un corps suspendu par un fil oscille, ou qu'il soit forcé de se mouvoir dans une ligne courbe par quelque obstacle parfaitement poli, & qu'un autre corps monte ou descende suivant une ligne droite, il est clair qu'il suffira que leurs vîtesses soient égales à une même hauteur quelconque, pour être égales à toutes les autres hauteurs égales. Car le fil, ou l'obstacle parfaitement poli, fait le même effet sur le corps que la force transversale NT, donc il ne le retarde ni ne l'accélére; mais il le force seulement de s'écarter de la ligne droite.

Fig. 98.

Cor. 2. Ainsi, si la quantité P représente la plus grande distance du centre à laquelle le corps puisse monter, ou en oscillant, ou en décrivant une trajectoire, en étant jetté en en haut d'un point quelconque de la trajectoire avec la vîtesse qu'il a dans ce point; que de plus, A exprime la distance du corps au centre dans un autre point quelconque de la ligne parcourue, & que la force centripete soit toujours comme une puissance quelconque de A telle que A^{n-1}, la vîtesse du corps à cette hauteur quelconque A sera comme $\sqrt{P^n - A^n}$, & elle sera par conséquent donnée. La démonstration en est claire par la Prop. 39.

PROPOSITION XLI. PROBLÉME XXVIII.

La force centripete étant donnée, & la quadrature des courbes étant supposée, on demande les trajectoires des corps, & les temps de leurs mouvemens dans ces trajectoires.

Fig. 99.

C étant le centre des forces, & $VIKk$ la trajectoire cherchée dans laquelle on suppose que le corps va de V vers K, soit décrit du centre C, & d'un intervalle quelconque CV, le cercle VR, soient décrits ensuite du même centre & d'intervalles quelconques très peu différens l'un de l'autre les cercles ID, KE qui coupent la trajectoire en I & en K, & la droite CV en D & en E. Soient de plus tirés les rayons CNI, CK qui prolongés rencontrent le cercle VR en X & en Y. Cela fait, si A est le lieu d'où un autre corps auroit dû tomber pour avoir en D la même vîtesse que celui qui décrit la trajectoire a en I, & que l'on conserve la construction de la Prop. 39. il est clair que la petite ligne IK, décrite dans un très petit intervalle de temps & proportionnelle à la vîtesse, sera comme la racine quarrée de l'aire $ABFD$. Fig. 99. De plus, le triangle ICK proportionnel au temps sera donné, & par conséquent KN sera réciproquement comme la hauteur IC, c'est-à-dire, (Q représentant une quantité donnée, & A la hauteur IC) comme $\frac{Q}{A}$: appellons Z cette quantité $\frac{Q}{A}$, & supposons que la quantité Q soit telle, que l'on ait en quelque cas, $\sqrt{ABFD} : Z :: IK : KN$, on aura dans tous les autres cas, $\sqrt{ABFD} : Z :: IK : KN$ qui donne $ABFD : Z^2 :: IK^2 : KN^2$, & par conséquent $ABFD - Z^2 : Z^2 :: IN^2 : NK^2$. d'où l'on tire $\sqrt{ABFD - Z^2} : Z$ ou $\frac{Q}{A} :: IN : KN$, ou $A \times KN = \frac{Q \times IN}{\sqrt{ABFD - Z^2}}$. Or, puisque $YX \times XC : A \times KN :: CX^2 : A^2$ on aura $XY \times XC = \frac{Q \times IN \times CX^2}{A^2\sqrt{ABFD - Z^2}}$.

Si on prend donc sur DF, les droites Db, Dc respectivement égales à $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD - Z^2}}$, & à $\frac{Q \times CX^2}{2A^2\sqrt{ABFD - Z^2}}$; que l'on décrive les courbes ab, ac, qui passent par tous les points b & c; & que l'on mene Va perpendiculaire sur CA, qui coupe les aires curvilignes $VDba$, $VDca$, & qu'on tire les ordonnées Ez, Ex, il est évident, que puisque le rectangle $Db \times IN$ ou $DbzE$ est égal à la moitié du rectangle $A \times KN$ ou au triangle ICK; & que le rectangle $Dc \times IN$ ou $DcxE$ est égal à la moitié du rectangle $YX \times XC$ ou au triangle XCY; c'est-à-dire, puisque les particules naissantes $DbzE$, ICK des aires $VDba$, VIC sont toujours égales, & que les particules naissantes $DcxE$, XCY des aires $VDca$, VCX sont aussi toujours égales, l'aire produite $VDba$ sera égale à l'aire produite

Du MOUVEMENT DES CORPS.

VIC; c'eſt-à-dire, proportionnelle au temps, & l'aire produite *VDca* ſera égale au ſecteur produit *VCX*.

Fig. 99.

Ayant donc le temps écoulé depuis le départ du lieu *V*, on aura l'aire *VDba* qui lui eſt proportionnelle, & par conſéquent la hauteur *CD* ou *CI*; & ayant par ce moyen l'aire *VDca*, le ſecteur *VCX* qui lui eſt égal donnera l'angle *VCI*. Or, dès que l'on connoît l'angle *VCI* & la hauteur *CI*, on a le lieu *I* dans lequel le corps ſe trouve à la fin de ce temps. *C.Q.F.T.*

Cor. 1. On peut trouver par-là très aiſément les plus grandes & les moindres diſtances au centre; c'eſt-à-dire, les apſides des trajectoires. Car ces apſides ſont aux points ſur leſquels la droite *IC*, menée par le centre, tombe perpendiculairement dans la trajectoire *VIK*, ce qui arrive lorſque les droites *IK*, *NK* ſont égales, & par conſéquent lorſque l'aire $ABFD = Z^2$.

Cor. 2. Quant à l'angle *KIN*, ſous lequel la trajectoire coupe en un lieu quelconque le rayon *IC*, il peut ſe trouver facilement par le moyen de la hauteur *IC*, en prenant ſon ſinus au rayon comme *KN* eſt à *IK*, c'eſt-à-dire, comme *Z* eſt à la racine quarrée de l'aire *ABFD*.

Fig. 100. & 101.

Cor. 3. *VRS* étant une ſection conique quelconque, ayant *C* pour centre & *V* pour ſommet, ſi d'un de ſes points *R* pris à volonté on tire la tangente *TR* & le rayon *CR*, que l'on faſſe l'angle *VCP* proportionnel au ſecteur *VCR*, & le rayon $CP = CT$, la courbe *VPQ*, que l'on aura par ce moyen, ſera celle qu'un corps parti de *V* perpendiculairement à *VC*, & avec une vîteſſe convenable, décriroit dans l'hypothèſe d'une peſanteur réciproquement proportionnelle au cube de la diſtance au centre *C*.

Si la ſection conique *VRS* eſt une hyperbole, le corps parti de *V* ira en deſcendant, & arrivera au centre. Si au contraire elle eſt une ellipſe, le corps ira en montant juſqu'à l'infini.

Lorſqu'on aura une des trajectoires *VPQ* décrites dans cette hypothèſe de peſanteur, on aura celle qu'on voudra des autres trajectoires en augmentant ou diminuant l'angle *VCP* dans une

raiſon

raiſon conſtante, aiſée à déterminer par la vîteſſe connue au point *V*; mais il faut pour cela que dans la trajectoire donnée, le corps deſcende en partant de *V*, s'il doit deſcendre dans la ſeconde en partant du même point, & au contraire.

Si on ſuppoſe que la force tendante en *C*, & toujours en raiſon réciproque du cube de la diſtance, ſoit centrifuge au lieu d'être centripete, quelque ſoit la vîteſſe du corps en partant de *V*, il s'éloignera toujours de plus en plus du centre, & l'orbite qu'il décrira ſe conſtruira encore en prenant les angles *VCP* proportionnels aux ſecteurs elliptiques, & faiſant $CP = CT$. Tout cela ſuit de la propoſition précédente. Fig. 100. & 101.

PROPOSITION XLII. PROBLÉME XXIX.

La loi de la force centripete étant donnée, on demande le mouvement d'un corps qui part d'un lieu donné avec une vîteſſe donnée, & ſuivant une ligne droite donnée.

Tout étant ſuppoſé comme dans les trois Propoſitions précédentes; que le corps parte du lieu *I* en allant vers *K* ſuivant la petite ligne *IK* avec la même vîteſſe qu'un autre corps peut acquerir au lieu *D*, en tombant du lieu *P* par une force centripéte uniforme, & que cette force uniforme ſoit à la force variable qui agit en *I* ſur le premier corps comme *DR* eſt à *DF*; il eſt clair que le rectangle *PDRQ* étant donné, ainſi que la loi de la force centripete qui agit dans la trajectoire cherchée, la courbe *BFg* ſera donnée par la conſtruction du Probléme 27 & ſon Corol. 1. De plus, par l'angle donné *CIK* on a la proportion des quantités naiſſantes *IK*, *KN*; ce qui, par la conſtruction du Probléme 28, donne la quantité *Q*, & par conſéquent les courbes *abv*, *acw*: donc, pour un temps quelconque *Dbve*, on aura la hauteur *Ce* ou ſon égale *Ck*, l'aire *Dcwe*, le ſecteur *XCy* qui lui eſt égal, & l'angle *ICk*; c'eſt-à-dire, qu'on aura le lieu *k* dans lequel le corps ſera alors. *C. Q. F. T.* Fig. 102.

Après avoir traité jusqu'ici du mouvement des corps dans des orbes immobiles, nous allons éxaminer leurs mouvemens dans des orbes qui tournent autour du centre des forces.

NEUVIÉME SECTION.

Du mouvement des corps dans des orbes mobiles, & du mouvement des apsides.

PROPOSITION XLIII. PROBLÉME XXX.

On demande quelle est la force qui pourroit faire décrire à un corps une trajectoire mobile autour du centre de cette force, en supposant que cette trajectoire mobile soit parcourue dans le même temps, & suivant les mêmes loix que si elle étoit immobile.

Fig. 103. Supposant que le corps P fasse sa révolution dans l'orbe VPK donné de position en avançant de V vers K, soient tirées du centre C les lignes Cp égales à CP, & qui fassent les angles VCp proportionnels aux angles VCP; l'aire que la ligne Cp décrit sera à l'aire VCP que la ligne CP décrit en même temps, comme la vîtesse de la ligne décrivante Cp à la vîtesse de la ligne décrivante CP; c'est-à-dire, comme l'angle VCp à l'angle VCP, & par conséquent en raison donnée. Cette aire sera donc proportionnelle au temps.

Par ce qui précéde, il est clair que l'aire proportionnelle au temps, décrite par la ligne Cp dans un plan immobile, indique que le corps p est pressé par quelque force centripete. Il n'est donc plus question que de trouver quelle est cette loi de force centripete, & l'on aura résolu le Probléme.

Pour y parvenir, il n'y a qu'à trouver la courbe des points que le corps p décrit dans l'espace absolu, & chercher par le Cor. 5. de la Proposition 6. la force centripete dans cette courbe. *C. Q. F. F.*

PROPOSITION XLIV. THÉORÊME XIV.

La différence des forces par lesquelles deux corps peuvent avoir le même mouvement, l'un dans une orbite en repos, & l'autre dans la même orbite révolvante, est en raison triplée inverse de leur commune hauteur.

Que les parties up, pk de l'orbite révolvante soient égales aux parties VP, PK de l'orbite en repos, l'intervalle PK étant supposé très petit. De plus, que kr abbaissée perpendiculairement sur Cp soit prolongée jusqu'en m; ensorte que mr soit à kr comme l'angle VCp à l'angle VCP. Fig. 104.

Puisque les hauteurs PC & pC, KC & kC des corps révolvans sont toujours égales, il est clair que les incrémens ou les décrémens des lignes PC & pC seront toujours égaux. Ainsi, si les mouvemens de chacun de ces corps dans les lieux P & p sont décomposés (par le Cor. 2. des loix) en deux mouvemens, dont les uns soient dirigés vers le centre, ou suivant les lignes PC, pC, & les autres soient transversaux aux premiers; c'est-à-dire, dirigés suivant des lignes perpendiculaires à ces lignes PC, pC; les mouvemens vers le centre seront égaux, & le mouvement transversal du corps p sera au mouvement transversal de l'autre corps P comme le mouvement angulaire de la ligne pC au mouvement angulaire de la ligne PC; c'est-à-dire, comme l'angle VCp à l'angle VCP. Donc, dans le même temps dans lequel le corps P parvient par ces deux mouvemens au point K, le corps p étant mû d'un mouvement égal vers le centre sera porté également de p vers C, & sera par conséquent au bout de ce temps quelque part dans la ligne mkr; & par son mouvement transversal il sera arrivé à une distance de la ligne pC, qui sera à la distance de la ligne PC à laquelle l'autre corps P sera arrivé comme le mouvement transversal du corps p au mouvement transversal de l'autre corps P. Ainsi comme la ligne kr est égale à la distance de la ligne PC à laquelle le corps P

Fig. 104.

eſt arrivé, ſi $m\,r$ eſt à $k\,r$ comme l'angle VCp à l'angle VCP; c'eſt-à-dire, comme le mouvement tranſverſal du corps p au mouvement tranſverſal de l'autre corps P, il eſt clair que le corps p au bout de ce temps ſera en m.

C'eſt-là ce qui arrivera quand les corps p & P ſe mouveront également dans les lignes $p\,C$ & $P\,C$, & que par conſéquent ils ſeront pouſſés dans ces directions par des forces égales.

Mais comme il arrive que le corps p ſe trouve au bout de ce temps au point n déterminé en prenant $Cn = Ck$, & en telle ſorte que l'angle $p\,C\,n$ ſoit à l'angle $p\,C\,k$ comme l'angle VCp à l'angle VCP. Il faut donc qu'il ſoit pouſſé par une force plus grande que celle qui pouſſe le corps P, ſi l'angle $n\,Cp$ eſt plus grand que l'angle $K\,Cp$; c'eſt-à-dire, ſi l'orbite $u\,p\,k$ ſe meut en conſéquence ou en antécédence, avec une vîteſſe plus grande que le double de celle avec laquelle la ligne CP ſe meut en conſéquence; & qu'il ſoit pouſſé au contraire par une force moindre, ſi l'orbite ſe meut plus lentement en antécédence. De plus, la différence des forces des corps P & p ſera comme l'intervalle $m\,n$.

Que du centre C & de l'intervalle Cn ou Ck on décrive un cercle qui coupe les lignes $m\,r$, $m\,n$ prolongées en s & en t, le rectangle $mn \times mt$ ſera égal au rectangle $m\,k \times m\,s$, donc $m\,n = \frac{m\,k \times m\,s}{m\,t}$. Or comme les eſpaces $p\,C\,k$, $p\,C\,n$ ſont donnés de grandeur dans un temps donné, la premiére raiſon des lignes $k\,r$ & $m\,r$, de leur différence $m\,k$, & de leur ſomme $m\,s$ dans leur naiſſance ſera la raiſon ſimple inverſe de $p\,C$. Donc, celle du rectangle $m\,k \times m\,s$ ſera la doublée de cette raiſon; mais $m\,t$ eſt directement comme $\frac{1}{2}m\,t$; c'eſt-à-dire, comme la hauteur $p\,C$. Donc $\frac{m\,k \times m\,s}{m\,t}$, c'eſt-à-dire, la petite ligne naiſſante $m\,n$, & la différence des forces, qui lui eſt proportionnelle, ſont réciproquement comme le cube de la hauteur $p\,C$. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Il ſuit delà que la différence des forces dans les lieux

P & p, ou K & k eſt à la force par laquelle le corps peut faire ſa révolution par un mouvement circulaire de R vers K, dans le même temps dans lequel le corps P décrit dans un orbe immobile l'arc PK, comme la petite ligne naiſſante mn eſt au ſinus verſe de l'arc naiſſant RK; c'eſt-à-dire, comme $\frac{mk \times ms}{mt}$ eſt à $\frac{rk^2}{2kC}$, ou comme $mk \times ms$ eſt à rk^2; c'eſt-à-dire, ſi on prend les quantités données F & G dans la même raiſon entre elles que l'angle VCP & l'angle VCp ont entre eux, comme $GG - FF$ à FF. Donc ſi du centre C, & d'un intervalle quelconque CP ou Cp, on décrit un ſecteur circulaire égal à l'aire totale VPC que le corps P décrit autour du centre en faiſant ſa révolution dans un orbe immobile pendant un temps quelconque: la différence des forces par leſquelles le corps P & le corps p font leurs révolutions, le premier dans un orbe immobile, & le dernier dans un orbe mobile, ſera à la force centripete, par laquelle un corps pourroit décrire uniformément ce ſecteur autour du centre dans le même temps dans lequel l'aire VPC ſeroit décrite uniformément, comme $GG - FF$ à FF. Car ce ſecteur & l'aire pCk ſont l'un à l'autre, comme les temps pendant leſquels ils ſont décrits.

LIVRE PREMIER.

Fig. 104.

Cor. 2. Si l'orbe VPK eſt une ellipſe dont le foyer ſoit C & l'apſide la plus haute V; que l'ellipſe upk lui ſoit ſemblable & égale, en ſorte qu'on ait toujours $pC = PC$, que l'angle VCp ſoit à l'angle VCP dans la raiſon donnée de G à F; & qu'enfin, au lieu de la hauteur PC ou pC, on écrive A & $2R$ pour le parametre de l'ellipſe, la force par laquelle le corps pourra faire ſa révolution dans une ellipſe mobile ſera comme $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$, & réciproquement. Car ſuppoſé que la force par laquelle le corps fait ſa révolution dans une ellipſe immobile, ſoit exprimée par la quantité $\frac{FF}{AA}$, la force en V ſera $\frac{FF}{CV^2}$; mais la force, par

Fig. 104.

Du mouvement des Corps.

laquelle le corps peut faire sa révolution dans un cercle à la distance CV avec la même vîtesse que le corps qui décrit une ellipse a au point V, est à la force par laquelle le corps révolvant dans une ellipse est pressé à son apside V comme la moitié du parametre de l'ellipse au demi diametre CV du cercle; donc

Fig. 104.

sa valeur est $\frac{RFF}{CV^3}$. De plus, la force qui est à celle-là comme $GG - FF$ à FF a pour valeur $\frac{RGG - RFF}{CV^3}$: & cette force (par le Corol. 1.) est la différence au point V des forces par lesquelles, le corps P dans une ellipse immobile VPK, & le corps p dans une ellipse mobile upk, font leur révolution. Donc, comme on vient de voir que cette différence à une hauteur quelconque A est à ce qu'elle devient à la hauteur CV, comme $\frac{1}{A^3}$ à $\frac{1}{CV^3}$, il s'ensuit que cette même différence à la hauteur quelconque A sera $\frac{RGG - RFF}{A^3}$, & par conséquent, si on ajoute à la force $\frac{FF}{AA}$, par laquelle le corps peut faire sa révolution dans une ellipse immobile VPK, l'excès $\frac{RGG - RFF}{A^3}$, on aura la force totale $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$ par laquelle le corps peut faire sa révolution dans une ellipse mobile upk dans le même temps.

Fig. 104.

Cor. 3. On conclura de la même maniere que si l'orbe VPK est une ellipse dont le centre soit le centre C des forces, $2R$ le parametre principal, $2T$ le parametre transversal ou le grand axe, la force dans cette ellipse, supposée immobile, sera à la force dans la même ellipse, supposée mobile, comme $\frac{FFA}{T^3}$ à $\frac{FFA}{T^3} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$.

Cor. 4. Et généralement, si T exprime la plus grande hauteur

CV du corps, R le rayon de la courbure de l'orbe VPK en V, c'eſt-à-dire le rayon du cercle oſculateur dans ce point, $\frac{VFF}{T^2}$ ce qu'eſt en V la force centripete par laquelle le corps peut faire ſa révolution dans une trajectoire quelconque immobile VPK, & X ce qu'elle eſt dans un autre lieu quelconque P, A la hauteur CP, & que le rapport de G à F exprime toujours la raiſon donnée de l'angle VCp à l'angle VCP; la force centripete, par laquelle le même corps pourra achever les mêmes mouvemens dans le même temps dans la même trajectoire upk muë circulairement, ſera comme la ſomme des forces $X + \frac{VRGG - VRFF}{A^3}$. Fig. 104.

Cor. 5. Le mouvement d'un corps dans une orbite quelconque immobile étant donné, on peut augmenter ou diminuer ſon mouvement angulaire autour du centre des forces en raiſon donnée, & trouver les nouveaux orbes immobiles que ce mouvement produit, & les forces des corps qui y circulent.

Cor. 6. VP étant une droite indéfinie perpendiculaire à VC, ſi on mene les droites CP, & qu'on les tranſporte enſuite en Cp, en faiſant l'angle VCp à l'angle VCP en raiſon donnée, la force par laquelle le corps peut tourner dans la courbe Vpk, qui eſt le lieu de tous les points p, ſera réciproquement comme le cube de la hauteur Cp. Car le corps P, par ſa ſeule force d'inertie, peut s'avancer uniformément dans la droite VP, & en ajoutant la force qui tend vers le centre C, laquelle eſt réciproquement proportionnelle au cube de la hauteur CP ou Cp, le mouvement rectiligne de ce corps deviendra (par ce qui a été ci-devant démontré) le mouvement curviligne Vpk. Fig. 105.

Il eſt à remarquer que cette courbe Vpk eſt la même que la courbe VPQ trouvée dans le Cor. 3. de la Prop. 41. où l'on a vu en effet que la force centripete étoit en raiſon renverſée du cube de la diſtance.

PROPOSITION XLV. PROBLÉME XXXI.

On demande le mouvement des apsides dans des orbes qui approchent beaucoup des orbes circulaires.

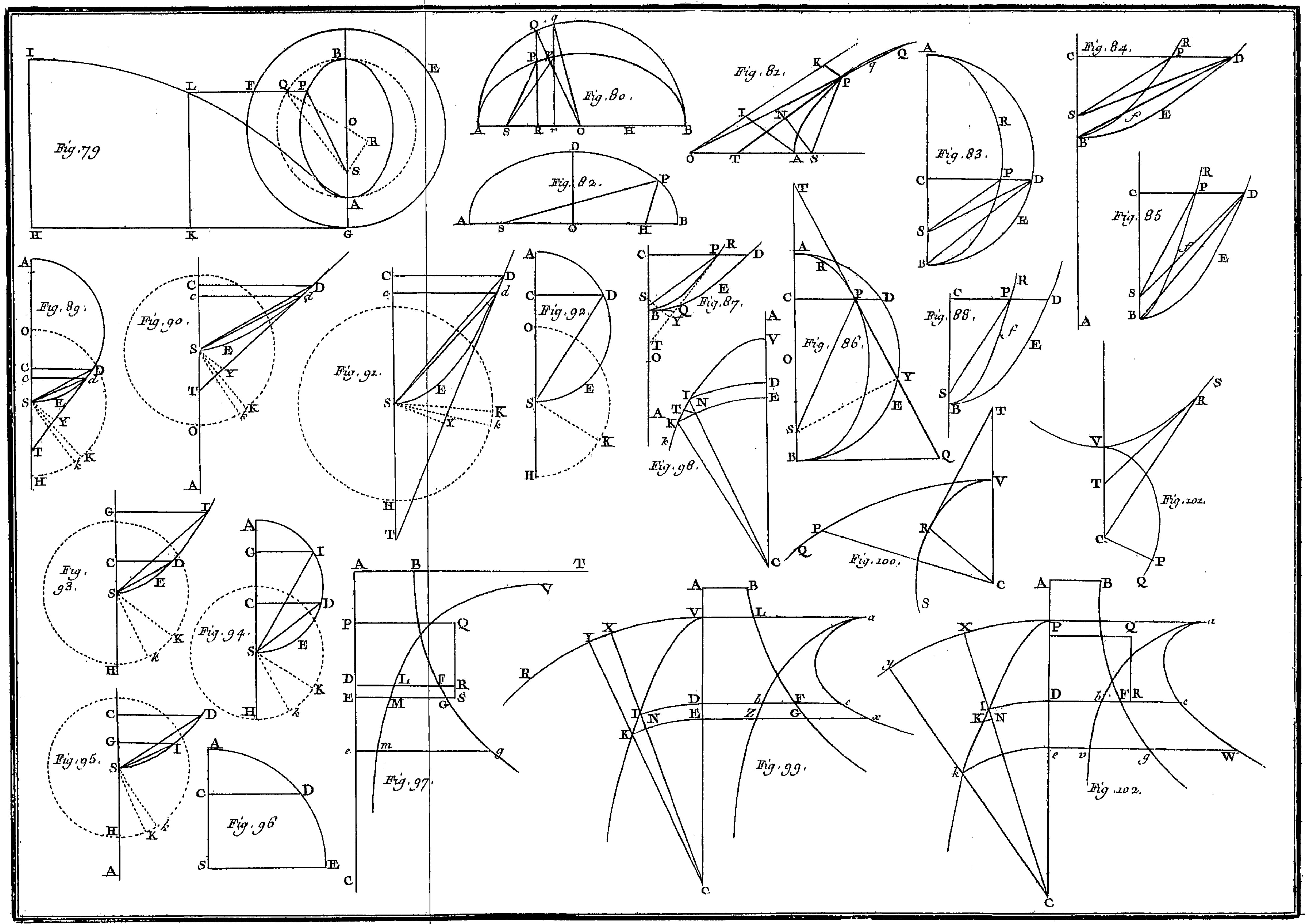
On résout ce Probléme arithmétiquement en faisant ensorte que l'orbite que décrit dans un plan immobile le corps qui circule dans une ellipse mobile (comme dans le Cor. 2. ou 3. de la Proposition précédente) approche de la forme de l'orbite dont on cherche les apsides, & en cherchant les apsides de l'orbite décrite ainsi dans ce plan immobile. Or, pour parvenir à donner aux orbites la même forme, il faut faire ensorte que les forces centripetes qui les font décrire, étant comparées entr'elles, soient proportionnelles à des hauteurs égales.

Fig. 104. Soit le point V la plus haute apside, écrivant T au lieu de la plus grande hauteur CV, A à la place d'une autre hauteur quelconque CP ou cp, & X pour la différence $CV - CP$ de ces hauteurs, la force par laquelle le corps est mû dans une ellipse révolvante (comme dans le Cor. 2.) autour de son foyer C, laquelle force étoit (dans le Cor. 2.) proportionnelle à $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$; c'est-à-dire $\frac{FFA + RGG - RFF}{A^3}$ deviendra, en mettant $T - X$ au lieu de A, proportionnelle à $\frac{RGG - RFF + TFF - FFX}{A^3}$. Il faudra réduire de même toute autre force centripete quelconque à une fraction dont le dénominateur soit A^3, & dont les numérateurs soient déterminés par la comparaison des termes de même espéce. Ceci s'éclaircira par des exemples.

Exemple 1. Supposons que la force centripete soit uniforme, & que par conséquent elle soit proportionnelle à $\frac{A^3}{A^3}$ ou bien (en écrivant au numérateur $T - X$ au lieu de A) proportionnelle à $\frac{T^3 - 3TTX + 3TXX - X^3}{A^3}$; & en comparant les termes cor-

respondans

Planche IV. page. 144. I.r Vol.



respondans des numérateurs, c'est-à-dire les donnés avec les donnés, & les non donnés avec les non donnés, on aura $RGG - RFF + TFF : T^3 :: - FFX : - 3TTX + 3TXX - X^3$ ou $:: - FF : - 3TT + 3TX - X^2$, qui (dans le cas où l'orbe approchera tellement du cercle qu'elle se confondra avec lui, ce qui rend T égal à R & fait évanouir X) deviendra $RGG : T^3 :: - FF : - 3T^2$, qui donne $GG : TT :: F^2 : 3T^2$, & réciproquement, $GG : FF :: T^2 : 3T^2$, c'est-à-dire $:: 1 : 3$; donc G sera à F, c'est-à-dire l'angle VCp à l'angle VCP, comme 1 à $\sqrt{3}$. Donc, lorsque le corps dans une ellipse immobile fera en descendant de la plus haute apside à la plus basse l'angle VCP de 180 degrés, si on peut s'exprimer ainsi, un autre corps dans une ellipse mobile, & par conséquent dans l'orbite immobile dont nous traitons ici, fera en descendant de l'apside la plus haute à la plus basse l'angle VCp de $\frac{180°}{\sqrt{3}}$; ce qui est fondé sur la similitude de l'orbe que le corps décrit par une force centripete uniforme, & de celui que le corps décrit dans un plan immobile en faisant ses révolutions dans une ellipse révolvante, similitude qui n'a lieu cependant que lorsque les orbes sont supposées fort approchantes des circulaires.

Le résultat de cet exemple est donc qu'un corps, qui se meut avec une force centripete uniforme dans une orbite qui approche fort du cercle, fera toujours entre la plus haute apside & la plus basse un angle au centre de $\frac{180°}{\sqrt{3}}$ ou de $103°.\ 55'\ 23''$. Il fera le même angle en allant de l'apside la plus haute à la plus basse; & en retournant ensuite de la plus basse à la plus haute, & ainsi de suite à l'infini.

Exemple 2. Supposons que la force centripete soit comme une puissance quelconque de la hauteur A, telle que A^{n-3} ou $\frac{A^n}{A^3}$: $n-3$ & n représentant des exposans quelconques entiers ou rompus, rationels ou irrationels, positifs ou négatifs, le numérateur A^n ou

$\overline{T-X}^n$ étant changé en une suite infinie par notre méthode des séries convergentes deviendra $T^n - nXT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}X^2\, T^{n-2}$ &c. dont les termes, étant comparés avec les termes de l'autre numérateur $RGG - RFF + TFF - FFX$, donnent $RGG - RFF + TFF : T^n :: - FF : - nT^{n-1} + \frac{nn-n}{2} XT^{n-2}$ &c. qui devient, dans la supposition que les orbes approchent infiniment d'être circulaires, $RGG : T^n :: - FF : - nT^{n-1}$, ou $G^2 : T^{n-1} :: F^2 : nT^{n-1}$ ou $G^2 : F^2 :: T^{n-1} : nT^{n-1}$, c'est-à-dire $:: 1 : n$; ainsi G est à F, ou, ce qui revient au même, l'angle VCp est à l'angle VCP comme 1 à $\sqrt{n}$. C'est pourquoi l'angle VCP, que le corps fait dans l'ellipse en descendant de l'apside la plus haute à la plus basse, étant de 180°, l'angle VCp, que le corps fait en descendant de l'apside la plus haute à la plus basse dans une orbe presque circulaire décrite par une force centripete proportionnelle à la puissance A^{n-3}, sera de $\frac{180^\circ}{\sqrt{n}}$; & par la répétition de cet angle, le corps remontera de l'apside la plus basse à la plus haute, & ainsi de suite à l'infini.

Ainsi, si la force centripete est comme la distance au centre, c'est-à-dire, comme A ou $\frac{A^4}{A^3}$, on aura $n=4$ & $\sqrt{n}=2$; donc, l'angle entre l'apside la plus haute & la plus basse sera de $\frac{180^\circ}{2}$ ou de 90°; c'est-à-dire, que le corps, après avoir fait le quart d'une révolution, parviendra à l'apside la plus basse, & qu'après en avoir fait un autre quart, il parviendra à la plus haute, & ainsi de suite à l'infini, ce qui est évident par la Prop. 10. Car le corps étant pressé par cette loi de force centripete fera sa révolution dans une ellipse immobile dont le centre sera dans le centre des forces.

Si la force centripete est réciproquement comme la distance, c'est-à-dire directement comme $\frac{1}{A}$ ou comme $\frac{A^2}{A^3}$, on aura $n=2$, & par conséquent l'angle entre l'apside la plus haute & la plus basse sera de $\frac{180°}{\sqrt{2}}$ ou de $127° 16'. 45''$. Ainsi lorsqu'un corps fera sa révolution en vertu d'une telle force, il ira, par la répétition continuelle de ce même angle, alternativement de l'apside la plus haute à la plus basse, & de la plus basse à la plus haute à l'infini.

Si la force centripete est réciproquement comme la racine quarrée de la onziéme puissance de la hauteur, c'est-à-dire réciproquement comme $A^{\frac{11}{4}}$, & par conséquent en raison directe de $A^{\frac{1}{\frac{11}{4}}}$ ou de $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$ on aura $n = \frac{1}{4}$ & $\frac{180°}{\sqrt{n}} = 360°$ & par conséquent le corps employera une révolution entiere à aller de l'apside la plus haute à l'apside la plus basse : il mettra de même une seconde révolution à aller de cette plus basse à la plus haute, & ainsi de suite à l'infini.

Exemple 3. Prenant m & n pour les exposans quelconques des puissances de la hauteur, & b, c pour des nombres donnés à volonté, supposons que la force centripete soit comme $\frac{bA^m + CA^n}{A^3}$; c'est-à-dire, comme $\frac{b \times \overline{T-X}^m + C \times \overline{T-X}^n}{A^3}$, ou (par notre même méthode des séries convergentes) comme

$$\frac{bT^m + cT^n - mbXT^{m-1} - ncXT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXXT^{n-2}, \text{ \&c.}}{A^3}$$

& en comparant les termes des numérateurs on aura, $RGG - RFF + TFF : bT^m + cT^n :: -F^2 : -mbT^{m-1} - ncT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXT^{n-2}$, &c. qui devient, dans la supposition que les orbites approchent infiniment d'être circulaires, $G^2 : bT^{m-1} + cT^{n-1} :: F^2 : mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$, ou $G^2 : F^2 :: bT^{m-1} + cT^{n-1} : mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$, ou (en exprimant arithmétiquement par l'unité la plus grande hauteur CV ou T) $G^2 : F^2 :: b + c : mb + nc$, d'où on tire G à F; c'est-à-dire, l'angle VCp à l'angle VCP, comme 1 à $\sqrt{\frac{mb+nc}{b+c}}$. L'angle VCP, entre l'apside la plus haute & la plus basse dans une ellipse immobile, étant donc de 180°, l'angle VCp entre les mêmes apsides dans l'orbe que le corps décrit par une force centripete proportionnelle à la quantité $\frac{bA^m + cA^n}{A^3}$ sera de $180° \sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}$. Par le même raisonnement, si la force centripete est comme $\frac{bA^m - cA^n}{A^3}$, on trouvera l'angle entre les apsides de $180° \sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}$, & on résoudra de même le Probléme dans les cas plus difficiles.

La quantité à laquelle la force centripete est proportionnelle doit toujours se changer en des séries convergentes dont le dénominateur soit A^3, ensuite il faut prendre la partie constante du numérateur qui vient de cette opération, dans la même raison à son autre partie qui est variable, que la partie donnée $RGG - RFF + TFF$ du numérateur $RGG - RFF + TFF - FFX$ est à la partie variable $- FFX$ du même numérateur. Négligeant alors dans la proportion les quantités qui peuvent l'être par la nature des orbes, & écrivant l'unité au lieu de T, on trouvera la proportion de G à F.

Cor. 1. Si la force centripete est comme quelque puissance de la hauteur, on peut trouver cette puissance par le mouvement des apsides, & réciproquement. Supposons, par exemple, que tout le mouvement angulaire par lequel le corps retourne à la même apside soit au mouvement angulaire d'une révolution, ou de 360° comme un nombre quelconque m, à un autre nombre n, & qu'on nomme la hauteur A: la force sera comme la puissance $\frac{nn}{mm} - 3$ de la hauteur A; ce qui est clair par le second éxemple.

D'où l'on voit que cette force, en s'éloignant du centre, ne peut pas décroître dans une plus grande raison que la raison triplée de la hauteur. Un corps qui seroit poussé par une telle force, & qui commenceroit à descendre en partant de la plus haute apside n'auroit point de plus basse apside ; mais descendroit sans cesse jusqu'au centre en décrivant la courbe dont nous avons parlé dans le Cor. 3. de la Prop. 41. & si sa direction, en quittant l'apside, tendoit à le faire monter, il monteroit à l'infini sans avoir de plus haute apside. Décrivant alors la courbe dont on a parlé dans le même Corollaire & dans le Corol. 6. de la Prop. 44. lorsque la force en s'éloignant du centre décroît dans une plus grande raison que la raison triplée de la hauteur, le corps en partant de l'apside, s'il commence à descendre ou à monter, descendra jusqu'au centre, ou montera à l'infini; mais si la force, en s'éloignant du centre, décroît dans une raison moindre que la raison triplée de la hauteur, ou croît dans une raison quelconque de la hauteur, le corps ne descendra jamais jusqu'au centre; mais il ira alternativement de l'apside la plus haute à la plus basse : & réciproquement, si le corps monte & descend alternativement d'une apside à l'autre sans toucher jamais le centre, la force, en s'éloignant du centre, augmentera, ou bien elle décroîtra dans une raison moindre que la raison triplée de la hauteur : & plus le corps retournera vîte d'une apside à l'autre, plus la raison des forces s'éloignera de cette raison triplée; ensorte que si le corps en 8 ou 4 ou 2 ou $1\frac{1}{2}$ révolutions, part de la plus haute apside, & y retourne par une ascension & une descension alternative; c'est-à-dire, si $m : n :: 8$ ou 4 ou 2 ou $1\frac{1}{2} : 1$, & que par conséquent $\frac{nn}{mm} - 3$ ait pour valeur $\frac{1}{64} - 3$ ou $\frac{1}{16} - 3$ ou $\frac{1}{4}$ ou $\frac{4}{9} - 3$: la force sera comme $A^{\frac{1}{64} - 3}$ ou $A^{\frac{1}{16} - 3}$ ou $A^{\frac{1}{4} - 3}$ ou $A^{\frac{4}{9} - 3}$; c'est-à-dire, réciproquement, comme $A^{3 - \frac{1}{64}}$ ou $A^{3 - \frac{1}{16}}$ ou $A^{3 - \frac{1}{4}}$ ou $A^{3 - \frac{4}{9}}$.

Si le corps à chaque révolution retournoit à la même apside immobile, on auroit $m : n :: 1 : 1$, donc $A^{\frac{nn}{mm} - 3} = A^{-2}$ ou $\frac{1}{AA}$; & par conséquent les forces décroîtroient en raison doublée de la

Du Mouvement des Corps.

hauteur, comme il a été démontré précédemment. Si le corps dans les trois quarts, ou les deux tiers, ou le tiers, ou le quart d'une révolution retourne à la même apside, on aura $m : n :: \frac{3}{4}$ ou $\frac{2}{3}$ ou $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{4} : 1$, donc $A^{\frac{nn}{mm} - 3} = A^{\frac{16}{9} - 3}$ ou $A^{\frac{9}{4} - 3}$ ou $A^{9 - 3}$ ou $A^{16 - 3}$; & par conséquent la force sera réciproquement comme $A^{\frac{11}{9}}$ ou $A^{\frac{3}{4}}$, ou directement comme A^{6} ou A^{13}. Enfin si le corps a fait une révolution entiére, & trois degrés de plus lorsqu'il revient à la plus haute apside d'où il étoit parti, & que par conséquent cette apside fasse à chaque révolution du corps trois degrés dans le même sens que ce corps, on aura, $m : n :: 363° : 360°$ ou $:: 121 : 120$ qui donne $A^{\frac{nn}{mm} - 3} = A^{\frac{29523}{14641}}$, & par conséquent la force centripete sera réciproquement comme $A^{\frac{29523}{14641}}$, ou réciproquement comme $A^{2\frac{4}{245}}$ à peu près. La force centripete décroît donc dans une raison un peu plus grande que la raison doublée, mais qui approche $59\frac{3}{4}$ fois plus près de cette raison que de la triplée.

Cor. 2 Ainsi, si le corps, par une force centripete qui soit réciproquement comme le quarré de la hauteur, fait sa révolution dans une ellipse qui ait son foyer dans le centre des forces, & qu'à cette force centripete on ôte ou on ajoute une force nouvelle quelconque; on peut connoître (par l'éxemple 3) le mouvement des apsides causé par cette force nouvelle : & réciproquement.

Si, par éxemple, de la force $\frac{1}{AA}$ par laquelle le corps fait sa révolution dans une ellipse, on ôte une nouvelle force exprimée par cA, la force restante sera alors comme $\frac{A - cA^4}{A^3}$, ce qui donnera (éxemple 3) $b = 1$, $m = 1$, & $n = 4$; & dans cette supposition l'angle de la révolution entre les apsides sera de $180° \sqrt{\frac{1 - c}{1 - 4c}}$.

Supposé que cette nouvelle force soit de 357.45 parties, moindre que la premiére par laquelle le corps fait ſa révolution dans une ellipſe; c'eſt-à-dire, que $c = \frac{100}{35745}$ lorſque A ou $T = 1$, ſa quantité $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ deviendra alors $180\sqrt{\frac{35645}{35345}}$, ou 180. 7623; c'eſt-à-dire, 180° 45′ 44″. Donc, dans cette hypothèſe, le corps parviendra de l'apſide la plus haute à la plus baſſe par un mouvement angulaire de 180° 45′ 44″ & par la répétition de ce mouvement il continuera à aller d'une apſide à l'autre, l'apſide la plus haute ayant pendant chaque révolution un mouvement angulaire de 1° 31′ 28″ en conſéquence, ce qui eſt à peu près la moitié du mouvement de l'apſide de la lune.

Nous avons traité juſqu'à préſent des mouvemens des corps dans des orbites dont les plans paſſent par le centre des forces: nous allons à préſent éxaminer leurs mouvemens dans des plans excentriques. Nous nous conformerons en cela aux Auteurs qui ont traité du mouvement des graves; ces auteurs ayant coutume de conſidérer l'aſcenſion & la deſcenſion des poids, par des plans quelconques donnés, tant obliques que perpendiculaires. Nous ſuppoſerons que les plans ſur leſquels ſont les corps pouſſés par des forces quelconques ſoient parfaitement polis; & même au lieu des plans ſur leſquels les corps s'appuyent, & qu'ils preſſent, nous ſuppoſerons ici d'autres plans qui leur ſoient paralleles, & dans leſquels les centres des corps ſe meuvent & décrivent les orbites par leur mouvement. Nous irons plus loin, nous déterminerons par la même loi les mouvemens des corps dans les ſuperficies courbes.

DIXIÉME SECTION.

Du mouvement des corps dans des superficies données, & des oscillations des corps suspendus par des fils.

PROPOSITION XLVI. PROBLÊME XXXII.

Une loi quelconque de forces centripetes étant donnée, on demande, en supposant la quadrature des courbes, le mouvement d'un corps qui part d'un lieu donné, avec une vîtesse donnée, & suivant une droite donnée sur un plan quelconque qui ne passe pas par le centre des forces.

Fig. 106. Soit S le centre des forces, SC la plus petite distance de ce centre au plan donné, P un corps partant du lieu P suivant une droite PZ, Q le même corps qui se meut sur le plan donné dans la trajectoire cherchée PQR. Cela posé, si on tire CQ, QS, que sur QS on prenne SV proportionnelle à la force centripete qui tire le corps vers le centre S, & qu'on mene VT parallele à CQ & qui rencontre SC en T: la force SV se décomposera (Corol. 2. des loix) dans les forces ST, TV; desquelles ST, tirant le corps suivant une ligne perpendiculaire au plan, ne change rien à son mouvement dans ce plan. Mais l'autre force TV agissant parallelement au plan, tire le corps directement vers le point C donné dans le plan, & l'oblige par conséquent à se mouvoir dans ce plan de la même maniere que si la force ST n'éxistoit pas, & que le corps tournât autour du centre C dans une espace libre par la seule force TV. Or la force centripete TV, par laquelle le corps Q tourne autour du centre donné C dans un espace libre, étant donnée, il est clair que la trajectoire PQR que le corps décrit, le lieu Q dans lequel il se trouve dans un temps quelconque donné, & sa vîtesse dans

dans ce lieu Q sont aussi donnés; par la Prop. 42. & réciproquement. *C. Q. F. T.*

PROPOSITION XLVII. THÉORÊME XV.

La force centripete étant supposée proportionnelle à la distance au centre, tous les corps qui font leurs révolutions dans des plans quelconques décriront des ellipses, & les temps de leurs révolutions seront égaux; & les corps qui décriront des lignes droites dans cette hypothèse oscilleront alors, & employeront toujours le même temps dans ces oscillations quelles qu'elles soient.

Car, les choses restant comme dans la Prop. précédente, la force SV par laquelle le corps Q est tiré vers le centre S en faisant sa révolution dans le plan quelconque PQR, est comme la distance SQ; & par conséquent à cause des proportionnelles SV & SQ, TV & CQ, la force TV, par laquelle le corps est tiré vers le point C donné dans le plan de l'orbe, est comme la distance CQ. Les forces qui tirent vers le point C les corps qui sont dans le plan PQR sont donc, eu égard aux distances, égales aux forces par lesquelles les corps sont tirés de toutes parts vers le centre S; & par conséquent ces corps employeront les mêmes temps à décrire les mêmes figures, soit dans le plan quelconque PQR autour du point C, ou dans des espaces libres autour du centre S; donc, par le Cor. 2. de la Prop. 10. & par le Cor. 2. de la Prop. 38, ils décriront des ellipses dans ce plan autour du centre C, ou bien ils acheveront leurs périodes d'allée & de retour dans des lignes droites menées dans ce plan par le centre C, & cela dans des temps qui seront toujours égaux. *C. Q. F. D.* Fig. 106.

SCHOLIE.

La descension & l'ascension des corps dans des superficies courbes se peuvent traiter de la même maniere que les mouvemens dont on vient de parler. Imaginez qu'une ligne courbe décrite dans un plan tourne autour d'une ligne droite de ce plan, & que par ce moyen elle forme une surface courbe : si un corps vient à se mouvoir de maniere que son centre soit toujours dans cette surface, & qu'en y oscillant, il se trouve toujours dans un même plan, passant par l'axe de rotation, la courbe qu'il décrit alors sera égale à celle dont la révolution a produit la surface ; & ainsi il suffira d'examiner les mouvemens qui peuvent être éxécutés dans cette courbe.

PROPOSITION XLVIII. THÉORÉME XVI.

Si on fait rouler un cercle sur la convéxité d'une sphere dans le plan d'un grand cercle de cette sphere, l'arc de la cycloïde ou épicycloïde, décrit pendant ce mouvement, & compris entre le point de contact du cercle roulant dans sa premiere position, & le point où est arrivé ce point de contact après un temps quelconque, a pour mesure une ligne qui est au double du sinus verse de la moitié de l'arc du cercle roulant dont tous les points ont été appliqués sur la circonférence du grand cercle pendant le roulement, comme la somme des diamétres de la sphere & du cercle est au demi diamétre de la sphere.

PROPOSITION XLIX. THÉORÉME XVII.

Si on fait rouler un cercle dans la concavité d'une sphere dans le plan d'un grand cercle de cette sphere, l'arc de cycloïde ou d'épicycloïde, décrit pendant ce mouvement, & compris entre le point de contact du cercle roulant dans sa premiere position, & le point où ce point de contact est arrivé après un temps quelconque, a pour mesure une ligne qui est au double du sinus verse de la moitié de l'arc du cercle roulant dont tous les points ont été appliqués sur la circonférence du grand cercle pendant le roulement, comme la différence des diamétres de la sphere & du cercle au demi diamétre de la sphere.

Fig. 107. & 108. Soit ABL la sphere, C son centre, BPV le cercle roulant, E le centre de ce cercle, B le point de contact, & P le point auquel le point du contact est arrivé après l'application successive

de tous les points de l'arc BP sur l'arc de grand cercle AP, il s'agit de prouver que l'arc de cycloïde AP, décrit pendant ce mouvement, a pour mesure une ligne qui est au double du sinus verse de l'arc $\frac{1}{2}BP$ comme $2\,CE$ à CB.

Du point V, où CE rencontre le cercle roulant, tirez au point P la droite VP & menez la tangente VH. Tirez ensuite de P les droites BP, PE, CP & la tangente PH. Abaissez de V sur CP la perpendiculaire VF, & du point G où cette perpendiculaire rencontre PH, ainsi que du point H concours des tangentes PH, VH, menez GI & HK perpendiculaires à VP. Enfin du centre C & d'un intervalle quelconque Co, décrivez l'arc nom, & du centre V & de l'intervalle Vo, décrivez l'arc oq qui coupe en q la ligne VP prolongée. Cela fait, il est aisé de remarquer que comme le cercle, en avançant, tourne toujours autour du point de contact B, la droite BP est perpendiculaire à la cycloïde AP, & par conséquent que la droite VP touche cette courbe au point P; le rayon du cercle nom, étant augmenté ou diminué peu à-peu, égalera enfin la ligne CP; & parce que la figure évanouissante $Pnomq$ & la figure $PFGVI$ sont semblables, la derniere raison des petites lignes évanouissantes Pm, Pn, Po, Pq, c'est-à-dire, la raison des changemens momentanés de la courbe AP, de la droite CP, de l'arc circulaire BP, & de la droite VP, sera la même que celle des lignes PV, PF, PG, PI respectivement. Mais comme VF est perpendiculaire sur CF, & VH sur CV, & que par conséquent les angles HVG, VCF sont égaux; que de plus l'angle VHG (à cause des angles droits V & P du quadrilatere $HVEP$) est égal à l'angle CEP, les triangles VGH, CEP seront semblables; ce qui donnera $GH : HV$ ou HP & $KI : KP :: EP : CE$; d'où l'on tire $CB : EC :: PI : PK$, & par conséquent $CB : 2\,CE :: PI : PV, :: Pq : Pm$. Donc le décrément de la ligne VP, c'est-à-dire, l'incrément de la ligne $BV - VP$ est à l'incrément de la ligne courbe AP dans la raison donnée

Fig. 107. & 108.

de CB à $2\,CE$, d'où il suit, par le Cor. du Lemme 4. que les longueurs entieres $BV - VP$ & AP sont dans la même raison. Maintenant il est clair qu'en prenant BV pour rayon, VP est le cosinus de l'angle BVP ou $\frac{1}{2}\,BEP$, & $BV - VP$ le sinus verse du même angle : donc dans le cercle dont le rayon est
Fig. 107. & 108. $\frac{1}{2}\,BV$, $BV - VP$ sera le double du sinus verse de l'arc $\frac{1}{2}\,BP$, donc AP est au double du sinus verse de l'arc $\frac{1}{2}\,BP$, comme $2\,CE$ à CB. C. Q. F. D.

Nous nommerons la ligne AP considérée dans la premiere Proposition, *cycloïde extérieure*, & celle qui est considérée dans la derniere, nous la nommerons *cycloïde intérieure*.

Cor. 1. Si on décrit une cycloïde entiere ASL, & qu'on la coupe en deux parties égales en S, l'arc PS sera à VP (double du sinus de l'angle VBP pour le rayon EB) comme $2\,CE$ à CB, & par conséquent en raison donnée.

Cor. 2. Et le demi périmetre de la cycloïde AS sera égal à la ligne droite qui est au diamétre BV du cercle, comme $2\,CE$ à CB.

PROPOSITION L. PROBLÉME XXXIII.

Faire qu'un corps suspendu par un fil oscille dans une cycloïde donnée.

Fig. 109. Etant donnée la cycloïde intérieure QRS coupée en deux moitiés au point R, & rencontrant par ses deux extrémités Q & S la superficie du globe QVS au dedans duquel elle a été décrite, soit tirée de R au centre C de ce globe la droite CR qui coupe en deux parties égales l'arc QS en O, & qui soit prolongée en A; ensorte que $CA : CO :: CO : CR$. Du centre C & de l'intervalle CA soit décrit ensuite un globe extérieur DAF, & par le moyen de ce globe & du cercle dont le diamétre est AO, soient tracées deux demi cycloïdes AQ, AS, lesquelles touchent le globe intérieur en Q & en S, & rencontrent le globe extérieur en A. Cela fait, si de ce point A, on suspend le corps T par un fil APT dont la longueur soit égale à AR, & que l'on fasse osciller ce corps entre les demi cycloï-

des AQ, AS; ensorte que toutes les fois que le pendule s'éloignera de la perpendiculaire AR, la partie supérieure AP de ce fil soit appliquée à la demi cycloïde APS, tandis que le reste PT de ce fil demeure étendu en ligne droite, la ligne décrite par le corps T, pendant ces oscillations, sera la cycloïde donnée QRS. C. Q. F. F. Fig. 109.

Car tirant du centre C au point V, où le fil rencontre le cercle QOS, le rayon CV, & élevant des extrémités P & T de la partie droite PT du fil les perpendiculaires PB, TW, qui rencontrent la droite CV en B & en W, il est clair, par la construction & la formation des figures semblables AS, SR, que ces perpendiculaires PB, TW couperont sur CV les intervalles VB, VW égaux aux diamétres OA, OR des cercles roulans de ces deux cycloïdes. Donc TP est à VP (double du sinus de l'angle VBP pour le rayon $\frac{1}{2}BV$) comme BW à BV, ou comme $AO + OR$ à AO; c'est-à-dire, (à cause que CA est proportionnelle à CO, CO à CR, & AO à OR) comme $CA + CO$ à CA, ou bien encore, en coupant BV en deux parties égales au point E, comme $2\,CE$ à CB. De-là il suit, par le Corol. 1. de la Prop. 49. que la partie droite PT du fil est toujours égale à l'arc PS de la cycloïde, & que tout le fil APT est égal à l'arc APS moitié de la cycloïde, c'est-à-dire (Cor. 2. de la Prop. 49.) à la longueur AR, & réciproquement, si on suppose que le fil demeure toujours égal à AR, le point T se mouvera dans la cycloïde donnée QRS. C. Q. F. D.

Cor. Le fil AR est égal à la demi-cycloïde AS, & par conséquent il a au demi-diamétre AC du globe extérieur la même raison que la demi-cycloïde SR, qui est semblable à la premiere AS, au demi-diamétre CO du globe intérieur.

Du mouvement des Corps

PROPOSITION LI. THÉORÊME XVIII.

Fig. 110.

Si on suppose que le corps T, *oscillant comme on vient de l'expliquer dans la cycloïde* QRS, *soit animé par une force centripete tendante au centre* C, *& agissant proportionnellement à la distance au centre, & qu'il n'éprouve l'action d'aucune autre force, les oscillations de ce corps, quelqu'inégales qu'elles soient, seront de même durée.*

Fig. 110.

Puisque la force centripete qui pousse le corps *T* vers *C* est comme la droite *CT*, il est clair, par le Cor. 2. des loix du mouvement, qu'en abaissant *CX* perpendiculaire sur la tangente *TX* de la cycloïde, cette force *TC* se résoudra dans les deux forces *CX*, *TX*, desquelles *CX* agissant suivant la direction *PT* ne fait d'autre effet que de tendre le fil *PT*, & est entiérement détruite par la résistance de ce fil; mais l'autre force *TX*, poussant le corps transversalement, c'est-à-dire vers *X*, accélere directement son mouvement dans la cycloïde; & il est clair que l'accélération de ce corps, étant proportionnelle à cette force accélératrice, est à chaque moment comme la longueur *TX*; c'est-à-dire, à cause que *CV*, *WV* sont données, & que *TX*, *TW* leur sont proportionnelles, comme la longueur *TW*, ou, ce qui revient au même, par le Cor. 1. de la Prop. 49. comme la longueur de l'arc *TR* de la cycloïde.

Deux pendules *APT*, *Apt* étant donc inégalement écartés de la perpendiculaire *AR*, & abandonnés à eux-mêmes en même temps, auront toujours des accélérations qui seront comme les arcs *TR*, *tR* à décrire. Or les parties décrites dans le commencement du mouvement sont comme les accélérations, c'est-à-dire, comme les arcs entiers, & par conséquent les parties qui restent à décrire & les accélérations suivantes qui sont proportionnelles à ces parties sont aussi comme les arcs entiers, & ainsi de suite. Donc les accélérations, & par conséquent les vîtesses produites, les parties décrites par ces vîtesses, & les parties à décrire feront toujours comme les arcs entiers; mais fi les parties à décrire gardent toujours entr'elles la même raifon, elles s'évanouiront en même temps; c'eft-à-dire, que les deux corps ofcillans arriveront en même temps à la perpendiculaire *A R*. Et réciproquement, les afcenfions des pendules perpendiculaires faites d'un mouvement rétrograde le long des mêmes arcs cycloïdaux, & à compter du lieu le plus bas *R* feront retardés à chacun des lieux par les mêmes forces qui accéléroient leurs defcenfions, enforte que les vîteffes des afcenfions & des defcenfions faites par les mêmes arcs feront égales, & que les temps de ces defcenfions & de ces afcenfions feront auffi égaux. Or comme les deux parties *R S* & *R Q* de la cycloïde qui font placées des deux côtés de la perpendiculaire font femblables & égales, les deux pendules auront donc leurs ofcillations entieres ifochrones, ainfi que leurs demi-ofcillations. *C. Q. F. D.*

Fig. 110.

Cor. La force par laquelle le corps *T* eft accéléré ou retardé dans un lieu quelconque *T* d'une cycloïde eft à tout le poids de ce même corps dans le lieu le plus élevé *S* ou *Q*, comme l'arc *T R* de la cycloïde à l'arc *S R* ou *Q R* de la même courbe.

PROPOSITION LII. PROBLÊME XXXIV.

Trouver les vîteffes des pendules dans chaque point des arcs qu'ils décrivent, & les temps qu'ils employent tant à parcourir ces arcs entiers que leurs parties quelconques.

D'un centre quelconque *G* & de l'intervalle *G H* égal à l'arc *R S* de la cycloïde, décrivez le demi cercle *HKM* coupé en deux parties égales par le demi diamétre *G K*. Imaginez enfuite que pendant que le corps *T* part de *S* pour aller vers *R*, un corps *L* parte de *H* pour aller vers *G* en éprouvant l'action d'une force proportionnelle à la diftance à ce centre, & égale en *H* à la force que le corps *T* a en *S* vers le centre *C*. Fig. 111, & 112.

Comme les forces qui follicitent ces corps font égales dans le commencement, & qu'elles font toujours proportionnelles aux

Du Mouvement des Corps.

Fig. 111. 112.

espaces TR & LG à décrire, elles seront par conséquent égales dans les lieux T & L en supposant $TR = LG$; ainsi il est clair que ces corps décriront les espaces égaux ST, HL dans le commencement. Donc ces corps continuant à être sollicités également dans la suite, ils continueront aussi à décrire des espaces égaux. C'est pourquoi, par la Prop. 38. le temps dans lequel le corps décrit l'arc ST sera au temps d'une oscillation, comme l'arc HI, qui exprime le temps que le corps H employe à arriver en L, est à la demie circonférence HKM qui représente le temps que ce corps H employe à arriver en M. Et la raison de $\sqrt{SR^2 - TR^2}$ à SR exprimera celle de la vîtesse du pendule en T à sa vîtesse en R, à cause que cette raison est la même que celle de la vîtesse du corps H au lieu L à sa vîtesse au lieu G, & que ces dernieres vîtesses sont comme les incréments des lignes HL, HG, pendant des fluxions de temps égales, ou, ce qui revient au même, pendant les fluxions égales des arcs HI, HK.

De plus, à cause que dans des oscillations par des arcs moindres que la cycloïde entiere, les arcs décrits en temps égaux sont proportionnels aux arcs entiers de ces oscillations, il est clair que, quelles que soient ces oscillations, on aura toujours pour un temps donné les vîtesses & les arcs décrits. Ce qu'il falloit premierement trouver.

Supposez à présent que des corps suspendus à des fils oscillent dans des cycloïdes différentes, décrites dans l'intérieur de globes différens dont les forces absolues soient différentes: si on appelle V la force absolue d'un globe quelconque QOS, la force accélératrice, qui agit sur le pendule dans la circonférence de ce globe au lieu d'où le pendule commence à tomber, sera comme la distance au centre du globe, & comme la force absolue conjointement, c'est-à-dire, comme $CO \times V$. Donc la petite ligne décrite HY dans un instant donné, qui doit être proportionnelle à cette force, sera aussi comme $CO \times V$.

Mais

Mais en élevant la perpendiculaire ZY qui rencontre la circonférence en Z, l'arc naiſſant HZ qui eſt proportionnel à $\sqrt{GH \times HY}$ repréſente cet inſtant donné, donc cet arc naiſſant eſt comme $\sqrt{GH \times CO \times V}$, & par conſéquent le temps d'une oſcillation entiere dans la cycloïde QRS (lequel temps eſt directement comme la demie circonférence HKM qui repréſente cette oſcillation entiére & inverſement, comme l'arc HZ qui repréſente de même l'inſtant donné) devient comme GH directement & $\sqrt{GH \times CO \times V}$ inverſement, c'eſt-à-dire, à cauſe des égales GH & SR, comme $\sqrt{\frac{SR}{CO \times V}}$, ou, par le Cor. de la Propoſition 50. comme $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$. Donc, dans toutes les cycloïdes & dans tous les globes, les oſcillations produites par des forces abſolues quelconques ſont en raiſon compoſée de la raiſon ſous-doublée directe de la longueur du fil, & des raiſons ſous-doublées inverſes de la diſtance entre le point de ſuſpenſion & le centre du globe, & de la force abſolue du globe. *C. Q. F. T.* Fig. 111. 112.

Cor. 1. On peut par ce moyen comparer le temps qu'un corps met à oſciller avec celui qu'il mettroit à faire une révolution autour du même centre de forces, ou à deſcendre en ligne droite vers ce centre. Car ſi on fait le diamétre du cercle qui décrit la cycloïde dans le globe égal au demi diamétre de ce globe, la cycloïde deviendra une ligne droite qui paſſera par le centre du globe, enſorte que l'oſcillation ſe changera alors en un mouvement d'aſcenſion & de deſcenſion dans cette droite: & par le ſecond cas de cette propoſition, le temps de cette deſcenſion & de cette aſcenſion perpendiculaire, ainſi que le temps qui lui eſt égal, dans lequel le corps, en tournant uniformément autour du centre du globe à une diſtance quelconque, décrit une moitié de ſa révolution, eſt au temps d'une oſcillation dans la cycloïde QRS comme 1 à $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$.

Cor. 2. On tire auſſi de-là ce que *Wren* & *Hughens* ont trouvé ſur la cycloïde ordinaire. Car ſi le diamétre du globe eſt augmenté à l'infini, ſa ſuperficie ſe changera en un plan, la force centripete deviendra uniforme & dirigée ſuivant des lignes perpendiculaires à ce plan, & notre cycloïde ne ſera plus que la cycloïde ordinaire. Dans ce cas, la longueur de l'arc de cycloïde, compris entre ce plan & le point décrivant, deviendra égale au quadruple du ſinus verſe de la moitié de l'arc du cercle roulant compris entre ce même plan & le point décrivant, Fig. 111. 112. comme *Wren* l'a trouvé : & le pendule ſuſpendu entre deux cycloïdes oſcillera dans une cycloïde ſemblable & égale en employant toujours le même temps, quelques inégales que ſoient ces oſcillations, ainſi que l'a démontré *Hughens*. Enfin le temps de ces oſcillations ſera celui qu'*Hughens* a déterminé.

On peut appliquer les propoſitions qu'on vient de démontrer au ſyſtême actuel de la terre, car les cloux des roues qui roulent ſur la ſurface de la terre décrivent des épicycloïdes extérieures ; & les pendules qui ſeroient ſuſpendus au dedans de la terre dans des cavernes entre deux arcs d'épicycloïdes intérieures feroient des oſcillations iſochrones. Car, comme on le verra au troiſiéme livre, la gravité qui agit au deſſus de la terre en raiſon renverſée du quarré des diſtances agit au dedans en raiſon de la ſimple diſtance au centre.

PROPOSITION LIII. PROBLÉME XXXV.

En ſuppoſant la quadrature des courbes, trouver les forces par leſquelles les corps feront toujours des oſcillations iſochrones dans des courbes données.

Fig. 113. Le corps T oſcillant dans une ligne courbe quelconque $STRQ$, dont l'axe AR paſſe par le centre C des forces; ſoit tirée TX qui touche cette courbe dans le lieu quelconque T, & ſoit pris ſur cette tangente TX l'intervalle TY égal à l'arc TR, ce qui ne demande autre choſe que la quadrature des courbes. Soit élevée enſuite ſur la tangente la perpendiculaire YZ, laquelle ren-

contrant en Z la droite CT donnera TZ pour exprimer la force centripete cherchée. *C. Q. F. T.*

Car si la force TZ par laquelle le corps est tiré de T vers C est décomposée dans les forces TY, YZ, la partie YZ tirant le corps dans la direction du fil PT ne change rien à son mouvement; mais l'autre force TY accélérera ou retardera directement son mouvement dans la courbe $STRQ$. Ainsi, puisque cette force est comme l'arc TR à décrire, les accélérations ou retardations du corps dans deux oscillations de différente étendue seront toujours, dans les parties à décrire supposées proportionnelles, comme ces parties, & il arrivera par conséquent que ces parties seront décrites en même temps. Or les corps qui décrivent dans des temps égaux des parties toujours proportionnelles aux tous, décrivent aussi les tous en temps égal. *C. Q. F. D.* Fig. 113.

Cor. 1. Donc si un corps T qui pend à un fil rectiligne AT attaché au centre A décrit l'arc circulaire $STRQ$, & que dans le même temps il soit poussé en en bas suivant des lignes paralleles par quelque force qui soit à la force uniforme de la gravité, comme l'arc TR à son sinus TN; les temps de chacune des oscillations seront égaux. Car à cause des paralleles TZ, AR, les triangles ATN, ZTY seront semblables; & par conséquent on aura $TZ : AT :: TY : TN$, c'est-à-dire, que si la force uniforme de la gravité est exprimée par la ligne donnée AT, la force TZ par laquelle les oscillations deviennent isochrones sera à la force de la gravité AT comme l'arc TR égal à TY est à son sinus TN. Fig. 114.

Cor. 2. Et par conséquent dans les horloges, si les forces imprimées au pendule par la machine pour conserver le mouvement peuvent être tellement combinées avec la force de la gravité, que la force totale qui pousse le corps en en bas soit toujours comme la ligne qu'on a en divisant le rectangle sous l'arc TR & le rayon AR par le sinus TN, toutes les oscillations seront isochrones.

Du Mouvement des Corps.

PROPOSITION LIV. PROBLÊME XXXVI.

En supposant la quadrature des courbes, trouver les temps dans lesquels les corps montent & descendent dans des courbes quelconques par une force centripete quelconque, ces courbes étant décrites dans un plan qui passe par le centre des forces.

Fig. 115. Le corps tombant d'un lieu quelconque S le long de la courbe quelconque $STtR$ donnée dans un plan qui passe par le centre C des forces, soit tirée CS que l'on suppose divisée dans un nombre innombrable de parties égales telles que Dd. Du centre C & des intervalles CD, Cd soient décrits les cercles DT, dt qui rencontrent la courbe $STtR$ en T & en t, la Prop. 39. apprendra à trouver la vîtesse en un point quelconque T en employant la loi de la force centripete donnée & la distance du centre C au point S d'où la chute a commencé. Mais le temps dans lequel le corps décrit la petite ligne Tt est en raison directe de la longueur de cette petite ligne, c'est-à-dire, de la sécante de l'angle tTC, & en raison inverse de la vîtesse. Donc si on éléve au point D & perpendiculairement à CS l'appliquée DN proportionnelle à ce temps, l'aire $DNnd$, c'est-à-dire $DN \times Dd$, à cause de la donnée Dd, sera aussi proportionnelle à ce même temps, & par conséquent la courbe PNn, lieu des points N, donnera par son aire $SQPND$ (comprise entre l'asymptote SQ perpendiculaire à CS, l'axe SD, l'appliquée DN, & l'arc infini NP) le temps que le corps S a employé à aller de S en T. C. Q. F. T.

PROPOSITION LV. THÉORÊME XIX.

Si pendant qu'un corps qui tend vers un centre de forces se meut librement sur une surface courbe quelconque dont l'axe passe par ce centre, on imagine sur un plan perpendiculaire à cet axe une courbe qui soit la projection octogonale de la premiere, & qui soit parcourue *par un point qui réponde continuellement au corps mû sur la surface, ce point décrira des aires proportionnelles aux temps.*

Soit *BKL* la superficie courbe; *T* le corps qui fait sa révolution dans cette superficie; *STR* la trajectoire qu'il y décrit; *S* le commencement de cette trajectoire; *OMK* l'axe de la superficie courbe; *TN* la droite tirée perpendiculairement du lieu *T* sur l'axe; *OP* égale à *TN* sa projection sur le plan *APO* perpendiculaire à l'axe *KO*; *AP* la projection de la trajectoire décrite dans ce même plan par le point *P* répondant au corps *T*; *A* le commencement de cette projection répondant au point *S*; *TC* la droite menée du corps au centre; *TG* la partie de cette droite proportionnelle à la force centripete qui pousse le corps vers le centre *C*; *TM* la ligne droite perpendiculaire à la superficie courbe; *TI* la partie de cette ligne proportionnelle à la force par laquelle le corps presse cette superficie, & en est réciproquement pressé vers *M*; *PTF* la droite parallele à l'axe & qui passe par le lieu *T*; *GF*, *HI* les droites abaissées perpendiculairement des points *G* & *I* sur cette parallele *PHTF*. Cela posé, je dis que l'aire *AOP* décrite par le point *P* autour de *O* depuis le commencement du mouvement est proportionnelle au temps. Fig. 117.

Car la force *TG* (par le Cor. 2. des loix) se décomposera dans les forces *TF*, *FG*; & la force *TI* dans les forces *TH*, *HI*: Fig. 117.
mais les forces *TF*, *TH* agissant dans la direction *PF* perpendiculaire au plan *AOP* ne changent le mouvement du corps *T* que dans le sens perpendiculaire à ce plan. Ainsi donc la partie de son mouvement qui se fait dans le sens du plan, c'est-à-dire, le mouvement du point *P* par lequel la projection *AP* de la trajectoire est décrite, demeure le même qu'il seroit, si les forces *FT*, *TH* étoient supprimées, & que les seules forces *FG*, *HI* agissent sur le corps, c'est-à-dire, le même qu'il seroit, si le corps décrivoit la courbe *AP* dans le plan *AOP*, par une force centripete qui tendit au centre *O*, & qui fut égale à la

somme des forces FG, HI; mais une telle force par la Prop. 1. feroit décrire au corps l'aire AOP proportionnelle au temps. Donc, &c. *C. Q. F. D.*

Fig. 116. *Cor.* Par le même raisonnement, si un corps quelconque étoit sollicité par des forces qui tendissent vers deux ou plusieurs centres situés dans une même ligne droite donnée CO & qu'il décrivit dans un espace libre une courbe quelconque ST, l'aire AOP seroit toujours proportionnelle au temps.

PROPOSITION LVI. PROBLÊME XXXVII.

Supposant la quadrature des courbes, & connoissant la loi de la force qui tend vers un centre donné dans l'axe d'une surface courbe quelconque, on demande la trajectoire décrite sur cette surface par un corps poussé suivant une vîtesse & une direction quelconque.

Fig. 117. Les mêmes choses que dans la Proposition précédente & que le corps T parte du lieu donné S suivant une direction & avec une vîtesse donnée; que T soit le lieu où ce corps est arrivé après un temps quelconque; Tt le petit arc parcouru pendant un instant donné, Pp sa projection sur le plan BDO, c'est-à-dire, une petite partie de la projection APp de la trajectoire sur ce plan; la petite ellipse pQ la projection du cercle décrit sur la surface courbe du centre O & du rayon Tt; Op le rayon tiré du centre O au point p.

Il est clair que la vîtesse du corps T au point quelconque T sera donnée par la hauteur TC, ou, ce qui revient au même, par le rayon OP de la projection de la trajectoire, & que la grandeur des axes de la petite ellipse pQ ne dépendra non plus que de la même ligne. Donc à cause que le secteur POp est proportionnel au temps, on connoîtra le point p intersection de cette ellipse & de Op, c'est-à-dire, que la position de Pp, ou, ce qui revient au même, le sinus de l'angle pPO ne dépendra encore que de OP. Or la relation connue entre Op & le sinus de pPO donnera facilement la projection AP en employant la conſtruction des courbes de la Prop. 41. & la projection AP étant connue donne tout de ſuite la trajectoire demandée.

Fig. 117.

ONZIÉME SECTION.

Du mouvement des corps qui s'attirent mutuellement par des forces centripetes.

J'ai traité juſqu'ici des mouvemens des corps attirés vers un centre immobile, tel qu'il n'en éxiſte peut-être aucun dans la nature; car les attractions ont coutume de ſe faire vers des corps, & les actions des corps qui attirent & qui ſont attirés ſont toujours mutuelles & égales par la troiſiéme loi. Si on ne conſidére, par éxemple, que deux corps, ni le corps attiré, ni le corps attirant ne ſeront en repos; mais ils feront l'un & l'autre, par leur attraction mutuelle, (ſelon le Corol. 4. des Loix) leur révolution autour de leur centre commun de gravité; s'il y a pluſieurs corps qui ſoient tous attirés vers un ſeul qu'ils attirent auſſi, ou bien qui s'attirent tous mutuellement, ils doivent ſe mouvoir entr'eux de ſorte que leur centre commun de gravité ſoit en repos, ou qu'il ſe meuve uniformément en ligne droite.

Je vais expliquer les mouvemens produits par ces forces que je nomme *attractions*, quoique peut-être je deuſſe plutôt les appeller *impulſions*, pour parler le langage des Phyſiciens; mais je laiſſe à part les diſputes qu'on peut élever ſur cette dénomination, & je me ſers des expreſſions les plus commodes pour les Mathématiciens.

PROPOSITION LVII. THÉORÉME XX.

Deux corps qui s'attirent mutuellement décrivent autour de leur centre commun de gravité, & autour l'un de l'autre, des figures ſemblables.

Les diſtances des corps au centre commun de gravité ſont réciproquement proportionnelles à ces corps; ainſi elles ſont en raiſon donnée l'une à l'autre, auſſi bien qu'à la diſtance totale qui eſt entre les deux corps. De plus, ces diſtances ſont tranſportées autour de leur terme commun d'un mouvement angulaire égal, parce que ces corps étant toujours poſés en ligne droite l'un par rapport à l'autre, ne changent point leur inclinaiſon mutuelle, mais les droites, qui ſont entr'elles en raiſon donnée, & qui ſont tranſportées d'un mouvement angulaire égal autour de leurs extrémités, décrivent autour de ces mêmes extrémités des figures entiérement ſemblables dans des plans qui ſont en repos avec ces termes, ou qui ſe meuvent d'un mouvement quelconque qui n'eſt point angulaire. Donc, &c. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION LVIII. THÉORÉME XXI.

Etant donnée, la loi des forces avec leſquelles deux corps s'attirent mutuellement, on peut, en ſuppoſant que l'un de ces corps ſoit fixe, donner telle impulſion à l'autre qu'il décrive autour de lui une courbe égale & ſemblable à celles que ces deux corps décrivent l'un autour de l'autre lorſqu'ils ſont tous deux mobiles autour de leur centre commun de gravité.

Fig. 118. & 119. Que les corps *S* & *P* faſſent leur révolution autour d'un centre commun de gravité *C*, l'un allant de *S* vers *T*, l'autre de *P* vers *Q*. Que d'un point donné *s*, on tire *sp*, *sq* toujours égales & paralleles à *SP* & à *QT*; la courbe *pqv*, que le point *p* décrit en tournant autour d'un point immobile *s*, ſera ſemblable & égale aux courbes que les corps *S* & *P* décrivent mutuellement autour l'un de l'autre; & par conſéquent, par le Théoréme 20. elle ſera ſemblable aux courbes *ST* & *PQV*, que ces mêmes corps décrivent autour de leur centre commun de gravité *C*.

Fig. 118. & 119. *Cas* 1. Ce commun centre de gravité *C*, par le Cor. 4. des loix, eſt en repos, ou ſe meut en ligne droite uniformément. Suppoſons premiérement qu'il ſoit en repos, & qu'il y ait en *s* & en *p* deux corps, deſquels celui qui eſt immobile ſoit en *s*, & celui qui eſt mobile en *p*, & que ces corps ſoient égaux & ſemblables aux

Fig. 118. & 119.

aux corps S & P. De plus, que les droites PR & pr touchent les courbes PQ & pq en P & p, & que les lignes CQ & sq ſoient prolongées en R & en r, à cauſe que les figures $CPRQ$, $sprq$ ſont ſemblables, on aura $RQ : rq :: CP : sp$, & par conſéquent ces lignes ſeront en raiſon donnée. Ainſi, ſi la force par laquelle le corps P eſt attiré vers le corps S, & par conſéquent vers le centre intermédiaire C, étoit à la force par laquelle le corps p eſt attiré vers le centre s, dans cette même raiſon donnée; ces corps en temps égaux ſeroient retirés des tangentes PR, pr vers les arcs PQ, pq par des intervalles RQ, rq proportionnels à ces arcs, & par conſéquent la force qui agit ſur le corps p le feroit circuler dans une courbe pqu, qui ſeroit ſemblable à la courbe PQV, que la premiere force fait parcourir au corps P, & leurs révolutions s'acheveroient dans les mêmes temps.

Mais comme ces forces ne ſont pas l'une à l'autre dans la raiſon de CP à sp; qu'au contraire elles ſont égales à cauſe que les corps S & s, P & p ſont ſemblables & égaux, & que les diſtances SP, sp ſont égales, ces corps dans des temps égaux ſeront également retirés de leurs tangentes. Donc, afin que le dernier corps p ſoit retiré d'un intervalle plus grand rq, il faut un temps plus long, lequel ſera en raiſon ſousdoublée de ces intervalles, à cauſe que les eſpaces au commencement du mouvement ſont par le Lemme 10. en raiſon doublée des temps. Or, pour faire en ſorte que le temps par l'arc pq ſoit au temps par l'arc PQ, comme sp à CP, il ne faut autre choſe que prendre la vîteſſe du corps p à la vîteſſe du corps P, dan la même raiſon de sp à CP, puiſque les eſpaces pq, PQ ſont entr'eux dans la raiſon ſimple de sp à CP. Suppoſant donc de telles vîteſſes aux corps, ils ſeront toujours attirés par des forces égales, & décriront autour des centres en repos C & s les figures ſemblables PQV, pqv, deſquelles la derniere pqv ſera égale & ſemblable à la figure que le corps P décrit autour du corps mobile S. *C. Q. F. D.*

Cas 2. Supposons à présent que le commun centre de gravité se meuve uniformément en ligne droite avec l'espace dans lequel les corps se meuvent entr'eux, tous les mouvemens s'éxécuteront dans cet espace comme auparavant, par le sixiéme Coroll. des Loix. Ainsi ces corps décriront mutuellement autour l'un de l'autre les mêmes figures qu'auparavant, lesquelles seront égales & semblables à la figure pqv. *C. Q. F. D.*

Fig. 118. & 119.

Cor. 1. Ainsi deux corps qui s'attirent mutuellement par des forces proportionnelles à leur distance décriront, par la Prop. 10. autour de leur centre commun de gravité, & autour l'un de l'autre, des ellipses concentriques; & réciproquement, si de telles figures sont décrites, les forces seront proportionnelles aux distances.

Cor. 2. Deux corps qui s'attirent avec des forces réciproquement proportionnelles au quarré de leur distance décriront, par les Prop. 11. 12. & 13. autour de leur commun centre de gravité, & autour l'un de l'autre, des Sections coniques dont le foyer sera dans le centre autour duquel ces figures sont décrites; & réciproquement si de telles figures sont décrites, les forces centripetes seront réciproquement proportionnelles au quarré de la distance.

Cor. 3. Deux corps quelconques qui tournent autour d'un centre commun de gravité décriront autour de ce centre, & autour d'eux-mêmes des aires proportionnelles au temps.

PROPOSITION LIX. THÉORÉME XXII.

Le temps périodique de deux corps S *&* P*, qui font leur révolution autour de leur commun centre de gravité* C*, est au temps périodique de l'un ou l'autre de ces corps* P*, qui tourne autour d'un autre centre immobile* S*, & qui y décrit une figure égale & semblable à celle que ces corps décrivent mutuellement l'un autour de l'autre, en raison sous-doublée de l'autre corps* S*, à la somme* S + P *de ces corps.*

Fig. 118. & 119.

Par la démonstration de la Proposition précédente, les temps pendant lesquels les arcs quelconques semblables PQ & pq sont décrits sont en raison sousdoublée des distances *CP* & *SP* ou *sp*, c'est-à-dire en raison sousdoublée du corps *S* à la somme *S + P* de ces corps. Et par conséquent les sommes des temps employés à parcourir tous les arcs semblables *PQ* & *pq*, c'est-à-dire, les temps totaux des révolutions des corps *S* & *P*, sont dans cette même raison sousdoublée. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION LX. THÉORÉME XXIII.

Si deux corps S & P, *qui s'attirent mutuellement par des forces réciproquement proportionnelles au quarré de leur distance, font leurs révolutions autour d'un centre de gravité commun; le grand axe de l'ellipse que l'un ou l'autre de ces corps* P *décrira par ce mouvement autour de l'autre corps* S *sera à l'axe principal de l'ellipse, que le même corps* P *peut décrire dans le même temps périodique autour de l'autre corps* S, *supposé en repos, comme la somme des deux corps S + P, à la premiere des deux moyennes proportionnelles entre cette somme & l'autre Corps* S.

Car si les ellipses décrites étoient égales entr'elles, les temps périodiques (par le Théoréme précédent) seroient en raison sousdoublée du corps *S* à la somme *S + P* de ces corps. Diminuant donc dans cette raison le temps périodique de la derniere ellipse, les temps périodiques deviendront égaux, & l'axe principal de l'ellipse, par la Prop. 15. diminuera dans la raison dont celle-là est sesquiplée, c'est-à-dire dans la raison dont la raison de *S* à *S + P* est triplée; ainsi il sera à l'axe principal de l'autre ellipse, comme la premiere des deux moyennes proportionnelles entre *S + P*, & *S* est à *S + P*. Et réciproquement, l'axe principal de l'ellipse décrite autour du corps mobile sera à l'axe principal de l'ellipse décrite autour du corps immobile, comme *S + P* à la premiere des deux moyennes proportionnelles entre *S + P* & *S*. C. Q. F. D.

PROPOSITION LXI. THÉORÊME XXIV.

Si deux corps s'attirent mutuellement suivant une loi donnée à volonté, & se meuvent d'une façon quelconque sans éprouver aucune autre action, ils se mouveront comme s'ils ne s'attiroient pas mutuellement, & qu'ils fussent attirés l'un & l'autre avec les mêmes forces par un troisiéme corps placé dans leur centre commun de gravité : & la loi des forces attirantes sera la même, tant à l'égard de la distance de ces corps à ce centre commun, qu'à l'égard de la distance qui est entre ces corps.

Car les forces, par lesquelles ces corps s'attirent mutuellement, tendant à ces corps, tendent à leur commun centre de gravité qui est placé entr'eux ; ainsi elles sont les mêmes que si elles émanoient d'un corps intermédiaire. *C. Q. F. D.*

Et comme la raison de la distance de l'un ou l'autre de ces corps du commun centre de gravité à la distance qui sépare ces corps est donnée, la raison d'une puissance quelconque de la distance de l'un à la même puissance de la distance de l'autre sera aussi donnée, aussi bien que la raison d'une quantité quelconque, composée comme on voudra d'une de ces distances & de constantes quelconques, à une autre quantité, composée de la même maniére de l'autre distance & d'autant de constantes qui auroient aux premieres la raison donnée de ces distances. Ainsi, si la force par laquelle un corps est attiré par un autre est directement ou inversement comme la distance de ces corps entr'eux, ou comme une puissance quelconque de cette distance, ou enfin comme une quantité quelconque composée d'une façon quelconque de cette distance & de constantes, la même force, par laquelle le même corps sera attiré vers le commun centre de gravité, sera de même directement ou inversement comme la distance du corps attiré à ce commun centre de gravité, ou bien comme la même puissance de cette distance, ou enfin comme la quantité composée de même de cette distance, & de quantités analogues données. C'eſt-à-dire que la loi de la force attirante ſera la même, eu égard à la diſtance de l'un & de l'autre corps. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION LXII. PROBLÉME XXXVIII.

Déterminer le mouvement de deux corps qui s'attirent mutuellement en raiſon renverſée du quarré de leur diſtance, & qui partent de lieux donnés.

Par le théoréme précédent, ces corps ſe mouveront de même que s'ils étoient attirés par un troiſiéme corps placé dans leur centre commun de gravité; & ce centre ſera en repos dans le commencement du mouvement, par l'hypotheſe; donc, par le Cor. 4. des loix, il ſera toujours en repos. Ainſi, en déterminant par la Prop. 17. les mouvemens des corps comme s'ils étoient ſollicités par des forces tendantes à ce centre, on aura leur mouvement dans la ſuppoſition qu'ils s'attirent mutuellement. *C. Q F. T.*

PROPOSITION LXIII. PROBLÉME XXXIX.

Déterminer le mouvement de deux corps qui s'attirent mutuellement en raiſon renverſée du quarre de leur diſtance, & qui partent de lieux donnés, ſuivant des droites données, & avec des vîteſſes données.

Les mouvemens de ces corps, quand ils commencent à ſe mouvoir, étant donnés, le mouvement uniforme de leur commun centre de gravité eſt donné, ainſi que le mouvement de l'eſpace qui ſe meut uniformément en ligne droite avec ce centre, & le mouvement initial de ces corps par rapport à cet eſpace. Or les mouvemens, qui s'éxécuteront enſuite dans cet eſpace, s'y éxécuteront de la même maniére (Théor. 24. & Cor. 5. des loix) que ſi cet eſpace & ce commun centre de gravité étoient en repos, & que ces corps ne s'attiraſſent point mutuellement, mais qu'ils fuſſent attirés par un troiſiéme placé dans leur centre commun de gravité. Il faut donc déterminer, par le Probléme 9. & par le 26. le mouvement de l'un de ces corps dans cet eſpace mobile, en ſuppoſant qu'il parte d'un lieu donné ſuivant une droite donnée, avec une vîteſſe donnée, & qu'il ſoit ſollicité par une force centripete tendante à ce centre, & on aura en même temps le mouvement de l'autre corps autour du même centre. Il faut enſuite compoſer ce mouvement avec le mouvement progreſſif & uniforme du ſyſtême entier compoſé de l'eſpace & des corps qui y circulent, lequel a été trouvé ci-deſſus, & on aura le mouvement abſolu de ces corps dans l'eſpace immobile. *C. Q. F. T.*

PROPOSITION LXIV. PROBLÉME XL.

On demande le mouvement de pluſieurs corps qui s'attirent tous mutuellement en raiſon directe de la diſtance.

Suppoſons premierement deux corps *T* & *L* ayant un centre de gravité commun *D*. Ces corps décriront (Cor. 1. du Th. 21.), autour de *D* comme centre, des ellipſes, deſquelles on connoîtra la grandeur par le Probléme 5.

Fig. 120. Qu'un troiſiéme corps attire les deux premiers *T* & *L* avec des forces accélératrices *ST*, *SL*, & qu'il ſoit attiré à ſon tour par ces deux premiers, la force *ST* ſe décompoſera, par le Cor. 2. des loix, dans les forces *SD*, *TD*, & la force *SL* dans les forces *SD*, *DL*. Or les forces *DT*, *DL* qui ſont comme leur ſomme *TL*, & par conſéquent comme les forces accélératrices par leſquelles les corps *T* & *L* s'attirent mutuellement, étant ajoutées aux forces des corps *T* & *L*, la premiere à la premiere, & la derniere à la derniere, compoſeront des forces proportionnelles aux diſtances *DT* & *DL*, comme auparavant, mais plus grandes que les premieres forces; donc, par le Cor. 1. de la Prop. 10. & par les Coroll. 1. & 8. de la Prop. 4. elles feront décrire à ces corps des ellipſes comme auparavant, mais avec un mouvement plus prompt.

Les autres forces accélératrices *SD* & *SD*, par leurs actions motrices $SD \times T$ & $SD \times L$, leſquelles ſont comme les corps, tirant ces corps également & suivant les lignes TI, LK paralleles à DS, ne changent rien à leurs situations respectives, mais elles font qu'ils approchent également de la ligne IK tirée par le milieu du corps S, & perpendiculaire à la ligne DS. Et ce mouvement vers la ligne IK pourra être nul en donnant au systême des corps T & L d'une part, & au corps S de l'autre, des vîtesses convenables pour les faire tourner autour du centre commun de gravité C : dans ce cas, le corps S décrira une ellipse autour de ce même point C, parce que la somme des forces motrices $SD \times T$ & $SD \times L$, lesquelles sont proportionnelles à la distance CS, tend vers le centre C. De plus, le point D, à cause des proportionnelles CS, CD, décrira une ellipse semblable à celle qui est décrite par le corps S. Donc les corps T & L attirés également, comme on l'a dit, par les forces motrices $SD \times T$ & $SD \times L$, le premier par la premiere, & le dernier par la derniere, suivant les lignes paralleles TI & LK, continueront (Cor. 5. & 6. des loix) à décrire leurs ellipses autour du centre mobile D comme auparavant. *C. Q. F. T.*

Fig. 120.

Qu'on ajoute ensuite un quatriéme corps V, & on concluera par le même raisonnement que ce corps & le point C décriront des ellipses autour du commun centre de gravité B de tout le systême, les mouvemens des premiers corps T, L & S autour des centres C & D subsistants toujours sans autre différence que d'être accélérés. Il en seroit de même, quelque fût le nombre des corps. *C. Q. F. T.*

C'est encore la même chose lorsque les corps T & L s'attirent mutuellement avec des forces accélératrices dont les intensités sont différentes de celles avec lesquelles ils attirent les autres corps relativement à leurs distances.

Et en général, il suit de ce qu'on vient de dire que toutes les fois que les attractions mutuelles accélératrices d'un nombre quelconque de corps seront entr'elles comme les distances multipliées par les corps attirants, tous ces corps décriront dans des temps périodiques égaux des ellipses diverses autour de leur commun centre de gravité *B*, & dans un plan immobile. *C.Q.F.T.*

PROPOSITION LXV. THÉORÊME XXV.

Plusieurs corps dont les forces décroissent en raison doublée des distances à leurs centres peuvent décrire les uns autour des autres des courbes approchantes de l'ellipse, & décrire autour des foyers de ces courbes des aires à peu-près proportionnelles au temps.

On a donné dans la Proposition précédente le cas où les mouvemens s'éxécutent dans des ellipses rigoureuses. Plus la loi des forces s'éloigne de la loi qu'on y a employée, & plus les corps troubleront leurs mouvemens mutuels; & il ne put arriver que les corps qui s'attirent mutuellement, selon la loi supposée ici, décrivent éxactement des ellipses, à moins qu'ils ne conservent une certaine proportion dans leurs distances respectives.

Cas 1. Imaginons plusieurs petits corps qui font leur révolution autour d'un plus grand, à différentes distances de ce plus grand, & qui tendent tous les uns vers les autres avec des forces absolues proportionnelles à ces mêmes corps. Si ces corps révolvans sont assez petits pour que le corps autour duquel ils tournent ne s'écarte jamais sensiblement du centre de gravité, il est clair, par le Cor. 4. des loix, que ce corps approchera extrêmement d'être en repos ou de se mouvoir uniformément en ligne droite. De plus, ces petits corps tourneront autour de lui dans des ellipses, & décriront des aires proportionnelles au temps, abstraction faite des erreurs qui peuvent être causées, ou par le petit écart que fait le grand corps du centre commun de gravité, ou par les actions mutuelles de ces petits corps les uns sur les autres. Or on peut augmenter la petitesse des corps révolvans à un tel point, que cet écart & ces actions mutuelles soient moindres que toute quantité donnée; c'est-à-dire, jusqu'à ce que les orbites deviennent elliptiques, & que les aires soient proportionnelles au temps sans erreur sensible. *C. Q. F. M.*

Cas 2

Cas 2. Supposons qu'un système tel que celui dont on vient de parler, composé de petits corps qui font leurs révolutions autour d'un plus grand, ou qu'un système composé simplement de deux corps qui tournent l'un autour de l'autre, avance uniformément en ligne droite, & qu'en même temps ces corps soient sollicités par la force d'un autre corps beaucoup plus grand, & placé à une grande distance : comme les forces accélératrices égales, par lesquelles ces corps sont sollicités à se mouvoir suivant des lignes paralleles, ne changent point la situation respective de ces corps, mais qu'elles font seulement que le système entier, dont les parties conservent leurs mouvemens entr'elles, est transporté en même temps : il est clair, que les attractions vers le grand corps ne doivent causer d'autres altérations dans les attractions mutuelles de ces corps, que celles qui peuvent résulter de l'inégalité des attractions accélératrices, ou de l'inclinaison qu'ont entr'elles les lignes suivant lesquelles agissent ces attractions. Supposé donc que toutes les attractions accélératrices vers le grand corps soient entr'elles réciproquement comme les quarrés des distances; en augmentant la distance du grand corps jusqu'à ce que les différences des longueurs des droites menées de ce grand corps aux petits, & que leurs inclinaisons réciproques soient moindres que toute quantité donnée, les mouvemens des parties de ce systéme entr'elles n'éprouveront point d'irrégularité qui ne soit plus petite que tout ce qu'on les voudroit supposer. Et comme à cause de la petite distance de ces parties entr'elles, tout le système entier sera attiré de la même maniere que s'il consistoit en un seul corps, ce système éprouvera aussi le même mouvement par cette attraction, que si elle s'éxerçoit sur un seul corps; c'est-à-dire, que son centre de gravité décrira autour du grand corps une Section conique, & que les aires qu'il décrira autour de ce grand corps seront proportionnelles au temps, sans erreurs sensibles. *C. Q. F. D.*

On pourroit par le même raiſonnement aller à des cas plus compoſés à l'infini.

Cor. 1. Dans le ſecond cas, plus le grand corps approche du ſyſtême de deux ou de pluſieurs corps, & plus les mouvemens des parties de ce ſyſtême entr'elles ſeront troublés; parce qu'alors l'inclinaiſon mutuelle des lignes tirées du grand corps à ces autres corps eſt plus grande, ainſi que l'inégalité de la proportion.

Cor. 2. Ces mouvemens ſeront très-fortement troublés, ſi les attractions accélératrices des parties de ce ſyſtême vers le plus grand corps ne ſont plus entr'elles réciproquement comme le quarré des diſtances à ce grand corps; ſur-tout ſi l'inégalité de la proportion de cette attraction eſt plus grande que l'inégalité de la proportion des diſtances au grand corps. Car ſi la force accélératrice ne trouble point ces mouvemens entr'eux, lorſqu'elle agit également, & par des lignes paralleles, elle doit néceſſairement les troubler, lorſqu'elle agit inégalement, & cela plus ou moins, ſelon que cette inégalité eſt plus ou moins grande. Car l'excès des plus grandes impulſions, éxercées ſur quelques-uns de ces corps & non éxercées ſur les autres, doit néceſſairement changer leur poſition entr'eux; & ce dérangement, ajoûté à celui qui naît de l'inégalité des lignes & de leur inclinaiſon, rendra le dérangement total plus ſenſible.

Cor. 3. Ainſi, ſi les parties de ce ſyſtême ſe meuvent dans des ellipſes ou dans des cercles ſans aucune altération ſenſible, il eſt clair qu'elles ne ſont ſollicitées que très-foiblement par des forces accélératrices tendantes à d'autres corps, ou que ces forces agiſſent à peu près également ſur elles, & ſuivant des lignes qui ſont preſque paralleles.

PROPOSITION LXVI. THÉORÉME XXVI.

Si trois corps dont les forces décroissent en raison doublée des distances s'attirent mutuellement, & que les attractions accélératrices de deux quelconques vers le troisiéme, soient entr'elles en raison renversée du quarré des distances, les plus petits tournant autour du plus grand; je dis que le corps le plus intérieur des deux petits décrira autour de ce grand corps des aires qui approcheront plus d'être proportionnelles au temps, & que la figure qu'il décrira approchera plus d'être une ellipse dont le foyer sera le centre des forces, si le grand corps est agité par les attractions des petits corps, que s'il étoit en repos, & qu'il n'éprouvât aucune attraction de leur part, ou qu'il fût beaucoup plus ou beaucoup moins agité en vertu d'une attraction beaucoup plus ou beaucoup moins forte.

Cette Proposition suit assez naturellement du Cor. 2. de la Proposition précédente; mais je vais encore la prouver par des argumens plus précis, & plus pressans.

Cas 1. Que les plus petits corps P & S tournent dans le même plan, autour du plus grand T; P décrivant l'orbite intérieur PAB, & S l'extérieure ESE. Que SK soit la moyenne distance des corps P & S, & que cette ligne SK exprime l'attraction de P vers S à la moyenne distance. En prenant SL à SK en raison doublée de SK à SP, SL sera l'attraction accélératrice de P vers S, à une distance quelconque SP, & cette force SL se décomposera dans les deux forces SM, LM, en menant LM parallele à la ligne qui joint P & T. Fig. 121.

Cela posé, il est clair que le corps P sera sollicité par trois forces: la premiere tend à T & vient de l'attraction mutuelle des corps T & P; & l'effet de cette force, si elle étoit seule, seroit de faire décrire au corps P autour du corps T (soit que ce corps fût immobile, soit qu'il fût animé de la même attraction) des aires proportionnelles au temps, & une ellipse dont le foyer seroit T. Ce qui paroît clairement par la Prop. 11. & par les Cor. 2. & 3. du Théor. 21.

Du Mouvement des Corps.

Fig. 121.

La ſeconde force qui agit ſur P eſt l'attraction LM, laquelle tendant de P à T s'ajouteroit à la premiere, & produiroit toujours des aires proportionnelles au temps (Cor. 3. Théor. 21.); mais n'étant pas réciproquement proportionnelle au quarré des diſtances, la ſomme des deux forces ne ſe trouveroit pas non plus dans cette raiſon, & s'en écarteroit d'autant plus que ces deux forces auroient une plus grande proportion l'une à l'autre. Or, comme par la Prop. 11. & par le Cor. 2. du Théor. 21. la force néceſſaire pour faire décrire une ellipſe autour du foyer T doit tendre vers ce foyer, & être réciproquement proportionnelle au quarré de la diſtance PT, l'orbe PAB s'écartera de la forme elliptique, & cela d'autant plus qu'il y aura une plus grande proportion entre les deux forces qui compoſent celle de P vers T, toutes choſes étant ſuppoſées d'ailleurs égales.

La troiſiéme force qui agit ſur P eſt la force SM, laquelle tirant le corps P ſelon une ligne parallele à ST compoſera avec les forces précédentes une force qui ne ſera plus dirigée de P vers T, & qui s'éloignera d'autant plus de cette détermination, que la proportion de cette troiſiéme force aux premieres ſera plus grande, toutes choſes égales: par cette force le corps P ne décrira plus des aires proportionnelles au temps autour du corps T, & les aires s'éloigneront d'autant plus de cette proportionnalité, que le rapport de la troiſiéme force aux deux premieres ſera plus grand. L'altération que ſouffrira par cette troiſiéme force l'orbe PAB dans la forme elliptique que donne la premiere, ſera augmentée par deux cauſes, parce que cette force n'eſt pas dirigée de P vers T, & parce qu'elle n'eſt pas réciproquement proportionnelle au quarré de la diſtance PT.

Ceci étant bien entendu, il eſt clair, que les aires approcheront d'autant plus d'être proportionnelles au temps, que la troiſiéme force ſera moindre, les autres forces reſtant les mêmes, & que l'orbite PAB approchera d'autant plus de la forme elliptique, que la ſeconde & la troiſiéme force, mais principalement la troisiéme, seront moindres, la premiere demeurant la même.

Si l'attraction accélératrice du corps T vers S est représentée par la ligne SN; & que les attractions accélératrices SN, SM soient égales, elles ne changeront rien à la position des corps P & T entr'eux, parce qu'elles les tireront également, & selon des lignes paralleles; ainsi les mouvemens de ces corps seront les mêmes qu'ils seroient sans ces attractions (Cor. 6. des Loix), & par la même raison, si l'attraction SN étoit moindre que l'attraction SM, elle en détruiroit une partie égale à SN, & ce seroit la partie restante MN qui dérangeroit la forme elliptique de l'orbe, & la proportionnalité des aires & des temps. Si l'attraction SN étoit plus forte que l'attraction SM, l'altération dans la proportionnalité des aires & dans l'orbite seroit causée de même par leur seule différence MN. Par l'attraction SN, la troisiéme force SM est donc toujours réduite à l'attraction MN, la premiere & la seconde attraction restant entiérement les mêmes; & par conséquent les aires & les temps approcheront le plus de la proportionnalité, & l'orbite PAB de la forme elliptique dont on a parlé, lorsque l'attraction MN sera ou nulle ou la plus petite qu'il est possible, ce qui arrivera lorsque les attractions accélératrices des corps P & T vers le corps S approcheront, autant qu'il est possible, de l'égalité; c'est-à-dire, lorsque l'attraction SN ne sera pas nulle, ni moindre que la plus petite de toutes les attractions SM, mais qu'elle sera à peu près moyenne entre la plus grande & la plus petite de toutes les attractions SM, ou, ce qui revient au même, lorsqu'elle n'est ni beaucoup plus forte, ni beaucoup plus foible que l'attraction SK. C. Q. F. D.

Fig. 121.

Cas 2. Que les petits corps P & S tournent autour du plus grand T dans des plans différens, la force LM, qui agit suivant la ligne PT placée dans le plan de l'orbite PAB, aura le même effet qu'auparavant, & elle ne retirera point le corps P du plan de son orbite; mais l'autre force MN qui agit suivant une ligne parallele à ST (& est par conséquent inclinée au plan de l'orbite PAB quand le corps S se trouve hors de la ligne des nœuds) causera, outre l'altération en longitude dont on vient de parler, une altération au mouvement en latitude; cette altération pour une position quelconque des corps P & T, sera comme la force MN qui l'a causée; ainsi elle sera la plus petite quand MN sera la plus petite, c'est-à-dire, comme je l'ai déja fait voir, lorsque l'attraction SN ne sera ni beaucoup plus forte, ni beaucoup plus foible que l'attraction SK. C. Q. F. D.

Fig. 121.

Cor. 1. On tire facilement de là, que si plusieurs petits corps P, S, R, *&c.* font leurs révolutions autour d'un plus grand T, le mouvement du plus intérieur P sera le moins troublé qu'il est possible par les attractions des corps extérieurs, lorsque le plus grand corps T sera attiré & agité pareillement par les autres, en raison de leurs forces accélératrices, & qu'il les attirera réciproquement.

Cor. 2. Dans un systéme composé de trois corps T, P, S, si les attractions accélératrices de deux quelconques sur le troisiéme sont réciproquement entr'elles comme le quarré des distances, les aires que le corps P décrira autour du corps T seront plus accélérées auprès de la conjonction A & de l'opposition B, qu'auprès des quadratures C & D. Car toute force qui agit sur le corps P, sans agir sur le corps T, & qui n'est point dirigée vers PT, accélére ou retarde la description de l'aire selon qu'elle est dirigée en conséquence ou en antécédence; telle est la force NM. Dans le passage du corps P de C en A, elle tire en conséquence; ensuite depuis A jusqu'en D, elle tire en antécédence; puis de D en B, elle tire en conséquence, & enfin en antécédence de B en C.

Cor. 3. Et par le même raisonnement, il est clair que le corps P, toutes choses d'ailleurs égales, se meut plus vîte dans la conjonction & dans l'opposition, que dans les quadratures.

Fig. 121.

Cor. 4. L'orbe du corps P, toutes choses d'ailleurs égales, est plus courbe dans les quadratures que dans la conjonction & l'opposition; car les corps qui ont le plus de vîtesse s'écartent le moins du cours rectiligne. D'ailleurs la force *KL* ou *MN*, dans la conjonction & dans l'opposition, est contraire à la force par laquelle le corps *T* tire le corps *P*; & par conséquent elle diminue cette force, & le corps *P* doit moins se détourner du cours rectiligne lorsqu'il est moins tiré vers *T*. Fig 121.

Cor. 5. De-là le corps *P*, le reste étant égal, s'écartera plus du corps *T* dans les quadratures que dans l'opposition & la conjonction. Toutes ces choses supposent qu'il n'y ait pas de mouvement d'excentricité; car si l'orbite du corps *P* est excentrique, son excentricité (comme on le verra dans le Cor. 9. de cette Prop.) deviendra la plus grande, lorsque les apsides seront dans les syzygies; & delà il peut arriver que le corps *P* arrivant au sommet de l'apside la plus haute, soit plus loin du corps *T* dans les syzygies que dans les quadratures.

Cor. 6. Parce que la force centripete du corps central *T*, laquelle retient le corps *P* dans son orbite, est augmentée dans les quadratures par l'addition de la force *LM*, qu'elle est diminuée dans les syzygies par la soustraction de la force *KL*, & qu'à cause de la grandeur de la force *KL*, la diminution est plus grande que l'augmentation; que d'ailleurs cette force centripete vers *T*, par le Cor. 2. de la Prop. 4. est en raison composée de la raison simple & directe de *PT*, & de la raison renversée du quarré du temps périodique: il est clair, que cette raison composée sera diminuée par l'action de la force *KL*, & par conséquent que le temps périodique (si le rayon *PT* de l'orbe reste le même) sera augmenté dans la raison sousdoublée de celle suivant laquelle cette force centripete sera diminuée; de plus, par le Cor. 6. de la Prop. 4. si le rayon augmente ou diminue, le temps périodique sera plus augmenté ou moins diminué que suivant la proportion sesquiplée de ce rayon.

Si la force du corps central venoit à diminuer, le corps *P* étant de moins en moins attiré s'éloigneroit davantage du centre *T*; & au contraire, si cette force du corps central augmentoit, le corps P s'approcheroit plus du centre. Donc, si l'action du corps éloigné S, par laquelle cette force est diminuée, augmente & diminue tour à tour, le rayon TP augmentera & diminuera aussi successivement; & le temps périodique augmentera & diminuera dans la raison composée de la raison sesquiplée du rayon & de la raison sousdoublée de la proportion suivant laquelle cette force centripete du corps central T augmente & diminue par l'incrément ou le décrément de l'action du corps éloigné S.

Fig. 121.

Cor. 7. De tout ce que nous venons de dire, il suit que l'axe de l'ellipse décrite par le corps P, ou la ligne des apsides, avance & rétrograde tour à tour d'un mouvement angulaire, de façon cependant que le mouvement en avant est le plus fort, & qu'à la fin de chaque révolution de P, la ligne des apsides s'est mue en conséquence.

Car la force qui pousse le corps P vers T dans les quadratures, où la force MN s'évanouit, est composée de la force LM & de la force centripete par laquelle le corps T attire le corps P. La premiere force LM, si on augmente la distance PT, augmentera à peu près dans la même raison que cette distance, & la derniere force décroîtra dans cette raison doublée. Donc la somme de ces forces décroîtra dans une moindre raison que la raison doublée de la distance PT, & par conséquent (Cor. 1. de la Prop. 45.) elle fera rétrograder la plus haute apside.

Mais dans la conjonction & dans l'opposition, la force par laquelle le corps P est porté vers le corps T est la différence entre la force par laquelle le corps T attire le corps P, & la force KL, & cette différence, à cause que la force KL augmente à peu près dans la raison de la distance PT, décroît dans une plus grande raison que la raison doublée de la distance PT; ainsi par le Cor. 1. de la Prop. 45. elle fera avancer la plus haute apside. Dans les lieux placés entre les syzygies & les quadratures, le mouvement de la plus haute apside dépend de ces deux causes, ensorte que selon l'excès de l'efficacité de l'une ou de l'autre, la

plus

haute apside avancera ou rétrogradera. Ainsi comme la force *KL* dans les syzygies est presque double de la force *LM* dans les quadratures, l'effet résultant de ces deux forces dans toute la révolution sera dans le même sens que la force *KL*; c'est-à-dire, que la plus haute apside sera portée en conséquence.

Fig. 121.

Les vérités établies dans ce Corollaire & dans le précédent se comprendront plus aisément en supposant que le systéme des deux corps *T* & *P* soit environné de toutes parts de plusieurs corps *S*,*S*,*S*, *&c.* placés dans l'orbe *ESE*; car par l'action de ces corps, celle du corps *T* sera diminuée dans tous les lieux, & par conséquent elle décroîtra dans une raison plus que doublée de la distance.

Cor. 8. Comme le progrès ou la rétrogradation des apsides dans le passage du corps de l'apside la plus basse à la plus haute, dépend du décrément de la force centripete dans une plus grande ou une moindre raison que la raison doublée de la distance *PT*, & de son incrément semblable dans le retour du corps à l'apside la plus basse; & que par conséquent ce progrès ou cette rétrogradation est dans son *maximum*. lorsque la proportion de la force dans l'apside la plus haute à la force dans l'apside la plus basse s'éloigne le plus de la raison doublée inverse des distances; il est clair que les apsides étant dans leurs syzygies avanceront le plus vîte par la soustraction de la force *KL* ou *NM* — *LM*, & que dans leurs quadratures elles rétrograderont le plus lentement par l'addition de la force *LM*. Or à cause de la longueur du temps pendant lequel la vîtesse de ce progrès & le retardement de cette rétrogradation sont continués, cette inégalité devient extrêmement grande.

Cor. 9. Si un corps, par une force réciproquement proportionnelle au quarré de la distance au centre, se meut autour de ce centre dans une ellipse, & qu'ensuite dans sa descente de l'apside la plus haute à la plus basse, cette force par l'addition perpétuelle d'une nouvelle force soit augmentée dans une raison plus grande que la doublée inverse de la distance, il est clair

Fig. 121.

que ce corps, étant poussé sans cesse vers le centre par l'addition perpétuelle de cette nouvelle force, s'approchera davantage de ce centre, que s'il n'y étoit porté que par la seule force en raison doublée inverse de la distance; ainsi il décrira autour de ce centre un orbe qui sera intérieur à l'orbe elliptique qu'il décrivoit; & dans l'apside la plus basse il s'approchera plus du centre qu'auparavant: donc son orbe, par l'addition de cette nouvelle force, deviendra plus excentrique. Si ensuite, lorsque le corps va de l'apside la plus basse à la plus haute, la force décroissoit par les mêmes degrés par lesquels elle avoit augmenté auparavant, le corps retourneroit à la premiere distance; & par conséquent, si la force décroissoit dans une plus grande raison, le corps étant moins attiré monteroit à une plus grande hauteur, & l'excentricité de son orbe augmenteroit encore davantage. Ainsi, si la raison de l'incrément & du décrément de la force centripete augmente à chaque révolution, l'excentricité augmentera toujours; & au contraire, elle diminuera toujours, si cette même raison décroît.

Dans le systéme des corps *T*, *P*, *S*, lorsque les apsides de l'orbe *PAB* sont dans les quadratures, cette raison de l'incrément & du décrément est la plus petite, & elle devient la plus grande lorsque les apsides sont dans les syzygies. Si les apsides sont dans les quadratures, la raison près des apsides est moindre que la raison doublée des distances, & elle est au contraire plus grande près des syzygies: & c'est de cette plus grande raison que naît le mouvement direct de l'apside la plus haute, comme on l'a déja dit; mais si l'on considere la raison de tout l'incrément ou de tout le décrément dans le progrés entre les apsides, elle est moindre que la raison doublée des distances. La force dans l'apside la plus basse est à la force dans l'apside la plus haute, dans une moindre raison que la raison doublée de la distance de la plus haute apside au foyer de l'ellipse, à la distance de l'apside la plus basse à ce même foyer; & au contraire, lorsque les apsides sont dans les syzygies, la force dans l'apside la plus basse est à la force dans l'apſide la plus haute, dans une plus grande raiſon que la raiſon doublée des diſtances; car les forces LM dans les quadratures étant ajoûtées aux forces du corps T compoſent des forces qui ſont dans une moindre raiſon, & les forces KL dans les ſyzygies étant ôtées des forces du corps T font que les forces reſtantes ſont dans une plus grande raiſon.

Fig. 121.

La raiſon de tout l'incrément & de tout le décrément dans le paſſage entre les apſides eſt donc la moindre dans les quadratures, & la plus grande dans les ſyzygies; & par conſéquent dans le paſſage des apſides des quadratures aux ſyzygies, elle augmentera perpétuellement, & elle augmentera l'excentricité de l'ellipſe; mais dans le paſſage des ſyzygies aux quadratures, elle diminuera continuellement, & l'excentricité diminuera auſſi.

Cor. 10. Pour chercher la loi des dérangemens en latitude, ſuppoſons que le plan de l'orbite EST reſte immobile; il eſt clair que la partie ML des forces MN, ML, en quoi conſiſte la cauſe totale des dérangemens, agiſſant toujours dans le plan de l'orbite PAB, ne trouble jamais le mouvement en latitude; & que la force MN qui agit auſſi dans le plan de cette même orbite, lorſque les nœuds ſont dans les ſyzygies, ne dérange point alors ces mouvemens, au lieu qu'elle les dérange beaucoup lorſqu'ils ſont dans les quadratures; car alors en retirant continuellement le corps P du plan de ſon orbite elle diminue l'inclinaiſon du plan dans le paſſage du corps des quadratures aux ſyzygies, & elle l'augmente au contraire dans ſon paſſage des ſyzygies aux quadratures. D'où il arrive que le corps étant dans les ſyzygies, l'inclinaiſon du plan eſt la plus petite, & qu'elle retourne à ſa premiere grandeur à peu près, lorſque le corps arrive au nœud le plus voiſin. Mais lorſque les nœuds ſeront dans les octans après les quadratures, c'eſt-à-dire entre C & A, D & B, on comprendra, par ce qu'on vient de dire, que dans le paſſage du corps P de l'un ou l'autre nœud au quatre-vingt-dixiéme degré ſuivant, l'inclinaiſon du plan diminuera perpétuellement; & qu'enſuite dans le paſſage

Fig. 121.

par les quarante-cinq degrés prochains jusqu'à la quadrature prochaine, l'inclinaison augmentera, & qu'elle diminuera ensuite de nouveau dans le passage du corps par les quarante-cinq autres degrés jusqu'au nœud prochain. Ainsi cette inclinaison diminuera plus qu'elle n'augmentera, & par conséquent elle est toujours moindre dans le nœud qui suit, que dans celui qui précéde; & par le même raisonnement, l'inclinaison augmentera plus qu'elle ne diminuera, lorsque les nœuds seront dans les autres octans *A* & *D*, *B* & *C*. Elle sera donc la plus grande, lorsque les nœuds seront dans les syzygies. Dans leur passage des syzygies aux quadratures, elle diminuera à chaque fois que le corps parviendra aux nœuds; & elle deviendra la plus petite, lorsque les nœuds seront dans les quadratures, & le corps dans les syzygies; & elle croîtra ensuite par les mêmes degrés par lesquels elle avoit diminué auparavant; & lorsque les nœuds arriveront aux syzygies prochaines, elle reviendra à sa premiere grandeur.

Cor. 11. Comme le corps *P*, lorsque les nœuds sont dans les quadratures, est continuellement retiré du plan de son orbite du côté de *S* dans son passage du nœud *C* par la conjonction *A* au nœud *D*; & du côté opposé dans son passage du nœud *D* par l'opposition *B* au nœud *C*: il est clair que dans son mouvement depuis le nœud *C*, le corps s'éloignera perpétuellement du premier plan *CD* de son orbite, jusqu'à ce qu'il soit parvenu au nœud prochain, qui sera très-éloigné de ce plan *CD*, & qui, au lieu d'être placé en *D* dans l'autre intersection de ce plan avec le plan *EST*, sera placé du côté de *S*, c'est-à-dire en antécédence, & par le même raisonnement, les nœuds continueront à s'éloigner dans le passage du corps de ce nœud au nœud qui suit.

Les nœuds étant dans les quadratures rétrograderont donc toujours; dans les syzygies, où rien ne trouble le mouvement en latitude, ils seront en repos; & dans les lieux intermédiaires où ils participeront de l'une & l'autre condition, ils rétrograderont plus lentement. Ainsi étant toujours stationaires ou rétrogrades, ils feront portés en antécédence à chaque révolution.

Fig. 121.

Cor. 12. Tous les dérangemens dont on a parlé dans ces Corollaires font un peu plus grands dans la conjonction des corps *P* & *S*, que dans leur oppofition, parce que les forces *NM* & *ML* qui les caufent font plus grandes.

Cor. 13. Comme on n'a point fait entrer la grandeur du Corps *S* dans la démonftration des Corollaires précédens, tout ce qu'on vient de dire aura lieu, lorfque la grandeur de ce corps fera telle que le fyftême des deux corps *T* & *P* tournera autour de lui. Et comme le corps *S* étant plus grand, fa force centripete qui caufe les dérangemens du corps *P* eft plus grande ; tous ces dérangemens feront plus grands à des diftances égales dans ce cas, que dans celui, où le corps *S* tourne autour du fyftême des corps *P* & *T*.

Cor. 14. Comme les forces *MN*, *ML*, lorfque le corps *S* eft fort éloigné, font à peu près en raifon compofée de la force *SK*, & de la raifon de *PT* à *ST*, c'eft-à-dire, fi la diftance *PT* & la force abfolue du corps *S* font données, en raifon renverfée de ST^3, & que ces forces *MN*, *ML* font les caufes des dérangemens & de tous les effets dont on a parlé dans les Corollaires précédens : il eft clair que tous ces effets feront à peu près en raifon compofée de la raifon directe de la force abfolue du corps *S* & de la raifon triplée inverfe de la diftance *ST*, lorfqu'on fuppofe que le fyftême des corps *P* & *T* refte le même, tandis qu'on fait varier la diftance *ST*, & la force abfolue du corps *S*. Ainfi, fi le fyftême des corps *T* & *P* tourne autour d'un corps très-éloigné *S*, les forces *MN*, *ML*, & leurs effets feront (Cor. 2. & 6. de la Prop. 4.) réciproquement en raifon doublée du temps périodique, & par-conféquent, fi la grandeur du corps *S* eft proportionnelle à fa force abfolue, ces forces *MN*, *ML*, & leurs effets feront directement comme le cube du diamétre apparent du corps éloigné *S* vû du lieu *T*, & au contraire. Car ces raifons font les mêmes que la raiſon composée dont on a parlé ci-deſſus.

Cor. 15. Si la forme des orbes ESE, BAP, leur inclinaiſon & leurs proportions entre elles reſtent les mêmes pendant que leur grandeur change; & ſi les forces des corps S & T ſont conſtantes ou varient dans une raiſon donnée quelconque; comme alors ces forces (c'eſt-à-dire, la force du corps T, par laquelle le corps P décrit l'orbite PAB; & la force du corps S qui fait écarter le corps P de cette orbite) agiſſent toujours de la même maniére & dans la même proportion, il eſt néceſſaire que tous les effets ſoient ſemblables & proportionnels, & que les temps de ces effets ſoient auſſi proportionnels; c'eſt-à-dire, que toutes les altérations linéaires ſoient comme lès diamétres des orbites, que les angulaires ſoient les mêmes qu'auparavant, & que les temps des dérangemens linéaires ſemblables ou des angulaires égaux ſoient comme les temps périodiques des orbites.

Fig. 121.

Cor. 16. Ainſi, ſi la forme des orbites, & leur inclinaiſon mutuelle reſtant les mêmes, la grandeur des corps, leurs forces, & leurs diſtances changent d'une maniére quelconque & qu'on connoiſſe les dérangemens & les temps des dérangemens dans un cas quelconque, on en pourra conclure à peu près les dérangemens, & les temps des dérangemens pour tout autre cas. Mais on y parviendra d'une maniére plus prompte par la méthode ſuivante.

Les forces LM, MN ſont comme le rayon TP, tout le reſte demeurant le même, & leurs effets périodiques, c'eſt-à-dire, les dérangemens linéaires de P (Cor. 2. du Lemme 10.) ſont comme ces forces, & le quarré du temps périodique de P conjointement. De-là, les erreurs angulaires du corps P, vû du centre T, (c'eſt-à dire, tant le mouvement de ſes nœuds & de ſes apſides, que tous les dérangemens apparens en latitude & en longitude) ſont dans une révolution quelconque du corps P, comme le quarré du temps d'une révolution à peu près, Composant donc cette raison avec celle du Cor. 14. on trouvera que dans un système quelconque de corps *P*, *S*, *T*, dans lequel *P* tourne autour de *T* dont il est proche, & *T* autour de *S* qui est éloigné, les dérangemens angulaires du corps *P* tels qu'ils paroissent du centre *T* seront à chaque révolution de ce corps *P* comme le quarré du temps périodique *P* directement, & le quarré du temps périodique de *T* inversement. Et ainsi le mouvement moyen des apsides sera en raison donnée au mouvement moyen des nœuds, & l'un & l'autre mouvement sera comme le quarré du temps périodique du corps *P* directement, & le quarré du temps périodique du corps *T* inversement. En augmentant ou diminuant l'excentricité & l'inclinaison de l'orbite *PAB*, les mouvemens des apsides & des nœuds ne changeront pas sensiblement, à moins que les changemens de l'excentricité & de l'inclinaison ne fussent fort grands.

Fig. 121.

Cor. 17. Comme la ligne *LM* est tantôt plus grande, & tantôt plus petite que le rayon *PT*, exprimant la force moyenne *LM* par *PT*, elle sera ainsi à la force moyenne *SK* ou *SN* qu'on peut exprimer par la ligne *ST*, comme *PT* est à *ST*. Mais la force moyenne *SN* ou *ST*, par laquelle le corps *T* est retenu dans son orbite autour de *S*, est à la force par laquelle le corps *P* est retenu dans son orbite autour de *T*, en raison composée de la raison du rayon *ST* au rayon *PT*, & de la raison doublée du temps périodique du corps *P* autour du corps *T* au temps périodique du corps *T* autour du corps *S*: donc, la force moyenne *LM* est à la force par laquelle le corps *P* est retenu dans son orbite autour de *T* (ou à celle avec laquelle le même corps *P* pourroit tourner dans le même temps périodique autour d'un point quelconque immobile *T* à la distance *PT*) dans cette même raison doublée des temps périodiques. Donc, les temps périodiques étant donnés, ainsi que la distance *PT*, la force moyenne *LM* sera donnée; & cette force *LM* étant donnée, la force MN le fera auffi à peu près par la proportion des lignes PT, MN.

Fig. 121.

Cor. 18. Imaginons plufieurs corps fluides qui fe meuvent autour d'un même corps T, à des diftances égales & par les mêmes loix par lefquelles le corps P tourne autour du corps T; fuppofons enfuite que de tous ces corps fluides contigus, il fe forme un anneau fluide circulaire & concentrique au corps T; chaque partie de cet anneau fuivant dans tous fes mouvemens la loi du corps P, ces parties approcheront plus près du corps T, & elles fe mouveront plus vîte dans leurs conjonctions & leurs oppofitions avec le corps S que dans leurs quadratures; & les nœuds de cet anneau, ou fes interfections avec le plan de l'orbite du corps S ou T feront en repos dans les fyzygies; mais hors des fyzygies ils fe mouveront en antécédence, & leur mouvement fera plus prompt dans les quadratures, & plus lent dans les autres lieux. L'inclinaifon de l'anneau variera auffi, & fon axe ofcillera à chaque révolution, & après une révolution entiére il retournera à fon premier état, à la différence près que produit la préceffion des nœuds.

Cor. 19. Suppofons à préfent que le globe T formé de matiére folide s'étende jufqu'à cet anneau, qu'il contienne de l'eau dans un canal creufé autour de lui, & qu'il tourne autour de fon axe uniformement d'un mouvement commun périodique. Le mouvement de cette eau étant accéléré & retardé tour à tour, comme dans le cas expofé au corollaire précédent, fera plus prompt dans les fyzygies & plus lent dans les quadratures, que celui de la fuperficie de ce globe, & ainfi il y aura dans ce canal un flux & un reflux tel que celui de la mer.

Cette eau en tournant autour du centre du globe, lequel centre eft en repos, n'acquéreroit aucun mouvement de flux & de reflux fi l'attraction du corps S n'avoit pas lieu; car il arrive la même chofe à un globe qui fe meut uniformement en ligne droite, & qui tourne en même-temps autour de fon centre (Cor. 5. des

des loix) qu'à un globe qui feroit détourné uniformement du mouvement rectiligne (Cor. 6. des loix). Qu'on imagine de plus l'attraction du corps *S*, & alors l'inégalité de cette attraction troublera le mouvement de l'eau, puifque les parties de l'eau les plus voifines feront plus attirées, & les plus éloignées le feront moins. La force *L M* attirera l'eau en en bas dans les quadratures, & la fera defcendre jufqu'aux fyzygies; au contraire, la force *K L* l'attirera en en haut dans les fyzygies, l'empêchera de defcendre davantage & la fera monter jufqu'aux quadratures, à la retardation près qui eft produite dans le flux & le reflux de l'eau, par le frottement du fonds. Fig. 121.

Cor. 20. Si l'on fuppofe à préfent que l'anneau devienne folide, & que le globe foit diminué, le mouvement de flux & de reflux ceffera; mais le mouvement ofcillatoire de l'inclinaifon, & la préceffion des nœuds fubfifteront.

Si on fuppofe enfuite que le globe ait le même axe que l'anneau, qu'il acheve fes révolutions dans le même temps, qu'il le touche, & lui foit attaché par fa fuperficie intérieure; le globe participant du mouvement de l'anneau, ils ofcilleront enfemble, & les nœuds rétrograderont. Car le globe (comme on le dira bientôt) eft également fufceptible de recevoir toutes fortes d'impreffions.

Le plus grand angle d'inclinaifon de l'anneau qui entoure le globe eft dans le lieu où les nœuds font dans les fyzygies.

Donc, dans le progrès des nœuds vers les quadratures, l'anneau eft contraint de diminuer fon inclinaifon, & par cet effort il imprime un mouvement à tout le globe; le globe retient le mouvement imprimé jufqu'à ce que l'anneau le lui ôte par un effort contraire, & qu'il lui en imprime un nouveau dans un fens oppofé: ainfi par cette raifon, le plus grand mouvement de l'inclinaifon décroiffante fe fait dans les quadratures des nœuds, & le plus petit angle d'inclinaifon fe fait dans les octans après les quadratures; le plus grand mouvement de réclinaifon eft dans les ſyzygies, & le plus grand angle dans les octans prochains. Il en eſt de même d'un globe qui n'a point d'anneau, & qui eſt un peu plus élevé, ou un peu plus denſe vers l'équateur que vers les Pôles; car cette protubérance de matiére dans les régions de l'équateur lui tient lieu d'anneau, & quoiqu'en augmentant d'une façon quelconque la force centripete de ce globe, toutes ſes parties ſoient ſuppoſées tendre en en bas, de même que les parties gravitantes de la terre, cependant les phénomènes dont on a parlé dans ce Corollaire & dans le précédent, en ſeront à peine altérés, il y aura ſeulement cette différence, que les lieux des plus grandes & des moindres hauteurs de l'eau ne ſeront pas les mêmes, car l'eau reſtera dans ſon orbite, & y ſera retenue, non par ſa force centrifuge, mais par les parois du lit dans lequel elle coule. De plus, la force LM l'attire plus fortement en en bas dans les quadratures, & la force KL ou $NM - LM$ l'attire plus fortement en en haut dans les ſyzygies. Et ces forces réunies ceſſent d'attirer l'eau en en bas, & commencent à l'attirer en en haut dans les octans avant les ſyzigies, & elles ceſſent de l'attirer en en haut, & commencent à l'attirer en en bas dans les octans après les ſyzygies; & par conſéquent la plus grande élévation de l'eau peut arriver à peu près dans les octans après les ſyzygies, & la plus petite vers les octans après les quadratures; à moins que le mouvement d'aſcenſion & de deſcenſion, imprimé à l'eau par ces forces, ne ſe conſerve un peu plus long temps par la force d'inertie de l'eau, ou ne ſe perde un peu plûtôt par les frottemens de l'eau contre le lit qui la contient.

Fig. 121.

Cor. 21. Par la même raiſon que la matiére redondante placée à l'équateur fait rétrograder les nœuds, & les fait rétrograder d'autant plus qu'elle eſt en plus grande quantité, il s'enſuit, que ſi on la diminue, la rétrogradation diminuera auſſi; que ſi on la détruit entiérement, il n'y aura plus de rétrogradation; & enfin, que ſi on enlevoit du globe plus que cette matiére redondante, qu'on le rendit allongé vers les pôles, ou plus rare vers l'équateur, les nœuds seroient mûs en conséquence.

Cor. 22. Et réciproquement, par le mouvement des nœuds, on pourra connoître la forme du globe. S'il conserve toujours les mêmes pôles, & que le mouvement des nœuds se fasse en antécédence, la matiére du globe sera protubérante vers l'équateur; & si ce mouvement se fait en conséquence, elle sera abaissée dans ses régions. Fig. 121.

Supposez qu'un globe parfaitement sphérique, & d'une matiére homogene, ait premiérement été en repos dans l'espace libre, & qu'ensuite il ait été poussé par une impulsion quelconque oblique à sa superficie, laquelle impulsion lui ait imprimé un mouvement en partie circulaire, & en partie en ligne droite; comme la forme de ce globe est la même par rapport à tous les axes qui passent par son centre, & qu'il n'a pas plus de tendance pour tourner autour de l'un de ces axes qu'autour d'un autre; il est clair, que par sa propre force il ne changera jamais ni son axe, ni l'inclinaison de cet axe. Supposez ensuite que ce globe reçoive une nouvelle impulsion quelconque oblique dans le même endroit de sa superficie dans laquelle il a reçu la premiére; comme cette nouvelle impulsion, soit qu'elle soit imprimée plûtôt ou plus tard, a toujours les mêmes effets; il est clair, que ces deux impulsions successives produiront le même mouvement que si elles avoient été imprimées en même-temps, c'est-à-dire, que l'effet sera le même que si le globe avoit été poussé par une force simple composée de l'une & de l'autre, (Corol. 2. des Loix.) & que par conséquent cet effet sera un mouvement simple autour d'un axe donné d'inclinaison: il en-est de même d'une seconde impulsion imprimée dans un autre lieu quelconque de l'équateur du premier mouvement, ainsi que de la premiére impulsion imprimée dans un lieu quelconque de l'équateur du mouvement que la seconde auroit produit sans la premiére; & enfin que de deux impulsions imprimées dans des lieux quelconques ; les impulſions produiront le même mouvement circulaire que ſi elles avoient été imprimées à la fois dans le lieu de l'interſection des équateurs des mouvemens qu'elles auroient produit ſéparément.

Fig. 121.

Un globe homogene & parfaitement ſphérique ne retient donc pas l'impreſſion diſtincte de pluſieurs mouvemens différens, mais de tous ces mouvemens divers il naît un mouvement unique, & le globe tend toujours, autant qu'il eſt en lui, à tourner d'un mouvement ſimple & uniforme autour d'un ſeul axe incliné d'une maniére invariable, & la force centripete ne peut changer ni l'inclinaiſon de l'axe, ni la vîteſſe de la rotation. Car ſi on ſuppoſe le globe diviſé en deux hémiſphéres par un plan quelconque qui paſſe par ſon centre & par le centre vers lequel la force eſt dirigée, cette force preſſera également l'un & l'autre hémiſphere, & par conſéquent ce globe, quant au mouvement de rotation, n'inclinera vers aucun côté. Suppoſez à préſent qu'on lui ajoute quelque part entre le pôle & l'équateur une matiére nouvelle accumulée en forme de montagne, cette matiére, par l'effort continuel qu'elle fera pour s'éloigner du centre de ſon mouvement, troublera le mouvement du globe, & fera que ſes pôles changeront à tout moment de poſition, & qu'ils décriront perpétuellement des cercles autour d'eux mêmes & du point qui leur eſt oppoſé. Et on ne pourra empêcher l'énormité de cette vagation des pôles, qu'en plaçant cette montagne dans l'un ou l'autre pôle, auquel cas (Cor. 21.) les nœuds de l'équateur avanceront ; ou dans l'équateur, & alors (Cor. 21.) les nœuds rétrograderont ; ou enfin en ajoûtant de l'autre côté de l'axe une matiére nouvelle qui cauſe une libration à cette protubérance, & par ce moyen les nœuds avanceront ou rétrograderont, ſelon que cette protubérance & cette nouvelle matiére ſeront plus proches des pôles ou de l'équateur.

PROPOSITION LXVII. THÉORÉME XXVII.

Le corps extérieur S *décrit des aires plus proportionnelles au temps & un orbe plus approchant de la forme elliptique autour du centre de gravité* O *des corps intérieurs* P *&* T *; qu'autour du corps le plus intérieur* T. Fig. 122.

Car les attractions qui portent le corps *S* vers les corps *P* & *T* composent son attraction absolue, laquelle est dirigée avec plus de force vers le centre commun de gravité *O* de ces corps, que vers le plus grand corps *T*; ainsi elle approche plus d'être réciproquement proportionnelle au quarré de la distance *SO*, qu'au quarré de la distance *S T*.

PROPOSITION LXVIII. THÉORÉME XXVIII.

Les mêmes loix d'attraction étant posées, le corps extérieur S *décrira autour de* O, *commun centre de gravité des corps intérieurs* P *&* T, *des aires qui approcheront plus d'être proportionnelles au temps, & une orbite plus approchante de l'ellipse qui auroit ce même centre dans son foyer, si le corps le plus intérieur & le plus grand est attiré par ces corps de même qu'il les attire, que s'il n'étoit point attiré & qu'il fût en repos, ou qu'il fût plus ou moins agité en vertu d'une attraction plus ou moins forte.* Fig. 122.

Cette Proposition pourroit se démontrer à peu près de la même maniére que la Proposition *66.* mais il faudroit un raisonnement trop long que j'omettrai, il suffira de la traiter de la maniére suivante.

Par la démonstration de la Proposition précédente, il est aisé de voir que le centre vers lequel le corps *S* est attiré par les forces réunies qui agissent sur lui, est près du centre commun de gravité des deux corps *P* & *T*. Si ce centre coïncidoit avec le centre commun de gravité de ces deux corps, & que le centre commun de gravité des trois corps fût en repos; le corps *S* d'une part, & le commun centre de gravité des deux autres corps de l'autre, décriroient autour de ce commun centre de gravité en repos des ellipses éxactes, ce qui est clair par le Corollaire 2. de la Proposition 58. & par ce qui a été démontré dans les Propositions 64. & 65.

Fig. 122. Ce mouvement elliptique est un peu troublé à cause de la distance du centre de ces deux corps au centre vers lequel le troisiéme corps *S* est attiré. Si de plus le centre commun de ces trois corps se meut, cette perturbation sera encore plus grande, & par conséquent elle sera la moindre, lorsque le centre commun de gravité de ces trois corps sera en repos; c'est-à-dire, lorsque le corps le plus grand & le plus intérieur *T* sera attiré selon la même loi que les autres; & elle deviendra toujours de plus grande en plus grande, lorsque le commun centre de gravité de ces trois corps, commencera à se mouvoir par la diminution du mouvement du corps *T*, & que ce centre sera de plus en plus agité.

Cor. Il est aisé de tirer de là, que si plusieurs petits corps font leurs révolutions autour d'un plus grand, leurs orbites approcheront plus d'être des ellipses, & les aires qu'ils décriront seront plus égales, si tous ces corps s'attirent & s'agittent mutuellement par des forces accélératrices qui soient directement comme leurs forces absolues, & inversement comme les quarrés de leurs distances, & que le foyer d'une orbite quelconque soit placé dans le centre commun de gravité des corps intérieurs, (c'est-à-dire, le foyer de la premiére orbite intérieure, dans le centre de gravité du grand corps qui est le plus intérieur de tous; le foyer de la seconde orbite, dans le centre commun de gravité des deux corps les plus intérieurs, & celui de la troisiéme orbite, dans le centre commun de gravité des trois corps les plus intérieurs; & ainsi de suite,) que si le corps intérieur étoit en repos, & qu'il fût le foyer commun de toutes ces orbites.

PROPOSITION LXIX. THÉORÊME XXIX.

Dans un syſtême de pluſieurs corps A, B, C, D, *&c. Si un corps* A *attire tous les autres* B, C, D, *&c. par des forces accélératrices qui ſoient réciproquemment comme les quarrés des diſtances au corps attirant ; & qu'un autre* B *attire auſſi tous les autres* A, C, D, *&c. par des forces qui ſoient réciproquement comme les quarrés des diſtances au corps attirant : les forces abſolues des corps attirans* A *&* B *l'un ſur l'autre ſeront dans la même raiſon que ces corps.*

Car à des diſtances égales les attractions accélératrices de tous les corps *B*, *C*, *D*, vers le corps *A* ſont égales entr'elles, par l'hypotheſe, & de même, les attractions accélératrices de tous ces corps vers *B* ſont égales entr'elles à égales diſtances. Donc la force attractive abſolue du corps *A* eſt à la force attractive abſolue du corps *B*, comme l'attraction accélératrice de tous les corps vers *A* eſt à l'attraction accélératrice de tous les corps vers *B* à des diſtances égales ; & l'attraction accélératrice du corps *B* vers *A* eſt dans la même raiſon à l'attraction accélératrice du corps *A* vers *B*. Mais l'attraction accélératrice du corps *B* vers *A* eſt à l'attraction accélératrice du corps *A* vers *B*, comme la maſſe du corps *A* à la maſſe du corps *B* ; parce que les forces motrices, qui, par les définitions 2, 7 & 8, ſont comme les forces accélératrices & les corps attirés conjointement, ſont ici égales entr'elles, par la troiſiéme loi du mouvement. Donc la force attractive abſolue du corps *A* eſt à la force attractive abſolue du corps *B*, comme la maſſe du corps *A* eſt à la maſſe du corps *B*.

Cor. 1. Donc ſi des corps *A*, *B*, *C*, *D*, &c. de ce ſyſtême, chacun, étant conſidéré à part, attire tous les autres par des forces accélératrices qui ſoient réciproquement comme les quarrés des diſtances au corps attirant ; les forces abſolues de tous ces corps ſeront entr'elles comme ces corps eux-mêmes.

Cor. 2. Et par le même raiſonnement on prouvera, que ſi chaque corps *A*, *B*, *C*, *D*, &c. de ce ſyſtême, étant conſidéré à part, attire tous les autres par des forces accélératrices, qui ſoient directement ou réciproquement en raiſon d'une puiſſance quelconque des diſtances au corps attirant, ou qu'elles dépendent d'une loi quelconque des diſtances à l'un des corps attirans; les forces abſolues de tous ces corps, ſeront comme ces corps.

Cor. 3. Dans un ſyſtême de corps dont les forces décroiſſent en raiſon doublée des diſtances, s'il arrive que les plus petits tournent autour du plus grand dans des ellipſes éxactes à très-peu de choſes près, que leur foyer commun ſoit à peu près dans le centre de ce plus grand corps, & que ces petits corps décrivent autour du plus grand des aires preſque proportionnelles au temps; les forces abſolues de ces corps ſeront entr'elles éxactement ou à peu près comme ces corps; & au contraire. Ce qui eſt clair par le Corol. de la Prop. 68. & le Corol. 1. de cette Propoſition.

SCHOLIE.

De ces Propoſitions on doit paſſer tout de ſuite à l'analogie qui eſt entre les forces centripetes, & les corps centraux vers leſquels ces forces ſont dirigées. Car il eſt vraiſemblable que les forces qui ſont dirigées vers des corps dépendent de leur nature & de leur quantité, ainſi qu'il arrive dans l'aiman. Dans tous les cas de cette eſpéce, on trouvera les attractions des corps, en aſſignant des forces à chacune de leurs parties, & en ſommant toutes ces forces.

Je me ſers ici du mot d'*attraction* pour exprimer d'une maniére générale l'effort que font les corps pour s'approcher les uns des autres, ſoit que cet effort ſoit l'effet de l'action des corps, qui ſe cherchent mutuellement, ou qui s'agitent l'un l'autre par des émanations, ſoit qu'il ſoit produit par l'action de l'Ether, de l'air, ou de tel autre milieu qu'on voudra, corporel ou incorporel, qui pouſſe l'un vers l'autre d'une maniére quelconque les corps qui y nâgent.

J'emploie

J'emploie le mot d'*impulsion* dans le même sens général, ne recherchant point dans ce Traité l'espéce de ces forces ni leurs qualités physiques, mais leurs quantités & leurs proportions mathématiques, comme je l'ai déja dit dans les définitions. C'est par les Mathématiques qu'on doit chercher les quantités de ces forces & leurs proportions qui suivent des conditions quelconques que l'on a posées : ensuite lorsqu'on descend à la Physique, on doit comparer ces proportions avec les Phénoménes ; afin de connoître quelles sont les loix des forces qui appartiennent à chaque genre de corps attirans, c'est alors qu'on peut examiner avec plus de certitude ces forces, leurs causes, & leurs explications physiques. Voyons maintenant quelles sont les forces avec lesquelles des corps sphériques, formés de parties qui attirent de la manière qu'on vient de dire, doivent agir l'un sur l'autre, & quels sont les mouvemens qui en doivent résulter.

DOUZIÉME SECTION.

Des forces attractives des corps sphériques.

PROPOSITION LXX. THÉORÊME XXX.

Un corpuscule placé dans l'intérieur d'une surface sphérique dont toutes les parties attirent en raison renversée du quarré des distances, n'éprouve aucune attraction de cette superficie.

Soient $HIKL$ la surface sphérique, & P le corpuscule placé au dedans. En menant par P deux droites quelconques IPL, HPK, qui coupent dans un des cercles de cette sphere deux arcs infiniment petits HI, KL, il est clair (Corol. 3. Lem. VII.) que ces arcs seront proportionnels aux droites PH, PL, & Fig. 123.

que les petites parties de la surface de la sphere, qui seroient terminées de tous les côtés par des lignes telles que *HK* & *IL* menées par *P*, seroient comme les quarrés des mêmes droites *PH*, *PL*. Or delà il suit que les attractions de ces petites parties de la surface sphérique sur le corpuscule *P* sont égales. Car ces attractions doivent être en raison directe de ces particules, & en raison inverse du quarré des distances, & ces deux raisons composées ensemble en font une d'égalité.

Fig. 123.

Par le même raisonnement on verroit, que les attractions de toutes les parties de la sphere sur le même corpuscule *P* sont toujours égales aux attractions des parties opposées, & que par conséquent elles se détruisent réciproquement; c'est-à-dire, que ce corpuscule ne souffre aucune attraction de la surface sphérique. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION LXXI. THÉORÊME XXXI.

La même loi d'attraction étant posée, un corpuscule, placé au dehors de la surface sphérique, est attiré par cette surface en raison renversée du quarré de la distance de ce corpuscule au centre.

Fig. 124. & 125.

Soient *AHKB*, *ahkb* deux superficies sphériques égales; *S*, *s* leurs centres; *P*, *p* deux corpuscules placés hors de ces spheres, chacun à une distance quelconque du centre. Soient de plus *PASB*, *pasb* des droites tirées des corpuscules aux centres *S* & *s*; *PHK* & *PIL*, *phk* & *pil* d'autres droites tirées par les mêmes corpuscules en telle sorte que les arcs *HK* & *IL*, *hk* & *il* soient respectivement égaux; *SFD* & *SE*, *sfd* & *se* les perpendiculaires abaissées des centres *S* & *s* sur les cordes *HK* & *IL*, *hk* & *il*; *IR* & *IQ*, *ir* & *iq* les perpendiculaires abaissées de *I* sur *PK* & sur *PB*, & de *i* sur *pk* & sur *pb*. Enfin soit supposé que les angles *DPE*, *dpe* s'évanouissent, ce qui, à cause de l'égalité de *DS* & de *ds*, de *ES* & de *es*, permet de regarder les lignes *PE* & *PF*, *pe* & *pf*, *DF* & *df* comme égales.

Cela posé, on aura $PI : PF :: RI : DF$ & $pf : pi ::$ df ou $DF : ri$, ce qui donnera $PI \times pf : PF \times pi :: RI :$ ri ou (Cor. 3. Lem. VII.) $:: IH : ih$. De plus, $PI : PS ::$ $IQ : SE$ & $ps : pi :: se$ ou $SE : iq$ & par conséquent, $PI \times ps : PS \times pi :: IQ : iq$. Delà on tire $PI^2 \times pf \times ps :$ $pi^2 \times PF \times PS :: IQ \times HI : ih \times iq$. C'est-à-dire, que la petite surface sphérique produite par la révolution de HI autour de PS est à la petite surface sphérique produite par la révolution de hi autour de ps, comme $PI^2 \times pf \times ps$ à $pi^2 \times PF \times PS$. Mais les forces avec lesquelles ces petites surfaces tirent vers elles les corpuscules P & p sont (par hypothese) comme ces surfaces directement, & comme les quarrés des distances PI & pi inversement, donc ces forces sont comme $pf \times ps$ à $PF \times PS$. Fig. 124. & 125.

En décomposant présentement ces forces, par le Corol. 2. des loix, pour avoir les parties qui en résultent dans le sens des diamétres PS, ps il est clair, que les forces résultantes dans cette direction seront aux forces totales comme PS à PF & comme ps à pf. Donc la force suivant PS de la petite surface produite par HI sera à la force suivant ps de la petite surface produite par hi, comme $pf \times ps \times \frac{PF}{PS}$ à $PF \times PS \times \frac{pf}{ps}$, c'est-à-dire, en raison renversée des quarrés des distances PS, ps. Or on trouveroit la même chose pour toutes les autres petites surfaces dont les deux superficies sphériques sont composées. Donc les attractions entiéres de ces deux superficies sur les corpuscules P & p sont entr'elles en raison renversée des quarrés des distances de ces corpuscules aux centres. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION LXXII. THÉORÉME XXXII.

Si toutes les parties d'une sphere homogene attirent en raison renversée du quarré des distances ; & qu'on suppose donnés, tant la densité de cette sphere, que le rapport du rayon de cette sphere *à la diſtance du corpuſcule qu'elle attire, l'attraction éxercée ſur ce corpuſcule ſera proportionnelle au rayon de la ſphere.*

Qu'on ſe repréſente deux ſpheres & deux corpuſcules placés à des diſtances de leurs centres reſpectivement proportionnelles aux rayons de ces ſpheres. Qu'on imagine enſuite ces deux ſpheres compoſées d'une infinité de particules reſpectivement ſemblables & ſemblablement poſées par rapport aux corpuſcules. Il eſt clair, que les attractions que chacun de ces corpuſcules ſouffrira de la part de toutes les particules de la ſphere attirante, ſeront en raiſon compoſée de toutes ces particules directement, & de tous les quarrés de leur diſtance inverſement. Mais toutes ces particules étant ſemblables & ſemblablement placées, elles ſeront comme les cubes des rayons, & les quarrés des diſtances des corpuſcules à chaque particule ſont comme les quarrés de ces mêmes rayons; donc toutes les attractions de ces particules ſeront ſeulement comme les rayons; donc les attractions de ces deux ſpheres ſeront dans cette même raiſon. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Si deux corpuſcules, ſe mouvant autour de deux ſpheres de même matiére attractive, décrivent chacun un orbite circulaire, & que les rayons de ces orbites ſoient proportionnels aux rayons des ſpheres attirantes, les temps périodiques ſeront égaux.

Cor. 2. Et réciproquement, ſi les temps périodiques ſont égaux, les diſtances des corpuſcules ſeront proportionnelles aux rayons des ſpheres. Ces deux Corollaires ſont évidens par le Corol. 3. de la Prop. 4.

Cor. 3. Deux ſolides quelconques ſemblables & homogenes, étant compoſés de parties qui attirent en raiſon renverſée des quarrés des diſtances, éxercent ſur deux corpuſcules, placés ſemblablement par rapport à eux, des forces qui ſont dans la raiſon directe de leurs dimenſions ſemblables.

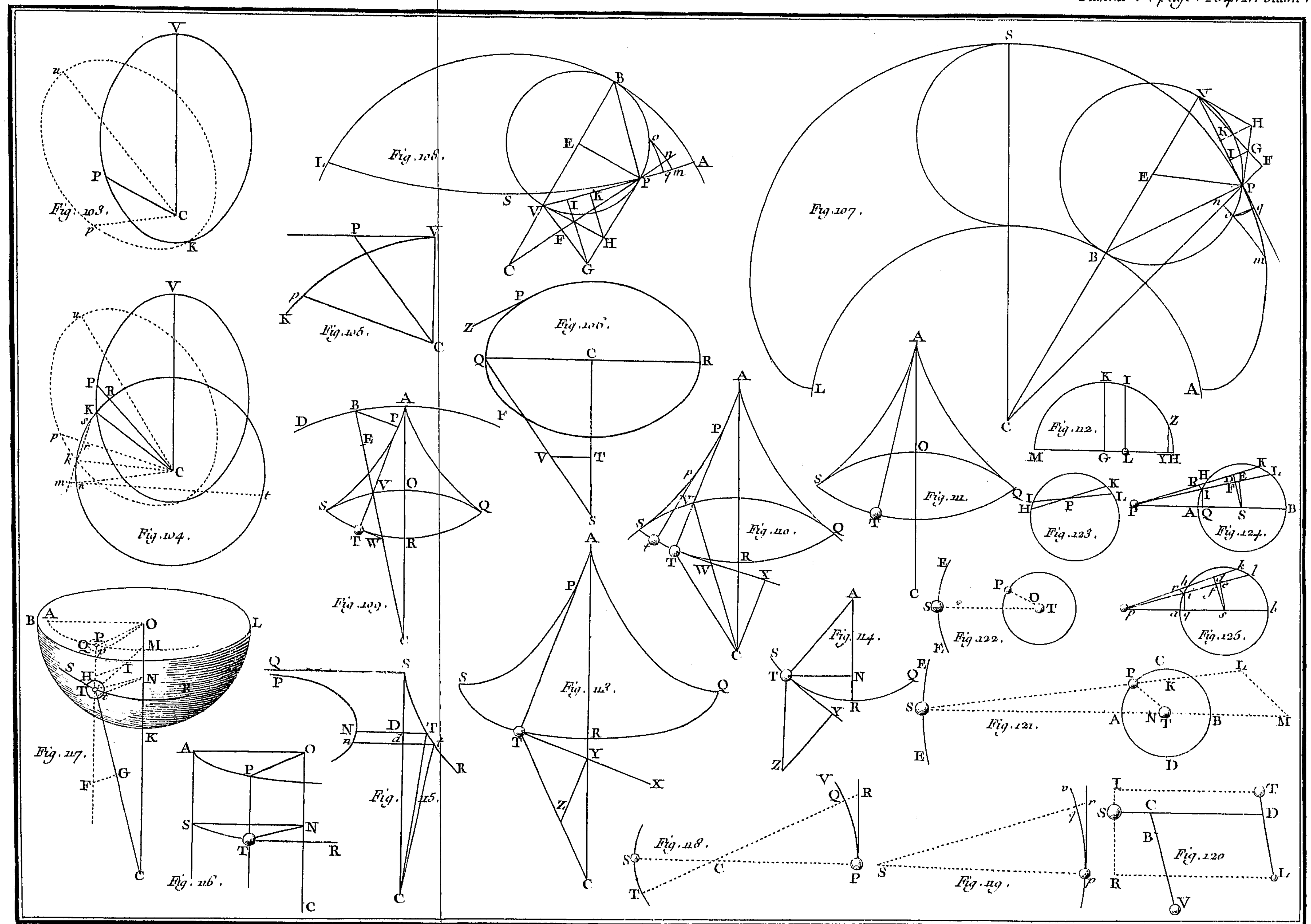


Fig. 103.
Fig. 104.
Fig. 105.
Fig. 106.
Fig. 107.
Fig. 108.
Fig. 109.
Fig. 110.
Fig. 111.
Fig. 112.
Fig. 113.
Fig. 114.
Fig. 115.
Fig. 116.
Fig. 117.
Fig. 118.
Fig. 119.
Fig. 120.
Fig. 121.
Fig. 122.
Fig. 123.
Fig. 124.
Fig. 125.

PROPOSITION LXXIII. THÉORÉME XXXIII.

Un corpuſcule, placé dans l'intérieur d'une ſphere dont les parties attirent en raiſon renverſée du quarré des diſtances, tend vers le centre de cette ſphere avec une force proportionnelle à la ſimple diſtance.

Que $ACBD$ ſoit la ſphere attirante, P le corpuſcule placé Fig. 126. dans ſon intérieur, S le centre de cette ſphere, & $PEQF$ la ſphere décrite du même centre S & du rayon PS. Il eſt clair, par la Propoſition 70, que toutes les ſurfaces ſphériques compriſes entre $ACBD$, & $EPFQ$ n'éxercent aucune attraction ſur le corpuſcule P, & que par conſéquent la ſeule ſphere intérieure $PEQF$ agit ſnr ce corpuſcule. Mais l'attraction de cette ſphere eſt par la Propoſition 72. comme la diſtance PS. Donc, &c. *C. Q. F. D.*

SCHOLIE.

Les ſuperficies que je ſuppoſe ici former un ſolide par leur aſſemblage ne ſont pas des ſuperficies purement mathématiques, ce ſont des orbes dont l'épaiſſeur eſt ſi petite, qu'on la peut regarder comme nullé, c'eſt-à-dire, les orbes évanouiſſantes qui compoſent une ſphere lorſque leur nombre & leur ténuité ſont augmentés à l'infini. J'entends de même par les points qui compoſent les lignes, les ſuperficies, & les ſolides, des particules de ces quantités dont l'étendue eſt ſi petite, qu'on peut les négliger.

PROPOSITION LXXIV. THÉORÉME XXXIV.

Les mêmes choſes que dans les Propoſitions précédentes étant poſées, un corpuſcule placé hors d'une ſphere, eſt attiré vers le centre de cette ſphere par une force réciproquement proportionnelle au quarré de ſa diſtance à ce centre.

Car ſi on ſuppoſe que cette ſphere ſoit partagée en une infinité de ſurfaces ſphériques qui aient le même centre qu'elle, toutes ces ſurfaces éxerceront ſur le corpuſcule extérieur une attraction qui sera, suivant la Prop. 71. dans la raison renversée du quarré de la distance du corpuscule au centre. Ajoutant donc toutes ces attractions, la somme totale ou l'attraction de la sphere sera dans la même raison. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Delà il suit, qu'à des distances égales, les attractions des spheres de même densité seront comme ces spheres. Car, par la Prop. 72. deux spheres éxercent à des distances proportionnelles à leurs rayons des forces aussi proportionnelles à ces rayons. Si on diminue ensuite la plus grande de ces deux distances dans la raison qu'ont entr'eux les rayons des deux spheres, cette distance deviendra par ce moyen égale à l'autre, & l'attraction sera à ce qu'elle étoit d'abord dans la raison du quarré du rayon de la plus grande sphere au quarré du rayon de la plus petite. Mais cette attraction étoit déja à l'attraction vers l'autre sphere dans la raison simple des mêmes rayons; donc elle sera alors comme les cubes de ces rayons, c'est-à-dire, comme les spheres.

Cor. 2. A des distances quelconques, les attractions seront en raison directe des spheres, & inverse des quarrés des distances.

Cor. 3. Si un corpuscule est placé hors d'une sphere dont toutes les parties sont supposées avoir des forces attractives, & qu'on ait remarqué que l'attraction de ce corpuscule vers la sphere entiere soit en raison inverse du quarré des distances au centre, les attractions de toutes les particules de la sphere seront aussi en raison renversée des quarrés de leurs distances au corpuscule attiré.

PROPOSITION LXXV. THÉORÉME XXXV.

Si à tous les points d'une sphere donnée tendent des forces centripetes égales, qui décroissent en raison doublée des distances à ces points, cette sphere éxercera sur une autre sphere quelconque composée de parties homogenes entr'elles une attraction qui sera en raison renversée du quarré des distances de leurs centres.

Car l'attraction d'une particule quelconque de la sphere attirée eſt en raiſon renverſée du quarré de ſa diſtance au centre de la ſphere attirante par la Prop. 74. & elle eſt par conſéquent la même qu'elle ſeroit ſi toute la ſphere attirante étoit réduite à un corpuſcule placé dans ſon centre. Mais l'action de ce corpuſcule auquel on ſuppoſe réduite la ſphere attirante, doit être la même ſur la ſphere attirée qu'elle ſeroit, ſi au lieu d'agir ſur cette ſphere attirée, il éprouvoit au contraire vers les parties de cette ſphere des forces égales à celles avec leſquelles il les attire ; & la ſomme des forces avec leſquelles il ſeroit attiré par cette ſphere, ſeroit, par la Propoſition 74. en raiſon inverſe du quarré de la diſtance au centre. Donc l'attraction du corpuſcule, ou, ce qui revient au même, celle de la ſphere attirante ſur la ſphere attirée, eſt réciproquement proportionnelle au quarré de la diſtance des centres de ces ſpheres.

Cor. 1. Les attractions des ſpheres vers d'autres ſpheres homogenes ſont comme les ſpheres attirantes directement, & comme les quarrés des diſtances des centres inverſement.

Cor. 2. Il en eſt de même lorſque la ſphere attirée attire auſſi. Car chaque point de cette ſphere attire les points de l'autre avec la même force avec laquelle il en eſt réciproquement attiré. Si donc dans toute attraction le point attirant éprouve la même action que le point attiré, il en naîtra une action mutuelle double, proportions gardées.

Cor. 3. Tout ce qui a été dit ci-deſſus du mouvement des corps dans des ſections coniques autour des foyers a lieu, ſi on place dans ces foyers les centres des ſpheres attirantes.

Cor. 4. Et tout ce qui concerne le mouvement dans des ſections autour du centre de ces courbes peut s'appliquer aux mouvemens qui ſe font dans l'intérieur d'une ſphere.

PROPOSITION LXXVI. THÉORÉME XXXVI.

Deux ſpheres dont toutes les parties agiſſent en raiſon renverſée du quarré des diſtances, étant compoſées l'une & l'autre d'orbes concen-

Du Mouvement des Corps.

Fig. 127.

triques dont les densités du centre à la circonférence varient suivant une loi quelconque, s'attirent réciproquement avec des forces qui sont en raison renversée du quarré des distances de leurs centres.

Soient *AB*, *CD*, *EF*, &c. tant de spheres concentriques homogenes qu'on voudra, dont les intérieures étant ajoutées aux extérieures, ou en étant retranchées forment une sphere totale *AB* composée de couches plus ou moins denses vers le centre qu'à la circonférence. Soient ensuite *GH*, *IK*, *LM*, &c. d'autres spheres homogenes concentriques dont l'addition ou la soustraction forment pareillement une sphere *GH* hétérogene du centre à la circonférence. Par la Prop. 75. une quelconque des spheres homogénes *AB* ou *CD*, &c. & une quelconque des spheres homogénes *GH*, *IK*, &c. s'attireront réciproquement avec une force qui est en raison renversée du quarré de *SP*. Donc les attractions réciproques des spheres totales hétérogenes *AB*, *GH* qui sont produites par les sommes ou par les différences des attractions des spheres homogenes, seront aussi en raison renversée du quarré de *SP*.

Qu'on suppose présentement que le nombre de toutes ces spheres homogenes, dont l'addition ou la soustraction forment les spheres hétérogenes, soit augmenté jusqu'à l'infini, on pourra donner à ces spheres hétérogenes une loi quelconque de densité du centre à la circonférence, & leur attraction réciproque demeurera toujours en raison renversée du quarré de la distance *SP*. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Si on a plusieurs spheres composées ainsi d'orbes de différentes densités, l'attraction accélératrice de l'une quelconque de ces spheres vers une autre quelconque, à même distance, sera comme la sphere attirante.

Cor. 2. Et à distance inégale, elle sera comme cette sphere divisée par le quarré de la distance.

Cor. 3. Mais l'attraction motrice, à distance égale, sera comme le produit de la sphere attirée par la sphere attirante.

Cor. 4.

Cor. 4. Et à diſtance inégale, comme ce produit diviſé par le quarré de la diſtance.

Cor. 5. Il en eſt de même lorſque l'attraction vient de la force attractive mutuelle de chaque ſphere l'une vers l'autre, car de ces deux attractions il s'en forme une ſeule égale à leur ſomme.

Cor. 6. Lorſque l'on comparera les révolutions que des ſpheres entierement ſemblables, formées, ſuivant la même loi, ainſi d'orbes de différentes denſités, font les unes autour des autres, on trouvera que ſi les diſtances de celles qui tournent à celles qui ſont fixes, ſont proportionnelles aux rayons de ces ſpheres fixes, les temps périodiques ſeront égaux.

Cor. 7. Et réciproquement ſi les temps périodiques ſont égaux, les diſtances ſeront proportionnelles à ces rayons.

Cor. 8. Tout ce qu'on a démontré ci-deſſus du mouvement des corps autour des foyers des ſections coniques a lieu, lorſque la ſphere attirante, formée ainſi d'orbes de différentes denſités, eſt placée au foyer.

Cor. 9. Et il en eſt de même lorſque le corps qui décrit la trajectoire eſt auſſi une ſphere attirante formée d'orbes de différentes denſités.

PROPOSITION LXXVII. THÉORÉME XXXVII.

Si toutes les parties des ſpheres attirent avec des forces qui ſoient comme les diſtances, la force compoſée par laquelle deux ſphéres s'attirent mutuellement eſt comme la diſtance qui ſépare les centres de ces ſpheres.

Cas. 1. Soient $AEBF$ une ſphere, S ſon centre, P un corpuſcule qu'elle attire, $PASB$ l'axe de la ſphere paſſant par le centre du corpuſcule, EF, ef deux ſections de la ſphere faites par des plans qui coupent l'axe perpendiculairement à des diſtances égales SG, sg du centre; ſoit de plus H un point quelconque du plan EF. Il eſt clair, que la force centripete du point H ſur le corpuſcule P ſuivant la ligne PH, ſera comme Fig. 128.

Fig. 128.

la diſtance PH; & que par le Cor. 2. des loix, cette force décompoſée ſuivant PG, c'eſt-à dire, la force vers le centre S, ſera comme la droite PG. Donc la force de tous les points du plan EF, c'eſt-à-dire, la force totale de ce plan, par laquelle le corpuſcule P eſt attiré vers le centre S, eſt comme la diſtance PG multipliée par le nombre des points, c'eſt-à-dire, comme le ſolide formé par ce même plan EF, & cette droite PG. Par la même raiſon, la force du plan ef par laquelle le corpuſcule P eſt attiré vers le centre S ſera comme ce plan multiplié par ſa diſtance Pg, ou comme le plan EF égal au plan ef multiplié par cette même diſtance Pg, d'où il ſuit, que la ſomme des forces de l'un & de l'autre plan ſera comme le plan EF multiplié par la ſomme des diſtances $PG + Pg$, c'eſt-à-dire, comme ce plan multiplié par le double de la diſtance PS qui eſt entre le centre & le corpuſcule, ou, ce qui revient au même, comme la ſomme des plans égaux $EF + ef$ multipliée par cette même diſtance; & comme il en ſeroit de même des forces de tous les plans qu'on peut imaginer de chaque côté du centre de la ſphere, & également diſtans de ce centre, la ſomme de toutes ces forces, c'eſt-à-dire, celle de la ſphere entiere ſur le corpuſcule, ſera comme cette ſphere multipliée par la diſtance SP. *C. Q. F. D.*

Cas. 2. Si on ſuppoſe que le corpuſcule P attire la ſphere $AEBF$, on prouvera par le même raiſonnement qu'il exercera ſur cette ſphere une force proportionnelle à la diſtance PS. *C. Q. F. D.*

Cas. 3. Qu'on imagine préſentement en P une autre ſphere compoſée d'une infinité de corpuſcules P. De ce que la force, par laquelle un corpuſcule unique eſt attiré, eſt en raiſon compoſée de la ſolidité de la premiere ſphere, & de la diſtance du corpuſcule à ſon centre, & de ce que cette force eſt par conſéquent la même que ſi elle émanoit toute d'un corpuſcule unique placé au centre de la premiere ſphere : il ſuit que la force entiére par laquelle ſont attirés tous les corpuſcules de la ſeconde ſphere, c'eſt-à-dire, la force par laquelle la ſeconde ſphere entiere eſt attirée, ſera la même qu'elle ſeroit, ſi toute cette ſphere étoit attirée par un corpuſcule unique placé au centre de la premiere ſphere : & par conſéquent, par le cas 2, cette force ſera proportionnelle à la diſtance entre les centres des deux ſpheres. *C. Q. F. D.* Fig. 128.

Cas. 4. Et ſi on ſuppoſe que ces ſpheres s'attirent mutuellement, leurs forces réunies conſerveront la même proportion. *C. Q. F. D.*

Cas. 5. Que le corpuſcule p ſoit placé maintenant au-dedans de la ſphere $AEBF$, parce que la force du plan ef ſur ce corpuſcule eſt comme le ſolide formé par ce plan & la diſtance pg ; & que la force contraire du plan EF eſt comme le ſolide formé par ce même plan & la diſtance pG ; la force compoſée des deux ſera comme la différence de ces ſolides, c'eſt-à-dire, comme la ſomme des plans égaux multipliée par la moitié de la différence des diſtances, c'eſt-à-dire, comme cette ſomme multipliée par la diſtance pS du corpuſcule au centre de la ſphere. Or, comme il en ſeroit de même de l'attraction de tous les plans EF, ef qu'on peut imaginer dans la ſphere entiere, c'eſt-à-dire, de l'attraction de toute la ſphere, cette attraction doit donc être le produit de la ſomme de tous ces plans, ou de la ſphere totale par la diſtance pS. *C. Q. F. D.* Fig. 129.

Cas 6. Et ſi on s'imagine une nouvelle ſphere compoſée d'un nombre innombrable de corpuſcules p, & placée au dedans de la premiere ſphere $AEBF$; on prouvera, comme ci-deſſus, que l'attraction ſera comme la diſtance pS des centres, ſoit que l'on conſidere l'attraction ſeule d'une ſphere ſur l'autre, ſoit que l'on conſidere l'attraction mutuelle des deux ſpheres l'une ſur l'autre. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION LXXVIII. THÉORÊME XXXVIII.

Deux spheres, composées chacune d'orbes dont les densités varient du centre à la circonférence suivant une loi quelconque, étant formées l'une & l'autre d'une matière dont toutes les parties attirent en raison directe des distances, exercent l'une sur l'autre des forces proportionnelles à la distance de leurs centres.

Cette Proposition suit de la précédente de la même maniere que la Proposition 76. suit de la Proposition 75.

Cor. Tout ce qui a été démontré ci-dessus dans les Propositions 10 & 64 du mouvement des corps autour des centres des sections coniques a lieu, lorsque les corps attirans & les corps attirés ont les conditions qu'on suppose dans cette Proposition.

SCHOLIE.

J'ai expliqué les deux principaux cas des attractions, celui où les forces centripetes décroissent en raison doublée des distances, & celui où elles croissent dans la raison simple des distances. Dans l'un & l'autre cas, les révolutions des corps se font dans des sections coniques, & les forces centripetes des particules qui composent les corps sphériques croissent ou décroissent en s'éloignant du centre, selon la même loi que la force centripete des corps entiers, ce qui est digne de remarque.

Les autres cas qui donnent des conclusions moins élégantes seroient trop longs à parcourir chacun en particulier : je vais les donner tous par une méthode générale.

LEMME XXIX.

Fig. 130. *Si on décrit du centre* S *un cercle quelconque* AEB, *& du centre* P *deux cercles* EF, cf, *qui coupent, tant le premier en* E *& en* e, *que la ligne* PS *en* F *& en* f, *qu'on abaisse de plus* ED, ed *perpendiculaires sur* PS ; *je dis, que lorsque la distance des arcs* EF, cf *diminue à l'infini, la derniére raison de la ligne éva-*

nouissante Dd *à la ligne évanouissante* Ff *est la même que celle de la ligne* PE *à la ligne* PS.

Car en prolongeant la droite *Ee* qui coïncide avec l'arc évanouissant *Ee* jusqu'à ce qu'elle rencontre la droite *PS* en *T*; & abaissant du point *S* la perpendiculaire *SG* sur *PE*, on aura (à cause des triangles semblables *DTE*, *dTe*, *DES*;) *Dd* : *Ee* :: *DT* : *TE*, ou :: *DE* : *ES*; & en supposant que *q* soit la rencontre de *Pe* & de l'arc *EF*, les triangles *Eeq*, *ESG* seront semblables par le Lemme 8. & par le Cor. 3. du Lemme 7. ils donneront *Ee* : *eq* ou *Ff* :: *ES* : *SG*; & *Dd* : *Ff* :: *DE* : *SG*, c'est-à-dire, (à cause des triangles semblables *PDE*, *PGS*) :: *PE* : *PS*. C. Q. F. D. Fig. 130.

PROPOSITION LXXIX. THÉORÉME XXXIX.

Si la superficie EF, fe, *dont la largeur est supposée évanouissante, tourne autour de l'axe* PS, *& que chacune des particules du solide produit par cette révolution attire le corpuscule* P *avec une force égale, la force entière avec laquelle ce solide attirera le corpuscule* P *vers* S *sera en raison composée du solide* $DE^2 \times Ff$, *& de la force avec laquelle une particule donnée & placée dans un lieu* Ff *attireroit ce même corpuscule.* Fig. 131.

N'éxaminant d'abord que la force de la superficie sphérique *FE*, produite par la circonvolution de l'arc *FE*, on verra, par ce qu'a enseigné Archimede dans son Traité *de la Sphere & du Cylindre*, que la partie annulaire de cette superficie, produite par la révolution du petit arc *Er* dont l'extrémité *r* est la rencontre de *ed* & de *EF*, doit être proportionnelle à *Dd*, le rayon *PE* demeurant constant; & la force de cette superficie, éxercée suivant les lignes *PE*, devant être comme cette superficie annulaire, sera aussi comme *Dd*, ou, ce qui est la même chose, comme le rectangle sous *PE* & *Dd*: mais cette même force éxercée suivant la ligne *PS* qui tend au centre *S* sera moindre dans la raison de *PD* à *PE*: donc sa force dans cette direction sera proportionnelle à $PD \times Dd$. Et si on suppose que la ligne DF soit divisée en un nombre innombrable de parties égales telles que Dd, & que la superficie FE soit divisée en même temps en autant d'anneaux égaux par les plans élevés perpendiculairement du point D, il est clair, que la somme des forces de tous ces anneaux sera comme la somme de tous les $PD \times Dd$, c'est-à-dire, comme $\frac{1}{2}PF^2 - \frac{1}{2}PD^2$, & par conséquent comme DE^2.

Fig. 131.

Connoissant ainsi l'attraction de la superficie FE, celle du solide $FEfe$ sera connue aussi : il ne faudra pour l'avoir que multiplier la premiere par Ff, c'est-à-dire, que cette attraction deviendra proportionnelle à $DE^2 \times Ff$, si la force qu'une particule donnée Ff éxerce sur le corpuscule P à la distance PF est donnée. Mais si cette force n'est pas donnée, la force du solide $EFfe$ sera comme le solide $ED^2 \times Ff$ & cette force qui n'est pas donnée conjointement.

PROPOSITION LXXX. THÉORÉME XL.

Fig. 132. ABE *étant une sphere homogene dont le centre est* S, *& dont toutes les parties attirent suivant une loi quelconque des distances*, *&* P *un corpuscule placé sur l'axe* AB *de cette sphere, la force avec laquelle ce corpuscule sera attiré par toute la sphere, sera proportionnelle à l'aire* ABN *d'une courbe* ANB *dont les ordonnées* DN *correspondantes aux ordonnées* DE *du cercle* SEB *sont prises en raison composée de la force qu'éxerce sur* P *la particule placée en* E, *& du solide* $\frac{DE^2 \times PS}{PE}$.

Conservant les constructions du dernier Lemme & du dernier Théoréme, concevez l'axe AB de la sphere divisé en un nombre innombrable de particules égales Dd, & toute la sphere divisée en autant de petites lames sphériques $EFfe$; & par le point n élevez l'ordonnée dn à la courbe ANB, il est clair, par le Théoréme précédent, que la force avec laquelle la petite lame *EFfe* attire le corpuſcule *P*, eſt en raiſon composée de $DE^2 \times Ff$ & de la force qu'une particule éxerce à la diſtance *PE*. Mais par le dernier Lemme $Dd : Ff :: PE : PS$, ce qui donne $Ff = \frac{PS \times Dd}{PE}$; & $DE^2 \times Ff = Dd \times \frac{DE^2 \times PS}{PE}$. Donc la force de la petite lame *EFfe* eſt en raiſon composée de $Dd \times \frac{DE^2 \times PS}{PE}$ & de la force qu'une particule éxerce à la diſtance *PF*, c'eſt-à-dire, par la conſtruction de la courbe *ANB*, comme $DN \times Dd$ ou comme l'aire évanouiſſante *DNnd*. Donc les forces de toutes les petites lames de même eſpéce, ou, ce qui revient au même, la force de la ſphere entiere ſur le corpuſcule *P* eſt comme l'aire totale *ANB*. Fig. 132.

Cor. 1. Delà, ſi la force centripete qui tend à chaque particule eſt toujours la même quelle que ſoit la diſtance, & qu'on ſuppoſe *DN* proportionnelle à $\frac{DE^2 \times PS}{PE}$, la force totale par laquelle le corpuſcule *P* ſera attiré par la ſphere ſera comme l'aire *ANB*.

Cor 2. Si la force centripete des particules eſt réciproquement comme la diſtance du corpuſcule qu'elles attirent, & qu'on faſſe *DN* proportionnelle à $\frac{DE^2 \times PS}{PE^2}$, la force par laquelle le corpuſcule *P* ſera attiré par toute la ſphére, ſera comme l'aire *ANB*.

Cor. 3. Si la force centripete des particules eſt réciproquement comme le cube de la diſtance du corpuſcule qu'elles attirent, & qu'on faſſe *DN* proportionnelle à $\frac{DE^2 \times PS}{PE^4}$; la force par laquelle le corpuſcule ſera attiré par toute la ſphere ſera comme l'aire *ANB*.

Cor. 4. Et généralement, ſi on ſuppoſe que la force centripete, qui tend vers chaque particule de la ſphere, ſoit réciproquement comme la quantité *V*, & qu'on prenne *DN* proportionnelle à

Du Mouvement des Corps.

$\frac{DE^2 \times PS}{PE \times V}$; la force, par laquelle le corpuscule sera attiré par toute la sphere, sera comme l'aire ANB.

PROPOSITION LXXXI. PROBLÊME XLI.

Fig. 133. *Les mêmes choses étant posées, on demande la valeur de l'aire* ANB.

Ayant tiré du point P la droite PH qui touche la sphere en H, & ayant abaissé la perpendiculaire HI sur l'axe PAB, on coupera PI en deux parties égales au point L, & on aura $PE^2 = PS^2 + SE^2 + 2PS \times SD$; mais SE^2 ou SH^2 est égal au rectangle $PS \times SI$ à cause des triangles semblables SPH, SHI: donc $PE^2 = PS \times \overline{PS + SI + 2SD}$, c'est-à-dire, $= PS \times \overline{2SL \times 2SD} = PS \times 2LD$. De plus $DE^2 = SE^2 - SD^2 = SE^2 - LS^2 + 2LS \times LD - LD^2$ ou enfin $= 2SL \times LD - LD^2 - AL \times LB$, à cause que $LS^2 - SE^2$ ou $LS^2 - SA^2$ est égal au rectangle $AL \times LB$. Ecrivant donc $2SL \times LD - LD^2 - AL \times LB$ au lieu de DE^2; la quantité $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times V}$ (laquelle, selon le Corol. 4. de la Prop. précédente, est comme la longueur de l'ordonnée DN) se décomposera dans les trois parties $\frac{2SL \times LD \times PS}{PE \times V} - \frac{LD^2 \times PS}{PE \times V} - \frac{AL \times LB \times PS}{PE \times V}$; & si dans ces trois parties on écrit au lieu de V la quantité qui exprime la force centripete d'une particule en E sur le corpuscule P, & au lieu de PE la moyenne proportionnelle entre PS & $2LD$; on aura les ordonnées d'autant de courbes, dont on connoîtra les aires par les méthodes ordinaires. *C. Q. F. F.*

Exemple 1. Si la force centripete tendante à chacune des particules de la sphere est réciproquement comme la distance, écrivez PE au lieu de V & ensuite $2PS \times LD$ au lieu de PE^2, & vous aurez DN proportionnelle à $SL - \frac{1}{2}LD - \frac{AL \times LB}{2LD}$.

Supposez que DN soit égale au double $2SL - DL - \frac{AL \times LB}{LD}$

de

de cette quantité : la partie donnée $2SL$ de cette ordonnée servant d'ordonnée elle-même, AD servant d'abscisse, donnera pour la premiere aire le rectangle $2SL \times AB$; la seconde partie variable LD servant d'ordonnée pour la même abscisse AD donnera pour la seconde aire $\frac{LB^2 - LA^2}{2}$ ou $SL \times AB$; qui étant soustraite de la premiere aire $2SL \times AB$ donnera l'aire $SL \times AB$. La troisiéme partie $\frac{AL \times LB}{LD}$ variable aussi, donnera pour la troisiéme aire, une aire hyperbolique, laquelle étant soustraite de l'aire $SL \times AB$ donnera pour reste l'aire cherchée ANB d'où l'on tire la construction suivante du Problême.

Fig. 133.

Aux points L, A, B élevez les perpendiculaires Ll, Aa, Bb, desquelles $Aa = LB$ & $Bb = LA$. Décrivez ensuite par les points ab l'hyperbole ab dont les asymptotes soient Ll, LB, & la corde ba renfermera l'aire aba égale à l'aire cherchée ANB. Fig. 134.

Exemple 2. Si la force centripete qui tend à chaque particule de la sphere, est réciproquement comme le cube de la distance, ou ce qui revient au même, comme le cube divisé par un plan quelconque donné ; écrivez alors $\frac{PE^3}{2AS^2}$ au lieu de V, & $2PS \times LD$ au lieu de PE^2 ; vous aurez par ce moyen DN proportionnelle à $\frac{SL \times AS^2}{PS \times LD} - \frac{AS^2}{2PS} - \frac{AL \times LB \times AS^2}{2PS \times LD^2}$, c'est-à-dire, (à cause que $\div PS, AS, SI$) proportionnelle à $\frac{SL \times SI}{LD} - \frac{1}{2}SI - \frac{AL \times LB \times SI}{2LD^2}$. Faisant servir de même ces trois parties d'ordonnées pendant que AD sert d'abscisse, la premiere $\frac{LS \times SI}{LD}$ donnera l'aire d'une hyperbole ; la seconde $\frac{1}{2}SI$ donnera l'aire $\frac{1}{2}AB \times SI$; & la troisiéme $\frac{AL \times LB \times SI}{2LD^2}$ donnera l'aire $\frac{AL \times LB \times SI}{2LA} - \frac{AL \times LB \times SI}{2LB}$, c'est-à-dire, $\frac{1}{2}AB \times SI$;

soustrayant de la premiére la somme de la seconde & de la troisiéme, il restera l'aire cherchée ANB, ce qui fournit cette construction.

Fig. 135. Elevez aux points L, A, S, B les perpendiculaires Ll, Aa, Ss, Bb, desquelles Ss soit égale à SI; & décrivez par le point s l'hyperbole asb dont les asymptotes soient Ll, BL. Cette hyperbole coupera les lignes Aa, Bb aux points a & b, & donnera par ce moyen l'aire $AasbB$, de laquelle retranchant le rectangle $2AS \times SI$, on aura l'aire cherchée ANB.

Fig. 133. *Exemple* 3. Si la force centripete qui tend à chaque particule de la sphere décroît en raison quadruplée de la distance à ces particules, écrivez $\frac{PE^4}{2AS^3}$ au lieu de V, & ensuite $\sqrt{2PS \times LD}$ au lieu de PE, par ce moyen DN deviendra proportionnelle à $\frac{SI^2 \times SL}{\sqrt{2SI}} \times \frac{I}{\sqrt{LD^3}} - \frac{SI^2}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{I}{\sqrt{LD}} - \frac{SI^2 \times AL \times LB}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{I}{\sqrt{LD^5}}$, dont les trois parties, servant toujours d'ordonnées tandis que AD sert d'abscisse, donneront les trois aires $\frac{2SI^2 \times SL}{\sqrt{2SI}} \times \frac{I}{\sqrt{LA}} - \frac{I}{\sqrt{LB}}$; $\frac{SI^2}{\sqrt{2SI}} \times \overline{\sqrt{LB} - \sqrt{LA}}$; & $\frac{SI^2 \times AL \times LB}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{I}{LA \times \sqrt{LA}} - \frac{I}{LB \times \sqrt{LB}}$ qui se réduisent aux trois quantités $\frac{2SI^2 \times SL}{LI}$; SI^2 & $SI^2 \times \frac{2SI^3}{3LI}$, de la premiere desquelles retranchant la somme des deux autres, il reste $\frac{4SI^3}{3LI}$; d'où l'on apprend que la force avec laquelle P est attiré par la sphere entiere est proportionnelle à $\frac{SI^3}{PI}$, ou, ce qui revient au même, que cette force est en raison renversée de $PS^3 \times PI$. C. Q. F. T.

Par la même méthode on pourroit déterminer l'attraction d'un corpuscule placé au-dedans d'une sphere, mais on aura plus facilement cette attraction par le Théoréme suivant.

PROPOSITION LXXXII. THÉORÉME XLI.

Fig. 136.

Dans une ſphere dont le centre eſt S *&* *le rayon* SA, *ſi on prend* SI, SA, SP *continuellement proportionnelles, l'attraction d'un corpuſcule placé dans un lieu quelconque* I *au dedans de cette ſphere, ſera à l'attraction d'un autre corpuſcule placé hors de la ſphere, dans le lieu* P, *en raiſon compoſée de la raiſon ſousdoublée des diſtances* IS, PS, *du centre, & de la raiſon ſousdoublée des forces avec leſquelles ces mêmes corpuſcules* P *&* I *ſeroient attirés par une ſeule particule placée au centre de la ſphere.*

Si, par éxemple, les forces centripetes des particules de la ſphere ſont réciproquement comme les diſtances du corpuſcule qu'elle attire; la force par laquelle un corpuſcule placé en I eſt attiré par toute la ſphere, ſera à la force par laquelle il ſeroit attiré s'il étoit placé en P en raiſon compoſée de la raiſon ſousdoublée de la diſtance SI à la diſtance SP, & de la raiſon ſousdoublée inverſe des diſtances SI, SP; or comme ces deux raiſons ſousdoublées compoſent une raiſon d'égalité, les attractions éxercées par la ſphere entiere en I & en P ſont égales.

Si les forces des particules de la ſphere ſont réciproquement en raiſon doublée des diſtances, on trouvera par le même calcul que l'attraction en I eſt à l'attraction en P, comme la diſtance SP au demi-diametre SA de la ſphere.

Si les forces ſont réciproquement en raiſon triplée des diſtances, les attractions en I & en P ſeront l'une à l'autre comme SP^2 à SA^2.

Si elles ſont en raiſon quadruplée, les attractions ſeront comme SP^3 à SA^3. Ainſi comme l'attraction en P dans ce dernier cas a été trouvée réciproquement comme $PS^3 \times PI$, l'attraction en I ſera réciproquement comme $SA^3 \times PI$, c'eſt-à-dire, (à cauſe que SA^3 eſt donnée) réciproquement comme PI, il en ſeroit de même des autres cas. Ce Théoréme ſe démontre ainſi.

De la même maniere qu'on a vu dans la ſolution du Problême

Fig. 136.

précédent que lorsque le corpuscule placé en P donnoit l'ordonnée DN proportionnelle à la quantité $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times V}$, on verra en faisant le même usage de I que l'on a fait de P que cette ordonnée DN doit être dans ce cas proportionnelle à $\frac{DE^2 \times IS}{IE \times V}$, supposant donc que les forces centripetes, qui émanent d'un point quelconque E de la sphere, soient l'une à l'autre dans les distances IE, PE comme PE^n à IE^n, on trouvera que l'ordonnée DN que donneroit la supposition du corpuscule en P est à celle que donneroit la supposition du corpuscule en I dans le rapport des quantités $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times PE^n}$ & $\frac{DE^2 \times IS}{IE \times IE^n}$, c'est-à-dire, dans le rapport de $PS \times IE \times IE^n$, à $IS \times PE \times PE^n$. Or, parce que les lignes SI, SE, SP sont en proportion continue, les triangles SPE, SIE sont semblables & donnent $IE : PE :: IS : SE$ ou SA. Ecrivant donc dans le rapport précédent des deux valeurs de DN la raison de IS à SA au lieu de celle de IE à PE, on aura le rapport de $PS \times IE^n$ à $SA \times PE^n$. Mais la raison de PS à SA est la raison sousdoublée des distances PS, SI; & la raison de IE^n à PE^n (à cause de la proportion $IE : PE :: IS : SA$) est la raison sousdoublée des forces aux distances PS, IS. Donc les valeurs de DN dans les deux cas, & par conséquent les aires des courbes ausquelles elles appartiennent, ou, ce qui revient au même, les attractions des corpuscules en P & en I, sont en raison composée de ces raisons sousdoublées. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION LXXXIII. PROBLÉME XLII.

Fig. 137.

Trouver la force par laquelle un corpuscule placé dans le centre d'une sphere est attiré vers un segment quelconque de cette sphere.

Soit P le corpuscule placé au centre de la sphere, & $RBSD$ le segment qui l'attire. Soit de plus EFG une des surfaces sphériques quelconques décrites du centre P & du rayon PF, desquelles on peut ſuppoſer que le ſegment propoſé eſt composé, en ne regardant pas ces ſurfaces comme purement mathématiques, mais comme ayant une épaiſſeur infiniment petite.

Nommant O cette petite épaiſſeur, il eſt clair, par ce qu'a démontré Archiméde, que la ſurface ou orbe ſphérique EFG ſera proportionnelle à $PF \times DF \times O$, & par ce qui a été démontré dans la Propoſition 79, ſi on ſuppoſe que les forces attractives des particules de la ſphere, ſoient en raiſon renverſée des puiſſances n des diſtances, l'attraction de cette orbe ſera comme $\frac{DE^2 \times O}{PF^n}$, c'eſt-à-dire, comme $\frac{2DF \times O}{PF^{n-1}} - \frac{DF^2 \times O}{PF^n}$. Prenant donc l'ordonnée FN proportionnelle à cette quantité, l'aire DB, de la courbe qu'on décrira par ce moyen, exprimera l'attraction cherchée du corpuſcule P vers le ſegment propoſé $RBSD$. *C. Q. F. T.* Fig. 137.

PROPOSITION LXXXIV. PROBLÉME XLIII.

Trouver la force par laquelle un corpuſcule placé hors du centre de la ſphere & ſur l'axe d'un ſegment quelconque, eſt attiré par ce même ſegment.

Que le corps P ſoit attiré par le ſegment EBK dans l'axe ADB duquel il eſt placé. En décrivant du centre P & de l'intervalle PE la ſuperficie ſphérique EFK laquelle partage le ſegment propoſé en deux parties $EBKFE$, $EFKDE$; on n'aura qu'à chercher la force de la premiere partie par la Propoſition 81, & la force de la derniere par la Prop. 83; & la ſomme de ces forces ſera la force totale du ſegment $EBKDE$. *C. Q. F. T.* Fig. 138.

SCHOLIE.

Après avoir expliqué les attractions des corps ſphériques, je devrois naturellement entrer dans le même détail ſur les loix d'attraction des autres corps; mais il n'eſt pas néceſſaire à mon deſſein de les expliquer toutes en particulier: je me contenterai de donner quelques-unes des Propoſitions les plus générales ſur les forces de tous ces corps en général, & sur les mouvemens qui doivent en naître, parce que ces Propositions peuvent être de quelque usage dans la Physique.

TREIZIÉME SECTION.

Des forces attractives des corps qui ne sont pas sphériques.

PROPOSITION LXXXV. THÉORÉME XLII.

Si l'attraction du corps attiré est beaucoup plus forte lorsqu'il est contigu au corps attirant, que lorsqu'il n'en est séparé que d'un très-petit intervalle : les forces des particules du corps attirant décroîtront dans une raison plus que doublée des distances à ces particules.

Les forces décroissant en raison doublée des distances, l'attraction vers une sphere, est par la Prop. 74. réciproquement comme le quarré de la distance du corps attiré au centre de la sphere, & par conséquent elle augmentera à peine sensiblement dans le contact; donc l'augmentation seroit encore moins remarquable si la force décroissoit dans une moindre raison. La Proposition à démontrer est donc claire quant aux spheres attractives : elle a lieu aussi dans les orbes sphériques concaves qui attirent des corps placés au-dehors; & elle est encore plus évidente pour les corps placés dans l'intérieur des orbes sphériques qui les attirent, puisque les attractions éxercées par les concavités des orbes sont détruites par des attractions contraires par la Prop. 70. & que par conséquent elles sont nulles dans le contact.

Si on suppose présentement que de ces spheres ou de ces orbes sphériques on ôte des parties quelconques éloignées du lieu du contact & qu'on leur ajoûte de nouvelles parties dans d'autres endroits, on pourra changer à volonté la forme de ces corps sans que ces parties ajoutées ou retranchées, lesquelles ſont éloignées du lieu du contact, augmentent ſenſiblement l'attraction de ces corps dans le contact. Donc la Propoſition en queſtion eſt vraie pour tous les corps, quelque ſoit leur forme. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION LXXXVI. THÉORÉME XLIII.

Si les forces des particules qui compoſent un corps attirant décroiſſent en raiſon triplée ou plus que triplée des diſtances, l'attraction ſera beaucoup plus forte dans le contact, que lorſque le corps attirant & le corps attiré ne ſeront ſéparés que d'un très-petit intervalle.

On a vu dans la ſolution du Problême 41. donnée dans les Exemples 2 & 3; que dans cette loi d'attraction lorſque le corpuſcule attiré approche de la ſphere qui l'attire, l'attraction augmente à l'infini. On concluera facilement la même choſe (par ces éxemples & par le Théoréme 41.) des attractions des corps vers des orbes concaves convexes, ſoit que les corps attirés ſoient placés hors de ces orbes, ſoit qu'ils ſoient dans leur concavité. Or en ajoutant ou en ôtant à ces ſpheres & à ces orbes de la matiére quelconque attractive placée où l'on voudra, pourvû que ce ne ſoit pas dans le lieu du contact, les corps attirans pourront avoir la forme qu'on voudra, & la propoſition ſera prouvée en général. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION LXXXVII. THÉORÉME XLIV.

Si deux corps ſemblables entre eux, & formés d'une matiére également attractive, attirent ſéparément des corpuſcules qui leur ſoient proportionnels, & qui ſoient poſés de même par rapport à eux, les attractions accélératrices des corpuſcules vers les corps entiers ſeront comme leurs attractions accélératrices vers les particules de ces corps ſituées ſemblablement, & priſes proportionnelles aux touts.

Car ſi ces corps ſont diviſés dans des particules qui ſoient proportionnelles aux corps entiers, & poſées de même dans ces corps, les attractions vers chacune des particules du premier corps ſeront aux attractions vers chacune des particules correſpondantes de l'autre corps, comme l'attraction vers une particule quelconque du premier corps eſt à l'attraction vers une particule correſpondante de l'autre corps; & par conſéquent l'attraction vers le premier corps entier, ſera à l'attraction vers tout le ſecond dans cette même raiſon. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Donc ſi les forces attractives des particules décroiſſent en raiſon d'une puiſſance quelconque des diſtances, les attractions accélératrices vers les corps entiers ſeront en raiſon renverſée de ces puiſſances des diſtances, & en raiſon directe des maſſes attirantes.

Si, par exemple, les forces des particules décroiſſent en raiſon doublée des diſtances aux corpuſcules attirés, que les corps attirans ſoient comme A^3 & B^3 & que par conſéquent tant les racines cubes de ces corps, que leurs diſtances aux corpuſcules attirés ſoient comme A & B, les attractions accélératrices vers les corps attirans ſeront comme $\frac{A^3}{A^2}$ & $\frac{B^3}{B^2}$, c'eſt-à-dire, comme les racines cubes A & B de ces corps.

Si les forces des particules décroiſſent en raiſon triplée des diſtances aux corpuſcules attirés, les attractions accélératrices vers les corps entiers ſeront comme $\frac{A^3}{A^3}$ & $\frac{B^3}{B^3}$, c'eſt-à-dire, égales.

Si les forces décroiſſent en raiſon quadruplée, les attractions vers les corps ſeront comme $\frac{A^3}{A^4}$ & $\frac{B^3}{B^4}$, c'eſt-à-dire, réciproquement comme les racines cubes A & B; & ainſi des autres.

Cor. 2. Et réciproquement, en connoiſſant les forces par leſquelles des corps ſemblables attirent des corpuſcules ſemblablement placés, on pourra en conclure la loi des diſtances ſuivant laquelle agiſſent les particules attirantes, pourvu que cette loi dépende de quelque raiſon directe ou inverſe des diſtances.

PROPOSITION

PROPOSITION LXXXVIII. THÉORÉME XLV.

Si les forces attractives des particules égales d'un corps quelconque, sont comme les distances, la force qu'éxercera le corps entier, tendra à son centre de gravité : & elle sera la même que celle d'un globe de même masse qui auroit son centre placé dans le centre de gravité de ce corps.

Que les particules A, B du corps $RSTV$ attirent un corpuscule Z avec des forces qui soient comme les distances AZ, BZ, si ces particules sont égales entr'elles ; & qui soient en raison composée de ces particules & de leurs distances AZ, BZ, si ces particules sont supposées inégales : que ces particules A & B soient jointes par la droite AB divisée en G, ensorte que AG soit à BG comme la particule B à la particule A, G sera le commun centre de gravité de ces particules. La force $A \times AZ$ de la particule A se décomposera (par le Corol. 2. des loix) dans les forces $A \times GZ$ & $A \times AG$, & la force $B \times BZ$ de la particule B se décomposera de même dans les forces $B \times GZ$ & $B \times GB$. Mais les forces $A \times AG$ & $B \times BG$, sont égales, à cause que $BG : AG :: A : B$; donc puisqu'elles tendent vers des côtés opposés, elles se détruisent mutuellement. Il reste donc les forces $A \times GZ$ & $B \times GZ$ lesquelles tendent de Z vers le centre G, & composent la force $\overline{A+B} \times GZ$; c'est-à-dire, la même force que si les particules attractives A & B étoient placées dans leur commun centre de gravité G, & qu'elles y composassent un globe. Fig. 139.

Par le même raisonnement, si on ajoute une troisiéme particule C, & que sa force se compose avec la force $\overline{A+B} \times GZ$ qui tend au centre G, la force qui en résultera tendra au commun centre de gravité de ce globe, lequel globe est supposé en G, & de la particule C, c'est-à-dire, au commun centre de gravité des trois particules A, B, C ; & elle sera la même que si ces trois particules ne faisoient qu'un seul globe placé dans leur

Du mouvement des Corps.

commun centre de gravité, & ainsi des autres à l'infini. La force totale de toutes les particules d'un corps quelconque *RSTV*, est donc la même qu'elle seroit, si ce corps, en conservant le même centre de gravité, devenoit un globe. *C. Q. F. D.*

Fig. 139. *Cor.* De là, le mouvement du corps attiré *Z*, sera le même que si le corps attirant *RSTV* étoit sphérique, & par conséquent si ce corps attirant est en repos, où qu'il se meuve uniformement en ligne droite, le corps attiré décrira une ellipse dont le centre sera le centre de gravité du corps attirant.

PROPOSITION LXXXIX. THÉORÉME XLVI.

Si on a plusieurs corps formés de particules égales, & dont les forces soient comme les distances : la force composée des forces de tous ces corps, & par laquelle ils attireront un corpuscule quelconque, tendra au commun centre de gravité des corps attirans ; de plus cette force sera la même qu'elle seroit, si ces corps attirans en conservant leur commun centre de gravité, s'unissoient ensemble, & formoient un globe.

Cette Proposition se démontre de la même maniére que la Proposition précédente.

Cor. Le mouvement du corps attiré sera donc le même, que si les corps attirans, en conservant leur commun centre de gravité, s'unissoient ensemble, & qu'il s'en formât un globe. Donc si le commun centre de gravité des corps attirans est en repos, ou se meut uniformement en ligne droite, le corps attiré décrira une ellipse autour de ce centre.

PROPOSITION XC. PROBLÉME XLIV.

Supposant qu'à chaque point d'un cercle quelconque, tendent des forces centripetes égales, & qui croissent ou décroissent dans une raison quelconque des distances, on demande la force par laquelle est attiré un corpuscule placé à volonté dans la ligne droite élevée sur le centre de ce cercle perpendiculairement à son plan.

Fig. 140. Du centre *A* & d'un intervalle quelconque *AD* soit décrit un cercle dans le plan auquel la droite *AP* est perpendiculaire :

Fig. 140.

pour trouver la force par laquelle un corpuſcule quelconque P eſt attiré vers ce cercle, on tirera d'un point quelconque E de ce cercle une ligne PE au corpuſcule attiré P, on prendra enſuite ſur la droite PA, $PF = PE$, & on tirera la perpendiculaire FK qui ſoit comme la force avec laquelle le point E attire le corpuſcule P. On tracera la courbe IKL, lieu de tous les points K, & qui rencontre le plan du cercle en L, enfin on prendra ſur PA, $PH = PD$, & on élevera la perpendiculaire HI qui rencontrera la courbe, dont on vient de parler, en I; alors l'attraction du corpuſcule P vers le cercle ſera comme l'aire $AHIL$ multipliée par la hauteur AP. *C. Q. F. T.*

Car ſi on prend ſur AE la ligne infiniment petite Ee, qu'on tire Pe, & que ſur PE & PA on prenne PC & Pf égales à Pe, la force avec laquelle un point quelconque E de l'anneau décrit du centre A & de l'intervalle AE, attire vers lui le corpuſcule P étant ſuppoſée proportionnelle à FK, on trouvera que la force avec laquelle ce point attire le corps P vers A, eſt proportionnelle à $\frac{AP \times FK}{PE}$, & que la force avec laquelle tout l'anneau attire le corps P vers A, eſt comme l'anneau, & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjointement; mais cet anneau eſt comme le rectangle formé par le rayon AE & la largeur Ee, & ce rectangle, (à cauſe des proportionnelles PE & AE, Ee & CE) eſt égal au rectangle $PE \times CE$ ou $PE \times Ff$; donc la force avec laquelle cet anneau attire le corps P vers A, ſera comme $PE \times Ff$ & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjointement, c'eſt-à-dire, comme le produit $Ff \times FK \times AP$, ou comme l'aire $FKkf$ multipliée par AP. Et par conſéquent la ſomme des forces avec leſquelles tous les anneaux contenus dans le cercle entier dont le rayon eſt AD attirent le corps P vers A, eſt comme l'aire totale $AHIKL$ multipliée par AP. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Si les forces décroiſſent en raiſon doublée des diſtances, c'eſt-à-dire, ſi FK eſt proportionnelle à $\frac{1}{PF^2}$, & que par conſéquent l'aire $AHIKL$ ſoit comme $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$; l'attraction du corpuſcule P vers le cercle ſera comme $1 - \frac{PA}{PH}$; c'eſt-à-dire, comme $\frac{AH}{PH}$.

Fig. 140.

Cor. 2. Et généralement, ſi les forces aux diſtances D ſont réciproquement comme une puiſſance quelconque D^n des diſtances, c'eſt-à-dire, ſi FK eſt proportionnelle à $\frac{1}{D^n}$, & que par conſéquent l'aire $AHIKL$ ſoit comme $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$; l'attraction du corpuſcule P vers le cercle ſera comme $\frac{1}{PA^{n-2}} - \frac{PA}{PH^{n-1}}$.

Cor. 3. Si le diametre du cercle eſt augmenté à l'infini, & que le nombre n ſoit plus grand que l'unité, l'attraction du corpuſcule P vers le plan total infini, ſera réciproquement comme PA^{n-2}, à cauſe que l'autre terme $\frac{PA}{PH^{n-1}}$ s'évanouira.

PROPOSITION XCI. PROBLÊME XLV.

Trouver l'attraction qu'un conoïde quelconque éxerce ſur un corpuſcule placé dans l'axe de révolution, en ſuppoſant que les forces attractives des particules de ce ſolide décroiſſent dans une raiſon quelconque des diſtances.

P étant le corpuſcule donné & placé ſur l'axe AB du conoïde $DECG$, & RFS le cercle qui eſt la tranche de ce conoïde par un plan quelconque perpendiculaire à l'axe ſoit priſe, (par la Prop. 90.) la ligne FK proportionnelle à la force par laquelle le corpuſcule P eſt attiré vers ce cercle, & ſoit tracée la courbe LKI lieu de tous les points K trouvés de la même maniére;

Fig. 141.

l'aire $LABI$ exprimera l'attraction demandée du corpuscule P vers le solide $DECG$. *C. Q. F. T.*

Cor. 1. Si ce solide est un cylindre décrit par la révolution du rectangle $ADEB$ autour de l'axe AB; & que les forces centripetes qui tendent à chacun de ces points soient réciproquement comme les quarrés des distances, l'attraction du corpuscule P vers ce cylindre sera comme $AB - PE + PD$. Car l'ordonnée FK, par le Corol. 1. de la Prop. 90. sera proportionnelle à $1 - \frac{PF}{PR}$. Or la partie 1. de cette ordonnée donnera le rectangle $1 \times AB$ pour la premiere partie de l'aire $LABI$, & la seconde $\frac{PF}{RP}$, étant supposée appliquée continuellement à l'abscisse AF, donnera une courbe dont les aires qui répondent à AP & à PB seront $1 \times \overline{PD - AD}$ & $1 \times \overline{PE - AD}$ & dont par conséquent l'aire répondant à AB sera $1 \times \overline{PE - PD}$; retranchant donc de $1 \times AB$ l'espace $1 \times \overline{PE - PD}$, on aura $1 \times \overline{AB - PE + PD}$ pour exprimer l'aire $LABI$ de l'attraction du cylindre $DGCE$. Fig. 142.

Cor. 2. Il est aisé de connoître, par cette Proposition, la force avec laquelle le sphéroïde $AGBC$ attire un corps quelconque P placé au-dehors sur son axe AB. $NKRM$ étant une section conique dont l'ordonnée ER perpendiculaire sur PE est toujours égale à la ligne PD menée de P au point D dans lequel l'ordonnée coupe le sphéroïde. Soient élevées dés sommets A, B du sphéroïde les perpendiculaires AK, BM à son axe AB, lesquelles soient respectivement égales à AP & à BP, & rencontrent par conséquent la section conique en K & en M; & soit tiré KM qui retranche de cette section le segment $KMRK$. Si le plus grand demi diametre du sphéroïde est SC, & que son centre soit S, la force avec laquelle le sphéroïde entier attire le corpuscule P sera à la force avec laquelle la sphere décrite sur le diametre AB attire ce même corpuscule, comme $\frac{AS \times \overline{CS^2 - PS} \times \overline{KMRK}}{PS^2 + CS^2 - AS^2}$ à $\frac{AS^3}{3PS^2}$, & on auroit de la même Fig. 143.

maniere l'attraction d'un segment quelconque de ce sphéroïde.

Cor. 3. On peut tirer encore de la même Proposition que si le corpuscule est placé au-dedans du sphéroïde, sur son axe, l'attraction sera comme sa distance au centre. Mais on peut s'en assurer plus facilement de la maniere suivante, soit que le corpuscule soit placé sur l'axe, soit qu'il le soit sur un autre diametre quelconque donné.

Fig. 144.

Que *AGOF* soit le sphéroïde attirant; *S* son centre; *P* le corps attiré; *SPA* un demi diametre passant par *P*; *DE*, *FG* deux droites quelconques qui traversent le sphéroïde, & passent par *P*; *PCM*, *HLN* les superficies de deux sphéroïdes intérieurs, concentriques & semblables à l'extérieur, dont le premier passe par le corps *P*, & coupe les droites *DE* & *FG* en *B* & *C*, & dont le dernier coupe les mêmes droites en *H*, *I* & *K*, *L*.

Supposant que tous ces sphéroïdes aient un axe commun, les parties des droites *DP* & *BE*, *FP* & *CG*, *DH* & *IE*, *FK* & *LG* coupées de part & d'autre du point *P*, seront respectivement égales; puisque les droites *DE*, *PB* & *HI* sont coupées en deux également au même point, ainsi que les droites *FG*, *PC* & *KL*. Or si on imagine à présent que *DPF*, *EPG* représentent deux cônes opposés dont les angles générateurs *DPF*, *EPG* soient infiniment petits, & que les lignes *DH*, *EI* soient aussi infiniment petites, on verra que les particules *DHKF*, *GLIE* des cônes, coupées par les superficies des sphéroïdes, seront entr'elles, à cause de l'égalité des lignes *DH*, *EI*, comme les quarrés de leurs distances au corpuscule *P*, & par conséquent elles attireront également ce corpuscule. Par la même raison, si on divise les espaces *DPF*, *EGCB* en une infinité de particules par une infinité de superficies sphéroïdales semblables & concentriques qui aient le même axe, toutes ces particules attireront également le corps *P* de part & d'autre en sens contraire.

Les forces du cône *DPF* & du cône tronqué *EGCB* étant ainsi égales & contraires, elles se détruisent mutuellement, & il en est de même des forces de toute la matière placée hors du sphéroïde intérieur *PCBM*. Le corps *P* est donc attiré par ce seul sphéroïde intérieur *PCBM*, & par conséquent, par le Corol. 3. de la Prop. 72. Son attraction est à la force par laquelle le corps *A* est attiré par le sphéroïde entier *AGOD* comme la distance *PS* est à la distance *AS*. *C. Q. F. D.* Fig. 144.

PROPOSITION XCII. PROBLÉME XLVI.

Une matière attractive étant donnée, trouver la loi suivant laquelle ses parties attirent.

On fera de cette matière une sphere, un cylindre, ou un autre corps régulier dont la loi d'attraction puisse être déterminée par les Propositions 80. 81. & 91. Ensuite on fera des expériences pour déterminer la loi suivant laquelle ce corps attirera un corpuscule placé à différentes distances; & de la loi que suivra l'attraction du total, on tirera celles que doivent suivre toutes ses parties. *C. Q. F. T.*

PROPOSITION XCIII. THÉORÉME XLVII.

Si un solide terminé d'un côté par un plan, & infini de tous les autres côtés, est formé de particules égales & également attractives, dont les forces décroissent en raison d'une puissance quelconque plus que doublée des distances, un corpuscule placé de l'un ou de l'autre côté du plan, sera attiré par ce solide entier avec une force qui décroîtra dans la raison d'une puissance de la distance du corpuscule au plan, dont l'exposant sera moindre de trois unités que celui de la puissance des distances suivant laquelle se fait l'attraction des particules.

Cas. 1. Le plan *LGl* terminant le solide lequel s'étend à l'infini du côté de *I*, & est supposé partagé en un nombre innombrable de plans *mHM*, *nIN*, *oKO*, *&c.* paralleles à *LG*, soit placé premiérement le corps attiré dans un point *C* hors du Fig. 145.

solide, & soit abaissée sur LGl la perpendiculaire $CGHI$, & soit pris n, qu'on ne suppose pas moindre que 3, pour exprimer la puissance des distances suivant laquelle décroissent les forces attractives des particules de ce solide. Cela posé, la force avec laquelle un plan quelconque mHM attire le point C, sera, par le Corol. 3. de la Prop. 90. réciproquement comme CH^{n-2}, ensorte qu'en prenant sur mHM, lGL, nIN, oKO les droites GL, HM, IN, KO, &c. respectivement proportionnelles aux quantités $\frac{1}{CG^{n-2}}$, $\frac{1}{CH^{n-2}}$, $\frac{1}{CI^{n-2}}$, $\frac{1}{CK^{n-2}}$, &c. Ces droites expriment les forces de ces plans; d'où il suit, que la somme de ces forces, ou, ce qui revient au même, la force du solide entier sera proportionnelle à l'aire $GLOK$ supposée étendue jusqu'à l'infini du côté de OK; mais cette aire, par les méthodes connues des quadratures, est réciproquement comme CG^{n-3}. Donc la force de tout le solide est réciproquement comme CG^{n-3}. *C. Q. F. D.*

Fig. 145.

Fig. 146. *Cas.* 2. Le corpuscule C étant supposé présentement placé au-dedans du solide, soit prise la distance CK égale à la distance CG, il est clair que la partie $LGloKO$ du solide, terminée par les plans paralleles lGL, oKO, n'attirera vers aucun côté le corpuscule C placé au milieu, les actions contraires dirigées vers des points opposés se détruisant mutuellement à cause de leur égalité. Ainsi le corpuscule C n'est attiré que par la force des parties du solide qui sont au-delà du plan OK; & cette force par le premier cas est réciproquement comme CK^{n-3}. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Si le solide $LGIN$ est terminé des deux côtés par les deux plans paralleles infinis LG, IN, on connoîtra sa force attractive, en soustraïant de la force attractive du solide entier $LGKO$ la force attractive de sa partie ultérieure $NIKO$ étendue infiniment vers KO.

Cor. 2.

Cor. 2. Si l'attraction de la partie ultérieure de ce solide infini est très-petite, en comparaison de l'attraction de sa partie citérieure, on peut la négliger : & l'attraction de sa partie citérieure décroîtra à peu près comme la puissance $n - 3$ de la distance. Fig. 146.

Cor. 3. De-là, si un corps quelconque fini & plan d'un côté attire un corpuscule placé vers le milieu de ce plan, & à une distance de ce plan, qui soit très-petite par rapport aux dimensions du corps attirant qu'on suppose composé de particules homogenes dont les forces attractives décroissent en raison d'une puissance quelconque plus que quadruplée des distances, la force attractive de tout le corps attirant décroîtra à peu près dans la raison d'une puissance de la distance dont l'Exposant sera moindre de trois unités que celui de la puissance suivant laquelle agissent les particules. Cette Proposition n'a pas lieu lorsqu'il s'agit de corps composés de particules dont les forces attractives décroissent en raison de la puissance triplée des distances ; parce que dans ce cas l'attraction de cette partie ultérieure du corps infini dont on a parlé dans le Corol. 2. est toujours infiniment plus forte que l'attraction de la partie citérieure.

SCHOLIE.

Si un corps jetté suivant une direction & avec une vîtesse quelconque, est attiré perpendiculairement vers un plan donné par une force dont la loi est donnée, on trouvera la courbe qu'il décrira en cherchant, par la Prop. 39. le mouvement du corps qui descend en ligne droite vers ce plan, & en composant, par le Corol. 2. des loix, ce mouvement avec le mouvement uniforme dirigé dans des lignes paralleles à ce même plan. Et au contraire, si on cherche la loi de l'attraction dirigée perpendiculairement vers le plan, par cette condition, que le corps attiré se meuve dans une ligne courbe quelconque donnée, on résoudra le Problême en opérant comme dans le Problême 3.

Mais la solution de ce dernier Problême peut être plus courte en employant ainsi les suites.

Suppoſons, par éxemple, qu'un corps décrive une courbe dont les ordonnées, faiſant avec le plan attirant un angle conſtant, ſoient comme les puiſſances $\frac{m}{n}$ des abſciſſes A priſes ſur ce plan. Pour trouver la force attractive de ce plan en vertu de laquelle cette courbe eſt décrite, on ſuppoſera que l'abſciſſe A augmente d'une très-petite partie O, & on transformera l'ordonnée $\overline{A+O}^{\frac{m}{n}}$ en une ſuite infinie $A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} O A^{\frac{m-n}{n}} + \frac{mm-mn}{2nn} O O A^{\frac{m-2n}{n}}$ + &c. & on ſuppoſera la force cherchée proportionnelle au terme de cette ſuite, dans lequel O a deux dimenſions, c'eſt-à-dire, que cette force ſera comme $\frac{mm-mn}{2nn} O O A^{\frac{m-2n}{n}}$, ou comme $\frac{mm-mn}{2nn} A^{\frac{m-2n}{n}}$, ou bien encore comme $\frac{mm-mn}{nn} B^{\frac{m-2n}{m}}$.

Si $m=2$, $n=1$, ce qui fait de la courbe décrite une parabole, la force deviendra comme $2B^0$, c'eſt-à-dire, qu'elle deviendra conſtante. Or on ſçait en effet, par ce qu'a appris Galilée, qu'une force conſtante, & qui agit parallelement, fait décrire une parabole.

Si $m=o-1$ & $n=1$; la force deviendra comme $2A^{-3}$ ou $2B^3$. Donc, une force qui feroit comme le cube de l'ordonnée, feroit décrire une hyperbole. Mais paſſons à quelques autres Propoſitions ſur le mouvement.

QUATORZIÉME SECTION.

Du Mouvement des corpuſcules attirés par toutes les parties d'un corps quelconque.

PROPOSITION XCIV. THÉORÉME XLVIII.

Si deux milieux, dont chacun eſt homogene, ſont ſéparés par un eſpace terminé de part & d'autre par des plans paralléles, & qu'un corps en paſſant par cet eſpace ſoit attiré ou pouſſé perpendiculairement vers l'un ou l'autre de ces milieux, que de plus il n'éprouve aucune autre force qui le retarde ou l'accélere ; & que l'attraction ſoit toujours la même partout à des diſtances égales de l'un & de l'autre plan priſes du même côté de ces plans : le ſinus d'incidence ſur l'un ou l'autre plan ſera en raiſon donnée au ſinus d'émergence par l'autre plan.

Cas. 1. Aa, Bb, étant deux plans paralleles, ſuppoſez qu'un corps tombe ſur le premier plan Aa ſuivant la ligne GH, & que pendant tout le temps de ſon paſſage par l'eſpace intermédiaire il ſoit attiré ou pouſſé vers le milieu où s'eſt fait l'incidence, enſorte que par cette attraction il décrive la courbe HI, & qu'il ſorte ſuivant la ligne IK. Elevez enſuite ſur le plan d'émergence Bb la perpendiculaire IM qui rencontre en M la ligne d'incidence GH prolongée, & en R le plan d'incidence Aa. Du centre L où la ligne d'émergence prolongée rencontre HM, & du rayon LI décrivez un cercle qui coupe la ligne HM en P & en Q, & en N la ligne MIR. Cela fait, en ſuppoſant l'attraction ou l'impulſion uniforme, la courbe HI ſera, ſuivant les démonſtrations de Galilée, une parabole, & aura par conſéquent cette propriété, que le rectangle ſous le parametre donné & ſous la ligne IM eſt égal au quarré de HM ; mais Fig. 147.

à cause que la ligne HM est coupée en deux parties égales au point L, il est clair, en abaissant la perpendiculaire LO sur MI, que MO est égale à OR, ainsi que MN à IR. Or comme IR est donnée, MN le sera aussi; donc le rectangle $NM \times MI$ sera au rectangle sous le parametre & sous IM, c'est-à-dire, à HM^2, en raison donnée. De plus, le rectangle $NM \times MI$ est égal au rectangle $PM \times MQ$, c'est-à-dire, à la différence des quarrés ML^2 & PL^2, ou LI^2; & HM^2 à une raison donnée à ML^2 puisqu'il en est quadruple: donc la raison de $ML^2 - LI^2$ à ML^2 est donnée, & par conséquent la raison de LI^2 à ML^2, & celle de LI à LM sont aussi données. Maintenant dans tout triangle LMI, les sinus des angles sont proportionnels aux côtés opposés, donc la raison du sinus de l'angle d'incidence LMR au sinus de l'angle d'émergence LIR est donnée. *C. Q. F. D.*

Fig. 147.

Fig. 148. *Cas* 2. Que le corps passe à présent successivement par plusieurs espaces terminés par des plans paralleles $AabB$, $BbcC$, &c. & qu'il soit pressé par une force uniforme dans chaque espace, mais différente dans des espaces différens; il est clair, par ce qui vient d'être démontré, que le sinus d'incidence sur le premier plan Aa, sera au sinus d'émergence du second plan Bb, en raison donnée, & que ce dernier sinus, qui devient le sinus d'incidence sur le second plan Bb, sera au sinus d'émergence du troisiéme plan Cc, en raison donnée; ensuite, que ce nouveau sinus sera au sinus d'émergence du quatrieme plan Dd, en raison donnée; & ainsi à l'infini, en sorte qu'il en résultera, que le sinus d'incidence sur le premier plan est au sinus d'émergence du dernier plan en raison donnée. Imaginons à présent que les intervalles des plans diminuent à l'infini, & que le nombre de ces plans augmente de même, en sorte que l'action de l'attraction ou de l'impulsion devienne continue selon une loi quelconque donnée; alors la raison du sinus d'incidence sur le premier plan au sinus d'émergence du dernier plan, sera aussi donnée. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION XCV. THÉORÉME XLIX.

Les mêmes choses étant posées, la vîtesse du corps avant l'incidence est à sa vîtesse après l'émergence, comme le sinus d'émergence au sinus d'incidence.

Soient prises égales les lignes *AH*, *Id*, & soient élevées les perpendiculaires *AG*, *dK* qui rencontrent les lignes d'incidence & d'émergence *GH*, *IK*, en *G* & *K*. Soit prise ensuite sur *GH*, *TH*=*IK*, & soit abbaissée la perpendiculaire *Tv* sur le plan *Aa*. Si l'on décompose, par le Corol. 2. des loix, le mouvement du corps en deux mouvemens, l'un perpendiculaire aux plans *Aa*, *Bb*, *Cc*, *&c.* & l'autre parallele à ces mêmes plans, la force de l'attraction ou de l'impulsion agissant suivant des lignes perpendiculaires, ne changera rien aux mouvemens suivant des lignes paralleles, & par conséquent le corps par ce mouvement parcourera en temps égaux dans la direction parallele aux plans les espaces égaux qui sont entre la ligne *AG* & le point *H*, & entre le point *I* & la ligne *dK*; c'est-à-dire, qu'en temps égaux il parcourera les lignes *GH*, *IK*; & par conséquent la vîtesse avant l'incidence sera à la vîtesse après l'émergence comme *GH* à *IK* ou *TH*, ou, ce qui revient au même, comme *AH* ou *Id* à *vH*, ou enfin, à cause de l'égalité des rayons *TH*, ou *IK*, comme le sinus d'émergence au sinus d'incidence. *C. Q. F. D.* Fig. 149.

PROPOSITION XCVI. THÉORÉME L.

Les mêmes choses étant posées, & supposant de plus que le mouvement avant l'incidence soit plus prompt qu'après : si on donne une certaine inclinaison à la ligne d'incidence, le corps se réfléchira, & fera l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence.

Car supposant, comme ci-dessus, qu'un corps décrive des arcs paraboliques entre les plans paralleles *Aa*, *Bb*, *Cc*, *&c.* & que ces arcs soient *HP*, *PQ*, *QR*, *&c.* soit prise l'obliquité de la ligne d'incidence *GH* sur le premier plan *Aa*, telle, que Fig. 150.

Fig. 150.

le sinus d'incidence soit au rayon du cercle dont il est sinus, dans la raison que ce même sinus d'incidence a au sinus d'émergence hors du plan Dd dans l'espace $DdeE$: le sinus d'émergence se trouvant par ce moyen égal au rayon, l'angle d'émergence sera droit, & la ligne d'émergence coïncidera avec le plan Dd. Le corps étant donc arrivé au point R de ce plan, & ayant alors une direction qui coïncide avec ce plan, il est clair qu'il ne pourra pas aller plus avant que ce plan Ee. Mais le même corps ne peut pas non plus continuer à se mouvoir dans la ligne d'émergence Rd, parce qu'il est perpétuellement attiré, ou poussé vers le milieu de l'incidence: il retournera donc entre les plans Cc, Dd, en décrivant l'arc parabolique QRq, dont le sommet est en R; & en coupant le plan Cc sous le même angle en q, qu'il l'avoit coupé auparavant en Q; ensuite, continuant à décrire des arcs paraboliques qp, ph, &c. semblables & égaux aux premiers arcs paraboliques QP, PH, &c. il coupera le reste des plans sous les mêmes angles en p, h, &c. qu'il les avoit coupés auparavant en P, H, &c. & il aura en sortant la même obliquité en h, que celle qu'il avoit dans son incidence en H. Si on conçoit à présent que les intervalles des plans Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, &c. diminuent à l'infini, & que le nombre de ces plans augmente de même, en sorte que l'attraction ou l'impulsion devienne continue selon une loi quelconque donnée, on verra que l'angle d'émergence sera toujours égal à l'angle d'incidence. *C. Q. F. D.*

SCHOLIE.

On peut appliquer ces recherches sur l'attraction à la réflexion de la lumiére & à sa réfraction qui se fait, comme Snellius l'a découvert, en raison donnée des Sécantes, & par conséquent en raison donnée des sinus, ainsi que Descartes l'a fait voir.

Car il est certain, par la découverte des phénomenes des satellites de Jupiter confirmée par les observations de plusieurs Astronomes, que la propagation de la lumiere est successive, & qu'elle vient du soleil à la terre en sept ou huit minutes; & les rayons en passant près des angles des corps opaques ou transparens tels que l'extrémité d'une lame de couteau, d'une piéce de monnoye, d'un morceau de verre, ou de pierre, &c. s'infléchissent autour de ces corps comme s'ils en étoient attirés: c'est ce qu'a découvert Grimaldi il y a longtemps en faisant entrer un rayon de lumiere par un trou dans une chambre obscure, & ce que j'ai vérifié.

Ceux de ces rayons qui en passant approchent le plus près des corps se courbent davantage, comme s'ils étoient plus attirés, ainsi que je m'en suis assuré par des expériences éxactes. Ceux qui passent à de plus grandes distances s'infléchissent moins; & ceux qui passent à des distances encore plus grandes s'infléchissent un peu en sens contraire, & forment trois faisceaux de couleurs. Dans la figure ci-jointe, *S* représente la pointe d'un couteau ou d'un corps quelconque *ASB*; & *gowog*, *fnunf*, *emtme*, *dlsld*, sont des rayons qui s'infléchissent vers le couteau par des arcs *owo*, *nun*, *mtm*, *lsl*, plus ou moins concaves selon leurs distances. Or comme cette courbure des rayons se fait à une certaine distance du couteau, les rayons qui l'atteignent doivent donc s'être infléchis avant de l'avoir atteint. Il en est de même des rayons qui tombent sur du verre: ainsi la réfraction ne se fait pas dans le seul point de l'incidence; mais peu à peu par l'incurvation continuelle des rayons, laquelle se fait en partie dans l'air avant qu'ils atteignent le verre, & en partie, si je ne me trompe, dans le verre même après qu'ils y sont entrés comme il est marqué dans la figure ci-jointe où les rayons *ckzc*, *biyb*, *ahxa*, dont l'incidence se fait en *r*, *q* & *p*, s'infléchissent entre *k* & *z*, *i* & *y*, *h* & *x*. Fig. 151. Fig. 152.

A cause de l'analogie qui est entre le mouvement progressif de la lumiere, & celui des autres projectiles, j'ai cru nécessaire d'ajouter les Propositions suivantes en faveur des Opticiens. Au reste, je ne m'embarasse point de la nature des rayons, je n'éxamine point s'ils sont matériels ou non ; mais je me contente de déterminer les trajectoires des corps qui peuvent être semblables à celles que décrivent les rayons.

PROPOSITION XCVII. PROBLÉME XLVII.

Supposant que le sinus d'incidence sur une superficie quelconque, soit au sinus d'émergence en raison donnée, & que l'incurvation des rayons près de cette superficie, se fasse dans un espace assez petit pour le regarder comme un point, on demande la superficie propre à réunir dans un lieu donné tous les corpuscules qui émanent successivement d'un autre lieu donné.

Fig. 153. Soit *A* le lieu d'où les corpuscules partent, & *B* le lieu dans lequel ils doivent se réunir ; soient de plus, *CDE* la courbe qui en tournant autour de l'axe *AB* décrit la superficie cherchée ; *D* & *E* deux points quelconques de cette courbe, *EF*, *EG*, des perpendiculaires abbaissées de *E* sur les rayons incidens & rompus *AD* & *DB*. Imaginant que le point *D* s'approche du point *E*, la derniere raison de l'incrément *DF* de *AD* au décrement *DG* de *BD* sera celle du sinus d'incidence au sinus d'émergence, & par conséquent elle sera donnée. Donc les quantités finies qui sont les augmentations de *AD*, & celles qui sont les diminutions de *BD* sont encore dans la même raison. Delà il suit, qu'en choisissant un point quelconque *C* dans l'axe *AB* pour être le sommet de la courbe demandée *CDE*, on n'aura qu'à prendre l'augmentation *CM* de *AC* à la diminution *CN* de *BC* dans la raison du sinus d'incidence au sinus d'émergence, & décrire des centres *A* & *B*, & des intervalles *AM*, *BN*, deux cercles qui se coupent mutuellement en *D*, afin d'avoir un point quelconque *D* de la courbe cherchée. *C. Q. F. T.*

Cor. 1. En supposant que le point *A* ou *B* s'éloigne à l'infini, ou qu'il vienne de l'autre côté du point *C*, on aura toutes les courbes que Descartes a données dans sa Géométrie & dans son Optique

Optique pour les réfractions ; & comme il n'a point exposé la maniere de les trouver, j'ai cru devoir la donner dans cette Proposition.

Cor. 2. Si un corps tombant sur une surface quelconque *CD*, & dans la direction d'une ligne droite quelconque *AD*, tirée suivant une loi quelconque, traverse cette surface, & prend en la quittant une autre direction quelconque *DK* ; je dis, que si on imagine tirées les courbes *CP*, *CQ* toujours perpendiculaires aux directions *AD*, *DK*, les accroissemens des lignes *PD*, *QD* & par conséquent les lignes mêmes *PD*, *QD* formées de ces accroissemens seront entr'elles en raison des sinus d'incidence & d'émergence : & au contraire.

PROPOSITION XCVIII. PROBLÉME XLVIII.

Les mêmes choses étant posées, & étant décrite autour de l'axe A B *une surface attractive quelconque* C D, *réguliere ou irréguliere, au travers de laquelle doivent passer des corps partis du point* A ; *trouver quelle seroit une autre surface attractive* E F *capable de faire converger ces corps au point donné* B. Fig. 154.

Du point *A* au point B soit tirée *AB* coupant la premiere surface en *C* & l'autre en *E*, & soit pris le point *D* à volonté. Qu'on suppose encore que le sinus d'incidence sur la premiere surface soit au sinus d'émergence de cette même surface en raison donnée *PE*, par exemple, comme de *M* à *N*, ainsi que le sinus d'émergence de la seconde surface au sinus d'incidence sur cette même surface ; ensuite, qu'on prolonge *AB* en *G*, ensorte que l'on ait *BG* à *CE* comme $M-N$ à *N* ; qu'on prolonge aussi *AD* en *H*, ensorte que $AH=AG$ & *DF* en un point *K*, placé de façon que *DK* soit à *DH* dans la raison de *N* à *M*. Du point *K* au point *B* tirez la droite *KB*. Du point *D* comme centre & du rayon

DH décrivez un cercle qui rencontre en L la ligne KB prolongée : enfin tirez BF parallele à DL ; je dis, que le point F sera un point de la ligne EF capable de produire par sa révolution autour de l'axe AB la surface cherchée. *C. Q. F. F.*

Car les lignes CP, CQ étant toujours respectivement perpendiculaires aux lignes AD, DF, ainsi que les lignes BR, ES, aux lignes FB, FD, & par conséquent ayant toujours QS égale à CE, on aura (par le Cor. 2. de la Prop. 97.) PD à QD comme M à N, par conséquent comme DL à DK, ou comme FB à FK ; & en divisant, comme $DL-FB$ ou $PH-PD-FB$ à FD ou $FQ-QD$. Donc, en composant, comme $PH-FB$ à FQ, c'est-à-dire, (à cause des lignes PH & CG, QS & CE qui sont égales) comme $CE+BG-FR$ à $CE-FS$. Mais (à cause des proportionnelles BG à CE & $M-N$ à N) on a aussi $CE+BG$ à CE comme M à N ; & par conséquent, en divisant, FR à FS comme M à N. Donc (par le Cor. 2. de la Prop. 97.) la surface EF oblige le corps qui tombe sur elle suivant la direction DF de prendre la direction FR qui le mene au point B. *C. Q. F. D.*

S C H O L I E.

On pourroit employer la même méthode pour trois surfaces & pour davantage. Au reste, pour l'optique, les figures sphériques sont celles qui conviennent le mieux. Si pour former les verres objectifs des lunettes on se sert de deux verres sphériques creux, appliqués l'un sur l'autre, & renfermant de l'eau dans leur concavité, il pourra arriver que les réfractions de l'eau corrigeront assez exactement les erreurs de réfractions occasionnées par l'inégalité des surfaces des verres ; & l'on doit préférer ces sortes de verres objectifs aux elliptiques & aux hyperboliques, tant parce qu'ils sont plus aisés à travailler, que parce qu'ils réfractent mieux les

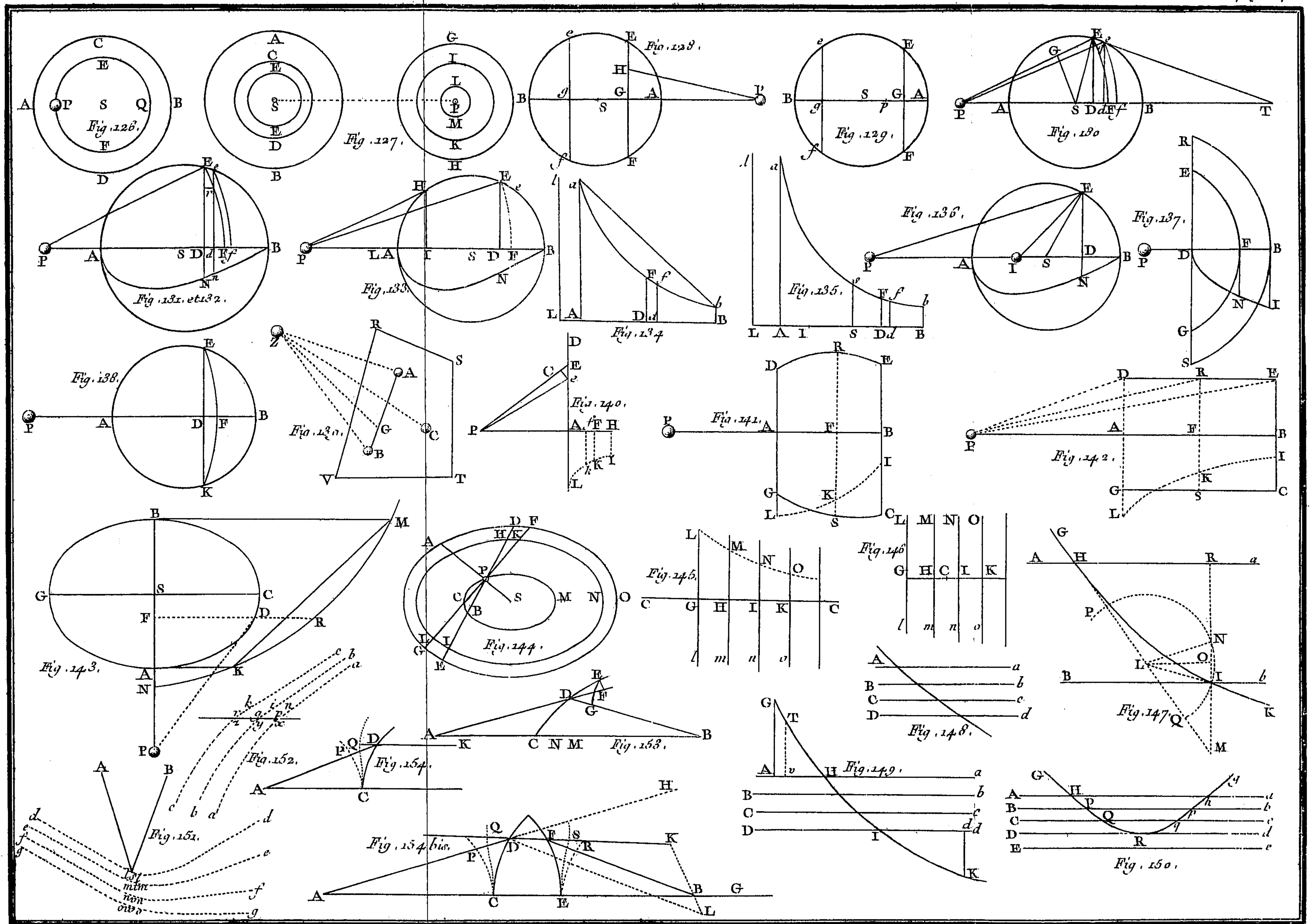


Fig. 126.
Fig. 127.
Fig. 128.
Fig. 129.
Fig. 130.
Fig. 131. et 132.
Fig. 133.
Fig. 134.
Fig. 135.
Fig. 136.
Fig. 137.
Fig. 138.
Fig. 139.
Fig. 140.
Fig. 141.
Fig. 142.
Fig. 143.
Fig. 144.
Fig. 145.
Fig. 146.
Fig. 147.
Fig. 148.
Fig. 149.
Fig. 150.
Fig. 151.
Fig. 152.
Fig. 153.
Fig. 154.
Fig. 154 bis.

rayons qui tombent hors de l'axe du verre. Cependant ce n'eſt point aſſez pour pouvoir perfectionner l'optique qu'on ait aſſigné aux verres la figure ſphérique ou telle autre quelconque, il faudroit encore pouvoir remédier à la différence de réfrangibilité des différens rayons. Tant qu'on ne ſera pas en état de corriger les erreurs qui naiſſent de cette différence, tout ce qu'on fera pour corriger les autres ne ſera jamais qu'imparfait.

Fin du premier Livre.

DU MOUVEMENT DES CORPS.

LIVRE SECOND.

SECTION PREMIERE.

Du Mouvement des corps qui éprouvent une résistance en raison de leur vîtesse.

PROPOSITION I. THÉORÊME I.

Le Mouvement que perdent les corps par la résistance qu'ils éprouvent, est comme l'espace qu'ils parcourent en se mouvant, lorsque cette résistance est en raison de leur vîtesse.

LE mouvement perdu à chaque particule égale du temps étant comme la vîtesse, c'est-à-dire, comme le chemin fait pendant cette particule de temps, le mouvement perdu pendant le temps total sera comme le chemin total. *C. Q. F. D.*

Cor. Ainsi, si un corps privé de toute gravité se meut dans des espaces libres par la seule force qui lui a été imprimée; &

que le mouvement total au commencement, ainsi que le reste du mouvement après quelque espace parcouru soient donnés : l'espace total que ce corps peut parcourir dans un temps infini sera aussi donné : & cet espace sera à l'espace déja décrit, comme le mouvement total au commencement, est à la partie de ce mouvement qui s'est perdue.

LEMME PREMIER.

Les quantités proportionnelles à leurs différences sont en proportion continue.

Soit $A : A-B :: B : B-C :: C : C-D$, &c. on en tirera en renversant $A : B :: B : C :: C : D$, &c. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION II. THÉORÉME II.

Si un corps éprouve une résistance en raison de sa vîtesse, & qu'il se meuve dans un milieu homogéne par la seule force qui lui a été imprimée, je dis, qu'en prenant des tems égaux, les vîtesses au commencement de chacun de ces temps seront en progression géométrique, & que les espaces parcourus pendant chacun de ces temps seront comme les vîtesses.

Cas. 1. Soit divisé le temps en particules égales, & soit supposé au commencement de chacune de ces particules une force résistante qui soit comme la vîtesse & qui agisse par un seul coup, le décrement de la vîtesse à chacune de ces particules de temps sera comme cette vîtesse, car les vîtesses sont continuellement proportionnelles à leurs différences. (Lemme 1. Liv. 2.) Donc, si d'un nombre égal de particules on compose des temps quelconques égaux, les vîtesses au commencement de ces temps seront comme les termes d'une progression continue pris par sauts, en obmettant un nombre égal de termes intermédiaires. Or les raisons de ces termes pris par sauts sont composés des raisons que les termes intermédiaires également répétés ont entr'eux, lesquelles sont les mêmes, donc ces raisons composées sont les mêmes, & les vîtesses proportionnelles à ces termes sont en progression géométrique. Maintenant, soient diminuées ces particules égales de temps, & soit leur nombre augmenté à l'infini, ensorte que l'impulsion de la résistance devienne continue; & les vîtesses qui sont toujours en proportion continue dans les commencemens des temps égaux le seront encore dans ce cas. *C. Q F. D.*

Cas. 2. Et par conséquent les différences des vîtesses, c'est-à-dire, leurs parties détruites à chaque particule de temps, sont comme les vîtesses totales: mais les espaces décrits à chacune de ces particules du temps sont comme les parties détruites des vîtesses. (Prop. 1. Liv. 2.) Donc ils sont aussi comme les vîtesses totales. *C. Q. F. D.*

Cor. De-là, si on décrit une hiperbole *B G*, entre les asymptotes perpendiculaires *A C*, *CH*, & que *A B*, *G D*, soient perpendiculaires sur l'asymptote *A C*, & qu'on exprime, tant la vîtesse du corps que la résistance du milieu dans le commencement du mouvement, par une ligne quelconque donnée *A C*, & après un temps quelconque par la ligne indéfinie *D C*; le temps pourra être exprimé par l'aire *A B G D*, & l'espace décrit pendant ce temps, par la ligne *A D.* Car si cette aire, par le mouvement du point *D*, augmente uniformement comme le temps, la ligne *D C* ainsi que la vîtesse décroîtront en proportion géométrique, & les parties de la droite *A C* décrites dans des temps égaux décroîtront dans la même raison. Fig. 1.

PROPOSITION III. PROBLÉME I.

Trouver le mouvement d'un corps qui monte ou descend suivant une ligne droite dans un milieu homogene qui résiste en raison de la vîtesse pendant que la gravité agit uniformément.

Que la gravité du corps qui remonte soit représentée par un rectangle quelconque donné *B A C H*, & la résistance du milieu au commencement de son ascension par le rectangle *B A D E*; pris du côté opposé au premier. Entre les asymptotes perpendiculaires *A C*, *C H*, soit décrit par le point *B* une hiperbole qui coupe les perpendiculaires *D E*, *d e* en *G* & en *g*; il est clair, Fig. 2.

Fig. 2.

que le corps en montant pendant le temps *D G g d* parcourera l'espace *E G g e*, & que pendant le temps *D G B A* de toute son ascension il parcourera l'espace *E G B*; dans le temps *A B K I* il parcourera en descendant l'espace *B F K*, & dans le temps *I K k i*; il parcourera en descendant l'espace *K F f k* & les vîtesses du corps (proportionnelles aux résistances du milieu) à la fin des temps entiers, seront exprimées par les espaces infiniment petits, *A B E D*, *A B e d*; respectivement proportionnels aux espaces *A B F I*, *A B f i*; & la plus grande vîtesse que le corps puisse acquérir en descendant sera *B A C H*.

Fig. 3.

Car soit divisé le rectangle *B A C H* en un nombre infini de rectangles *A k*, *K l*, *L m*, *M n*, &c. qui soient comme les incrémens des vîtesses en autant de temps égaux; & les rectangles infiniment petits, *A k*, *A l*, *A m*, *A n*, &c. seront comme les vîtesses totales, & par conséquent (par l'hypotese) comme les résistances du milieu au commencement de chacun de ces temps égaux. Soit fait *A C* à *A K* ou *A B H C* à *A B k K*, comme la force de la gravité à la résistance dans le commencement du second temps, & soient les résistances soustraites de la force de la gravité, les restes *A B H C*, *K k H C*, *L l H C*, *M m H C*, &c. seront comme les forces absolues par lesquelles le corps est pressé au commencement de chacun de ces temps, & par conséquent (par la seconde Loi du mouvement) comme les incremens des vîtesses, c'est-à-dire, comme les rectangles *A k*, *K l*, *L m*, *M n*, &c. c'est à-dire, (Lemme I. du Livre II.) en progression géométrique. Prolongeant donc les droites *K k*, *L l*, *M m*, *N n*, &c. jusqu'à ce qu'elles rencontrent l'hyperbole en *q*, *r*, *s*, *t*, &c. les aires *A B q K*, *K q r L*, *L r s M*, *M s t N*, &c. seront égales, & par conséquent elles seront toujours proportionnelles tant aux temps qu'aux forces de la gravité qui sont toujours égales. Or l'aire *A B q K*, (Cor. 3. Lemme 7. & 8. du Liv. I.) est à l'aire *B k q* comme *K q* à $\frac{1}{2}$ *k q*, ou comme *A C* à $\frac{1}{2}$ *A K*, c'est-à-dire, comme la force de la gravité à la résistance dans le milieu du premier temps. Et par le même raisonnement, les aires *qKLr*, *rLMs*, *sMNt*, &c. sont aux aires *qklr*, *rlms*, *smnt*, &c. comme les forces de la gravité aux résistances dans le milieu du second temps, du troisiéme, du quatriéme, &c. Donc les aires égales *BAKq*, *qKLr*, *rLMs*, *sMNt*, &c. étant proportionnelles aux forces de la gravité, les aires *Bkq*, *qklr*, *rlms*, *smnt*, &c. seront proportionnelles aux résistances dans les milieux de chacun des temps, c'est-à-dire, (par l'hypotese) aux vîtesses, & par conséquent aux espaces décrits. Soient prises les sommes de ces quantités proportionnelles, & les aires *Bkq*, *Blr*, *Bms*, *Bnt*, &c. seront proportionnelles à tous les espaces décrits, de même que les aires *ABqK*, *ABrL*, *ABsM*, *ABtN*, &c. le seront aux temps. Donc le corps en descendant dans un temps quelconque *ABrL* décrit l'espace *Blr*, & dans le temps *LrtN* l'espace *rlnt*. *C.Q.F.D.* Fig. 3.

Et c'est la même démonstration pour le mouvement en remontant. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Donc la plus grande vîtesse que le corps peut acquérir en descendant est à la vîtesse acquise dans un temps quelconque donné, comme la force donnée de la gravité par laquelle ce corps est continuellement pressé, est à la force de la résistance qui s'oppose à cette force à la fin de ce temps.

Cor. 2. Or le temps étant augmenté en progression arithmétique, la somme de cette plus grande vîtesse, & de la vîtesse dans l'ascension, ainsi que leur différence dans la descension, décroît en progression géométrique.

Cor. 3. Et de même les différences des espaces qui sont décrits dans les différences égales des temps, décroissent dans la même progression géométrique.

Cor. 4. Mais l'espace décrit par le corps est la différence des deux espaces dont l'un est comme le temps pris depuis le commencement de la descension, & l'autre comme la vîtesse, lesquels espaces sont égaux entr'eux au commencement du mouvement.

PROPOSITION IV. PROBLÉME II.

Suppofant que la force de la gravité foit uniforme dans quelque milieu homogene, & qu'elle tende perpendiculairement au plan de l'horifon; trouver le mouvement d'un projectile dans ce même milieu, en fuppofant que la réfiftance foit proportionnelle à la vîteffe.

Fig. 4. Qu'un projectile parte d'un lieu quelconque D, felon une ligne droite quelconque donnée DP, & que la vîteffe au commencement du mouvement foit exprimée par la ligne DP. Que du point P à la ligne horifontale DC, on abaiffe la perpendiculaire PC, & qu'on coupe DC en A deforte que DC foit à CA comme la réfiftance du milieu produite par le mouvement en hauteur eft à la force de gravité dans le commencement du mouvement; ou, (ce qui eft la même chofe) que le point A foit pris enforte que le rectangle fous DA, & DP, foit au rectangle fous AC, & CP comme toute la réfiftance au commencement du mouvement eft à la force de la gravité. Cela fait, foit décrite une hiperbole quelconque $GTBS$ entre les afymptotes DC, CP, laquelle coupe les perpendiculaires DG, AB en G & en B, & foit achevé le parallélograme $DGKC$, dont le côté GK, coupe AB en Q. Soit prife la ligne N dans la même raifon à QB que DC à CP; & ayant élevé fur la ligne DC à un point quelconque R une perpendiculaire RT, qui rencontre l'hiperbole en T, & les droites EH, GK, DP en I, t, & V, prenez fur cette perpendiculaire Vr égale à $\frac{tGT}{N}$; ou (ce qui eft la même chofe) prenez Rr égale à $\frac{GTIE}{N}$; & le projectile dans le temps $DRTG$ arrivera au point r, en décrivant la ligne courbe $DraF$ donnée par les points r, & il acquérera fa plus grande hauteur en a, dans la perpendiculaire AB, après quoi il continuera de s'approcher toujours de l'afymptote PC. Quant à fa vîteffe dans un point quelconque r, elle

fera comme la tangente $r L$ de la courbe. *C. Q. F. T.*

Fig. 4.

Car N eſt à $Q B$ comme $D C$ à $C P$ ou comme $D R$ à $R V$. Donc $R V = \frac{D R \times Q B}{N}$ & $R r$, (c'eſt-à-dire, $R V - V r$, ou $\frac{D R \times Q B - t G T}{N}$) $= \frac{D R \times A B - R D G T}{N}$. Que le temps ſoit repréſenté par l'aire $R D G T$, & (Cor. 2. des Loix) ſoit le mouvement du corps décompoſé en deux mouvemens, l'un en montant, l'autre tranſverſal. La réſiſtance étant comme le mouvement, qu'elle ſoit auſſi décompoſée en deux parties proportionnelles & oppoſées aux deux parties du mouvement décompoſé : par ce moien la longueur décrite par le mouvement tranſverſal ſera (Prop. 2. de ce Livre) comme la ligne $D R$, mais la hauteur (Prop. 3. de ce Livre) ſera comme l'aire $D R \times A B - R D T G$, c'eſt-à-dire, comme la ligne $R r$. Et dans le commencement du mouvement l'aire $R D T G$ eſt égale au rectangle $D R \times A Q$, donc cette ligne $R r$ (ou $\frac{D R \times A B - D R \times A Q}{N}$) eſt alors à $D R$ comme $A B - A Q$, ou $Q B$ à N, ce qui eſt comme $C P$ à $D C$; & par conſéquent comme le mouvement en hauteur au mouvement tranſverſal au commencement. Or comme $R r$ eſt toujours proportionnelle à l'eſpace parcouru en hauteur, & $D R$ toujours proportionnelle à l'eſpace parcouru d'un mouvement tranſverſal, & que $R r$ eſt à $D R$ dans le commencement comme l'eſpace en hauteur eſt à l'eſpace tranſverſal : il eſt néceſſaire que $R r$ ſoit toujours à $D R$, comme l'eſpace en hauteur à l'eſpace tranſverſal, & que par conſéquent le corps ſe meuve dans la ligne $D r a F$ qui eſt le lieu des points r. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Donc $R r = \frac{D R \times A B}{N} - \frac{R D T G}{N}$: donc, ſi on prolonge $R T$ en X, enſorte que $R X = \frac{D R \times A B}{N}$, c'eſt-à-dire, ſi on achève le parallélograme $A C P Y$, qu'on tire $D Y$ coupant CP en Z, & qu'on prolonge RT jusqu'à ce qu'elle rencontre DY en X; on aura $Xr = \frac{RDGT}{N}$, & par conséquent proportionnelle au temps.

Fig. 4.

Cor. 2. Donc, si l'on prend un nombre innombrable de CR, ou (ce qui est la même chose) un nombre innombrable de ZX en progression géométrique, on aura autant de Xr en progression arithmétique. Et delà on pourra facilement décrire la courbe $DraF$ par les tables des logarithmes.

Fig. 5.

Cor. 3. Si du sommet D du diametre DG prolongé en embas & d'un parametre qui soit à $2DP$ comme toute la résistance au commencement du mouvement à la force de la gravité, on construit une parabole; la vîtesse avec laquelle le corps doit partir du lieu D, selon la droite DP, pour qu'il décrive, dans un milieu qui résiste uniformement, la ligne courbe $DraF$, sera la même que celle avec laquelle il devroit partir du même lieu D selon la même ligne droite DP pour décrire la parabole dans un milieu non résistant. Car le parametre de cette parabole dans le commencement du mouvement est $\frac{DV^2}{Vr}$, & Vr est $\frac{tGT}{N}$ ou $\frac{DR \times Tt}{2N}$; mais la droite qui toucheroit l'hyperbole GTS en G est parallele à DK, donc Tt est $\frac{CK \times DR}{DC}$, & comme N étoit $\frac{QB \times DC}{CP}$, Vr sera par conséquent $\frac{DR^2 \times CK \times CP}{2DC^2 \times QB}$ ou (à cause des proportionnelles DR & DC, DV & DP) $\frac{DV^2 \times CK \times CP.}{2DP^2 \times QB}$, donc le parametre $\frac{DV^2}{Vr}$ devient $\frac{2DP^2 \times QB}{CK \times CP}$, ou (à cause des proportionnelles QB & CK, DA & AC) $\frac{2DP^2 \times DA}{AC \times CP}$ & par conséquent il est à $2PD :: DP \times DA : CP \times AC$; c'est-à-dire, comme la résistance à la gravité. *C. Q. F. D.*

Cor. 4.

Cor. 4. Delà, si un corps est lancé d'un lieu quelconque *D* avec une vîtesse donnée, selon une ligne droite *DP* donnée de position; & que la résistance du milieu soit donnée dans le commencement du mouvement: on trouvera la courbe *D r a F* que le même corps décrira. Car la vîtesse étant donnée, on sçait que le parametre de la parabole est donné : & prenant 2 *D P* à ce parametre, comme la force de la gravité est à la force de la résistance, on aura *DP*. Ensuite coupant *D C* en *A*, ensorte que $CP \times CA$ soit à $DP \times DA$ dans cette même raison de la gravité à la résistance, on aura le point *A*, & par conséquent la courbe *D r a F*. Fig. 5.

Cor. 5. Et au contraire, si la courbe *D r a F* est donnée, on aura la vîtesse du corps, & la résistance du milieu à chaque lieu *r*. Car de la raison donnée de $CP \times AC$ à $DP \times DA$, on tire la résistance du milieu au commencement du mouvement, & le parametre de la parabole, ce qui donne aussi la vîtesse au commencement du mouvement. Ensuite, de la longueur de la tangente *r L*, on tire la vîtesse qui lui est proportionnelle, & par conséquent la résistance du milieu à un lieu quelconque *r*, laquelle est proportionnelle à cette vîtesse. Fig. 4.

Cor. 6. De ce que la longueur 2 *P D* est au parametre de la parabole comme la gravité à la résistance en *D*; & de ce que la vîtesse étant augmentée, la résistance augmente dans la même raison, & le parametre de la parabole dans la raison doublée de cette raison; il suit que la longueur 2 *P D* augmentera dans cette raison simple, qu'elle sera toujours proportionnelle à la vîtesse, & qu'elle n'augmentera, ni ne diminuera, quoique l'angle *C D P* change, à moins que la vîtesse ne change aussi.

Cor. 7. D'où on voit la maniere de déterminer à peu près la courbe *D r a F* par les phénomenes, & de conclure delà la résistance & la vîtesse avec laquelle le corps a été lancé. Soient deux corps semblables & égaux jettés avec la même vîtesse d'un lieu *D* sous divers angles *CDP*, *CDp*, & que les lieux *F*, *f*, Fig. 6.

Fig. 6. & 7.

où ils tombent sur le plan horisontal $D\ C$ soient connus. Alors prenant une longueur quelconque pour $D\ P$ ou $D\ p$, supposant de plus que la résistance en D soit à la gravité dans une raison quelconque, & exprimant cette raison par une longueur quelconque $S\ M$, on trouvera par le calcul, & par cette longueur $D\ P$, prise à volonté, les longueurs $D\ F$, $D\ f$; & ayant trouvé par le calcul la raison de $\frac{Ff}{DF}$ on en ôtera cette même raison trouvée par les expériences, & on en exprimera la différence par la perpendiculaire $M\ N$. On recommencera ensuite la même chose une seconde & une troisiéme fois, en prenant toujours une nouvelle raison $S\ M$ de la résistance à la gravité, & rassemblant les différences on aura une nouvelle différence $M\ N$. Plaçant alors les différences positives d'un côté de la droite $S\ M$ & les négatives de l'autre, & traçant par les points N, N, N la courbe $N\ N\ N$ qui coupe la droite $S\ M\ M\ M$ en X, $S\ X$ sera la vraie proportion cherchée de la résistance à la gravité. Au moyen de cette proportion le calcul donnera la longueur $D\ F$, & la longueur, qui sera à la longueur supposée $D\ P$ comme la longueur $D\ F$ connue par l'expérience à la longueur $D\ F$ ainsi trouvée, sera la vraie longueur $D\ P$, laquelle suffira pour donner la ligne courbe $D\ r\ a\ F$ que le corps décrit, la vîtesse du corps, & la résistance à chaque lieu.

SCHOLIE.

Au reste, l'hipothese qui fait la résistance des corps en raison de la vîtesse, est plus mathématique que conforme à la nature. Dans les milieux qui n'ont aucune tenacité les résistances des corps sont en raison doublée des vîtesses. Car dans un temps moindre, un corps qui aura une plus grande vîtesse communiquera à la même quantité du milieu un mouvement plus grand, en raison de sa plus grande vîtesse; donc en temps égal il lui communiquera un mouvement plus grand dans la raison doublée, à cause de la plus grande quantité des parties du milieu qui sont muës ; & la résistance (Loix 2. & 3. du mouvement) est comme le mouvement communiqué : voyons donc quels mouvemens doivent suivre de cette loi de résistance.

DEUXIÉME SECTION.

Du Mouvement des Corps qui éprouvent une résistance en raison doublée des vîtesses.

PROPOSITION V. THÉORÉME III.

Si *le corps éprouve une résistance en raison doublée de la vîtesse, & qu'il se meuve dans un milieu homogène, par la seule force qui lui a été imprimée ; je dis, qu'en prenant les temps dans une progression géométrique ascendante, les vîtesses au commencement de chaque temps seront dans la même progression géométrique inversement ; & que les espaces décrits à chacun de ces temps seront égaux.*

Car puisque la résistance du milieu est proportionnelle au quarré de la vîtesse, & que le décrément de la vîtesse est proportionnel à la résistance ; si on divise le temps en un nombre infini de parties égales, les quarrés des vîtesses à chaque commencement des temps seront proportionnels aux différences de ces mêmes vîtesses. Soient ces particules de temps AK, KL, LM, &c. prises sur la droite CD, & soient élevées les perpendiculaires AB, Kk, Ll, Mm, &c. rencontrant en B, k, l, m, &c. l'hyperbole $BklmG$ décrite entre les asymptotes perpendiculaires CD, CH, on aura $AB : Kk :: CK : CA$; & par conséquent $AB - Kk : Kk :: AK : CA$, ou $AB - Kk : AK :: Kk : CA$, c'est-à-dire, comme $AB \times Kk : AB \times CA$, d'où AK & $AB \times CA$ étant données, on aura, $AB - Kk$ comme $AB \times Kk$; & à la fin, (lorsque AB & Fig. 8.

Du Mouvement des Corps.

Kk coïncident) comme AB^2. Par le même raisonnement, on aura $Kk-Ll$ & $Ll-Mm$, &c. proportionnels à Kk^2 & Ll^2, &c. Les quarrés des lignes AB, Kk, Ll, Mm sont donc comme leurs différences; & comme les quarrés des vîtesses sont aussi comme ces mêmes différences, les deux progressions seront semblables. Ce qui étant démontré, il suit que les aires décrites par ces lignes sont dans une progression semblable à celle des espaces décrits avec ces vîtesses. Donc, si la vîtesse au commencement du premier temps AK est exprimée par la ligne AB, & la vîtesse au commencement du second KL par la ligne Kk, & la longueur décrite dans le premier temps, par l'aire $AKkB$; toutes les vîtesses suivantes seront exprimées par les lignes suivantes Ll, Mm, &c. & les longueurs décrites par les aires Kl, Lm, &c. d'où en composant, si le temps total est exprimé par la somme de ses parties AM, la longueur totale décrite sera exprimée par la somme de ses parties $AMmB$. Supposez à-présent que le temps AM soit divisé dans les parties AK, KL, LM, &c. en sorte que CA, CK, CL, CM, &c. soient en progression géométrique; ces parties seront dans la même progression, & les vîtesses AB, Kk, Ll, Mm, &c. seront dans la même progression inversement; & par conséquent les espaces décrits Ak, Kl, Lm, &c. seront égaux. *C. Q. F. D.*

Fig. 8. *Cor.* 1. Il est donc clair, que si le temps est exprimé par une partie quelconque AD de l'asymptote, & la vîtesse dans le commencement de ce temps par l'ordonnée AB; la vîtesse à la fin de ce temps sera exprimée par l'ordonnée DG; & l'espace total décrit sera représenté par l'aire hiperbolique adjacente $ABGD$: de même, l'espace qu'un corps peut décrire dans un milieu non résistant pendant le même temps AD, & avec la premiere vîtesse AB, sera représenté par le rectangle $AB \times AD$.

Cor. 2. Delà on a l'espace décrit dans un milieu résistant, en prenant cet espace à l'espace qui peut être décrit dans le même temps dans un milieu non résistant avec la vîtesse uniforme AB.

comme l'aire hiperbolique *ABGD* eſt au rectangle $AB \times AD$.

Cor. 3. La réſiſtance du milieu ſera auſſi donnée en la ſuppoſant égale au commencement du mouvement à la force centripete uniforme qui peut produire la vîteſſe *AB*, dans un corps qui tombe dans un milieu non réſiſtant pendant le temps *AC*. Car ſi on mene *BT* qui touche l'hyperbole en *B*, & rencontre l'aſymptote en *T*; la droite *AT* ſera égale à *AC*, & repréſentera le temps dans lequel la premiere réſiſtance étant uniformement continuée, peut ôter au corps toute la vîteſſe *AB*. Fig. 8.

Cor. 4. Et par-là on a auſſi la proportion de cette réſiſtance à la force de la gravité, ou à une autre force centripete quelconque donnée.

Cor. 5. Et réciproquement, ſi la proportion de la réſiſtance à une force centripete quelconque eſt donnée, on aura auſſi le temps *AC* pendant lequel la force centripete, égale à la réſiſtance, peut produire une viteſſe quelconque *AB*; & on aura par-là le point *B*, par lequel on doit décrire l'hyperbole: donc les aſymptotes ſeront *CH*, *CD*, ainſi que l'eſpace *ABGD* que le corps peut décrire en commençant à ſe mouvoir avec une vîteſſe *AB*, dans un milieu également réſiſtant pendant un temps quelconque *AD*.

PROPOSITION VI. THÉORÉME IV.

Les corps ſphériques, homogènes & égaux qui éprouvent une réſiſtance en raiſon doublée des vîteſſes, & qui ſe meuvent par les ſeules forces qui leur ont eté imprimées, décrivent toujours des eſpaces égaux dans des temps réciproquement proportionnels aux vîteſſes qu'ils ont au commencement & ils perdent des parties de vîteſſe proportionnelles à leur vîteſſe totale.

Ayant décrit une hyperbole quelconque *BbEe*, dont les aſymptotes ſoient les perpendiculaires *CD*, *CH*, & qui ſoit coupée en *B*, *b*, *E*, *e*, par les perpendiculaires *AB*, *ab*, *DE*, *de*, que les vîteſſes initiales ſoient exprimées par les perpendiculaires *AB*, *DE*, & les temps par les lignes *Aa*, *Dd*. On a (par l'hypotheſe) $DE : AB :: Aa : Dd$, ou (par la nature de l'hyperbole) Fig. 9.

Du Mouvement des Corps.

Fig. 9.

:: $CA : CD$, & par conséquent :: $Ca : Cd$, donc les aires $ABba$, $DEed$, c'est-à-dire, les espaces décrits sont égaux entr'eux, & les premieres vîtesses AB, DE sont proportionnelles aux dernieres ab, de, & sont par conséquent proportionnelles aux parties perdues de ces vîtesses $AB - ab$ $DE - de$. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION VII. THÉORÊME V.

Les corps sphériques qui éprouvent une résistance en raison doublée des vîtesses, perdent dans des temps qui sont directement comme les premiers mouvemens, & inversement comme les premieres résistances, des parties de mouvement proportionnelles aux touts; & décrivent des espaces en raison composée de ces temps, & des premieres vîtesses.

Car les parties perdues des mouvemens sont en raison composée des résistances & des temps. Donc comme ces parties sont proportionnelles aux touts, la raison composée de la résistance & du temps doit être celle du mouvement. Ainsi le temps sera comme le mouvement directement, & comme la résistance inversement. C'est pourquoi les particules des temps étant prises dans cette raison, les corps perdront toujours des particules de mouvement proportionnelles aux touts, & par conséquent ils conserveront toujours des vîtesses proportionnelles à leurs premieres vîtesses. Et à cause de la raison donnée des vîtesses, ils décriront toujours des espaces qui seront comme les premieres vîtesses & les temps conjointement: *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Donc, si les corps qui ont des vîtesses égales éprouvent des résistances qui soient en raison doublée des diamétres: les globes homogènes mus avec des vîtesses quelconques perdront des parties de mouvement proportionnelles aux touts en parcourant des espaces proportionnels à leurs diamétres. Ainsi le mouvement d'un globe quelconque sera comme sa vîtesse, & sa masse conjointement, c'est-à-dire, comme sa vîtesse & le cube de son diamétre; la résistance (par l'hypotese) sera comme le quarré du diamétre & le quarré de la vîteſſe conjointement ; & le temps (par cette Propoſition) eſt dans la premiere raiſon directement, & dans la derniere inverſement, c'eſt-à-dire, directement comme le diamétre, & inverſement comme la vîteſſe ; donc l'eſpace qui eſt proportionnel au temps & à la vîteſſe, eſt comme le diamétre.

Cor. 2. Si des corps qui ont des vîteſſes égales éprouvent des réſiſtances qui ſoient en raiſon ſeſquiplée de leurs diamétres : les globes homogènes mus avec des vîteſſes quelconques, perdront des parties de leurs mouvemens proportionnelles aux touts en parcourant des eſpaces en raiſon ſeſquiplée de leurs diamétres.

Cor. 3. Et généralement, ſi des corps qui ont des vîteſſes égales éprouvent des réſiſtances en raiſon d'une puiſſance quelconque de leurs diamétres ; les eſpaces dans leſquels des globes homogènes mus avec des vîteſſes quelconques perdront des parties de mouvement proportionnelles aux touts, ſeront comme les cubes des diamétres diviſés par cette puiſſance. Soient les diamétres D & E, ſi les réſiſtances, lorſque les vîteſſes ſont ſuppoſées égales, ſont comme D^n & E^n, les eſpaces dans leſquels les globes mus avec des vîteſſes quelconques perdront des parties de mouvement proportionnelles aux touts, ſeront comme D^{3-n} & E^{3-n}, & par conſéquent des globes homogènes en décrivant des eſpaces proportionnels à D^{3-n} & E^{3-n} conſerveront des vîteſſes qui ſeront dans la même raiſon entr'elles que dans le commencement.

Cor. 4. Et ſi les globes ne ſont pas homogènes, l'eſpace parcouru par un globe plus denſe doit augmenter en raiſon de ſa denſité. Car le mouvement eſt plus grand en raiſon de la denſité lorſque la vîteſſe eſt égale, & le temps (par cette Propoſition) augmentera en raiſon du mouvement directement, & l'eſpace décrit en raiſon du temps.

Cor. 5. Et ſi les globes ſe meuvent dans des milieux différens ; l'eſpace ſera moindre dans un milieu qui réſiſte plus, en raiſon de cette plus grande résistance. Car le temps (par cette Prop.) diminuera en raison de la résistance augmentée, & l'espace en raison du temps.

LEMME II.

Le moment de la quantité produite *est égal au moment de chacune des racines composantes, multipliées successivement par les exposans de leurs puissances & par leurs coëficiens.*

J'appelle quantité *produite* toute quantité formée sans addition & sans soustraction, soit arithmétiquement par la multiplication, la division, ou l'extraction des racines de quantités simples, ou de leurs puissances, soit géométriquement par la détermination des produits & des racines, ou des extrêmes & des moyens proportionnels. Telles sont les produits, les quotiens, les racines, les rectangles, les quarrés, les cubes, les racines quarrées, & les racines cubes. Je considere ici ces quantités comme variables, & croissant ou décroissant comme par un mouvement ou flux perpétuel; & j'entends par *momens* leur incrément ou décrément momentané : ensorte que l'on doit prendre leurs incrémens pour les momens additifs ou positifs, & leurs décrémens pour ceux qui sont négatifs ou soustractifs. Prenez garde cependant de ne pas entendre par là des particules finies. Car les particules finies ne sont pas les momens, mais les quantités mêmes produites par ces *momens.* Il faut donc prendre pour particules les principes naissans de quantités finies. On ne considere point dans ce Lemme la grandeur des momens. Mais la premiere proportion des quantités qui naissent. Et il en sera de même si au lieu des *momens* on emploie les vîtesses des incrémens & des décrémens (qu'on peut aussi appeller mouvemens, mutations, & fluxions des quantités) ou les quantités finies quelconques proportionnelles à ces vîtesses. Quant au coëficient d'une racine quelconque qui produit une quantité, il se trouve en divisant la quantité produite, par cette racine.

Le ſens de ce Lemme eſt donc, que ſi A, B, C, &c. ſont les momens des quantités quelconques croiſſantes ou décroiſſantes par un mouvement continu, & que les vîteſſes proportionnelles à ces changemens ſoient nommées a, b, c, &c. le moment ou le changement du rectangle produit AB ſera $aB+bA$, & le moment du produit ABC ſera $aBC+bAC+cAB$: & les momens des puiſſances produites A^2, A^3, A^4, $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{3}{2}}$, $A^{\frac{1}{3}}$, $A^{\frac{2}{3}}$, A^{-1}, A^{-2}, & $A^{-\frac{1}{2}}$ ſeront $2aA$, $3aA^2$, $4aA^3$, $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{3}{2}aA^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{3}aA^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{3}aA^{-\frac{1}{3}}$, $-aA^{-2}$, $-2aA^{-3}$ & $-\frac{1}{2}aA^{-\frac{3}{2}}$ reſpectivement. Et généralement, le moment d'une puiſſance quelconque $A^{\frac{n}{m}}$ ſera $\frac{n}{m}aA^{\frac{n-m}{m}}$, de même le moment de la quantité produite A^2B ſera $2aAB+bA^2$ & celui de la quantité produite $A^3B^4C^2$ ſera $3aA^2B^4C^2+4bA^3B^3C^2+2cA^3B^4C$, celui de la quantité produite $\frac{A^3}{B^2}$ ou A^3B^{-2} ſera $3aA^2B^{-2}-2bA^3B^{-3}$: & ainſi des autres. On démontrera ce Lemme de cette maniere.

Cas. 1. Un rectangle quelconque AB augmenté par un mouvement continu, lorſqu'on ôte des côtés A & B la moitié des momens $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}b$, devient $\overline{A-\frac{1}{2}a}\times\overline{B-\frac{1}{2}b}$, ou $AB-\frac{1}{2}aB-\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab$. Et lorſque les côtés A & B ſont augmentés des autres moitiés des momens, il devient $\overline{A+\frac{1}{2}a}\times\overline{B+\frac{1}{2}b}$, ou $AB+\frac{1}{2}aB+\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab$. Otant de ce rectangle le premier rectangle, on aura pour reſte $aB+bA$, donc l'incrément $aB+bA$ du rectangle ſera produit par les incrémens entiers a & b des côtés. *C. Q. F. D.*

Cas 2. Suppoſez que AB ſoit toujours égal à G, le moment du produit ABC, ou GC (par le cas 1.) ſera $gC+cG$, c'eſt-à-dire, (ſi on écrit au lieu de G & g, AB, & $aB+bA$) $aBC+bAC+cAB$, il en ſeroit de même pour des produits plus compoſés. *C. Q. F. D.*

Cas 3. Suppofez que les produifans A, B, C foient toujours égaux entr'eux; le moment $aB+bA$ du quarré A^2 ou du rectangle AB fera $2aA$, & le moment $aBC+bAC+cAB$ du cube A^3 ou du produit ABC fera $3aA^2$. Et par le même raifonnement, le moment d'une puiffance quelconque A^n eft naA^{n-1}. *C. Q. F. D.*

Cas 4. D'où $\frac{1}{A}\times A$ étant $=1$, fon moment qui eft A multiplié par le moment de $\frac{1}{A}$ & ajouté avec $\frac{1}{A}\times a$ fera le moment de 1, c'eft-à-dire, $=0$. Donc le moment de $\frac{1}{A}$ ou de A^{-1} eft $\frac{-a}{A^2}$, & généralement, comme $\frac{1}{A^n}\times A^n=1$ le moment de $\frac{1}{A^n}\times A^n$, ajouté avec $\frac{1}{A^n}\times naA^{n-1}$ fera $=0$, & par conféquent le moment de $\frac{1}{A^n}$ ou de A^{-n} fera $-\frac{na}{A^{n+1}}$. *C. Q. F. D.*

Cas 5. Et comme $A^{\frac{1}{2}}\times A^{\frac{1}{2}}=A$, le moment de $A^{\frac{1}{2}}\times 2A^{\frac{1}{2}}$ fera $=a$. (par le 3^e^. Cas) Donc le moment de $A^{\frac{1}{2}}$ fera $\frac{a}{2A^{\frac{1}{2}}}$ ou $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$; & généralement, fi on fuppofe $A^{\frac{m}{n}}=B$, on aura $A^m=B^n$, & par conféquent, $maA^{m-1}=nbB^{n-1}$ & $maA^{-1}=nbB^{-1}$ ou $nbA^{-\frac{m}{n}}$, donc $\frac{m}{n}aA^{\frac{m-n}{n}}$ eft égal à b ou au moment de $A^{\frac{m}{n}}$. *C. Q. F. D.*

Cas 6. Donc le moment de la quantité quelconque produite A^mB^n eft le moment de A^m multiplié par B^n & ajouté avec le moment de la même quantité B^n multiplié par A^m, c'eft-à-dire, $maA^{m-1}B^n+nbB^{n-1}A^m$, foit que les expofans m & n foient des nombres entiers ou rompus, pofitifs ou négatifs. C'eft la même chofe pour le produit d'un plus grand nombre de puiffances. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. De là, dans les quantités continuellement proportionnelles, si un terme est donné, les momens des autres termes seront comme ces mêmes termes multipliés par le nombre des intervales qui sont entr'eux & le terme donné. Soient les quantités A, B, C, D, E, F continuellement proportionnelles; si le terme C est donné, les momens des autres termes seront entr'eux comme $-2A - B$, D, $2E$, $3F$.

Cor. 2. Et si dans quatre proportionnelles deux moiennes sont données, les momens des extrêmes seront comme ces mêmes extrêmes. Il faut entendre la même chose des côtés d'un rectangle quelconque donné.

Cor. 3. Et si la somme ou la différence de deux quarrés est donnée, les momens de leurs côtés seront réciproquement comme ces côtés.

SCHOLIE.

En expliquant dans une lettre à *D. J. Collins* le 10. Décembre 1672. la méthode des tangentes que je soupçonne être la même que celle de Slusius qui ne m'avoit pas encore été communiquée, j'ajoutai, *cela est plutôt un corollaire particulier d'une méthode générale qui s'étend, sans calcul embarassant, non-seulement à mener des tangentes à des courbes quelconques, soit géométriques, soit méchaniques, ou relatives d'une façon quelconque à des lignes droites ou courbes, mais aussi à résoudre d'autres especes de problemes très-difficiles touchant les courbures, les quadratures, les rectifications, les centres de gravité des courbes, &c. & elle n'est pas restreinte (comme la méthode de* maximis & minimis *de Hudde) aux seules équations qui ne contiennent point de quantités irrationnelles. J'ai entremêlé cette méthode de cette autre par laquelle je détermine les racines des équations en les réduisant à des séries infinies.* Jusqu'à ces derniers mots, c'est la lettre, mais ces derniers mots sont du Traité que j'avois écrit sur cette matiere dès l'année 1671. Les principes de cette Méthode générale sont contenus dans le Lemme précédent.

PROPOSITION VIII. THÉORÊME VI.

Lorsqu'un corps monte ou descend en ligne droite dans un milieu homogène, la gravité agissant uniformément sur lui, si on partage tout l'espace qu'il a décrit en parties égales, & qu'on trouve (en ajoutant la résistance du milieu à la force de la gravité, lorsque le corps monte, & l'en soustrayant lorsqu'il descend) les forces absolues au commencement de chacune de ces parties égales; je dis que ces forces absolues seront en progression géométrique.

Fig. 10. Car soit exprimée la force de la gravité par la ligne donnée AC; la résistance par la ligne indéfinie AK; la force absolue lorsque le corps descend par la différence KC; la vîtesse du corps par la ligne AP, qui soit moienne proportionnelle entre AK & AC, & par conséquent en raison sousdoublée de la résistance; que l'incrément de la résistance dans une particule donnée de temps soit représenté par la petite ligne KL, & l'incrément contemporain de la vîtesse par la petite ligne PQ, & du centre C, soit décrite l'hyperbole quelconque BNS ayant pour asymptotes les perpendiculaires CA, CH, & soient élevées les perpendiculaires AB, KN, LO qui la rencontrent en B, N, O. Parce que AK est comme AP^2, son moment KL sera comme le moment $2APQ$ de AP^2: c'est-à-dire, comme $AP \times KC$, car l'incrément PQ de la vîtesse (2[e] Loi du mouvement) est proportionnel à la force génératrice KC. Composant la raison de KL avec celle de KN, on aura le rectangle $KL \times KN$ proportionnel à $AP \times KC \times KN$; c'est-à-dire, à cause du rectangle donné $KC \times KN$, proportionnel à AP; donc la derniére raison de l'aire hyperbolique $KNLO$ au rectangle $KL \times KN$ lorsque les points K & L coïncident, est la raison d'égalité. Donc cette aire évanouissante est comme AP. Or l'aire totale hyperbolique $ABLO$ est composée des particules $KNOL$ qui sont toujours proportionnelles à la vîtesse AP, & par conséquent, l'aire totale est proportionnelle à l'espace décrit avec

cette vîteſſe. Soit à préſent diviſée cette aire dans les parties égales *ABMI*, *IMNK*, *KNOL*, &c. les forces abſolues *AC*, *IC*, *KC*, *LC*, &c. ſeront en progreſſion géométrique. *C.Q.F.D.* Fig. 10.

Par le même raiſonnement, dans l'aſcenſion du corps, prenant de l'autre côté du point *A* les aires égales *ABmi*, *imnk*, *knol*, &c. On prouvera que les forces abſolues *AC*, *iC*, *kC*, *lC*, &c. ſeront continuellement proportionnelles. Donc ſi dans l'aſcenſion & la deſcenſion du corps on prend tous les eſpaces égaux; toutes les forces abſolues *lC*, *kC*, *iC*, *AC*, *KC*, *LC*, &c. ſeront en proportion continue. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. De là, ſi l'eſpace décrit eſt repréſenté par l'aire hyperbolique *ABNK*; la force de la gravité, la vîteſſe du corps, & la réſiſtance du milieu peuvent être repréſentées par les lignes *AC*, *AP* & *AK* reſpectivement, & au contraire.

Cor. 2. Et l'expoſant de la plus grande vîteſſe que le corps peut jamais acquérir en deſcendant à l'infini eſt la ligne *AC*.

Cor. 3. Donc, ſi on connoît la réſiſtance du milieu pour une vîteſſe donnée, on trouvera la plus grande vîteſſe en la prenant à cette vîteſſe donnée dans la raiſon ſouſdoublée que la force de la gravité a à cette réſiſtance connue du milieu.

PROPOSITION IX. THÉORÊME VII.

Les choſes ci-devant démontrées étant poſées, je dis, que ſi on prend pour un rayon donné de grandeur les tangentes des angles du ſecteur circulaire & du ſecteur hyperbolique proportionnelles aux vîteſſes, le temps entier que le corps employera à monter au lieu le plus haut ſera comme le ſecteur du cercle, & tout le temps qu'il employera à deſcendre du lieu le plus haut ſera comme le ſecteur de l'hyperbole.

Soit menée *AD* perpendiculaire & égale à *AC* qui exprime la force de la gravité. Du centre *D*, & du demi diametre *AD* ſoit décrit, tant le quart de cercle *AtE*, que l'hyperbole équilatere *AVZ* dont l'axe ſoit *AX*, le ſommet *A*, & l'aſymp- Fig. 11.

Fig. 11.

tote DC. Soient menées Dp & DP, le ſecteur circulaire AtD ſera comme tout le temps employé à monter au lieu le plus haut; & le ſecteur hyperbolique ATD ſera comme tout le temps employé à deſcendre du lieu le plus haut : pourvû cependant que les tangentes Ap, AP des ſecteurs ſoient comme les vîteſſes.

Cas 1. Soit tirée Dvq qui coupe les momens du ſecteur ADt & du triangle ADp, ou les particules très-petites tDv, & qDp décrites en même temps. Comme ces particules, à cauſe de l'angle commun D, ſont en raiſon doublée des côtés, la particule tDv ſera comme $\frac{qDp \times tD^2}{pD^2}$, c'eſt-à-dire, à cauſe de la donnée tD, comme $\frac{qDp}{pD^2}$. Mais pD^2 eſt $AD^2 + Ap^2$, c'eſt-à-dire, $AD^2 + AD \times Ak$, ou $AD \times Ck$; & qDp eſt $\frac{1}{2} AD \times pq$. Donc la particule tDv du ſecteur eſt comme $\frac{pq}{Ck}$, c'eſt-à-dire, comme le très-petit décrément pq de la vîteſſe directement, & la force Ck qui diminue la vîteſſe inverſement; & par conſéquent, comme la particule du temps qui répond au décrément de la vîteſſe. D'où en compoſant, la ſomme de toutes les particules tDv dans le ſecteur ADt eſt comme la ſomme des petites parties du temps qui répondent à chacune des particules perdues pq de la vîteſſe décroiſſante Ap, juſqu'à ce que la vîteſſe étant diminuée à l'infini, elle s'évanouiſſe; c'eſt-à-dire, que le ſecteur total ADt eſt comme tout le temps employé à monter au lieu le plus haut. *C. Q. F. D.*

Cas 2. Soit tirée DQV qui coupe les très-petites particules TDV & PDQ tant du ſecteur DAV que du triangle DAQ; ces particules ſeront l'une à l'autre comme DT^2 à DP^2, c'eſt-à-dire, (ſi TX & AP ſont paralleles) comme DX^2 à DA^2 ou TX^2 à AP^2, & en diviſant, comme $DX^2 - TX^2$ à $DA^2 - AP^2$. Mais par la nature de l'hyperbole,

$DX^2 - TX^2$ eſt AD^2, & par l'hypoteſe, AP^2 eſt $AD \times AK$. Donc les particules ſont entr'elles comme AD^2 à $AD^2 - AD \times AK$, c'eſt-à-dire, comme AD à $AD - AK$ ou AC à CK. Donc la petite partie TDV du ſecteur eſt $\frac{PDQ \times AC}{CK}$; & par conſéquent, à cauſe des données AC & AD, comme $\frac{PQ}{CK}$, c'eſt-à-dire, comme l'incrément de la vîteſſe directement; & comme l'incrément de la force génératrice inverſement, & par conſéquent comme la particule de temps qui répond à l'incrément. D'où en compoſant, la ſomme des particules de temps pendant leſquelles toutes les particules PQ de la vîteſſe AP ſont produites, eſt comme la ſomme des particules du ſecteur ATD, c'eſt-à-dire, que le temps total eſt comme tout ce ſecteur. *C.Q.F.D.*

Fig. 11.

Cor. 1. De là, en ſuppoſant que AB ſoit la quatriéme partie de AC, l'eſpace que le corps décrit en tombant pendant un temps quelconque ſera à l'eſpace que le corps avec la plus grande vîteſſe AC pourroit décrire en avançant uniformement pendant le même temps, comme l'aire $ABNK$, qui exprime l'eſpace décrit en tombant, eſt à l'aire ATD par laquelle le temps eſt exprimé. Car puiſque $AC : AP :: AP : AK$, on aura (Cor. 1. du Lemme 2. de ce livre) $LK : PQ :: 2AK : AP$, c'eſt-à-dire, $:: 2AP : AC$, & de là on tire, $LK : \frac{1}{2}PQ :: AP : \frac{1}{4}AC$ ou AB; mais $KN : AC$ ou $AD :: AB : CK$, & par conſéquent, $LNKO : DPQ :: AP : CK$. De plus, on avoit $DPQ : DTV :: CK : AC$. Donc $LKNO : DTV :: AP : AC$; c'eſt-à-dire, comme la vîteſſe du corps qui tombe, à la plus grande vîteſſe que le corps peut acquérir en tombant. Or comme les momens $LKNO$ & DTV des aires $ABNK$ & ATD ſont proportionnels aux vîteſſes, toutes les parties de ces aires produites en même temps ſeront comme les eſpaces décrits en même temps, donc les aires totales $ABNK$, ATD décrites depuis le commencement du mouvement ſeront comme les eſpaces entiers décrits depuis que le corps a commencé à deſcendre. *C. Q. F. D.*

Fig. 11.

Cor. 2. Il en eſt de même de l'eſpace décrit en remontant, c'eſt-à-dire, que tout cet eſpace eſt à l'eſpace décrit avec la vîteſſe uniforme *AC* dans le même temps, comme l'aire *ABnk* eſt au ſecteur *ADt*.

Cor. 3. La vîteſſe du corps qui tombe pendant le temps *ATD* eſt à la vîteſſe qu'il acquéroit dans le même temps dans un eſpace non réſiſtant, comme le triangle *APD* eſt au ſecteur hyperbolique *ATD*. Car la vîteſſe dans un milieu non réſiſtant ſeroit comme le temps *ATD*, & dans un milieu réſiſtant elle eſt comme *AP*, c'eſt-à-dire, comme le triangle *APD*. Or les vîteſſes au commencement de la chute ſont égales entr'elles, donc elles ſont comme les aires *ATD*, *APD*.

Cor. 4. Par le même raiſonnement, la vîteſſe dans l'aſcenſion eſt à la vîteſſe avec laquelle le corps peut perdre tout ſon mouvement en remontant dans le même temps, dans un eſpace non réſiſtant, comme le triangle *ApD* eſt au ſecteur circulaire *AtD*; ou comme la droite *Ap* à l'aire *At*.

Cor. 5. Le temps dans lequel le corps en tombant dans un milieu réſiſtant peut acquérir la vîteſſe *AP*, eſt donc au temps dans lequel il peut acquérir la plus grande vîteſſe *AC* en tombant dans un milieu non réſiſtant, comme le ſecteur *ADT* eſt au triangle *ADC*; & le temps pendant lequel il peut perdre la vîteſſe *Ap* en remontant dans un milieu réſiſtant, eſt au temps dans lequel il peut perdre la même vîteſſe en remontant dans un milieu non réſiſtant, comme l'arc *At* eſt à ſa tangente *Ap*.

Cor. 6. De là, le temps étant donné, on a l'eſpace décrit dans l'aſcenſion ou dans la deſcenſion. Car ſi le corps deſcend à l'infini ſa plus grande vîteſſe eſt donnée par les Cor. 2. & 3. du Théor. 6. de ce Liv. 2. & par-là on a le temps dans lequel il peut acquérir cette vîteſſe en tombant dans un eſpace non réſiſtant

résistant. Prenant donc le secteur ADT ou ADt au triangle ADC dans la raison du temps donné au temps déja trouvé, on aura tant la vîtesse AP ou Ap, que l'aire $ABNK$ ou $ABnk$ qui est au secteur ADT ou ADt comme l'espace cherché est à l'espace qui auroit pu être décrit uniformement dans un temps donné avec cette plus grande vîtesse trouvée. Livre Second. Fig. 11.

Cor. 7. Et réciproquement, l'espace $ABnk$ ou $ABNK$ décrit pendant l'ascension ou la descension étant donné, le temps ADt ou ADT le sera aussi.

PROPOSITION X. PROBLÉME III.

La force uniforme de la gravité tendant directement au plan de l'horison, & la résistance étant comme la densité du milieu & le quarré de la vîtesse conjointement ; on demande à chacun des lieux, tant la densité du milieu nécessaire pour que le corps décrive une courbe quelconque donnée, que la vîtesse du corps & la résistance du milieu à chacun des lieux de cette courbe.

Que PQ soit le plan perpendiculaire au plan de la figure; Fig. 12. $PFHQ$ une ligne courbe rencontrant ce plan en P & Q; G, H, I, K quatre lieux du corps dans cette courbe en allant de F en Q; & GB, HC, ID, KE quatre ordonnées paralleles abaissées de ces points sur la ligne horisontale PQ, & s'appuyant sur cette ligne aux points B, C, D, E; les distances BC, CD, DE de ces ordonnées étant égales entr'elles. Des points G & H soient tirées les droites GL, HN tangentes de la courbe en G & H, & rencontrant en L & N les ordonnées CH, DI prolongées en enhaut, & soit achevé le parallélograme $HCDM$; les temps dans lesquels le corps décrit les arcs GH, HI seront en raison sousdoublée des hauteurs LH, IN que le corps peut parcourir dans ces temps en tombant par ces tangentes; & les vîtesses seront comme les longueurs parcourues GH, HI directement, & comme les temps inversement. Qu'on exprime les temps par T & t, & les vîtesses par

Du Mouvement des Corps.

Fig. 12.

$\frac{GH}{T}$ & $\frac{HI}{t}$ le décrément de la vîteſſe pendant le temps t ſera $\frac{GH}{T}-\frac{HI}{t}$. Ce décrément vient de la réſiſtance qui retarde le corps, & de la gravité qui l'accélere. La gravité produit dans un corps qui parcourt en tombant l'eſpace NI une vîteſſe par laquelle le corps pourroit parcourir le double de cet eſpace dans le même temps, comme Galilée l'a démontré; c'eſt-à-dire, la vîteſſe $\frac{2NI}{t}$: mais dans le corps qui parcourt l'arc HI elle augmente ſeulement cet arc de la longueur $HI-HN$ ou $\frac{MI\times NI}{HI}$; elle produit donc ſeulement alors la vîteſſe $\frac{2MI\times NI}{t\times HI}$. Ajoutant cette vîteſſe au décrément dont on a parlé, on aura le décrément de la vîteſſe cauſé par la ſeule réſiſtance, c'eſt-à-dire, $\frac{GH}{T}-\frac{HI}{t}+\frac{2MI\times NI}{t\times HI}$. Donc, puiſque la gravité produit dans le même temps dans le corps qui tombe la vîteſſe $\frac{2NI}{t}$; la réſiſtance ſera à la gravité comme $\frac{GH}{T}-\frac{HI}{t}+\frac{2MI\times NI}{t\times HI}$ à $\frac{2NI}{t}$, ou comme $\frac{t\times GH}{T}-HI+\frac{2MI\times NI}{HI}$ à $2NI$.

Ecrivant à préſent, au lieu des abſciſſes CB, CD, DE, $-o$, o, $2o$; pour l'ordonnée CH, P; & pour MI la ſérie quelconque $Qo+Roo+So^3+$ &c. Tous les termes de cette ſérie après le premier, c'eſt-à-dire, Ro^2+So^3+ &c. feront NI; & les ordonnées DI, EK, & BG, ſeront $P-Qo-Roo-So^3-$ &c. $P-2Qo-4Roo-8So^3-$ &c. & $P+Qo-Roo+So^3-$ &c. reſpectivement. Et en quarant les différences des ordonnées $BG-CH$ & $CH-DI$ & ajoutant à ces quarrés les quarrés de BC, CD, on aura les

Fig. 12.

quarrés $oo + QQoo - 2QRo^3 +$ &c. & $oo + QQoo + 2QRO^3 +$ &c. des arcs GH, HI, dont les racines $o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ & $o\sqrt{1+QQ} + \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ font les arcs GH & HI. De plus, fi on fouftrait de l'ordonnée CH la demi-fomme des ordonnées BG & DI, & de l'ordonnée DI la demi-fomme des ordonnées CH & EK, il reftera les fléches Roo & $Roo + 3So^3$ des arcs GI & HK, lefquelles font proportionnelles aux petites lignes LH & NI, & par conféquent en raifon doublée des temps infiniment petits T & t. Donc la raifon de $\frac{t}{T}$ eft $\sqrt{\frac{R+3So}{R}}$ ou $\frac{R+\frac{3}{2}So}{R}$; & $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$, & en mettant au lieu de $\frac{t}{T}$, GH, HI, MI & NI leurs valeurs trouvées, on aura $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$, & comme $2NI$ eft $2Roo$, la réfiftance fera alors à la gravité comme $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$ à $2Roo$, c'eft-à-dire, comme $3S\sqrt{1+QQ}$ à $4RR$.

Cette vîteffe eft celle avec laquelle le corps en partant d'un lieu quelconque H, felon la tangente HN, décrit la parabole dont le diametre eft HC & le parametre $\frac{HN^2}{NI}$ ou $\frac{1+QQ}{R}$, & avec laquelle il pourroit fe mouvoir dans le vuide & décrire la même courbe.

Et la réfiftance étant comme la denfité du milieu, & le quarré de la vîteffe conjointement, la denfité du milieu fera comme la réfiftance directement, & le quarré de la vîteffe inverfement, c'eft-à-dire, comme $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$ directement & $\frac{1+QQ}{R}$ inverfement, ou ce qui revient au même, comme $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$. *C. Q. F. T.*

Du Mouvement des Corps.

Fig 12.

Cor. 1. Si on prolonge la tangente HN des deux côtés, ensorte qu'elle rencontre une ordonnée quelconque AF en T, $\frac{HT}{AC}$ sera égale à $\sqrt{1+QQ}$, donc on peut l'écrire dans les calculs précédens au lieu de $\sqrt{1+QQ}$. C'est pourquoi la résistance sera à la gravité, comme $3S \times HT$ à $4RR \times AC$, la vîtesse comme $\frac{HT}{AC\sqrt{R}}$ & la densité du milieu comme $\frac{S \times AC}{R \times HT}$.

Cor. 2. Et delà, si la ligne courbe $PFHQ$ est exprimée suivant l'usage par la relation entre la base ou l'abscisse AC & l'appliquée CH, & que la valeur de l'appliquée soit transformée en une série convergente: le problême se résoudra très-facilement par les premiers termes de la série comme dans les exemples suivans.

Exemple 1. Que la ligne $PFHQ$ soit un demi-cercle décrit sur le diametre PQ, & qu'on demande la densité du milieu nécessaire pour que le projectile se meuve dans cette ligne.

Que le diametre PQ soit coupé en deux également au point A; & qu'on nomme AQ, n; AC, a; CH, e; & CD, o; & on aura DI^2 ou $AQ^2 - AD^2 = nn - aa - 2ao - oo$, ou, $ee - 2ao - oo$, & la racine étant extraite par notre méthode on aura, $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{oo}{2e} - \frac{aaoo}{2e^3} - \frac{ao^3}{2e^3} - \frac{a^3o^3}{2e^5} - \&c.$ & écrivant nn au lieu de $ee+aa$, on aura $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5} - \&c.$

Je distingue en cette sorte les séries de l'espéce de la précédente en termes successifs. J'appelle *premier terme* celui dans lequel la quantité infiniment petite o ne se trouve point; *second terme*, celui dans lequel cette quantité est d'une dimension; *troisieme terme*, celui dans lequel elle en a deux; *quatrieme terme*, celui où elle en a trois, & ainsi à l'infini. Le premier terme qui est ici,

e, repréſentera toujours la longueur de l'ordonnée CH qui s'appuye ſur le commencement de la quantité indéfinie o.

Le ſecond terme qui eſt ici $\frac{ao}{e}$ repréſentera la différence entre CH & DN, c'eſt-à-dire, la petite ligne MN, qui eſt retranchée en achevant le parallélograme $HCDM$, & qui par conſéquent détermine toujours la poſition de la tangente HN, comme dans ce cas, en prenant MN à HM comme $\frac{ao}{e}$ eſt à o, ou, comme a eſt à e.

Le troiſiéme terme qui eſt ici $\frac{nnoo}{2e^3}$ repréſentera la petite ligne IN qui eſt compriſe entre la tangente & la courbe, & qui par conſéquent détermine l'angle de contact IHN, ou la courbure que la ligne courbe a au point H. Si cette petite ligne IN eſt de grandeur finie, elle ſera repréſentée par le troiſiéme terme & par tous ceux qui le ſuivent à l'infini, mais ſi cette petite ligne diminue à l'infini, les termes ſuivans deviendront infiniment plus petits que le troiſiéme, & peuvent par conſéquent être négligés.

Le quatriéme terme détermine la variation de la courbure ; le cinquiéme la variation de la variation, & ainſi de ſuite. D'où l'on voit en paſſant l'uſage de ces ſéries dans la ſolution des problêmes qui dépendent des tangentes & de la courbure des courbes.

En comparant la ſérie $e-\frac{ao}{e}-\frac{nnoo}{2e^3}-\frac{anno^3}{2e^5}$, — &c. avec la ſérie $P-Qo-Roo-So^3-$ &c. & écrivant enſuite pour P, Q, R & S, e, $\frac{a}{e}$, $\frac{nn}{2e^3}$ & $\frac{ann}{2e^5}$ & au lieu de $\sqrt{1\times QQ}$, $\sqrt{1+\frac{aa}{ee}}$ ou $\frac{n}{e}$, on aura la denſité du milieu comme $\frac{a}{ne}$, c'eſt-à-dire, (à cauſe que n eſt donnée) comme $\frac{a}{e}$, ou $\frac{AC}{CH}$, ou ce qui revient au même, comme cette longueur HT de la tangente qui est terminée par le demi diametre AF perpendiculaire sur PQ: & la résistance sera à la gravité comme $3a$ à $2n$, c'est-à-dire, comme $3AC$ au diametre PQ du cercle: quant à la vîtesse elle sera comme $\sqrt{CH}$. C'est pourquoi, si le corps part du lieu F dans une ligne paralléle à PQ avec une vîtesse suffisante, & que la densité du milieu à chacun des lieux H soit comme la longueur HT de la tangente, & que la résistance dans quelque lieu H soit à la force de la gravité comme $3AC$ à PQ, ce corps décrira le quart de cercle FQH. *C. Q. F. T.*

Fig. 12.

Mais si ce même corps eût été porté du lieu P selon une ligne perpendiculaire à PQ, & qu'il eût commencé à se mouvoir dans l'arc du demi-cercle PFQ, il auroit fallu prendre AC, ou a de l'autre côté du centre A, & par conséquent il eût fallu changer son signe & écrire $-a$, au lieu de $+a$. Ce qui donneroit la densité du milieu comme $-\frac{a}{e}$, mais la nature n'admet point de densité négative, c'est-à-dire, qui accélere le mouvement: & par conséquent il ne se peut faire que le corps en montant du point P décrive l'arc de cercle PF, car il faudroit qu'il fut accéléré par un milieu qui le portât en en haut, au lieu d'être retardé par un milieu résistant.

Fig. 13.

Exemple 2. Que la ligne PFQ soit une parabole ayant son axe AF perpendiculaire à l'horison PQ & qu'on cherche la densité du milieu nécessaire pour que le projectile se meuve dans cette ligne.

Par la nature de la parabole, le rectangle PDQ est égal au rectangle sous l'ordonnée DI & une ligne droite constante; c'est-à-dire, (si on appelle cette ligne b; la ligne Pc, a; PQ, c; CH, e; & CD, o;) que le rectangle $a+o \times c-a-o$, ou $ac-aa-2ao+co-oo$ est égal au rectangle $b \times DI$. Donc $DI = \frac{ac-aa}{b} + \overline{\frac{c-2a}{b}} \times o - \frac{oo}{b}$. Dans cette suite, le second terme

$\overline{\frac{c-2a}{b}} \times o$ repréſente Qo & le troiſiéme terme $\frac{oo}{b}$ repréſente Roo. Or, comme il n'y a pas d'avantage de termes, le coëficient S du quatriéme doit s'évanouir, & par conſéquent la quantité $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$ à laquelle la denſité du milieu eſt proportionnelle, ſera nulle; donc, lorſque la denſité du milieu eſt nulle le projectile doit ſe mouvoir dans une parabole comme *Galilée* l'a démontré autrefois. *C. Q. F. T.* Fig. 13.

Exemple 3. Que la ligne AGK ſoit une hyperbole dont l'aſymptote NX ſoit perpendiculaire au plan horiſontal AK; & qu'on cherche la denſité du milieu néceſſaire pour que le projectile ſe meuve dans cette ligne. Fig. 14.

Soit MX l'autre aſymptote qui rencontre en V l'ordonnée DG prolongée; & par la nature de l'hyperbole, le rectangle $XV \times VG$ eſt donné. Mais la raiſon de DN à VX eſt auſſi donnée, & par conſéquent le rectangle $DN \times VG$ l'eſt auſſi. Soit bb ce rectangle: après avoir achevé le parallélograme $DNXZ$; qu'on nomme BN, a; BD, o; NX, c; & que la raiſon donnée de VZ à ZX ou DN ſoit $\frac{m}{n}$. On aura $DN = a - o$, $VG = \frac{bb}{a-o}$, $VZ = \frac{m}{n}\overline{a-o}$, & GD ou $NX - VZ - VG = c - \frac{m}{n}a + \frac{m}{n}o - \frac{bb}{a-o}$. Que le terme $\frac{bb}{a-o}$ ſoit transformé dans la ſérie convergente $\frac{bb}{a} + \frac{bb}{aa}o + \frac{bb}{a^3}oo + \frac{bb}{a^4}o^3$ &c. & on aura $GD = c - \frac{m}{n}a - \frac{bb}{a} + \frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o - \frac{bb}{a^3}o^2 - \frac{bb}{a^4}o^3$ &c. Le ſecond terme $\frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o$ de cette ſérie repréſentera Qo, le troiſiéme $\frac{bb}{a^3}o^2$, en changeant le ſigne, repréſentera Ro^2, & le quatriéme $\frac{bb}{a^4}o^3$, en changeant auſſi le ſigne, repréſentera So^3,

Fig. 14.

& selon la regle précédente, les coëficiens $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa}$, $\frac{bb}{a^3}$, & $\frac{bb}{a^4}$ seront les quantités qu'il faudra substituer dans la formule précédente à la place des quantités Q, R & S. La substitution faite, on aura la densité du milieu comme

$$\frac{\frac{bb}{a^4}}{\frac{bb}{a^3}\sqrt{1+\frac{mm}{nn}-\frac{2mbb}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}} \text{ ou } \frac{1}{\sqrt{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}},$$

c'est-à-dire, (si on prend sur VZ la ligne $VY = VG$) comme $\frac{1}{XY}$, car aa & $\frac{mm}{nn}aa - \frac{2mbb}{n} + \frac{b^4}{aa}$ sont les quarrés de XZ & de ZY, & on trouvera que la résistance est à la gravité dans la raison de $3XY$ à $2YG$; & c'est la même vîtesse avec laquelle le corps décriroit la parabole dont le sommet seroit G, le diametre DG, & le parametre $\frac{XY^2}{VG}$. C'est pourquoi, supposant que les densités du milieu dans chacun des lieux G, soient réciproquement comme les distances XY, & que la résistance dans quelque lieu G soit à la gravité comme $3XY$ à $2YG$; le corps partant de A avec la vîtesse nécessaire décrira cette hyperbole AGK. *C. Q. F. T.*

Exemple 4. Supposons en général que la ligne AGK soit une hyperbole dont le centre soit X, les asymptotes MX, NX, & qu'elle soit décrite par cette Loi, qu'ayant fait le rectangle $XZDN$ dont le côté ZD coupe l'hyperbole en G & son asymptote en V, VG sera réciproquement comme ZX ou comme quelque puissance DN^n de DN dont l'exposant sera le nombre n: & qu'on cherche la densité du milieu nécessaire pour que le projectile décrive cette courbe.

Au lieu de BN, BD, NX, écrivez A, O, C respectivement, & soit $VZ : XZ$ ou $DN :: d : e$, & on aura $VG = \frac{bb}{DN^n}$ &

$DN = A - O$, $VG = \frac{bb}{\overline{A-O}^{n}}$, $VZ = \frac{d}{e}\,\overline{A-O}$, & GD ou $NX - VZ - VG = C - \frac{d}{e}A + \frac{d}{e}O - \frac{bb}{\overline{A-O}^{n}}$. Soit transformé $\frac{bb}{\overline{A-O}^{n}}$ dans la série infinie $\frac{bb}{A^{n}} + \frac{nbb}{A^{n+1}}O + \frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^{2} + \frac{n^{3}+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^{3}$, &c. & on aura $GD = C - \frac{d}{e}A - \frac{bb}{A^{n}} + \frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^{n+1}}O - \frac{+nn+n}{2A^{n+2}}bbO^{2} - \frac{+n^{3}+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^{3}$, &c. Et le second terme $\frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^{n+1}}O$ de cette série, représentera Qo, le troisieme $\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^{2}$, représentera Ro^{2}, le quatrieme $\frac{n^{3}+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^{3}$ représentera So^{3}. Delà, la densité du milieu $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$ deviendra dans un lieu quelconque G $\frac{n+2}{3\sqrt{A^{2}+\frac{dd}{ee}A^{2}-\frac{2dnbb}{eA^{n}}A+\frac{nnb^{4}}{A^{2n}}}}$. Donc si on prend sur VZ la ligne $VY = n \times VG$, cette densité sera réciproquement comme XY. Car A^{2} & $\frac{dd}{ee}A^{2} - \frac{2dnbb}{eA^{n}}A + \frac{nnb^{4}}{A^{2}}$, sont les quarrés de XZ & de ZY. Mais la résistance dans le même lieu G est à la gravité comme $3S \times \frac{XY}{A}$ à $4RR$, c'est-à-dire, comme XY à $\frac{2nn+2n}{n+2}VG$. Et la vîtesse dans le même lieu G est la même avec laquelle le corps étant jetté décriroit une parabole dont le sommet seroit G, le diametre GD, & le parametre $\frac{1+QQ}{R}$ ou $\frac{2XY^{2}}{nn+n \times VG}$.

C. Q. F. T.

Fig. 14.

SCHOLIE.

Fig. 12.

De même qu'on a trouvé dans le Cor. 1. la densité du milieu comme $\frac{S \times AC}{R \times HT}$, si on suppose la résistance comme une puissance quelconque n de la vîtesse V, on aura la densité du milieu comme $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \times \left(\frac{AC}{HT}\right)^{n-1}$. Et par conséquent, si on peut trouver une courbe telle que la quantité $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ soit proportionnelle à $\left(\frac{HT}{AC}\right)^{n-2}$ ou bien que la quantité $\frac{S^2}{R^{4-n}}$ soit proportionnelle à $(\overline{1+QQ})^{n-1}$: le corps décrira cette courbe dans un milieu uniforme dont la résistance sera comme la puissance n de la vîtesse, c'est-à-dire, comme V^n. Mais revenons à des courbes plus simples.

Fig. 14.

Comme le corps ne décrit une parabole que dans un milieu non résistant, & qu'il ne décrit les hyperboles dont nous venons de parler qu'en éprouvant une résistance continuelle : il est clair que la ligne que le projectile décrit dans un milieu qui résiste uniformement approche plus de ces hyperboles que de la parabole. Cette ligne est donc du genre hyperbolique, mais c'est une espece d'hyperbole qui est plus éloignée des asymptotes vers le sommet, & qui dans les parties très-éloignées s'en approche davantage que les hyperboles dont j'ai parlé ici. Mais cependant la différence qui est entr'elles n'est pas assez grande pour qu'elles ne puissent pas être prises les unes pour les autres sans inconvénient dans la pratique : & peut-être sont-elles plus utiles que les hyperboles décrites avec plus de soin, & plus composées.

Voici comment on peut en faire usage.

Soit achevé le parallélogramme $XYGT$, & que la droite

GT touche l'hyperbole en G, la densité du milieu en G est donc réciproquement comme la tangente GT, la vîtesse dans le même milieu comme $\sqrt{\frac{GT^2}{GV}}$ & la résistance à la force de la gravité comme GT à $\frac{2nn+2n}{n+2} \times GV$. Fig. 14.

Donc, si le corps jetté du lieu A dans la droite AH décrit l'hyperbole AGK, & que AH prolongée rencontre l'asymptote NX en H; tirant AI parallele à cette asymptote, & qui rencontre l'autre asymptote MX en I, la densité du milieu en A sera réciproquement comme AH, & la vîtesse du corps comme $\sqrt{\frac{AH^2}{AI}}$, & la résistance dans le même lieu sera à la gravité comme AH à $\frac{2nn+2n}{n+2} \times AI$: d'où on tire les regles suivantes. Fig. 15.

Regle 1. Si la densité du milieu reste la même qu'en A, ainsi que la vîtesse avec laquelle le corps a été jetté, & qu'on change l'angle NAH; les longueurs AH, AI, HX resteront les mêmes. Donc, si on trouve ces longueurs dans quelque cas, on pourra déterminer ensuite très-aisément l'hyperbole pour un angle quelconque donné NAH.

Regle 2. Si la densité du milieu & l'angle NAH restent les mêmes qu'en A, & que la vîtesse avec laquelle le corps a été jetté change, la longueur AH restera la même, mais AI changera en raison doublée réciproque de la vîtesse.

Regle 3. Si la vîtesse du corps, l'angle NAH & la gravité accélératrice restent les mêmes qu'en A, & que la proportion de la résistance en A à la gravité motrice augmente dans une raison quelconque; la proportion de AH à AI augmentera dans la même raison, le parametre de la parabole dont on a parlé restant le même, ainsi que la longueur $\frac{AH^2}{AI}$ qui lui est proportionnelle: & par conséquent, AH diminuera dans la même raiſon, & AI diminuera dans cette raiſon doublée. Mais la proportion de la réſiſtance au poids augmentera, ſi la gravité ſpécifique eſt moindre ſous un égal volume, ou ſi la denſité du milieu eſt plus grande, ou bien la réſiſtance diminuera en une moindre raiſon que le poids, le volume étant diminué.

Fig. 15.

Regle 4. Comme la denſité du milieu près du ſommet de l'hyperbole eſt plus grande qu'au lieu A; pour avoir la denſité moyenne, il faut trouver la raiſon de la plus petite des tangentes GT à la tangente AH, & augmenter la denſité en A en une raiſon un peu plus grande que la demi-ſomme de ces tangentes à la plus petite de ces tangentes GT.

Regle 5. Si les longueurs AH, AI ſont données, & qu'on veuille décrire la figure AGK: prolongez HN en X, enſorte que $HX : AI :: n+1 : 1$, & décrivez par le point A une hyperbole dont les aſymptotes ſoient MX, NX & le centre X, & qui ait cette propriété que AI ſoit à une ligne quelconque VG comme XV^n eſt à XI^n.

Regle 6. Plus le nombre n eſt grand, plus les hyperboles décrites par le corps en montant du lieu A ſont exactes, & moins elles ſont exactes lorſqu'il deſcend vers K; & au contraire. L'hyperbole conique tient le milieu, & d'ailleurs eſt la plus ſimple. Donc, ſi l'hyperbole eſt de ce genre, & qu'on cherche le point K où le corps projetté tombe ſur une ligne quelconque AN qui paſſe par le point A: il faudra prolonger AN enſorte qu'elle rencontre les aſymptotes MX, NX en M & en N & prendre $NK = AM$.

Regle 7. Et de là on tire une maniere très-aiſée de déterminer cette hyperbole par les Phénomenes. Car, ſoient jettés deux corps ſemblables & égaux, avec la même viteſſe, ſous des angles divers HAK, hAk, & qu'ils tombent dans le plan de l'horiſon en K & en k; & ſoit trouvée par obſervation la proportion de AK à Ak que je ſuppoſe ici celle de d à e. Après avoir élevé une perpendiculaire AI d'une longueur quelconque, prenez à volonté la longueur AH ou Ah, & meſurez enſuite graphiquement les longueurs AK, Ak par la regle 6. Si la raiſon de AK à Ak eſt la même que celle de d à e, la longueur AH aura été priſe exactement. Si cette raiſon eſt moindre, prenez ſur la droite indéfinie SM la longueur SM égale à la longueur priſe AH, & élevez la perpendiculaire MN égale à la différence des raiſons $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e}$ multipliée par une droite quelconque donnée. Ayant pris pluſieurs longueurs AH, on trouvera par la même méthode autant de points N, & par tous ces points on pourra tracer une courbe réguliere $NNXN$ qui coupe la droite $SMMM$ en X. Soit priſe enfin AH égale à l'abſciſſe SX, & on trouvera de nouveau la longueur AK; & les longueurs, qui ſeront à la longueur priſe AI & à cette derniere AH comme la longueur AK connue par expérience à la longueur AK trouvée en dernier lieu, ſeront les vraies longueurs AI, & AH qu'il falloit trouver. Or ces longueurs étant données, la réſiſtance du milieu au lieu A ſera donnée auſſi, car elle eſt à la force de la gravité comme AH à $2\,AI$. Augmentant la denſité du milieu par la regle 4, la réſiſtance qu'on vient de trouver en deviendra plus exacte ſi on l'augmente dans cette même raiſon.

LIVRE SECOND.

Fig. 15.

Fig. 16.

Fig. 15.

Regle 8. Les longueurs AH, HX étant trouvées; ſi on cherche la poſition de la droite AH ſelon laquelle le projectile ayant été jetté avec une vîteſſe donnée, tombe en un point quelconque K: il faudra élever aux points A & K les droites AC, KF perpendiculaires à l'horiſon, deſquelles AC tende en enbas, & ſoit égale à AI ou $\frac{1}{2}HX$. On tracera enſuite l'hyperbole dont les aſymptotes ſont AK, KF, & dont la conjuguée paſſe par le point C, du centre A & de l'intervalle AH on décrira un cercle qui coupe cette hyperbole au point H; & le projectile jetté ſelon la ligne droite AH tombera ſur le point K. *C. Q. F. T.*

Car le point H, à cauſe de la longueur donnée AH, ſera quelque part sur le cercle décrit. Tirant CH qui rencontre AK & KF, la premiere en E, & l'autre en F; à cause des paralleles CH, MX, & des égales AC, AI, on aura $AE = AM = KN$ par conséquent. Mais $CE : AE :: FH : KN$, donc $CE = FH$. Le point H tombe donc sur l'hyperbole dont les asymptotes sont AK, KF, & dont la conjuguée passe par le point C, donc ce point se trouvera dans la commune intersection du cercle décrit & de cette hyperbole. *C. Q. F. D.*

Fig. 15.

Il faut remarquer de plus, que cette construction se fait de même, soit que la droite AKN soit parallele à l'horison soit qu'elle lui soit inclinée sous un angle quelconque : & que les deux intersections H & H forment deux angles NAH, NAH; & que dans la pratique il suffit de décrire une fois le cercle, & d'appliquer ensuite la regle infinie CH de telle sorte au point C que sa partie FH comprise entre la droite FK & le cercle soit égale à sa partie CE comprise entre le point C & la droite AK.

Fig. 17.

Ce qu'on a dit des hyperboles peut s'appliquer facilement aux paraboles. Car si $XAGK$ est une parabole, que la droite XV touche au sommet X, & que les ordonnées IA, VG soient comme les puissances quelconques XI^n, XV^n des abscisses XI & XV, soient tirées XT, GT, AH, desquelles XT soit parallele à VG & que GT, AH touchent la parabole en G, & A; le corps, étant projetté avec la vîtesse nécessaire d'un lieu quelconque A selon une droite AH prolongée, décrira cette parabole, si la densité du milieu à chacun des lieux G est réciproquement comme la tangente GT. La vîtesse en G sera celle avec laquelle le corps décriroit, dans un espace non résistant, la parabole conique dont le sommet seroit G, le diametre VG la ligne prolongée en enbas & le parametre $\frac{2GT^2}{\overline{nn-n} \times VG}$. Quant à la résistance en G elle sera à la force de la gravité comme GT à $\frac{2nn-2n}{n-2} \times VG$. D'où, si NAK est la ligne horisontale, & que la densité en A demeurant la même, ainsi que la vîtesse avec laquelle le corps a été jetté, l'angle NAH change d'une façon quelconque; les longueurs AH, AI, XH demeureront les mêmes, & de là le sommet X de la parabole sera donné, ainsi que la position de la droite XI, prenant donc $VG:IA::XV^n XI^n$, on aura tous les points G de la parabole par lesquels le projectile passera. Fig. 17.

TROISIÉME SECTION.

Du Mouvement des Corps qui éprouvent des résistances qui sont en partie en raison de la vîtesse, & en partie en raison doublée de cette même vîtesse.

PROPOSITION XI. THÉORÉME VIII.

Si un corps éprouve une résistance qui soit en partie comme sa vîtesse, & en partie en raison doublée de cette vîtesse, que ce corps se meuve dans un milieu homogène par la seule force qui lui a été imprimée, & qu'on prenne les temps en progression arithmétique; les quantités réciproquement proportionnelles aux vîtesses seront en progression géométrique, la quantité quelconque dont elles augmentent étant donnée.

Du centre C soit décrite l'hyperbole BEe qui ait pour asymptotes les perpendiculaires $CADd$, & CH, que les lignes AB, DE, de soient paralleles à l'asymptote CH. Que les points A & G soient donnés sur l'asymptote CD; si le temps est représenté par l'aire hyperbolique $ABED$ qui croît uniformement, je dis que la vîtesse peut être représentée par la longueur DF dont la réciproque GD ajoutée avec l'ordonnée CG compose la longueur CD qui croît en progression géométrique. Fig. 18.

Soit la petite aire $DEed$ l'incrément donné infiniment petit du

Fig. 18.

temps, Dd sera réciproquement comme DE, & par conséquent directement comme CD. Mais le décrément de $\frac{1}{GD}$ qui est (par le Lemme 2. de ce Liv.) $\frac{Dd}{GD^2}$ sera proportionnel à $\frac{CD}{GD^2}$ ou à $\frac{CG+GD}{GD^2}$, c'est-à-dire, à $\frac{1}{GD} \times \frac{CG}{GD^2}$. Donc pendant le temps $ABDE$, qui croît uniformément par l'addition des petites particules données $EDde$, $\frac{1}{GD}$ décroît dans la même raison que la vîtesse. Car le décrément de la vîtesse est comme la résistance, c'est-à-dire, (par l'hypotese) comme la somme de deux quantités dont l'une est comme la vîtesse & l'autre comme le quarré de la vîtesse; mais le décrément de $\frac{1}{GD}$ est comme la somme des quantités $\frac{1}{GD}$ & $\frac{CG}{GD^2}$ desquelles la premiere est $\frac{1}{GD}$ elle-même, & la derniere $\frac{CG}{GD^2}$ est proportionnelle à $\frac{1}{GD^2}$: donc $\frac{1}{GD}$, à cause du décrément analogue, est comme la vîtesse. Et si on augmente la quantité GD réciproquement proportionnelle à $\frac{1}{GD}$ de la quantité donnée CG; la somme CD croîtra en progression géométrique, lorsque le temps $ABED$ croîtra uniformement.

Cor. 1. Donc, si les points A & G étant donnés, on exprime le temps par l'aire hyperbolique $ABED$, la vîtesse peut être exprimée par $\frac{1}{GD}$ réciproque de GD.

Cor. 2. En prenant GA à GD comme la réciproque de la vîtesse au commencement à la réciproque de la vîtesse à la fin d'un temps quelconque $ABED$, on trouvera le point G; & ce point étant trouvé, on peut trouver la vîtesse pour un autre temps donné quelconque.

PROPOSITION

PROPOSITION XII. THÉORÉME IX.

Fig. 19.

Les mêmes choses étant posées, je dis que, si on prend les espaces décrits en progression arithmétique, les vîtesses augmentées d'une quantité quelconque donnée seront en progression géométrique.

Sur l'asymptote CD soit donné le point R, & soit élevée la perpendiculaire RS qui rencontre l'hyperbole en S, & soit prise l'aire hyperbolique $RSED$ pour exprimer l'espace décrit; la vîtesse sera comme la longueur GD, laquelle avec la donnée CG compose la longueur CD qui décroît en progression géométrique pendant que l'espace $RSED$ augmente en progression arithmétique.

Car à cause de l'incrément donné $EDde$ de l'espace, la petite ligne Dd qui est le décrément de GD sera réciproquement comme ED, ou directement comme CD, c'est-à-dire, comme la somme de GD même & de la longueur donnée CG. Mais le décrément de la vîtesse dans un temps qui lui est réciproquement proportionnel, & pendant lequel la particule donnée $DdeE$ de l'espace est décrite, est comme la résistance, & le temps conjointement; c'est-à-dire, directement comme la somme de deux quantités dont l'une est comme la vîtesse & l'autre comme le quarré de la vîtesse, & inversement comme la vîtesse; & par conséquent, directement comme la somme de deux quantités, dont l'une est donnée, & l'autre est proportionnelle à la vîtesse. Donc le décrément tant de la vîtesse que de la ligne GD est comme la quantité donnée & la quantité décroissante conjointement, & à cause que les décrémens sont proportionnels, les quantités décroissantes, c'est-à-dire, la vîtesse & la ligne GD seront toujours proportionnelles. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Si la vîtesse est exprimée par la longueur GD, l'espace décrit sera comme l'aire hyperbolique $DESR$.

Cor. 2. Et si on prend le point R à volonté, on trouvera le point G en prenant GR à GD comme la vîtesse au commencement eſt à la vîteſſe après l'eſpace $RSED$ décrit. Or le point G étant trouvé, on a l'eſpace lorſque la vîteſſe eſt donnée; & au contraire.

Fig. 19. *Cor.* 3. Donc la vîteſſe étant donnée (Prop. 11.) lorſque le temps eſt donné, & par cette préſente Propoſition l'eſpace étant donné lorſque la vîteſſe eſt donnée; on aura l'eſpace quand le temps ſera donné: & au contraire.

PROPOSITION XIII. THÉORÉME X.

Suppoſé que le corps étant attiré en enbas par une gravité uniforme monte ou deſcende dans une ligne droite, & qu'il éprouve une réſiſtance qui ſoit en partie en raiſon de la vîteſſe, & en partie dans cette même raiſon doublée: je dis que, ſi on mene des droites paralleles aux diametres du cercle & de l'hyperbole par les extrémités de leurs diametres conjugués, & que les vîteſſes ſoient comme les ſegmens quelconques faits par ces paralleles menées d'un point donné, les temps ſeront comme les ſecteurs des aires retranchées des ſegmens: & réciproquement.

Fig. 20. *Cas* 1. Suppoſons premierement que le corps monte, du centre D & d'un demi diametre quelconque DB ſoit décrit un quart de cercle $BETF$, & par l'extrémité B du demi diametre DB ſoit tirée la ligne infinie BAP parallele au demi diametre DF. Sur cette parallele ſoit donné le point A, & ſoit priſe AP proportionnelle à la vîteſſe. Comme une partie de la réſiſtance eſt comme la vîteſſe, & l'autre partie comme le quarré de la vîteſſe: ſoit la réſiſtance totale comme AP^2+2BAP, & ſoient tirées DA, DP qui coupent le cercle en E & T, ſoit enfin exprimée la gravité par AD^2 enſorte que la gravité ſoit à la réſiſtance en P comme DA^2 à AP^2+2BAP: & le temps de l'aſcenſion totale ſera comme le ſecteur EDT du cercle.

Car ſoit menée DVQ qui coupe, tant le moment PQ de la vîtesse AP, que le moment DTV du secteur DET répondant au moment donné du temps ; & ce décrément PQ de la vîtesse sera comme la somme des forces de la gravité DA^2 & de la résistance AP^2+2BAP, c'est-à-dire, comme DP^2. Donc l'aire DPQ qui est proportionnelle à PQ est comme DP^2, & l'aire DTV qui est à l'aire DPQ comme DT^2 à DP^2 : donc l'aire EDT sera comme la quantité donnée DT^2, & cette aire décroît uniformement comme le temps restant, en soustrayant les particules données DTV, & par conséquent cette aire est proportionnelle au temps de toute l'ascension. *C. Q. F. D.* Fig. 20.

Cas 2. Si la longueur AP exprime comme ci-dessus la vîtesse lorsque le corps remonte, qu'on suppose la résistance comme AP^2+2BAP, & que la force de la gravité soit moindre que celle qui peut être exprimée par DA^2 ; on prendra BD d'une longueur telle que AB^2-BD^2 soit proportionnelle à la gravité, & que DF soit perpendiculaire & égale à BD ; par le sommet F, on décrira l'hyperbole $FTVE$ dont les demi-diametres conjugués soient DB & DF, & qui coupe DA en E & DP, DQ en T & V ; & le temps de l'ascension entiere sera comme le secteur TDE de l'hyperbole. Fig. 21.

Car le décrément PQ de la vîtesse pendant une particule de temps donnée est comme la somme de la résistance AP^2+2BAP & de la gravité AB^2-BD^2, c'est-à-dire, comme BP^2-BD^2. Mais l'aire DTV est à l'aire DPQ comme DT^2 à DP^2, c'est-à-dire, (en abaissant GT perpendiculaire sur DF) comme GT^2 ou $GD^2-DF^2 : BD^2$ & $:: GD^2 : BP^2$, & en divisant $:: DF^2 : BP^2-BD^2$. Donc comme l'aire DPQ est proportionnelle à PQ, c'est-à-dire, à BP^2-BD^2, on aura l'aire DTV comme la quantité donnée DFQ. L'aire EDT décroît donc uniformement à chaque particule égale de temps, par la soustraction d'autant de particules données DTV, & par conséquent elle est proportionnelle au temps. *C. Q. F. D.*

Fig. 22.

Cas 3. Que AP représente la vîtesse dans la descension du corps, $AP^2 + 2BAP$ la résistance, & $BD^2 - AB^2$ la force de la gravité, l'angle DBA étant droit. Si du centre D & du sommet B on décrit l'hyperbole équilatere $BETV$ coupant les lignes DA, DP, & DQ prolongées en E, T & V, le secteur EDT de cette hyperbole sera comme le temps total de la descension. Car l'incrément PQ de la vîtesse, & l'aire PDQ qui lui est proportionnelle est comme l'excès de la gravité sur la résistance, c'est-à-dire, comme $BD^2 - AB^2 - 2APB - AP^2$ ou $BD^2 - BP^2$; & l'aire DTV est à l'aire DPQ comme DT^2 à DP^2, & par conséquent comme GT^2 ou $GD^2 - BD^2$ à BP^2, ou bien comme GD^2 à BD^2, ou bien encore comme BD^2 à $BD^2 - BP^2$. C'est pourquoi comme l'aire DPQ est proportionnelle à $BD^2 - BP^2$, l'aire DTV sera comme la quantité donnée BD^2. L'aire EDT croît donc uniformement pendant chaque particule égale de temps par l'addition d'autant de particules données DTV, & par conséquent elle est proportionnelle au temps de la descension. *C. Q. F. D.*

Cor. Si du centre D & du demi-diametre DA, on décrit par le sommet A un arc At semblable à l'arc ET & soustendant de même l'angle ADT: la vîtesse AP sera à la vîtesse que le corps peut acquérir en descendant ou perdre en remontant dans un espace non résistant, & pendant le temps EDT, comme l'aire du triangle ADP à l'aire du secteur DAt; & par conséquent cette vîtesse sera donnée dans un temps donné. Car la vîtesse, dans un milieu non résistant, est proportionnelle au temps, & par conséquent à ce secteur, & dans un milieu résistant elle est comme le triangle; & dans l'un & l'autre milieu lorsqu'elle est très-petite elle approche de la raison d'égalité ainsi que le secteur & le triangle.

SCHOLIE.

Ce cas peut ainsi se démontrer dans l'ascension du corps, lorsque la force de la gravité est moindre que celle qu'on peut exprimer par AD^2 ou AB^2+BD^2 & plus grande que celle qui peut l'être par AB^2-BD^2, & qui doit l'être par AB^2. Mais passons à d'autres Propositions.

PROPOSITION XIV. THÉORÉME XI.

Les mêmes choses étant posées, je dis, que l'espace décrit dans l'ascension ou la descension, est comme la différence de l'aire qui représente le temps, & d'une autre aire quelconque qui augmente ou diminue en progression arithmétique; si on prend les forces composées de la résistance & de la gravité en progression géométrique.

Soit prise AC proportionnelle à la gravité, & AK proportionnelle à la résistance, en observant de les placer du même côté du point A si le corps descend, & du côté opposé s'il remonte. Soit de plus élevé Ab qui soit à DB comme DB^2 à $4BAC$: ayant décrit l'hyperbole bN dont les asymptotes soient les perpendiculaires CK, CH, & ayant élevé KN perpendiculaire sur CK, l'aire $AbNK$ augmentera ou diminuera en progression arithmétique lorsqu'on prendra les forces CK en progression géométrique. Cela posé, je dis donc que la distance du corps du lieu où il parviendroit à sa plus grande hauteur est comme l'excès de l'aire $AbNK$ sur l'aire DET. Fig. 23. 24. & 25.

Car AK étant comme la résistance, c'est-à-dire, comme AP^2+2BAP; soit prise une quantité donnée quelconque Z & soit supposée $AK=\frac{AP^2+2BAP}{Z}$ & (par le Lemme II. de ce Livre) le moment KL de AK sera égal à $\frac{2APQ+2BA\times PQ}{Z}$ ou $\frac{2BPQ}{Z}$ & le moment $KLON$ de l'aire $AbNK$ sera égal à $\frac{2BPQ\times LO}{Z}$ ou $\frac{BPQ\times BD^3}{2Z\times CK\times AB}$.

Cas I. Si on suppose que le corps monte, & que la gravité soit comme $AB^2 + BD^2$, BET étant un cercle (dans la fig. 23.) la ligne AC qui est proportionnelle à la gravité sera

Fig. 23. 24. & 25.

$\frac{AB^2+BD^2}{Z}$ & DP^2 ou $AP^2+2BAP+AB^2+BD^2$, sera $AK\times Z+AC\times Z$ ou $CK\times Z$; donc l'aire DTV sera à l'aire DPQ comme DT^2 ou DB^2 à $CK\times Z$.

Cas. 2. Si le corps monte, & que la gravité soit comme AB^2-BD^2 la ligne AC (dans la figure 24.) sera $\frac{AB^2-BD^2}{Z}$ & DT^2 sera à DP^2 comme DF^2 ou DB^2 à BP^2-BD^2 ou $AP^2+2BAP+AB^2-BD^2$, c'est-à-dire, à $AK\times Z+AC\times Z$ ou $CK\times Z$. Donc l'aire DTV sera à l'aire DPQ comme DB^2 à $CK\times Z$.

Cas 3. Et par le même raisonnement, si le corps descend, & que par conséquent la gravité soit comme BD^2-AB^2 & que la ligne AC (dans la fig. 25.) soit égale à $\frac{BD^2-AB^2}{Z}$ l'aire DTV sera à l'aire DPQ comme BD^2 à $CK\times Z$: comme ci-dessus.

Or comme ces aires sont toujours dans cette raison ; si au lieu de l'aire DTV, par laquelle le moment du temps, toujours égal à lui-même, est représenté, on écrit un rectangle quelconque déterminé comme $BD\times m$, on aura l'aire DPQ, c'est-à-dire, $\frac{1}{2}BD\times PQ$ à $BD\times m$, comme $CK\times Z$ à BD^2. D'où on tirera $PQ\times BD^3=2BD\times m\times CK\times Z$, & le moment $KLON$ de l'aire $AbNK$ trouvé ci-dessus, sera $\frac{BP\times BD\times m}{AB}$. otant le moment DTV ou $BD\times m$ de l'aire DET, il restera $\frac{AP\times BD\times m}{AB}$. La différence des momens, c'est-à-dire, le moment de la différence des aires, est donc égale à $\frac{AP\times BD\times m}{AB}$, & par conséquent, à cause que $\frac{BD\times m}{AB}$ est donné, comme la vîteſſe AP, c'eſt-à-dire, comme le moment de l'eſpace que le corps décrit dans ſon aſcenſion, ou dans ſa deſcenſion. Donc la différence des aires, & cet eſpace qui croiſſent ou décroiſſent par des momens proportionnels & qui naiſſent ou s'évanouiſſent en même-temps ſont toujours proportionnels. *C. Q. F. D.*

Fig. 23. 24. & 25.

Cor. Si l'on nomme M la longueur qui vient en diviſant l'aire DET par la ligne BD; & qu'une autre longueur V ſoit priſe à la longueur M dans la raiſon que la ligne DA a à la ligne DE: l'eſpace que le corps parcourt dans toute ſon aſcenſion, ou dans toute ſa deſcenſion dans un milieu réſiſtant, ſera à l'eſpace qu'il peut décrire dans un milieu non réſiſtant dans le même temps en tombant de ſon point de repos, comme la différence des aires dont on a parlé à $\frac{BD \times V^2}{AB}$: c'eſt-à-dire, que l'eſpace ſera donné lorſque le temps eſt donné. Car l'eſpace parcouru dans un milieu qui ne réſiſte point eſt en raiſon doublée du temps, ou comme V^2, & à cauſe des données BD & AB comme $\frac{BD^2 \times V^2}{AB}$. Cette aire eſt égale à l'aire $\frac{DA^2 \times BD \times M^2}{DE^2 \times AB}$, & le moment de M eſt m, & par conſéquent le moment de cette aire eſt $\frac{DA^2 \times BD \times 2M \times m}{DE^2 \times AB}$. Mais ce moment eſt au moment de la différence des aires DET, & $AbNK$ dont on a parlé, c'eſt-à-dire, à $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$ comme $\frac{DA^2 \times BD \times M}{DE^2}$ eſt à $\frac{1}{2} BD \times AP$, ou comme $\frac{DA^2}{DE^2} \times DET$ eſt à DAP, c'eſt-à-dire, lorſque les aires DET & DAP ſont infiniment petites, en raiſon d'égalité. Donc l'aire $\frac{BD \times V^2}{AB}$ & la différence des aires DET & $AbNK$, quand toutes ces aires ſont très-petites, ont des momens égaux, & ſont par conſéquent égales. Delà, lorſque les vîteſſes, & par conſéquent auſſi les eſ-

Fig. 23. 24. & 25.

paces parcourus en même-temps dans l'un & l'autre milieu au commencement de la descension ou à la fin de l'ascension approchent de l'égalité, ils sont alors l'un à l'autre comme l'aire $\frac{BD \times V^2}{AB}$ & la différence des aires DET & $AbNK$; de plus, comme l'espace dans un milieu non résistant est toujours comme $\frac{BD \times V^2}{AB}$ & que dans un milieu qui résiste il est toujours comme la différence des aires DET & $AbNK$: il est nécessaire que les espaces parcourus dans l'un & l'autre milieu, pendant des temps quelconques égaux, soient entr'eux comme cette aire $\frac{BD \times V^2}{AB}$ & la différence des aires DET & $AbNK$. *C. Q. F. D.*

SCHOLIE.

La résistance que les corps sphériques éprouvent dans les fluides vient en partie de la ténacité, en partie du frotement, & en partie de la densité du milieu. C'est cette partie de la résistance qui vient de la densité du fluide que nous disons être en raison doublée de la vîtesse; l'autre partie qui vient de la ténacité du fluide est uniforme ou comme le moment du temps : il seroit donc à propos de parler du mouvement des corps qui éprouvent une résistance causée en partie par une force uniforme ou en raison des momens du temps, & en partie par une force en raison doublée de la vîtesse. Mais il suffit d'avoir préparé la voye à cette spéculation par les Prop. 8. & 9. & leurs Corollaires. Car dans ces Propositions on peut substituer à la place de la résistance uniforme qu'éprouve un corps qui remonte, laquelle vient de sa gravité, la résistance uniforme qui vient de la ténacité du milieu lorsque le corps se meut par la seule force qui lui a été imprimée; & on peut ajouter cette résistance, uniforme causée par la gravité, au corps qui monte en ligne droite, & la soustraire lorsque le corps descend en ligne droite. Il seroit donc

temps

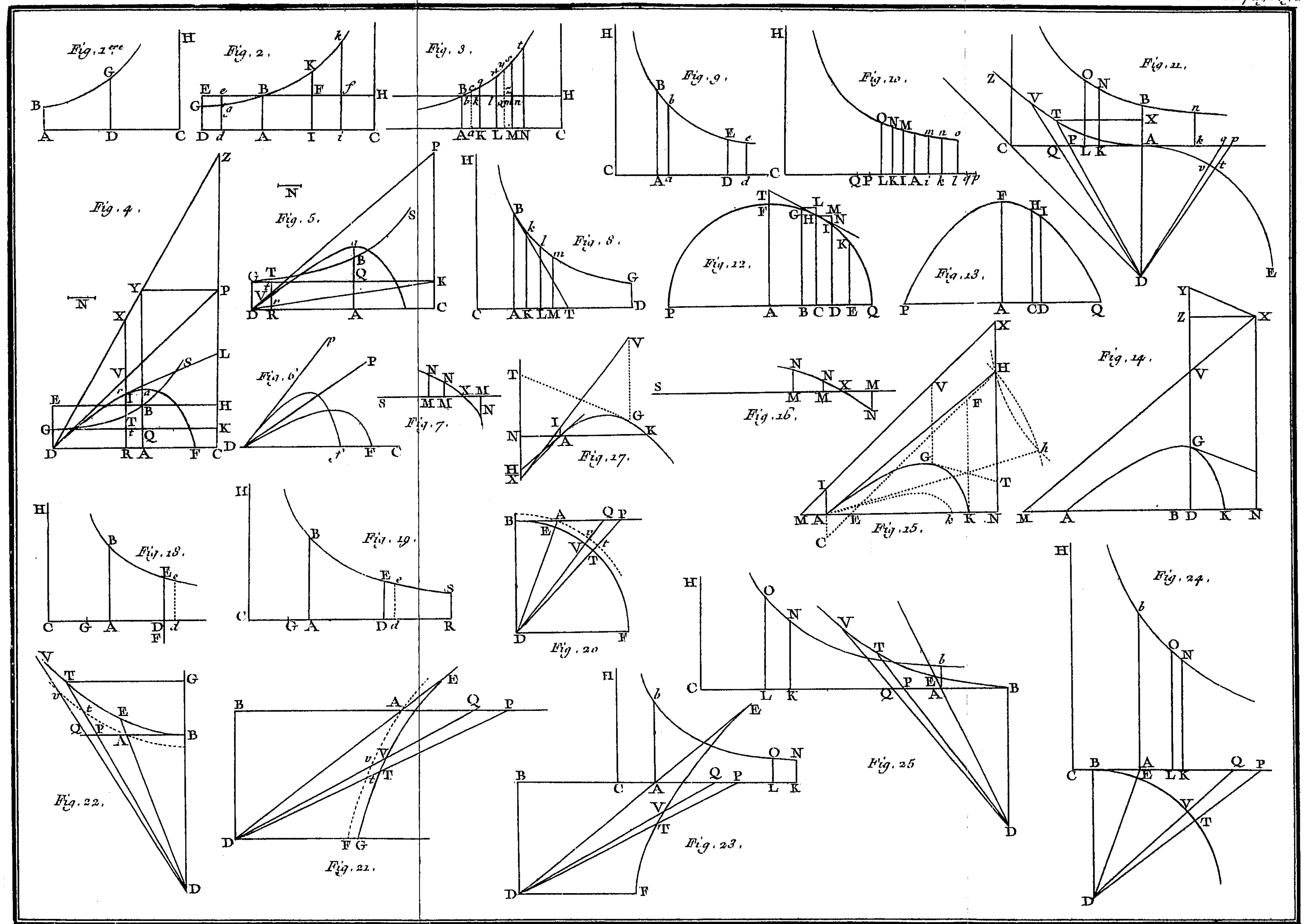


Fig. 1.ere
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25

temps de parler à préſent du mouvement des corps qui éprouvent une réſiſtance compoſée de forces qui ſont en partie uniformes, en partie en raiſon de la vîteſſe, & en partie en raiſon doublée de cette vîteſſe. J'en ai poſé les principes dans les Prop 12. & 14. dans leſquelles on peut auſſi ſubſtituer la réſiſtance uniforme qui vient de la ténacité du milieu à la place de la force de la gravité, ou prendre les deux forces enſemble comme ci-deſſus. Ainſi je paſſe à d'autres Propoſitions.

QUATRIÉME SECTION.

Du mouvement circulaire des corps dans les milieux réſiſtans.

LEMME III.

Soit PQR *une ſpirale qui coupe tous les rayons* SP, SQ, SR, *&c. ſous des angles égaux. Soit tirée la droite* PT *qui touche la ſpirale en un point quelconque* P, *& qui coupe le rayon* SQ *en* T; *ayant tiré à la ſpirale les perpendiculaires* PO, QO *qui concourent en* O, *ſoit tirée* SO. *Je dis que, ſi les points* P *&* Q *s'approchent l'un de l'autre & ſe confondent, l'angle* PSO *deviendra droit, & la derniere raiſon du rectangle* $TQ \times 2PS$ *à* PQ^2 *ſera une raiſon d'égalité.* Fig. 29.

Car des angles droits OPQ, OQR ſoient ôtés les angles égaux SPQ, SQR, il reſtera les angles égaux OPS, OQS. Donc le cercle qui paſſe par les points O, S, P paſſera auſſi par le point Q. Que les points P & Q coïncident, ce cercle touchera la ſpirale dans le point de leur coïncidence, & par conſéquent il coupera perpendiculairement la droite OP. Que cette ligne OP devienne le diametre de ce cercle, & l'angle OSP qui eſt dans le demi cercle ſera droit. *C. Q. F. D.*

Sur OP ſoient abaiſſées les perpendiculaires QD, SE, & les dernieres raiſons de ces lignes ſeront telles; $TQ : PD :: TS$

Du Mouvement des Corps.

ou $PS : PE$ ou $2PO : 2PS$; de plus, $PD : PQ :: PQ : 2PO$, d'où on tire $PQ^2 = TQ \times 2PS$. *C. Q. F. D.*

Fig. 26.

PROPOSITION XV. THÉORÉME XII.

Si la densité du milieu à chacun des lieux est réciproquement comme la distance au centre immobile, & que la force centripete soit en raison doublée de la densité; je dis, que le corps peut se mouvoir dans une spirale qui coupera sous un angle donné tous les rayons tirés de ce centre.

Fig. 27.

Les mêmes choses étant supposées que dans le Lemme précédent, soit prolongée SQ en V, ensorte que $SV = SP$. Que le corps dans un temps quelconque parcoure dans un milieu résistant le très-petit arc PQ, & dans un temps double, le très-petit arc PR; les décrémens de ces arcs qui seroient décrits dans un milieu non résistant pendant les mêmes temps seront entr'eux comme les quarrés des temps dans lesquels ils sont produits : donc le décrément de l'arc PQ est la quatrieme partie du décrément de l'arc PR. Donc si on prend l'aire QSr égale à l'aire PSQ, le décrément de l'arc PQ sera égal à la moitié de la petite ligne Rr; donc la force de la résistance & la force centripete sont l'une à l'autre comme les petites lignes $\frac{1}{2}Rr$ & TQ qu'elles produisent en même temps. Mais comme la force centripete par laquelle le corps est pressé en P est réciproquement comme SP^2, & que (par le Lemme 10. du Liv. 1.) la petite ligne TQ que cette force a produit est en raison composée de la raison de cette force & de la raison doublée du temps dans lequel l'arc PQ a été décrit, (car dans ce cas je néglige la résistance comme étant infiniment plus petite que la force centripete) $TQ \times SP^2$, c'est-à-dire, (par le dernier Lemme) $\frac{1}{2} PQ^2 \times SP$ sera en raison doublée du temps; le temps est donc comme $PQ \times \sqrt{SP}$; & la vîtesse du corps par laquelle l'arc PQ est parcouru dans ce temps est comme $\frac{PQ}{PQ \times \sqrt{SP}}$ ou $\frac{1}{\sqrt{SP}}$, c'est-à-dire, réciproquement en raison doublée de SP. Par le même raisonnement, la vîtesse avec laquelle l'arc QR est décrit est réciproquement en raison sous-doublée de SQ. Mais ces arcs PQ & QR sont l'un à l'autre comme les vîtesses décrivantes, c'est-à-dire, en raison sous-doublée de SQ à SP, ou comme SQ à $\sqrt{SP \times SQ}$; & à cause des angles égaux SPQ, SQr & des aires égales PSQ, QSr, l'arc PQ est à l'arc Qr comme SQ à SP. Prenant donc les différences des conséquents proportionnels, on aura l'arc PQ à l'arc Rr comme SQ à $SP - \sqrt{SP \times SQ}$ ou $\frac{1}{2} VQ$. Car les points P & Q coïncidans, la derniere raison de $SP - \sqrt{SP \times SQ}$ à $\frac{1}{2} VQ$ est la raison d'égalité. Et parce que le décrément de l'arc PQ, causé par la résistance, ou son double Rr est comme la résistance & le quarré du temps conjointement; la résistance sera comme $\frac{Rr}{PQ^2 \times SP}$. Mais on avoit $PQ : Rr :: SQ : \frac{1}{2} VQ$, & de là $\frac{Rr}{PQ^2 \times SP}$ devient comme $\frac{\frac{1}{2} VQ}{PQ \times SP \times SQ}$ ou comme $\frac{\frac{1}{2} OS}{OP \times SP^2}$. Car les points P & Q coïncidans, SP & SQ coïncideront aussi, & l'angle PVQ sera droit; & à cause des triangles semblables PVQ, PSO, $PQ : \frac{1}{2} VQ :: OP : \frac{1}{2} OS$. Donc $\frac{OS}{OP \times SP^2}$ est comme la résistance, c'est-à-dire, en raison de la densité du milieu au point P, & en raison doublée de la vîtesse conjointement. Donc en ôtant la raison doublée de la vîtesse, c'est-à-dire, la raison $\frac{1}{SP}$, il restera la densité du milieu en P proportionnelle à $\frac{OS}{OP \times SP}$. Soit donnée la spirale; & à cause de la raison de OS à OP qui est donnée, la densité du milieu en P sera comme $\frac{1}{SP}$. Donc dans un milieu dont la densité est réciproquement comme la distance SP du centre, le corps peut se mouvoir dans cette spirale. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. La vîtesse dans un lieu quelconque P est toujours celle

Fig. 28.

avec laquelle le corps peut tourner par la même force centripete dans un milieu non résistant dans un cercle à la même distance SP du centre.

Cor. 2. Si la distance SP est donnée, la densité du milieu est comme $\frac{OS}{OP}$, & si cette distance n'est pas donnée, la densité est comme $\frac{OS}{OP \times SP}$. Et par conséquent, on peut appliquer la spirale à une densité quelconque du milieu.

Cor. 3. La force de la résistance dans un lieu quelconque P est à la force centripete dans le même lieu, comme $\frac{1}{2}OS$ à OP. Car ces forces sont entr'elles comme $\frac{1}{2}Rr$ & TQ, ou comme $\frac{\frac{1}{2}VQ \times PQ}{SQ}$ & $\frac{\frac{1}{2}PQ^2}{SP}$, c'est-à-dire, comme $\frac{1}{2}VQ$ & PQ, ou $\frac{1}{2}OS$ & OP. Or la spirale étant donnée, la proportion de la résistance à la force centripete est aussi donnée, & réciproquement, cette proportion étant donnée, la spirale l'est aussi.

Cor. 4. Le corps ne peut donc tourner dans cette spirale, que lorsque la force de la résistance est moindre que la moitié de la force centripete. Car supposé que la résistance soit égale à la moitié de la force centripete, alors la spirale se confondra avec la ligne droite PS, & dans ce cas, le corps descendra vers le centre dans cette droite avec une vîtesse, qui sera à la vîtesse avec laquelle nous avons prouvé ci-dessus, dans le cas de la parabole, (Théor. 10. du Liv. 1.) que le corps descendroit dans un milieu non résistant, en raison sous-doublée de 1 à 2. Et les temps de la descension seront ici réciproquement comme les vîtesses & par conséquent ils seront donnés.

Cor. 5. Et parce qu'à égales distances du centre, la vîtesse est la même dans la spirale PQR & dans la droite SP, & que la longueur de la spirale, est à la longueur de la droite SP, dans la raison de OP à OS ; le temps de la descension dans la spirale sera au temps de la descension dans la droite SP dans cette même raiſon donnée, & par conſéquent il ſera donné.

Cor. 6. Si du centre S, & de deux intervalles quelconques donnés on décrit deux cercles, & ſi ces deux cercles reſtans les mêmes, l'angle que la ſpirale fait avec le rayon SP change d'une façon quelconque : le nombre des révolutions que le corps P peut achever entre les circonférences de ces cercles en allant dans la ſpirale d'une circonférence à l'autre eſt comme $\frac{PS}{OS}$ ou comme la tangente de l'angle que la ſpirale fait avec le rayon PS; & le temps de ces révolutions eſt comme $\frac{OP}{OS}$, c'eſt-à-dire, comme la ſécante du même angle, ou bien réciproquement, comme la denſité du milieu. Fig. 27.

Cor. 7. Si le corps dans un milieu dont la denſité eſt réciproquement comme la diſtance des lieux au centre, faiſoit une révolution dans une courbe quelconque AEB autour de ce centre, & que le premier rayon AS la coupât ſous le même angle en B, qu'il l'avoit coupée premierement en A, & que la vîteſſe du corps à ce lieu B fut à ſa premiere vîteſſe en A réciproquement en raiſon ſous doublée des diſtances au centre, (c'eſt-à-dire, comme AS à la moyenne proportionnelle entre AS & BS) ce corps continueroit à faire une infinité de révolutions ſemblables BFC, CGD &c. & partageroit par leurs interſections le rayon AS dans les parties AS, BS, CS, DS, &c. continuellement proportionnelles. Et les temps des révolutions ſeront comme les périmetres des ſpires, AEB, BFC, CGD, &c. directement, & les vîteſſes aux commencemens A, B, C de ces révolutions inverſement ; c'eſt-à-dire, comme $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$. Donc le temps total dans lequel le corps parviendra au centre ſera au temps de la premiere révolution, comme la ſomme de toutes les continuellement proportionnelles $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$ (juſqu'à l'infini) au premier terme $AS^{\frac{3}{2}}$; c'eſt-à- Fig. 27.

Fig. 28.

dire, comme le premier terme $AS^{\frac{3}{2}}$ à la différence des deux premiers termes $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$, ou comme $\frac{2}{3}AS$ à AB à peu près. Ce qui donnera aisément ce temps total.

Cor. 8. De tout ceci on peut tirer à peu près le mouvement des corps dans des milieux dont la densité ou est uniforme, ou observe une autre loi quelconque assignée.

Du centre S, & des intervalles continuellement proportionnels SA, SB, SC, &c. décrivez un nombre quelconque de cercles, & supposez que le temps des révolutions entre les périmetres de deux de ces cercles quelconques, dans le milieu dont nous parlons, soit au temps des révolutions, entre ces mêmes cercles, dans le milieu proposé, à peu près comme la densité moyenne du milieu proposé entre ces cercles, à la densité moyenne du milieu dont nous parlons entre ces mêmes cercles : & que la sécante de l'angle, sous lequel la spirale précédente coupe le rayon AS dans le milieu dont nous parlons, soit dans la même raison à la sécante de l'angle sous lequel la spirale nouvelle coupe le même rayon dans le milieu proposé : & qu'enfin les nombres de toutes les révolutions entre les deux mêmes cercles soient à peu près comme les tangentes de ces mêmes angles. Si cela arrive ainsi entre deux cercles quelconques, le mouvement se continuera entre tous les autres cercles. Et de-là on peut trouver facilement de quelle façon & dans quels temps les corps doivent tourner dans un milieu quelconque qui résiste selon une loi quelconque assignée.

Cor. 9. Et quoique le mouvement soit excentrique dans les spirales qui approchent de l'ovale, cependant, en imaginant que chaque révolution de ces spirales soient séparées par des intervalles égaux, & qu'ils arrivent au centre par les mêmes degrés que la spirale qu'on a décrit ci-dessus, on comprendra de quelle maniere les mouvemens des corps s'exécutent dans ces sortes de spirales.

PROPOSITION XVI. THÉORÉME XIII.

Fig. 27.

Si la densité du milieu à chacun des lieux; est réciproquement comme la distance de ces lieux au centre immobile, & que la force centripete soit réciproquement comme une puissance quelconque de cette même distance : je dis que le corps peut tourner dans une spirale qui coupe sous un angle donné tous les rayons tirés de ce centre.

Cette Proposition se démontre de la même maniere que la Proposition précédente. Car si la force centripete en P est réciproquement comme une puissance quelconque SP^{n+1} de la distance SP, on trouvera, comme ci-dessus, que le temps pendant lequel le corps parcourt l'arc quelconque PQ sera comme $PQ\times PS^{\frac{1}{2}n}$; & la résistance en P sera comme $\frac{Rr}{PQ^2\times SP^n}$ ou comme $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n}\times VQ}{PQ\times SP^n\times SQ}$ & par conséquent, comme $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n}\times OS}{OP\times SP^{n+1}}$, c'est-à-dire, à cause de la qnantité donnée $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n}\times OS}{OP}$, réciproquement comme SP^{n+1}. Donc la vîtesse étant réciproquement comme $SP^{\frac{1}{2}n}$, la densité en P sera réciproquement comme SP.

Cor. 1. La résistance est à la force centripete comme $\overline{1-\frac{1}{2}n}\times OS$ à OP.

Cor. 2. Si la force centripete est réciproquement comme SP^3 alors $1-\frac{1}{2}n=0$; donc alors la résistance & la densité du milieu seront nulles, comme dans la Prop. 9. du Liv. 1.

Cor. 3. Si la force centripete est réciproquement comme quelque puissance du rayon SP dont l'exposant soit plus grand que le nombre 3. la résistance deviendra de positive négative.

SCHOLIE.

Au reste, cette Proposition & les précédentes, qui ont rapport aux milieux inégalement denſes, doivent s'appliquer auſſi aux mouvemens des corps qui ſont aſſez petits pour que l'excès de la denſité du milieu qui touche un de leurs côtés ſur celle du milieu qui touche leur autre côté puiſſe être négligée. Je ſuppoſe ici la réſiſtance proportionnelle à la denſité, le reſte étant égal. Ainſi dans les milieux dont la force réſiſtante n'eſt pas comme la denſité, la denſité doit augmenter ou diminuer juſqu'à ce que l'excès de la réſiſtance ſoit contre-balancé, ou que ſon défaut ſoit ſuppléé.

PROPOSITION XVII. PROBLÊME IV.

Trouver, & la force centripete, & la réſiſtance du milieu néceſſaires pour que le corps puiſſe ſe mouvoir dans une ſpirale donnée par une loi de vîteſſe donnée.

Fig. 29.

Soit cette ſpirale PQR. La vîteſſe avec laquelle le corps décrit le très-petit arc PQ étant donnée, le temps l'eſt auſſi, & par la hauteur TQ, qui eſt comme la force centripete & le quarré du temps, on a la force. Enſuite par la différence RSr des aires PSQ & QSR décrites en des particules égales de temps, on aura la retardation du corps, & par la retardation on trouvera la réſiſtance, & la denſité du milieu.

PROPOSITION XVIII. PROBLÉME V.

La loi de la force centripete étant donnée, trouver à chacun des lieux la réſiſtance du milieu néceſſaire pour que le corps décrive une ſpirale donnée.

Par le moyen de la force centripete donnée il faut trouver la vîteſſe à chacun des lieux, enſuite il faut par la retardation de la vîteſſe chercher la denſité du milieu ; comme dans la Propoſition précédente.

J'ai fait voir, dans la dixiéme Prop. & dans le Lemme 2. de ce Livre, la maniere de traiter ces Problêmes, & je ne veux pas arrêter plus long-temps le Lecteur à ces ſortes de diſcuſſions

aſſez

assez compliquées. Il est temps de dire quelque chose des forces des corps dans leurs mouvemens progressifs, de la densité, & de la résistance des milieux dans lesquels les mouvemens dont j'ai parlé jusqu'à présent & ceux de même nature s'exécutent.

CINQUIEME SECTION.

De la densité & de la compression des Fluides & de l'Hydrostatique.

DEFINITION DU FLUIDE.

Les corps fluides sont ceux dont les parties cédent à toute espece de force qui agit sur eux, & qui se meuvent très-facilement entre eux.

PROPOSITION XIX. THÉORÉME XIV.

Toutes les parties d'un fluide immobile & homogène enfermé dans un vase quelconque immobile dans lequel il est comprimé de toutes parts, (en faisant abstraction de la gravité, de la condensation, & de toute espéce de force centripéte) sont également pressées de tous les côtés, & chacune reste dans son lieu sans que cette pression produise aucun mouvement.

Cas 1. Dans un vase sphérique ABC, soit enfermé un fluide de maniére qu'il y soit comprimé de toutes parts également, je dis qu'aucune de ses parties ne se mouvera par cette pression. Car si quelque partie D se mouvoit, il seroit nécessaire que toutes les autres parties qui sont à la même distance du centre se meussent ensemble d'un mouvement semblable; & cela parce que la pression qu'elles éprouvent toutes est égale & semblable, Fig. 30.

& qu'on ſuppoſe qu'elles n'ont point d'autre mouvement que celui que cette preſſion peut produire. Or elles ne peuvent toutes approcher plus près du centre, à moins que le fluide ne ſe condenſe vers le centre; ce qui eſt contre l'hypotèſe. Elles ne peuvent non plus s'en éloigner à moins que le fluide ne ſe condenſe vers la circonférence, ce qui eſt auſſi contre l'hypotèſe. Enfin elles ne peuvent, en conſervant leur diſtance au centre, ſe mouvoir vers un côté quelconque parce qu'il y auroit la même raiſon pour qu'elles ſe meuſſent vers le côté oppoſé. Or une même partie ne peut ſe mouvoir en même temps vers des côtés oppoſés, donc aucune partie de ce fluide ne ſortira de ſa place. *C. Q. F. D.*

Cas 2. Je dis à préſent, que toutes les parties ſphériques de ce fluide ſont également preſſées de tous côtés. Car ſuppoſez que *EF* ſoit une partie ſphérique de ce fluide, ſi elle n'eſt pas également preſſée de tous côtés, ſuppoſez que la preſſion la plus foible augmente juſqu'à ce que cette partie ſphérique ſoit également preſſée de toutes parts, & alors, par le premier cas, toutes ſes parties demeureront dans leurs lieux. Mais avant que cette preſſion fut augmentée, elles devoient demeurer auſſi dans leurs lieux, par le même cas premier, & la preſſion étant augmentée, elles doivent ſortir de leurs lieux par la définition du fluide, or ces deux choſes ſont contradictoires. Donc il étoit faux de dire que la ſphere *EF* ne fut pas également preſſée de toutes parts. *C. Q. F. D.*

Cas 3. Je dis de plus que la preſſion de pluſieurs parties ſphériques eſt égale, car les parties ſphériques contigues ſe preſſent mutuellement & également dans le point de contact par la troiſiéme loi du mouvement, mais par le cas ſecond, elles ſont preſſées de toutes parts par la même force. Donc deux parties quelconques ſphériques non contigues ſont preſſées par la même force, parce qu'une partie ſphérique intermédiaire peut toucher l'une & l'autre. *C. Q. F. D.*

Cas 4. Je dis encore que toutes les parties du fluide sont pressées partout également. Car deux parties quelconques peuvent être touchées par les parties sphériques dans des points quelconques, & les parties sphériques pressent également dans ces points par le cas troisieme, & elles sont également pressées à leur tour par ces deux autres parties par la troisieme loi du mouvement. *C. Q. F. D.*

Cas 5. Or comme une partie quelconque *GHI* du fluide est renfermée dans le reste de ce fluide comme dans un vase, & qu'elle y est égalemenr pressée de tous côtés, & que de plus toutes les parties qui la composent se pressent mutuellement & également, & sont en repos entr'elles; il est clair que toutes les parties *GHI* d'un fluide quelconque qui est comprimé également de tous côtés, se pressent également les unes les autres, & sont en repos entr'elles. *C. Q. F. D.* Fig. 30.

Cas 6. Si ce fluide n'est pas renfermé dans un vase infléxible, & que par conséquent il ne soit pas pressé également de toutes parts; il cédera à la pression la plus forte par la définition de la fluidité.

Cas 7. Donc dans un vase infléxible le fluide ne soutiendra pas une pression plus forte d'un côté que de l'autre, mais il cédera à la plus forte, & cela dans un instant indivisible, parce que le côté infléxible du vase ne poursuit pas la liqueur qui céde: le fluide en cédant pressera donc le côté opposé, & ainsi la pression deviendra égale de tous côtés, & parce que le fluide dans le premier moment où il tend à s'éloigner du lieu où il éprouve la plus grande pression, en est empêché par la résistance du vase du côté opposé, la pression devient égale de toutes parts, dans un instant & sans aucun mouvement local: & dans le moment les parties du fluide se pressent mutuellement & également par le cinquiéme cas, & sont en repos entre elles. *C. Q. F. D.*

Cor. D'où on voit que les mouvemens des parties du fluide entr'elles ne peuvent changer par une pression exercée de toutes parts sur la superficie entiere du fluide, à moins que la figure de cette superficie ne change en quelque endroit, ou que toutes les parties du fluide en se pressant mutuellement avec plus ou moins de force coulent plus ou moins facilement les unes sur les autres.

PROPOSITION XX. THÉORÉME XV.

Si les parties d'une sphere fluide & homogène qui enveloppe un fond sphérique qui a le même centre, gravitent également vers ce centre lorsqu'elles en sont à égale distance ; ce fonds soutiendra le poids d'un cylindre, dont la base est égale à la superficie de ce fond, & la hauteur est la même que celle du fluide incumbant.

Fig. 31. Que *DHM* soit la superficie de ce fond, & *AEI* la superficie supérieure du fluide. Que ce fluide soit partagé par un nombre innombrable de superficies sphériques *BFK*, *CGL* dans des orbes concentriques également épaisses ; & que la force de la gravité soit supposée agir seulement sur la superficie supérieure d'un orbe quelconque, ses actions étant égales sur les parties égales de toutes ces superficies. La superficie de dessus *AE* est donc pressée par la seule force de sa propre gravité, par laquelle toutes les parties de l'orbe supérieur & la seconde superficie *BFK* (par la Prop. 19.), selon sa grandeur, sont également pressées. Mais outre cela, la seconde superficie *BFK* est pressée par la force de sa propre gravité, qui, ajoutée à la premiere, compose une pression double. La troisieme superficie *CGL* sera pressée selon sa grandeur par cette pression, & de plus par la force de sa propre gravité, c'est-à-dire, par une pression triple : & de même, la quatrieme superficie éprouvera une pression quadruple, la cinquiéme une quintuple, & ainsi de suite. La pression que chaque superficie éprouve, n'est donc pas comme la quantité solide du fluide qui s'appuie sur elle, mais comme le nombre des orbes jusqu'à la surface supé-

rieure du fluide ; & elle est égale à la gravité de l'orbe inférieur multiplié par le nombre des orbes : c'est-à-dire, à la gravité du solide dont la derniere raison au cylindre déterminé est la raison d'égalité, (supposé que le nombre des orbes croisse & que leur épaisseur diminue à l'infini, ensorte que l'action de la gravité de la superficie inférieure à la supérieure devienne continue). La superficie inférieure soutiendra donc le cylindre dont on vient de parler. *C. Q. F. D.*

Et par un raisonnement semblable on prouveroit la proposition, dans le cas où la gravité décroît dans une raison quelconque de la distance au centre, & dans celui où le fluide est plus rare en enhaut, & plus dense en embas. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Donc, le fond n'est pas pressé par tout le poids du fluide incumbant, mais il soutient seulement cette partie du poids du fluide dont on a parlé dans cette Proposition ; le reste de son poids étant soutenu par la figure en voute du fluide.

Cor. 2. Mais la quantité de la pression est toujours la même à des distances égales du centre, soit que la superficie pressée soit parallele à l'horison, soit qu'elle lui soit perpendiculaire ou oblique, soit que le fluide s'éleve perpendiculairement dans une ligne droite au-dessus de la superficie pressée, soit qu'il serpente obliquement dans des canaux & des cavités qui soient de formes régulieres ou irrégulieres, & qui soient larges ou étroites, on trouve que toutes ces circonstances ne changent rien à la pression, en appliquant la démonstration de ce Théorême aux différens cas où se trouvent les fluides.

Cor. 3. On prouve aussi par la même démonstration (& par la Prop. 19.) que les parties d'un fluide pesant n'acquiérent aucun mouvement entr'elles par la pression d'un poids incumbant, pourvû qu'on fasse abstraction du mouvement qui vient de la condensation.

Cor. 4. Et par conséquent si un autre corps de la même gravité spécifique, mais incapable de condensation, est plongé dans ce fluide, il n'acquérera aucun mouvement par la preſſion du poids incumbant : il ne deſcendra point, il ne montera point, & il ne ſera point contraint à changer ſa forme. S'il eſt ſphérique, il demeurera ſphérique malgré la preſſion : s'il eſt quarré, il demeurera quarré : & cela, ſoit qu'il ſoit mol ou très-fluide; ſoit qu'il nâge librement dans le fluide, ſoit qu'il s'appuie ſur le fond. Or toute partie interne quelconque d'un fluide eſt dans le même cas qu'un corps plongé, & il en eſt de même de tous les corps plongés qui ont la même grandeur, la même figure, & la même gravité ſpécifique. Si le corps plongé devenoit fluide en conſervant ſon poids; ce corps, s'il étoit monté ou deſcendu, ou s'il avoit pris une nouvelle forme auparavant par la preſſion du fluide, ſeroit encore forcé de monter ou de deſcendre, ou de prendre une nouvelle forme : & cela, parce que ſa gravité & toutes les autres cauſes de mouvement ſubſiſtent. Or (par le cas 5. de la Prop. 19.) il ſeroit en repos & conſerveroit ſa figure. Donc, &c.

Cor. 5. Donc le corps qui eſt ſpécifiquement plus peſant que le fluide qui lui eſt contigu ira au fond, & s'il eſt ſpécifiquement plus léger, il montera ſur la ſuperficie, ce qui produira du mouvement, & un changement de figure, tels que l'excès ou le défaut de la gravité de ce corps les peut produire. Car cet excès, ou ce défaut ſont la cauſe de l'impulſion que reçoit le corps, lequel autrement eût été en équilibre avec les parties du fluide; & cet excès ou ce défaut de gravité du corps plongé peut être comparé avec l'excès ou le défaut de poids des corps qui ſont dans l'un ou l'autre baſſin d'une balance.

Cor. 6. Les corps qui ſont dans des fluides ont donc une double gravité, l'une vraie & abſolue, l'autre apparente & relative. La gravité abſolue eſt la force totale par laquelle le corps tend en embas : la relative eſt l'excès de la gravité du corps par lequel il tend plus fortement en embas que le fluide qui l'environne. Les parties des fluides & celles de tous les corps gravitent toutes dans leurs lieux par une gravité du premier genre : donc tous leurs poids réunis composent le poids total. Car tout corps est pesant comme on peut l'éprouver dans des vases pleins de liqueur, & le poids du tout est égal aux poids de toutes les parties & en est par conséquent composé. Par la gravité du second genre, les corps ne gravitent point dans leurs lieux, c'est-à-dire, qu'étant comparés entre eux, ils ne sont pas plus pesans les uns que les autres, mais par les efforts mutuels qu'ils font pour descendre ils s'opposent mutuellement à leur chute & demeurent chacun à leur place comme s'ils n'avoient aucune gravité. Le peuple croit que les corps qui sont soutenus dans l'air ne sont point pesans. Et il croit pesans ceux qui tombent parce qu'ils ne sont pas soutenus par le poids de l'air. Ainsi, selon le peuple, le poids des corps n'est autre chose que l'excès de leur poids absolu, sur le poids de l'air. Et c'est pourquoi il appelle *corps légers* ceux qui sont moins pesans que l'air, & qui s'élévent parce que l'air est plus pesant qu'eux. Mais ces corps ne sont légers que comparativement, car ils descendent dans le vuide. De même les corps qui montent ou descendent dans l'eau, à raison de leur plus grande ou de leur moindre gravité, sont comparativement, & en apparence les uns légers & les autres pesans, & leur pesanteur ou leur légereté comparative & apparente, est l'excès ou le défaut dont leur gravité vraie & absolue surpasse ou est surpassée par celle de l'eau. Ceux qui ne descendent ni ne remontent, quoiqu'ils augmentent de leur poids absolu le poids total qu'ils composent avec l'eau, ne pesent cependant point dans l'eau comparativement & dans le sens du peuple. Car la démonstration est la même pour tous ces cas.

Cor. 7. Ce qu'on vient de démontrer pour la gravité a aussi lieu dans toutes les autres espéces quelconques des forces centripétes.

Cor. 8. Ainsi, si le milieu dans lequel le corps se meut, est pressé ou par sa propre gravité ou par quelqu'autre force centripéte, & que le corps qui y eſt placé ſoit preſſé plus fortement par la même force; la différence de ces forces eſt cette force motrice que nous avons conſidérée dans les Propoſitions précédentes comme force centripéte. Et ſi le corps eſt moins preſſé par cette force on doit conſidérer la différence de ces forces comme une force centrifuge.

Cor. 9. Mais comme les fluides, en preſſant les corps qui y ſont plongés, ne changent pas leur figure extérieure, il eſt clair de plus (Cor. de la Prop. 19.) qu'ils ne changent point la ſituation de leurs parties internes entr'elles: & par conſéquent, ſi des animaux ſont plongés, & que toute ſenſation vienne du mouvement des parties, les parties du fluide ne bleſſeront point les animaux plongés, & n'exciteront en eux aucune ſenſation, ſi ce n'eſt en tant qu'ils peuvent être condenſés par la compreſſion. Et c'eſt la même choſe pour un ſyſtême quelconque de corps environnés d'un fluide qui les comprime. Car toutes les parties de ce ſyſtême ſeront agitées des mêmes mouvemens que s'ils étoient dans le vuide, & qu'ils n'euſſent que leur ſeule gravité comparative, ſi ce n'eſt que ce fluide réſiſtât un peu à leurs mouvemens, ou qu'il contribuât à attacher leurs parties enſemble par la compreſſion.

PROPOSITION XXI. THÉORÉME XVI.

Si la denſité d'un fluide quelconque eſt proportionnelle à ſa compreſſion, & que ſes parties ſoient attirées en embas par une force centripéte réciproquement proportionnelle à leurs diſtances au centre: je dis que ſi l'on prend ces diſtances continuellement proportionnelles, les denſités de ce fluide à ces mêmes diſtances ſeront auſſi continuellement proportionnelles.

Fig. 32. Que ATV repréſente le fond ſphérique ſur lequel le fluide s'appuie, que S ſoit le centre, & que SA, SB, SC, SD, SE, SF, &c. ſoient des diſtances continuellement proportionnelles

Fig. 32.

nelles. Soient élevées les perpendiculaires AH, BI, CK, DL, EM, FN, &c. qui ſoient comme les denſités du milieu aux lieux A, B, C, D, E, F, & les gravités ſpécifiques dans ces mêmes lieux ſeront comme $\frac{AH}{AS}$, $\frac{BI}{BS}$, $\frac{CK}{CS}$ &c. Ou, ce qui revient au même, comme $\frac{AH}{AB}$, $\frac{BI}{BC}$, $\frac{CK}{CD}$, &c. Suppoſez premierement que ces gravités ſoient continuées uniformément de A à B, de B à C, de C à D, &c. les décrémens ſe faiſant par dégrés aux points B, C, D, &c. & ces gravités multipliées par les hauteurs AB, BC, CD, &c. formeront les preſſions AH, BI, CK, &c. par leſquelles le fond ATV eſt preſſé (ſelon le Théor. 15.) : la particule A ſoutiendra donc toutes les preſſions AH, BI, CK, DL en allant à l'infini ; & la particule B toutes les preſſions hors la premiere AH ; & la particule C toutes les preſſions hors les deux premieres AH, BI, & ainſi de ſuite. Donc la denſité AH de la premiere particule A eſt à la denſité BI de la ſeconde particule B comme la ſomme de toutes les denſités $AH + BI + CK + DL$ à l'infini, à la ſomme de toutes les denſités $BI + CK + DL$ &c. Et BI denſité de la ſeconde B eſt à CK denſité de la troiſieme C, comme la ſomme de toutes les denſités $BI + CK + DL$ &c. à la ſomme de toutes les denſités $CK + DL$ &c. Or ces ſommes ſont proportionnelles à leurs différences AH, BI, CK, &c. & par conſéquent elles ſont continuellement proportionnelles, (par le Lemme 1. de ce Liv.) donc les différences AH, BI, CK, &c. qui ſont proportionnelles aux ſommes, ſont auſſi continuellement proportionnelles. C'eſt pourquoi, comme les denſités dans les lieux A, B, C, &c. ſont comme AH, BI, CK, &c. elles ſeront auſſi continuellement proportionnelles. Qu'on les prenne par ſauts, & aux diſtances SA, SC, SE, continuellement proportionnelles, les denſités AH, CK, EM ſeront continuellement proportionnelles, & par le même raiſonnement, aux diſtances quelconques continuellement proportionnelles SA, SD, SG, les densités AH, DL, GO seront continuellement proportionnelles.

Fig. 32. Que les points A, B, C, D, E, &c. se rapprochent à présent, ensorte que la progression des gravités spécifiques, depuis le fond A jusqu'à la partie supérieure du fluide, devienne continue, les densités AH, DL, GO, qui étoient toujours continuellement proportionnelles dans des distances quelconques SA, SD, SG, demeureront continuellement proportionnelles. *C. Q. F. D.*

Cor. Delà, si la densité du fluide est donnée en deux lieux comme A & E, on peut trouver sa densité dans un lieu quelconque Q.

Fig. 33. Du centre S, soit décrite une hyperbole dont les asymptotes soient les perpendiculaires SQ, SX, & qui coupe les lignes AH, EM, QT perpendiculaires à l'asymptote SQ en a, e, q, ainsi que les perpendiculaires HX, MY, TZ, à l'asymptote SX, en h, m & t. Soit l'aire $YmtZ$ à l'aire donnée $YmhX$ comme l'aire donnée $EeqQ$ à l'aire donnée $EeaA$; la ligne Zt prolongée coupera la ligne QT proportionnellement à la densité. Car si les lignes SA, SE, SQ sont continuellement proportionnelles, les aires $EeqQ$, $EeaA$ seront égales, & de-là, les aires $YmtZ$, $XhmY$, qui sont proportionnelles aux premieres, seront aussi égales, & les lignes SX, SY, SZ, c'est-à-dire, AH, EM, QT seront continuellement proportionnelles, comme le théorème le demande. Et si les lignes SA, SE, SQ ont un autre ordre quelconque dans une série de quantités continuellement proportionnelles, les lignes AH, EM, QT, à cause de la proportionnalité des aires hyperboliques, auront le même ordre dans une autre série de quantités continuellement proportionnelles.

PROPOSITION XXII. THÉORÉME XVII.

La densité d'un fluide quelconque étant proportionnelle à sa compression, & ses parties étant attirées en embas par une gravité réciproquement proportionnelle aux quarrés de leurs distances au centre : je dis que si l'on prend ces distances dans une progression harmonique les densités du fluide à ces distances seront en progression géométrique.

Que S représente le centre, & SA, SB, SC, SD, SE les distances en progression géométrique. Soient élevées les perpendiculaires AH, BI, CK, &c. qui soient comme les densités du fluide aux lieux A, B, C, D, E, &c. & ses gravités spécifiques dans les mêmes lieux seront $\frac{AH}{SA^2}$, $\frac{BI}{SB^2}$, $\frac{CK}{SC^2}$, &c. Supposez que ces gravités soient continuées uniformement, la premiere de A à B, la seconde de B à C, la troisiéme de C à D, &c. en les multipliant par les hauteurs AB, BC, CD, DE, &c. ou, ce qui est le méme, par les distances SA, SB, SC, &c. proportionnelles à ces hauteurs, on aura les exposans des pressions $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. C'est pourquoi, comme les densités sont proportionnelles à la somme de ces pressions, les différences des densités $AH-BI$, $BI-CK$, &c. seront comme les différences des sommes $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. Fig. 34.

Du centre S soit décrit une hyperbole quelconque dont les asymptotes soient SA, Sx, & qui coupe les lignes AH, BI, CK, &c. qui sont perpendiculaires, en a, b, c, &c. sur l'asymptote SA prolongée, ainsi que les lignes Ht, Iu, Kw perpendiculaires en h, i, k &c. sur l'asymptote Sx prolongée, & les différences tu, uw, &c. des densités seront proportionnelles à $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, &c. & les rectangles $tu \times th$,

Fig. 34.

$uw \times ui$, &c. ou tp, uq &c. seront commme $\frac{AH \times th}{SA}$, $\frac{BI \times ui}{SB}$ &c. c'est-à-dire, comme Aa, Bb, &c. Car, par la nature de l'hyperbole, $SA : AH$ ou $St :: th : Aa$, donc $\frac{AH \times th}{SA} = Aa$. Et par le même raisonnement, $\frac{BI \times ui}{SB} = Bb$, &c. Or Aa, Bb, Cc, &c. sont continuellement proportionnelles, & par conséquent elles sont proportionnelles à leurs différences $Aa - Bb$, $Bb - Cc$, &c. & par conséquent les rectangles tp, uq, &c. sont aussi proportionnels à ces différences, ainsi que les sommes des rectangles $tp + uq$ ou $tp + uq + wr$, aux sommes des différences $Aa - Cc$ ou $Aa - Dd$. Supposé qu'il y ait beaucoup de termes de cette sorte, & la somme de toutes les différences comme $Aa - Ff$ sera proportionnelle à la somme de tous les rectangles comme $zthn$. Qu'on augmente le nombre des termes, & qu'on diminue la distance des points A, B, C, &c. à l'infini, ces rectangles deviendront égaux à l'aire hyperbolique $zthn$, & par conséquent la différence $Aa - Ff$ est proportionnelle à cette aire. Soient prises à présent les distances quelconques SA, SD, SF en progression harmonique, & les différences $Aa - Dd$, $Dd - Ff$ seront égales; & par conséquent, les aires $thlx$, $xlnz$ proportionnelles à ces différences seront égales entr'elles, & les densités St, Sx, Sz, c'est-à-dire, AH, DL, FN, seront continuellement proportionnelles. *C. Q. F. D.*

Cor. Delà, si deux densités quelconques du fluide sont données comme AH & BI, l'aire $thiu$, répondant à la différence tu de ces densités sera donnée; & par-là, on trouvera la densité FN à une hauteur quelconque SF, en prenant l'aire $thnz$ à cette aire donnée $thiu$ comme la différence $Aa - Ff$ est à la différence $Aa - Bb$.

SCHOLIE.

Fig. 34.

On peut prouver par le même raisonnement, que si la gravité des particules du fluide diminue en raison triplée des distances au centre, & qu'on prenne les réciproques des quarrés des distances SA, SB, SC, &c. (c'est-à-dire, $\frac{SA^3}{SA^2}$, $\frac{SA^3}{SB^2}$, $\frac{SA^3}{SC^2}$.) en progression arithmétique; les densités AH, BI, CK, &c. seront en progression géométrique. Et si la gravité diminue en raison quadruplée des distances, & que les réciproques des cubes des distances (c'est-à-dire $\frac{SA^4}{SA^3}$, $\frac{SA^4}{SB^3}$, $\frac{SA^4}{SC^3}$, &c.) soient prises en progression arithmétique; les densités AH, BI, CK, &c. seront en progression géométrique. Et ainsi à l'infini. De plus, si la gravité des particules du fluide est la même à toutes les distances, & que les distances soient en progression arithmétique, les densités seront en progression géométrique, comme le célebre *Edmond Halley* l'a trouvé. Si la gravité est comme la distance & que les quarrés des distances soient en progression arithmétique, les densités seront en progression géométrique. Et de même à l'infini. Cela arrive ainsi lorsque la densité du fluide condensé par la compression est comme la force comprimante, ou, ce qui est la même chose, lorsque l'espace occupé par le fluide est réciproquement comme cette force. On peut supposer d'autres loix de condensation, comme, par exemple, que le cube de la force comprimante soit comme la quatriéme puissance de la densité, ou que la raison triplée de la force soit la même que la raison quadruplée de la densité. Auquel cas, si la gravité est réciproquement comme le quarré de la distance au centre, la densité sera réciproquement comme le cube de la distance. Supposez à présent que le cube de la force comprimante soit comme la cinquiéme puissance de la densité, si la gravité est réciproquement comme le quarré de la distance, la densité sera réciproquement en raison sesquiplée de la distance. Supposez que la force comprimante soit en raison doublée de la densité & la gravité réciproquement en raison doublée de la distance, la densité sera réciproquement comme la distance. Il seroit trop long de parcourir tous les cas. Au reste, il est certain, par l'expérience, que la densité de l'air est, ou exactement, ou à peu près comme la force comprimante; & par conséquent, la densité de l'air de l'atmosphere de la terre est comme le poids de tout l'air incumbant, c'est-à-dire, comme la hauteur du mercure dans le Barometre.

PROPOSITION XXIII. THÉORÊME XVIII.

Si la densité d'un fluide, composé de parties qui se fuient mutuellement, est comme la compression, les forces centrifuges des particules seront réciproquement proportionnelles aux distances à leurs centres. Et au contraire, les particules dont les forces sont réciproquement proportionnelles aux distances à leur centre, & qui se fuient mutuellement, composent un fluide élastique, dont la densité est proportionnelle à la compression.

Fig. 35. Supposez qu'un fluide soit renfermé dans un espace cubique ACE, & qu'ensuite il soit réduit par la compression dans un espace moindre ace; les distances des particules, qui ont la même position entr'elles dans l'un & l'autre espace, seront comme les côtés AB, ab de ces cubes; & les densités des milieux seront réciproquement comme les capacités AB^3, & ab^3. Dans la face $ABCD$ du plus grand cube, soit pris le quarré DP égal à la face db du petit cube; & par l'hypotèse, la pression que le quarré DP exerce sur le fluide qui y est renfermé sera à la pression par laquelle ce quarré db presse le fluide inclus, comme les densités du milieu sont entr'elles, c'est-à-dire, comme ab^3 à AB^3. Mais la pression, par laquelle le quarré DB comprime le fluide inclus, est à la pression par laquelle il est comprimé par le quarré DP, comme le quarré DB au quarré DP,

c'eſt-à-dire, comme AB^2 à ab^2. Donc la preſſion par laquelle le quarré DB comprime le fluide eſt à la preſſion par laquelle il eſt comprimé par le quarré db, comme ab à AB. Les ſurfaces FGH, fgh, qui ſont menées dans l'intérieur des cubes, partagent le fluide en deux parties, & ſe preſſent mutuellement par les mêmes forces par leſquelles elles ſont preſſées par les ſurfaces AC, ac, c'eſt-à-dire, dans la proportion de ab à AB : donc les forces centrifuges qui ſoutiennent ces preſſions ſont dans la même raiſon. Fig. 35.

Comme les particules ſont en même nombre & également ſituées dans l'un & l'autre cube, les forces que toutes les particules exercent ſuivant les ſurfaces FHG, fhg ſur toutes les particules ſont comme celles que chacune d'elles exerce ſur chacune. Donc, les forces que chacune exerce ſur chacune ſuivant le plan FGH dans le plus grand cube, ſont aux forces que chacune exerce ſur chacune dans le plus petit cube ſuivant le plan fgh, comme ab à AB, c'eſt-à-dire, réciproquement comme les diſtances des particules entr'elles. *C. Q. F. D.*

Et réciproquement, ſi les forces de chacune des particules ſont en raiſon renverſée des diſtances, c'eſt-à-dire, réciproquement comme les côtés AB, ab des cubes; les ſommes des forces ſeront dans la même raiſon, & les preſſions des côtés DB, db, ſeront comme les ſommes des forces; & la preſſion du quarré DP ſera à la preſſion du côté DB comme ab^2 à AB^2, & la preſſion du quarré DP eſt à la preſſion du côté db comme ab^3 à AB^3 c'eſt-à-dire, que la force de la compreſſion eſt à la force de la compreſſion comme la denſité à la denſité. *C. Q. F. D.*

SCHOLIE.

Par le même raiſonnement, ſi les forces centrifuges des particules ſont réciproquement en raiſon doublée des diſtances entre les centres, les cubes des forces comprimantes ſeront comme le quarré quarré des denſités. Si les forces centrifuges

Du Mouvement des Corps.

sont réciproquement en raison triplée ou quadruplée des distances, les cubes des forces comprimantes seront comme la sixiéme ou la neuviéme puissance des densités. Et généralement, si on prend *D* pour la distance, *E* pour la densité du fluide comprimé, & que les forces centrifuges soient réciproquement comme la puissance quelconque d'une distance D^n ; les forces comprimantes seront comme les racines cubiques de la puissance E^{n+2}, & réciproquement. Tout cela doit s'entendre des forces centrifuges des particules, lesquelles ne s'exercent que sur les particules les plus proches, ou ne passent gueres au-delà. Nous en avons un exemple dans les corps magnétiques, dont la force attractive ne s'étend pas au-delà des corps du même genre, & qui sont très-proches. Car la vertu magnétique ne s'étend pas au-delà d'une petite lame de fer qu'on interpose entre le corps & l'aimant, & elle se termine presque entierement à ce fer, puisque les corps placés au-delà de cette lame ne sont pas tant attirés par l'aimant que par la lame de fer. Si on conçoit de même des particules qui en fuient d'autres du même genre qu'elles, & dont elles sont très-proches, & qu'on imagine qu'elles n'exercent aucune force sur les particules plus éloignées, on formera par l'assemblage infini de ces particules les fluides dont il s'agit dans cette Proposition. Que s'il y a des particules dont la force s'étende à l'infini, il faudra une plus grande force pour opérer la même condensation d'une plus grande quantité de fluide. C'est une question qui regarde la physique que de sçavoir si les fluides élastiques sont composés de parties qui se fuient mutuellement. Nous avons démontré ici mathématiquement la propriété des fluides composés de particules de cette espece, afin de donner aux Physiciens les moyens de traiter cette matiere.

SIXIÉME

SIXIÉME SECTION.

Du Mouvement & de la résistance des corps oscillans.

PROPOSITION XXIV. THÉORÉME XIX.

Les quantités de matiere dans les corps oscillans & dont les centres d'oscillation sont également distans du centre de suspension, sont en raison composée de la raison des poids, & de la raison doublée des temps des oscillations dans le vuide.

Car la vîtesse qu'une force donnée peut produire dans une matiére donnée en un temps donné est comme le temps & la force directement, & comme la quantité de matiere inversement. Plus la force est grande, plus le temps est long, moins il y a de matiere, & plus il y aura de vîtesse produite : ce qui est clair par la seconde loy du mouvement. Car si les pendules sont de même longueur, les forces motrices sont comme les poids dans les lieux également distans de la perpendiculaire ; donc si deux corps décrivent en oscillant des arcs égaux, & que ces arcs soient divisés en parties égales ; comme les temps dans lesquels ces corps décrivent chaque partie correspondante des arcs sont comme les temps entiers des oscillations, les vîtesses seront entr'elles dans les parties correspondantes des oscillations, comme les forces motrices & les temps entiers des oscillations directement, & comme les quantités de matiere réciproquement : donc les quantités de matiere sont comme les forces, & les temps des oscillations directement, & réciproquement comme les vîtesses. Mais les vîtesses sont réciproquement comme les temps, donc les temps sont directement, & les vîtesses sont réciproquement comme les quarrés des temps, & par conséquent les quantités de matiere sont comme les forces motrices, & les quarrés des temps, c'est-à-dire, comme les poids & les quarrés des temps. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Donc si les temps sont égaux, les quantités de matiere dans chaque corps seront comme les poids.

Cor. 2. Si les poids sont égaux, les quantités de matiere seront comme les quarrés des temps.

Cor. 3. Si les quantités de matiere sont égales, les poids seront réciproquement comme les quarrés des temps.

Cor. 4. Puisque les quarrés des temps, toutes choses égales, sont comme les longueurs des pendules; il est clair que si les temps sont égaux, ainsi que les quantités de matiere, les poids seront comme les longueurs des pendules.

Cor. 5. Et généralement, la quantité de matiere du pendule est comme le poids & le quarré du temps directement, & inversement comme la longueur du pendule.

Cor. 6. Mais dans un milieu non résistant la quantité de matiere du pendule est comme le poids comparatif & le quarré du temps directement, & comme la longueur du pendule inversement. Car le poids comparatif est la force motrice du corps dans un milieu quelconque pesant, comme je l'ai expliqué ci-dessus; donc le poids absolu dans le vuide est la même chose que dans un tel milieu non résistant.

Cor. 7. Et delà on voit tant la maniere de comparer les corps entre eux quant à la quantité de matiere de chacun; que celle de comparer les poids du même corps en divers lieux, pour connoître la variation de la gravité. Et par des expériences très-exactes j'ai toujours trouvé que la quantité de matiere dans chaque corps étoit proportionnelle à leurs poids.

PROPOSITION XXV. THÉORÉME XX.

Les corps suspendus par des fils, & qui se meuvent dans un milieu quelconque qui leur résiste en raison des momens du temps, & ceux qui se meuvent dans un milieu non résistant, lequel a la même gravité spécifique que ces corps, achevent leurs oscillations en des temps *égaux dans une cycloïde. & décrivent en même temps des arcs proportionnels au temps.*

Fig. 36.

Soit *AB* un arc de cycloïde que le corps *D* décrit en oscillant pendant un temps quelconque dans un milieu non résistant. Soit cet arc coupé en deux au point *C*, ensorte que *C* soit son point le plus bas; & la force accélératrice par laquelle le corps est pressé à un point quelconque *D*, ou *d*, ou *E*, sera comme la longueur de l'arc *CD*, ou *Cd*, ou *CE*. Soit représentée cette force par le même arc; la résistance étant comme le moment du temps elle sera donnée. Supposez qu'elle soit représentée par la partie donnée *CO* de l'arc de cycloïde, en prenant l'arc *O d* dans la même raison à l'arc *CD* que l'arc *O B* a à l'arc *CB*: la force par laquelle le corps est pressé en *d* dans un milieu résistant, laquelle est l'excès de la force *Cd* sur la résistance *CO*, sera représentée par l'arc *O d*, & sera par conséquent à la force par laquelle le corps *D* sera pressé dans un milieu non résistant, dans le lieu *D*, comme l'arc *O d* à l'arc *CD*; & par conséquent dans un lieu *B*, comme l'arc *O B* à l'arc *CB*. Donc si deux corps *D* & *d* partent du lieu *B*, & sont pressés par ces forces, il est clair que ces forces sont au commencement comme les arcs *CB* & *O B*, & que les premieres vîtesses & les arcs premierement décrits seront dans la même raison. Soient ces arcs *BD* & *B d*, les arcs restans *CD*, *O d* seront dans la même raison. Et par conséquent les forces qui sont proportionnelles à *CD*, *O d* demeureront dans la même raison qu'au commencement, & par conséquent les corps continueront à décrire en même temps des arcs dans la même raison. Donc les forces, les vîtesses, & les arcs restans *CD*, *O d* seront toujours comme les arcs entiers *CB*, *OB*, & par conséquent les arcs restans seront décrits en même temps. C'est pourquoi deux corps *D* & *d* parviendront en même temps aux lieux *C* & *O*, l'un dans un milieu non résistant au lieu *C*, & l'autre dans un milieu résistant au lieu *O*. Mais les vîtesses en *C* & en *O* étant comme les arcs *CB*, *OB*; les arcs

Fig. 36.

que les corps décriront en même temps en avançant au-delà seront dans la même raison. Soient ces arcs CE & Oe. La force avec laquelle un corps D, dans un milieu non résistant, est retardé en E est comme CE, & la force avec laquelle un corps d est retardé au point e dans un milieu résistant est comme la somme de la force Ce & de la résistance CO, c'est-à-dire, comme Oe; donc les forces qui retardent les corps sont comme les petits arcs CE, Oe, lesquels sont proportionnels aux arcs CB, OB; donc les vîtesses & les arcs qu'elles font décrire sont toujours dans cette même raison donnée des arcs CB & OB; & par conséquent si on prend les arcs entiers AB, aB dans la même raison, les corps D & d décriront en même temps ces arcs, & perdront en même temps tout leur mouvement aux lieux A & a. Les oscillations entieres sont donc isochrones, & les parties quelconques BD, Bd ou BE, Be des arcs qui sont décrites en même temps sont proportionnelles aux arcs entiers BA, Ba. *C. Q. F. D.*

Cor. Donc, ce n'est pas dans le point le plus bas C que le mouvement est le plus prompt dans un milieu qui résiste, mais dans le point O dans lequel l'arc total décrit aB est coupé en deux parties égales; & le corps en avançant ensuite vers a est retardé par les mêmes dégrés par lesquels il étoit accéléré auparavant en descendant de B en O.

PROPOSITION XXVI. THÉORÉME XXI.

Les corps suspendus qui éprouvent une résistance en raison des vîtesses, & qui oscillent dans des arcs de cycloïde, ont leurs oscillations isochrones.

Car si deux corps également distans des centres de suspension décrivent, en oscillant, des arcs inégaux, & que les vîtesses dans les parties correspondantes des arcs soient entr'elles comme les arcs entiers, les résistances proportionnelles aux vîtesses seront aussi entr'elles comme ces mêmes arcs. Ainsi, si des forces motrices qui sont l'effet de la gravité, lesquelles sont comme ces mêmes arcs, on ôte, ou on leur ajoute ces résistances, les différences ou les sommes seront entr'elles dans la même raison des arcs : or comme les incrémens, ou les décrémens des vîtesses sont comme ces différences ou ces sommes, les vîtesses seront toujours comme les arcs entiers; donc si les vîtesses sont dans quelque cas comme les arcs entiers, elles demeureront toujours dans cette même raison. Mais dans le commencement du mouvement, où les corps commencent à descendre & à décrire ces arcs, les forces étant proportionnelles aux arcs produiront des vîtesses qui seront aussi proportionnelles à ces arcs; donc les vîtesses seront toujours comme les arcs entiers à décrire, & par conséquent ces arcs seront décrits en même temps. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION XXVII. THÉOREME XXII.

Si les corps suspendus à des fils éprouvent une résistance en raison doublée des vîtesses, les différences entre les temps des oscillations dans un milieu résistant, & les temps des oscillations dans un milieu non résistant de la même gravité spécifique, seront à peu près proportionnelles aux arcs décrits en oscillant.

Car supposez que des pendules égaux décrivent dans un milieu résistant des arcs inégaux *A*, *B*; la résistance que le corps éprouve dans l'arc *A* sera à la résistance qu'il éprouve dans la partie correspondante de l'arc *B*, en raison doublée des vîtesses, c'est-à-dire, comme *AA* à *BB* à peu près. Si la résistance dans l'arc *B* étoit à la résistance dans l'arc *A* comme *AB* à *AA*, les temps dans les arcs *A* & *B* seroient égaux, par la Proposition précédente. Donc la résistance *AA* dans l'arc *A*, ou la résistance *AB* dans l'arc *B* produit l'excès du temps dans l'arc *A* sur le temps dans un milieu non résistant; & la résistance *BB* produit l'excès du temps dans l'arc *B* sur le temps dans un milieu non résistant. Et ces excès sont comme les forces efficientes *AB* & *BB* à peu près, c'est-à-dire, comme les arcs *A* & *B*. *C. Q. F. D.* Fig. 36.

Du Mouvement des Corps.

Cor. 1. Delà on peut connoître par les temps des oscillations qui se font dans un milieu résistant & dans des arcs inégaux, les temps des oscillations dans un milieu non résistant de la même gravité spécifique. Car la différence des temps sera à l'excès du temps dans le plus petit arc sur le temps dans un milieu non résistant, comme la différence des arcs au plus petit arc.

Cor. 2. Plus les oscillations sont courtes, & plus elles sont isochrones, & celles qui sont très-courtes se font à peu près dans les mêmes temps que si elles se faisoient dans un milieu qui ne résistât point. Mais les temps des oscillations qui se font dans de plus grands arcs sont un peu plus longs, à cause que la résistance que le corps éprouve en descendant, par laquelle le temps est allongé, est plus grande, eu égard à la longueur parcourue en descendant, que la résistance dans l'ascension subséquente, par laquelle résistance le temps est diminué. Mais les temps des oscillations tant les plus longues que les plus courtes, semblent être un peu augmentés par le mouvement du milieu; car le milieu résiste un peu moins aux corps retardés à raison de la vîtesse, & un peu plus à ceux qui sont accélérés qu'à ceux qui se meuvent uniformement : & cela, parce que le milieu, par le mouvement qu'il reçoit des corps en allant du même côté qu'eux, est plus agité dans le premier cas, & moins dans le second ; & que par conséquent il conspire plus ou moins avec le mouvement des corps. Il résiste donc plus aux pendules lorsqu'ils descendent, & moins lorsqu'ils remontent, à raison de la vîtesse, & par ces deux causes le temps est allongé.

PROPOSITION XXVIII. THÉORÈME XXIII.

Si un pendule éprouve une résistance en raison des momens du temps, lorsqu'il oscille dans une cycloïde, cette résistance sera à la force de la gravité, comme l'excès de l'arc décrit dans sa descension entiere sur l'arc décrit dans l'ascension subséquente, est au double de la longueur du pendule.

Fig. 36. Que BC représente l'arc décrit dans la descension, Ca l'arc

décrit dans l'ascension, & $A a$ la différence de ces arcs; & en supposant les constructions & les démonstrations de la Prop. 25. la force qui pressera le corps oscillant, sera dans un lieu quelconque D à la force de la résistance, comme l'arc CD à l'arc CO, moitié de cette différence $A a$. Donc la force qui presse le corps oscillant dans la naissance de la cycloïde, ou dans le point le plus haut, c'est-à-dire, la force de la gravité, sera à la résistance, comme l'arc de cycloïde, entre le point le plus haut & le point le plus bas C, est à l'arc CO, c'est-à-dire, (si on double ces arcs) comme l'arc de toute la cycloïde, ou la double longueur du pendule à l'arc $A a$. *C. Q. F. D.* Fig. 36.

PROPOSITION XXIX. PROBLÉME VI.

Supposé qu'un corps qui oscille dans une cycloïde éprouve une résistance en raison doublée de la vîtesse; trouver la résistance à chacun des lieux.

Soit $B a$ l'arc décrit pendant une oscillation entiere, C le point le plus bas de la cycloïde, & CZ la moitié de l'arc de la cycloïde entiere égale à la longueur du pendule, & qu'on cherche la résistance que le corps éprouve dans un lieu quelconque D. Soit coupée la droite infinie OQ dans les points O, S, P, Q, selon cette loi, que (si on éleve les perpendiculaires OK, ST, PI, QE, & que du centre O, on décrive l'hyperbole $TIGE$ qui coupe les perpendiculaires ST, PI, QE en T, I & E, & dont les asymptotes soient OK, OQ; & que par le point I on tire KF parallele à l'asymptote OQ & rencontrant l'asymptote OK en K & les perpendiculaires ST, QE en L & F) l'aire hyperbolique $PIEQ$, soit à l'aire hyperbolique $PITS$, comme l'arc BC décrit dans la descension du corps, à l'arc Ca décrit dans son ascension, & que l'aire IEF soit à l'aire ILT comme OQ à OS. Ensuite soit coupée par la perpendiculaire MN l'aire hyperbolique $PINM$ qui soit à l'aire hyperbolique $PIEQ$ comme l'arc CZ à l'arc BC décrit dans la descension. Si la perpendiculaire RG Fig. 37. & 38.

DU MOUVEMENT DES CORPS.

Fig. 37. & 38.

coupe l'aire hyperbolique $PIGR$ qui soit à l'aire $PIEQ$ comme l'arc quelconque CD à l'arc BC décrit pendant la descension entiere; la résistance au lieu D sera à la force de la gravité comme l'aire $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$ à l'aire $PINM$.

Car comme les forces venant de la gravité par lesquelles le corps est pressé dans les lieux Z, B, D, a sont comme les arcs CZ, CB, CD, Ca, & que ces arcs sont comme les aires $PINM$, $PIEQ$, $PIGR$, $PITS$; soient exprimées respectivement par ces aires tant les arcs que les forces. Soit de plus Dd le très-petit espace décrit par le corps en descendant, lequel soit représenté par l'aire très-petite $RGgr$ comprise entre les paralleles RG, rg; & soit prolongée rg en h, ensorte que $GHhg$ & $RGgr$ soient les décrémens contemporains des aires IGH, $PIGR$. Et l'incrément $GHhg - \frac{Rr}{OQ}IEF$, ou $Rr \times HG - \frac{Rr}{OQ}IEF$ de l'aire $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$, sera au décrément $RGgr$ ou $Rr \times RG$ de l'aire $PIGR$, comme $HG - \frac{IEF}{OQ}$ à RG; & par conséquent comme $OR \times HG - \frac{OR}{OQ}IEF$ à $OR \times GR$ ou $OP \times PI$, c'est-à-dire, (à cause des quantités égales $OR \times HG$, $OR \times HR - OR \times GR$, $ORHK - OPIK$, $PIHR$ & $PIGR + IGH$) comme $PIGR + IGH - \frac{OR}{OQ}IEF$ à $OPIK$. Donc, si on appelle Y l'aire $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$ & que le décrément $RGgr$ de l'aire $PIGR$ soit donné, l'incrément de l'aire Y sera comme $PIGR - Y$.

Que si V représente la force de la gravité proportionnelle à l'arc CD à décrire, par laquelle force le corps est pressé en D, & que l'on appelle la résistance R; $V - R$ sera la force totale par laquelle le corps est pressé en D. L'incrément de la vîtesse

est

Fig. 37. & 38.

eſt donc comme $V-R$ & comme la particule de temps dans laquelle il ſe fait conjointement : mais cette vîteſſe elle-même eſt directement comme l'incrément de l'eſpace décrit en même temps, & inverſement comme cette même particule de temps. Ainſi la réſiſtance étant, par l'hypotèſe, comme le quarré de la vîteſſe, l'incrément de la réſiſtance (par le Lemme 2.) ſera comme la vîteſſe & comme l'incrément de la vîteſſe conjointement, c'eſt-à-dire, comme le moment de l'eſpace & $V-R$ conjointement; & par conſéquent, ſi le moment de l'eſpace eſt donné, comme $V-R$, c'eſt-à-dire, comme $PIGR-Z$, en écrivant pour la force V la quantité qui l'exprime $PIGR$, & en exprimant la réſiſtance R par quelqu'autre aire Z.

Donc, l'aire $PIGR$ décroiſſant uniformement par la ſouſtraction des momens donnés, l'aire Y croîtra dans la raiſon de $PIGR-Y$, & l'aire Z dans la raiſon de $PIGR-Z$. Et par conſéquent, ſi les aires Y & Z commencent en même temps, & qu'elles ſoient égales vers leur commencement, elles continueront à être égales par l'addition des momens égaux, & décroiſſant enſuite par des momens égaux, elles s'évanouiront en même temps. Et réciproquement, ſi elles commencent & s'évanouiſſent en même temps, elles auront des momens égaux, & ſeront toujours égales : & cela parce que ſi la réſiſtance Z augmente, la vîteſſe diminue auſſi avec l'arc Ca que le corps décrit dans ſon aſcenſion ; & le point dans lequel tout le mouvement ainſi que toute la réſiſtance ceſſe en s'approchant davantage du point C, la réſiſtance s'évanouira plutôt que l'aire Y. Et le contraire arrivera ſi la réſiſtance diminue.

Or comme l'aire Z commence & finit où la réſiſtance eſt nulle, c'eſt-à-dire, dans le commencement du mouvement, où l'arc CD égale l'arc CB, & où la droite RG tombe ſur la droite QE, & à la fin du mouvement où l'arc CD égale l'arc CA, & où la droite RG tombe ſur la droite ST. L'aire Y ou $\frac{OR}{OQ} IEF-IGH$ commence & finit lorſqu'elle eſt nulle, c'eſt-à-dire, lorſque

$\frac{OR}{OQ}$ IEF & IGH sont égales, c'est-à-dire, (par la construction)

Fig. 37. & 38. lorsque la droite RG tombe successivement sur les droites QE & ST. Donc ces aires commencent & s'évanouissent en même temps, & par conséquent elles sont toujours égales. Donc l'aire $\frac{OR}{OQ}$ $IEF-IGH$ est égale à l'aire Z, qui représente la résistance, & par conséquent elle est à l'aire $PINM$, qui représente la gravité, comme la résistance à la gravité. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. La résistance est donc à la gravité dans le lieu le plus bas C, comme l'aire $\frac{OP}{OQ}$ IEF à l'aire $PINM$.

Cor. 2. Et elle devient la plus grande lorsque l'aire $PIHR$ est à l'aire IEF comme OR à OQ. Car, dans ce cas, son moment (c'est-à-dire, $PIGR-Y$) devient nul.

Cor. 3. On connoît aussi par-là la vîtesse à chacun des lieux : car elle est en raison sousdoublée de la résistance, & au commencement du mouvement elle est égale à la vîtesse du corps qui oscilleroit dans la même cycloïde sans éprouver de résistance.

Au reste, à cause que le calcul par le moyen duquel on peut trouver par cette Proposition la vîtesse & la résistance est très-difficile, j'ai cru qu'il étoit à propos d'ajouter la Proposition suivante.

PROPOSITION XXX. THÉORÉME XXIV.

Fig. 39. *Si la droite* aB *est égale à l'arc de cycloïde que le corps décrit en oscillant, & qu'à chacun de ses points* D *on éleve des perpendiculai es* DK *qui soient à la longueur du pendule comme la résistance que le corps éprouve dans les points correspondans de l'arc est à la force de la gravité : je dis que la différence entre l'arc décrit dans toute la descension & l'arc décrit dans toute l'ascension subséquente, multipliée par la moitié de la somme de ces mêmes*

arcs, sera égale à l'aire BKa, *déterminée par toutes les perpendiculaires* DK.

Fig. 39.

Car soit représenté, tant l'arc de cycloïde décrit dans une oscillation entiere par la droite aB qui lui est égale, que l'arc qui seroit décrit dans le vuide par la longueur AB. Soit coupée AB en deux parties égales au point C, ce point C représentera le point le plus bas de la cycloïde, & CD sera comme la partie de la force de la gravité par laquelle le corps est pressé en D suivant la tangente de la cycloïde, & elle aura la même raison à la longueur du pendule que la force en D à la force de la gravité. Soit donc représentée cette force par la longueur CD & la force de la gravité par la longueur du pendule, si on prend DK sur DE qui soit à la longueur du pendule dans la raison de la résistance à la gravité, DK exprimera la résistance. Du centre C & de l'intervale CA ou CB soit tracé le demi cercle $BEeA$. Que le corps décrive dans un espace de temps très-petit l'espace Dd, ayant élevé les perpendiculaires DE, de, qui rencontrent la circonférence en E & en e, elles seront comme les vîtesses que le corps, en descendant dans le vuide, acquéreroit aux lieux D & d. Ce qui est clair (par la Prop. 52. Liv. 1.) Soient ces vîtesses exprimées par les perpendiculaires DE, de; & soit DF la vîtesse que le corps acquiert en D en tombant de B dans un milieu résistant. Si du centre C & de l'intervalle CF on décrit le cercle FfM qui rencontre les droites de & AB en f & M, M sera le lieu auquel il monteroit ensuite s'il n'éprouvoit point de résistance ultérieure, & df seroit la vîtesse qu'il acquéreroit en d. Donc, si Fg représente le moment de la vîtesse que le corps D perd en parcourant le très-petit espace Dd par la résistance du milieu; & qu'on prenne $CN = cg$; N sera le lieu auquel le corps remonteroit ensuite s'il n'éprouvoit point de résistance ultérieure, & MN sera le décrément de l'ascension produit par la diminution de cette vîtesse. Abbaissant Fm perpendiculairement sur df, le décrément Fg de la vîtesse DF causé par la résistance DK sera

Du Mouvement des Corps.

à l'incrément fm de cette même vîteſſe produit par la force CD comme la force génératrice DK à la force génératrice CD. Mais à cauſe des triangles ſemblables Fmf, Fhg, FDC, on a $fm:Fm$ ou $Dd::CD:DF$; & par conſéquent, $Fg:Dd::DK:DF$. Et auſſi $Fh:Fg::DF:CF$; & par conſéquent, Fh ou $MN:Dd::DK:CF$ ou CM. Donc la ſomme de toutes les $MN\times CM$ ſera égale à la ſomme de toutes les $Dd\times DK$. Au point mobile M ſoit toujours ſuppoſé une ordonnée élevée à angle droit, égale à l'indéterminée CM, laquelle parcoure par un mouvement continu toute la ligne Aa; & le trapeze décrit par ce mouvement ou le rectangle $Aa\times\frac{1}{2}aB$ qui lui eſt égal ſera toujours égal à la ſomme de toutes les $MN\times CM$, & par conſéquent à la ſomme de toutes les $Dd\times DK$, c'eſt-à-dire, à l'aire $BKVTa$. *C. Q. F. D.*

Fig. 39.

Cor. Ainſi on peut connoître à peu près par la loi de la réſiſtance & par la différence Aa des arcs Ca, CB la proportion de la réſiſtance à la gravité.

Car ſi la réſiſtance DK eſt uniforme, la figure $BKTa$ ſera un rectangle ſous Ba & DK; & delà, le rectangle ſous $\frac{1}{2}Ba$ & Aa ſera égal au rectangle ſous Ba & DK, & DK ſera égal à $\frac{1}{2}Aa$; c'eſt pourquoi, comme DK repréſente la réſiſtance, & que la longueur du pendule repréſente la gravité, la réſiſtance ſera à la gravité comme $\frac{1}{2}Aa$ à la longueur du pendule; ce qui eſt entierement conforme à ce qui a été démontré dans la Prop. 28.

Si la réſiſtance eſt comme la vîteſſe, la figure $BKTa$ ſera à peu près une ellipſe. Car ſi le corps dans un milieu non réſiſtant décrivoit dans une oſcillation entiere la longueur AB, la vîteſſe dans un lieu quelconque D ſeroit comme le diametre AB du cercle décrit, dont DE eſt l'ordonnée. Donc, comme BA dans un milieu réſiſtant, & Ba dans un milieu non réſiſtant, ſont décrites en temps égaux à peu près; & que les vîteſſes à chacun des points de la longueur Ba ſont aux vîteſſes dans les points correſpondans de la longueur BA, comme Ba à BA; la vîtesse au point D dans un milieu résistant sera comme l'ordonnée du cercle ou de l'ellipse décrits sur le diametre aB; donc la figure $BKVTa$ sera une élipse à peu près. Comme la résistance est supposée proportionnelle à la vîtesse, si OV représente la résistance dans le point du milieu O; l'ellipse $BRVSa$ décrite du centre O, & avec les diametres OB, OV sera égale à peu près à la figure $BKVTa$, & au rectangle $Aa \times BO$ qui lui est égal. Donc $Aa \times BO$ est à $OV \times BO$ comme l'aire de cette ellipse est à $OV \times BO$: c'est-à-dire, que Aa est à OV, comme l'aire du demi cercle au quarré du rayon, ou comme 11 à 7 environ : & par conséquent $\frac{7}{11} Aa$ seront à la longueur du pendule comme la résistance qu'éprouve en O le corps oscillant est à sa gravité. Fig. 39.

Que si la résistance DK est en raison doublée de la vîtesse, la figure $BKVTa$ sera presque une parabole dont le sommet sera V & l'axe OV, donc elle sera égale à peu près au rectangle $\frac{2}{3} Ba \times OV$. Mais le rectangle $\frac{1}{2} Ba \times Aa$ est égal au rectangle $\frac{2}{3} Ba \times OV$, donc $OV = \frac{3}{4} Aa$: & par conséquent la résistance qu'éprouve en O le corps oscillant est à sa propre gravité comme $\frac{3}{4} Aa$ à la longueur du pendule.

Je pense que ces conclusions sont assez éxactes pour la pratique. Car lorsque l'ellipse ou la parabole $BRVSa$ coïncide avec la figure $BRVTa$ dans le point du milieu V, si elle la surpasse vers l'un ou l'autre côté BRV ou VSa elle en est surpassée vers le côté opposé, ce qui les rend égales à peu près.

PROPOSITION XXXI. THÉORÉME XXV.

Si la résistance que le corps qui oscille éprouve à chaque partie proportionnelle des arcs décrits augmente ou diminue dans une raison donnée ; la différence entre l'arc décrit dans la descension & l'arc décrit dans l'ascension subséquente augmentera ou diminuera dans la même raison. Fig. 39.

Car cette différence vient de la retardation qu'éprouve le pendule par la résistance du milieu, ainsi elle est comme toute la retardation & comme la résistance retardative qui lui est proportionnelle.

Fig. 39.

Dans la Proposition précédente le rectangle sous la droite $\frac{1}{2}aB$ & la différence Aa de ces arcs CB, Ca étoit égale à l'aire $BTKa$. Cette aire, si la longueur aB reste la même, augmentera ou diminuera dans la raison des ordonnées DK; c'est-à-dire, en raison de la résistance; elle est donc comme la longueur aB & comme la résistance conjointement. Donc le rectangle sous Aa & $\frac{1}{2}aB$ est comme aB & comme la résistance conjointement, & par conséquent Aa est comme la résistance. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. D'où, si la résistance est comme la vîtesse, la différence des arcs dans le même milieu sera comme l'arc entier décrit: & réciproquement.

Cor. 2. Si la résistance est en raison doublée de la vîtesse, cette différence sera en raison doublée de l'arc entier: & réciproquement.

Cor. 3. Et généralement, si la résistance est en raison triplée, ou dans une autre raison quelconque de la vîtesse, la différence sera dans la même raison de l'arc entier: & réciproquement.

Cor. 4. Et si la résistance est en partie en raison simple de la vîtesse, & en partie en raison doublée de cette même vîtesse, la différence sera en partie dans la raison de l'arc total, & en partie en raison doublée de ce même arc: & réciproquement. Ce sera la même loi & la même raison de résistance par rapport à la vîtesse que celle de cette différence par rapport à la longueur de l'arc.

Cor. 5. Donc le pendule décrivant successivement des arcs inégaux, si on peut trouver la proportion de l'incrément & du décrément de cette différence relativement à la longueur de l'arc décrit, on aura la raison de l'incrément & du décrément de la résistance relativement à la vîtesse plus ou moins grande.

SCHOLIE GÉNÉRALE.

On peut trouver par le moyen de ces Propoſitions la réſiſtance de toutes ſortes de milieux lorſqu'on connoît les oſcillations des pendules dans ces milieux. J'ai trouvé, par exemple, la réſiſtance de l'air par les expériences ſuivantes.

Je ſuſpendis par un fil très-délié à un crochet aſſez ferme un globe de bois du poids de $57 \frac{7}{22}$ onces romaines, & dont le diametre étoit de $6 \frac{7}{8}$ pouces anglois, enſorte qu'entre le crochet & le centre d'oſcillation du globe il y avoit une diſtance de $10 \frac{1}{2}$ pieds; je marquai ſur le fil un point éloigné de 10 pieds & un pouce du centre de ſuſpenſion; & je plaçai vis-à-vis de ce point une régle partagée en pouces, par le moyen deſquels je marquois la longueur des arcs décrits par le pendule. Enſuite je comptai les oſcillations dans leſquelles le globe perdoit la huitieme partie de ſon mouvement. Si le pendule étoit écarté de la verticale à la diſtance de 2 pouces, & qu'enſuite on le laiſſât tomber, enſorte qu'il décrivît en deſcendant un arc de deux pouces, & que dans ſa premiere oſcillation entiere compoſée de cette deſcenſion & de l'aſcenſion ſubſéquente, il parcourut un arc d'environ quatre pouces; ce pendule en 164 oſcillations perdoit la huitieme partie de ſon mouvement, enſorte qu'à la derniere chute il décrivoit ſeulement un arc de $1 \frac{3}{4}$ de pouces. S'il parcouroit 4 pouces dans ſa premiere chute il perdoit la huitieme partie de ſon mouvement en 121 oſcillations, enſorte que dans ſa derniere aſcenſion il ne décrivoit plus qu'un arc de $3 \frac{1}{2}$ pouces. Si dans ſa premiere chute il avoit parcouru un arc de 8, 16, 32, ou 64 pouces, il perdoit la huitieme partie de ſon mouvement en 69, $35 \frac{1}{2}$, $18 \frac{1}{2}$, $9 \frac{2}{3}$ oſcillations reſpectivement. Donc la différence entre les arcs décrits dans la premiere deſcenſion & dans la derniere aſcenſion étoit, dans le premier cas, dans le ſecond, dans le troiſieme, dans le quatrieme, dans le cinquieme & dans le ſixieme, de $\frac{1}{4}$,

Du Mouvement des Corps.

$\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 pouces reſpectivement. En diviſant ces différences par le nombre des oſcillations faites dans chacun de ces cas, on trouvera que dans une des oſcillations moyennes dans leſquelles des arcs de $3\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60, 120 pouces ont été décrits, les différences entre l'arc deſcendu & l'arc ſubſéquent remonté, feront $\frac{1}{656}$, $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{69}$, $\frac{4}{71}$, $\frac{8}{37}$, $\frac{24}{29}$ parties de pouces reſpectivement. Mais ces différences, dans les plus grandes oſcillations, ſont en raiſon doublée des arcs décrits à peu prés, & dans les plus petites elles ſont un peu plus grandes que dans cette raiſon & par conſéquent, (par le Cor 2. de la Prop. 31. de ce Livre) la réſiſtance de ce globe lorſqu'il ſe meut le plus vîte eſt à peu près en raiſon doublée de la vîteſſe ; & lorſqu'il ſe meut le plus lentement elle eſt un peu plus grande que dans cette raiſon.

A préſent que V repréſente la plus grande vîteſſe dans une oſcillation quelconque, & que A, B, C ſoient des quantités données, & que la différence des arcs ſoit $AV + BV^{\frac{3}{2}} + CV^2$. Puiſque les plus grandes vîteſſes dans une cycloïde ſont comme la moitié des arcs décrits en oſcillant, & que dans le cercle elles ſont comme les cordes de la moitié de ces arcs ; elles ſont donc plus grandes dans la cycloïde que dans le cercle, lorſque les arcs décrits ſont égaux, & cela dans la raiſon de la moitié de ces arcs à leurs cordes ; mais les temps ſont plus longs dans le cercle que dans la cycloïde, en raiſon réciproque de la vîteſſe ; ainſi il eſt clair que les différences des arcs (qui ſont comme la réſiſtance, & le quarré du temps conjointement) ſont à peu prés les mêmes dans l'une & l'autre courbe : car dans la cycloïde ces différences devroient augmenter avec la réſiſtance en raiſon doublée à peu près de l'arc à la corde, puiſque la vîteſſe eſt augmentée dans cette raiſon ſimple, & elles devroient diminuer, ainſi que le quarré des temps, dans cette même raiſon doublée. Donc pour faire la réduction à la cycloïde, il faut prendre les mêmes différences des arcs que celles qui ont été obſervées dans le le cercle, & supposer les plus grandes vîtesses proportionnelles aux arcs entiers, ou à leurs moitiés, c'est-à-dire aux nombres $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 & 16. Ecrivant donc dans le second, le quatriéme & le sixiéme cas les nombres 1, 4 & 16, au lieu de V, nous aurons $\frac{\frac{1}{2}}{121} = A + B + C$ pour la différence des arcs dans le second cas; $\frac{2}{35\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$ dans le quatriéme; & $\frac{8}{9\frac{2}{3}} = 16A + 64B + 256C$ dans le sixiéme. On tire de ces équations par la réduction & la comparaison qu'exige l'analyse $A = 0,0000916$, $B = 0,0010847$, & $C = 0,0029558$. La différence des arcs est donc comme $0,0000916\,V + 0,0010847\,V^{\frac{3}{2}} + 0,0029558\,V^2$: & par conséquent, comme (par le Cor. de la Prop. 30. appliqué à ce cas) la résistance qu'éprouve le globe au milieu de l'arc décrit en oscillant (auquel point la vîtesse est V) est à son poids, comme $\frac{7}{11} A V + \frac{7}{10} B V^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4} C V^2$ est à la longueur du pendule; si au lieu de A, B & C, on écrit les nombres trouvés, la résistance que le globe éprouvera sera à son poids comme $0,0000583\,V + 0,0007593\,V^{\frac{3}{2}} + 0,0022169\,V^2$ est à la longueur du pendule entre le centre de suspension & la regle, c'est-à-dire, à 121 pouces. D'où, comme V dans le second cas représente 1, dans le quatriéme 4, & dans le sixiéme 16: la résistance sera au poids du globe dans le second cas, comme 0,0030345 à 121; dans le quatriéme comme 0,041748 à 121 & dans le sixiéme comme 0,61705 à 121.

L'arc, que le point marqué sur le fil décrivoit étoit dans le sixiéme cas de $120 - \frac{8}{9\frac{2}{3}}$ ou $119\frac{5}{29}$ pouces. Et par conséquent, comme le rayon étoit de 121 pouces, & la longueur du pendule entre le point de suspension & le centre du globe de 126 pouces, l'arc que le centre du globe décrivoit étoit de $124\frac{3}{31}$ pouces. Mais comme la plus grande vîtesse du corps oscillant, à cause de la résistance de l'air, ne se trouve pas dans le point le plus bas de l'arc décrit, mais à peu près dans le milieu de l'arc total : elle sera à peu près la même que si le globe avoit décrit dans sa chute entiere dans un milieu non résistant la moitié $62\frac{3}{62}$ pouces de cet arc, & cela, dans une cycloïde à laquelle nous avons réduit ci-dessus le mouvement du pendule : & par conséquent, cette vîtesse sera égale à la vîtesse que le globe pourroit acquérir en tombant perpendiculairement de la hauteur du sinus verse de cet arc. Mais dans une cycloïde, ce sinus verse est à cet arc de $62\frac{3}{62}$ pouces, comme ce même arc à la double longueur du pendule qui est de 252 pouces, & il est par conséquent de 15, 278 pouces. Donc cette vîtesse est celle que le corps peut acquérir en tombant lorsqu'il parcourt dans sa chute un espace de 15, 278 pouces. Avec une telle vitesse le corps éprouve une résistance qui est à son poids comme 0, 61705 à 121, ou (si on fait attention seulement à cette partie de la résistance qui est en raison doublée de la vîtesse) comme 0, 56752 à 121.

J'ai trouvé par une expérience d'hydrostatique que le poids d'un globe de bois étoit au poids d'un globe d'eau de même volume comme 55 à 97 : par conséquent 121 est à 213, 4 dans la même raison, ainsi la résistance du globe d'eau, mû avec la vîtesse dont on a parlé, sera à son poids comme 0, 56752 à 213, 4, c'est-à-dire, comme 1 à $376\frac{1}{50}$. Ainsi, comme le poids du globe d'eau, dans le temps que le globe décrit une longueur de 30, 556 pouces avec une vîtesse uniformement continuée, pourroit produire cette même vîtesse dans le globe tombant, il est clair que la force de la résistance continuée uniformement pendant ce temps peut ôter une vîtesse qui sera moindre dans la raison de 1 à $376\frac{1}{50}$, c'est-à-dire, qui sera la $\frac{1}{376\frac{1}{50}}$ partie de la vîtesse totale. Et par conséquent, ce globe, dans le temps dans lequel il pourroit parcourir par une vîtesse uniformement continuée la longueur de son demi diamétre, ou $3\frac{7}{16}$ pouces perdroit la $\frac{1}{3342}$e partie de son mouvement.

Je comptai auſſi les oſcillations dans leſquelles le pendule perdoit la quatriéme partie de ſon mouvement. Dans la table ſuivante, les chiffres d'en-haut marquent la longueur de l'arc décrit dans ſa premiere chute, exprimée en pouces & en parties de pouces : les chiffres du milieu marquent la longueur de l'arc décrit dans la derniere aſcenſion ; & le nombre des oſcillations eſt marqué par les chiffres d'en-bas. J'ai décrit cette expérience comme la plus exacte qui ait été faite, puiſqu'il y eſt marqué comment le pendule perdoit la huitiéme partie de ſon mouvement. J'en laiſſe le calcul à faire à ceux qui voudront le tenter.

Premiere chute.	2	4	8	16	32	64
Derniere aſcenſion.	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Nombre des oſcillations.	374	272	$162\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{3}$	$41\frac{2}{3}$	$22\frac{2}{3}$

Enſuite, je ſuſpendis au même fil un globe de plomb de deux pouces de diamétre, & du poids de $26\frac{1}{4}$ onces romaines, enſorte qu'entre le centre du globe & le point de ſuſpenſion il y avoit un intervalle de $10\frac{1}{2}$ pieds, & je comptai les oſcillations dans leſquelles il perdit une partie donnée de ſon mouvement. Dans les tables ſuivantes, la premiere marque le nombre des oſcillations dans leſquelles il perdit la huitiéme partie de ſon mouvement total, & la ſeconde le nombre des oſcillations dans leſquelles il en perdit la quatriéme partie.

PREMIERE TABLE.

Premiere chute.	1	2	4	8	16	32	64
Derniere aſcenſion.	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{4}$	$3\frac{1}{2}$	7	14	28	56
Nombre des oſcillations.	226	228	193	140	$90\frac{1}{2}$	53	30

SECONDE TABLE.

Premiere chute.	1	2	4	8	16	32	64
Derniere aſcenſion.	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Nombre des oſcillations.	510	518	420	318	204	121	70

Du Mouvement des Corps.

En prenant dans la premiere table, la troisiéme, la cinquiéme & la septiéme observation, & représentant les plus grandes vîtesses dans ces observations en particulier, par les nombres 1, 4, 16, respectivement, & en général par la quantité V comme ci-dessus : on aura, dans la troisiéme observation $\frac{\frac{1}{2}}{193} = A + B + C$, dans la cinquiéme $\frac{2}{90\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$, dans la septiéme $\frac{8}{30} = 16A + 64B + 256C$. Et ces équations réduites donnent $A = 0,001414$; $B = 0,000297$; $C = 0,000879$, d'où l'on tire que la résistance du globe mu avec la vîtesse V est dans la même raison à son poids, qui étoit de $26\frac{1}{4}$ onces; que, $0,0009\,V + 0,000208\,V^{\frac{3}{2}} + 0,000659\,V^2$ à la longueur du pendule qui est de 121 pouces. Et si l'on considere seulement cette partie de la résistance qui est en raison doublée de la vîtesse, elle sera au poids du globe comme $0,000659\,V^2$ est à 121 pouces. Mais cette partie de la résistance étoit dans la premiere expérience au poids du globe de bois qui étoit de $57\frac{7}{22}$ onces; comme $0,002217\,V^2$ à 121 : & delà on tire la résistance du globe de bois à la résistance du globe de plomb (leurs vîtesses étant les mêmes) comme $57\frac{7}{22} \times 0,002217$ à $26\frac{1}{4} \times 0,000659$, c'est-à-dire, comme $7\frac{1}{3}$ à 1. Les diamétres de ces deux globes étoient $6\frac{7}{8}$ & 2 pouces, dont les quarrés sont l'un à l'autre comme $47\frac{1}{4}$ & 4, ou $11\frac{13}{16}$ & 1 à peu près. Donc, les résistances des globes qui ont la même vîtesse, seront dans une moindre raison que la raison doublée des diamétres. Mais nous n'avons pas encore considéré la résistance du fil, qui certainement étoit assez considérable, & qui doit être soustraite de la résistance trouvée des pendules. Je n'ai pu la déterminer exactement, mais cependant je l'ai trouvée plus grande que la troisiéme partie de la résistance du plus petit pendule entier ; & par-là j'ai connu que les résistances des globes, ôtant la résistance du fil, sont à peu près en raison doublée des diamétres. Car la raiſon de $7\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ à $1 - \frac{1}{3}$ ou de $10\frac{1}{2}$ à 1 ne s'éloigne pas beaucoup de la raiſon doublée des diamétres qui eſt celle de $11\frac{13}{16}$ à 1.

Comme la réſiſtance du fil eſt moins remarquable dans les plus grands globes, j'ai eſſayé auſſi cette expérience avec un globe dont le diamétre étoit de $18\frac{3}{4}$ pouces. La longueur du pendule entre le point de ſuſpenſion & le centre d'oſcillation étoit de $122\frac{1}{2}$ pouces, & entre le point de ſuſpenſion & le nœud fait dans le fil de $109\frac{1}{2}$ pouces. L'arc décrit par le nœud du pendule dans ſa premiere chute étoit de 32 pouces, & celui de ſa derniere aſcenſion décrit par le même nœud, étoit après cinq oſcillations, de 28 pouces. La ſomme de ces arcs, ou l'arc total décrit dans une oſcillation moyenne étoit de 60 pouces. La différence de ces arcs étant de 4 pouces, ſa dixieme partie, ou la différence entre l'aſcenſion & la deſcenſion étoit de $\frac{2}{5}$ de pouce dans une oſcillation moyenne. Comme le rayon $109\frac{1}{2}$ eſt au rayon $122\frac{1}{2}$ ainſi l'arc total de 60 pouces décrit dans une oſcillation moyenne par le nœud, eſt à l'arc total de $67\frac{1}{8}$ pouces décrit par le centre du globe dans une oſcillation moyenne; & comme la différence $\frac{2}{5}$ eſt à la nouvelle différence 0, 4475. Si on augmentoit la longueur du pendule dans la raiſon de 126 à $122\frac{1}{2}$, la longueur de l'arc décrit reſtant la même, le temps d'oſcillation augmenteroit & la vîteſſe du pendule diminueroit dans cette raiſon ſousdoublée, mais la différence 0, 4475 des arcs décrits dans l'aſcenſion & la deſcenſion ſubſéquente reſteroit la même. Enſuite, ſi l'arc décrit augmentoit en raiſon de $124\frac{3}{31}$ à $67\frac{1}{8}$ cette différence 0, 4475 augmenteroit dans cette raiſon doublée, & par conſéquent elle deviendroit 1, 295. Tout ceci auroit lieu, en ſuppoſant la réſiſtance du pendule en raiſon doublée de la vîteſſe. Donc, ſi le pendule décrivoit un arc total de $124\frac{3}{31}$ pouces, & que ſa longueur entre le point de ſuſpenſion & le centre d'oſcillation fut de 126 pouces, la différence des arcs décrits dans la deſcenſion & l'aſcenſion ſubſéquente ſeroit de 1, 5295 pouces. Et cette différence multipliée par le poids du globe qui forme le pendule lequel étoit de 208 onces, donne 318, 136. De plus, lorsque le centre d'oscillation du pendule de bois, dont on a parlé ci-dessus, étoit distant de 126 pouces du point de suspension, il décrivoit un arc total de $124\frac{3}{31}$ pouces, & la différence des arcs décrits dans la descension & l'ascension subséquente étoit $\frac{126}{121} \times \frac{8}{9\frac{2}{3}}$, qui étant multipliée par le poids du globe qui étoit de $57\frac{7}{22}$ donnoit 49, 396. J'ai multiplié ces différences par les poids des globes afin de trouver leurs résistances. Car ces différences viennent des résistances, ainsi, elles sont comme les résistances directement & comme les poids inversement. Ces résistances sont donc comme les nombres 318, 136 & 49, 396. Mais la partie de la résistance du plus petit globe laquelle est en raison doublée de la vîtesse, étoit à la résistance totale, comme 0, 56752 à 0, 61675, c'est-à-dire, comme 45, 453, à 49, 396; & la partie de la résistance du plus grand globe est presque égale à toute sa résistance; donc ces parties sont comme 318, 136 & 45, 453 à peu près, c'est-à-dire, comme 7 à 1. Or les diamétres des globes sont $18\frac{3}{4}$ & $6\frac{7}{8}$ dont les quarrés $351\frac{9}{16}$ & $47\frac{17}{64}$ sont comme 7, 438 & 1, c'est-à-dire, à peu près, comme les résistances 7 & 1 des globes. La différence des raisons est plus grande que celle qui peut venir de la résistance du fil. Donc les parties de ces résistances qui sont, dans des globes égaux, comme les quarrés des vîtesses; sont aussi, les vîtesses étant égales, comme les quarrés des diamétres des globes.

Au reste, le plus grand des globes dont je me suis servi dans ces expériences n'étoit pas parfaitement sphérique, & par cette raison, dans le calcul que je viens de rapporter, j'ai négligé, afin d'être plus court, quelques fractions trop petites; ne m'embarrassant pas beaucoup de faire un calcul rigoureux, dans une expérience dont l'exactitude n'étoit pas poussée assez loin. Je souhaiterois cependant, à cause que la démonstration du vuide dépend de ces expériences, qu'on les fit plus exactement, ſur une plus grande quantité, & avec de plus grands globes. Si on prend des globes en proportion géométrique, c'eſt-à-dire, dont les diamétres ſoient de 4, 8, 16, 32 pouces; on pourra connoître par la progreſſion des expériences ce qui doit arriver dans de plus grands globes.

Pour comparer les réſiſtances des différens fluides entr'eux, j'ai tenté les expériences ſuivantes. J'ai fait un petit vaiſſeau de bois, long de quatre pieds, haut & large d'un pied, j'ai rempli ce vaiſſeau d'eau de fontaine, & j'ai fait oſciller le pendule lorſqu'il étoit plongé dans ce vaiſſeau, qui étoit ouvert. Un globe de plomb du poids de $166\frac{1}{6}$ onces, & de $3\frac{5}{8}$ de diamétre, oſcilloit comme il eſt marqué dans la table ſuivante, la longueur du pendule depuis le point de ſuſpenſion juſqu'à un point marqué ſur le fil étant de 126 pouces, & de $134\frac{3}{8}$ pouces juſqu'au centre d'oſcillation.

Meſure en pouces de l'arc décrit dans la premiere chute par le point marqué ſur le fil.	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Meſure en pouces de l'arc décrit dans la derniere aſcenſion.	48	24	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Différence en pouces des arcs laquelle eſt proportionnelle au mouvement perdu.	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Nombre des oſcillations dans l'eau.			$\frac{29}{60}$	$1\frac{1}{5}$	3	7	$11\frac{1}{4}$	$12\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$
Nombre des oſcillations dans l'air.	$85\frac{1}{2}$		287	535					

Dans l'expérience de la quatriéme colonne, les quantités de mouvement perdues dans 535 oſcillations dans l'air étoient égales à celles qui furent perdues dans $1\frac{1}{5}$ dans l'eau, les oſcillations étoient donc un peu plus promptes dans l'air que dans l'eau. Mais ſi on accéléroit les oſcillations dans l'eau dans une raiſon, telle que le mouvement des pendules fut égal en vîtesse dans l'un & l'autre milieu, le nombre des oscillations dans lesquelles il perdroit son mouvement dans l'eau demeureroit comme auparavant de 1 & $\frac{1}{5}$, à cause que la résistance augmente, & que le quarré du temps diminue dans la même raison doublée. Les pendules qui ont des vîtesses égales perdent donc des quantités égales de mouvement en 535 oscillations dans l'air, & en $1\frac{1}{5}$ dans l'eau; donc la résistance du pendule dans l'eau est à sa résistance dans l'air comme 535 à $1\frac{1}{5}$. C'est là la proportion des résistances totales dans le cas de la quatriéme colonne.

Que $AV + CV^2$ représente à présent la différence des arcs décrits dans la descension & l'ascension subséquente par un globe mu dans l'air avec la plus grande vîtesse V; comme la plus grande vîtesse dans le cas de la quatriéme colonne est à la plus grande vîtesse dans le cas de la premiere comme 1 à 8; & que cette différence des arcs dans le cas de la quatriéme colonne est à la différence dans le cas de la premiere comme $\frac{2}{535}$ à $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$ ou comme $85\frac{1}{2}$ à 4280 : écrivant dans ces cas 1 & 8 pour les vîtesses, $85\frac{1}{2}$, & 4280 pour les différences des arcs, on aura $A + C = 85\frac{1}{2}$ & $8A + 64C = 4280$, ou $A + 8C = 535$; donc par la réduction des équations on aura $7C = 449\frac{1}{2}$, & $C = 64\frac{3}{14}$, & $A = 21\frac{2}{7}$: & par conséquent, la résistance étant comme $\frac{7}{11}AV + \frac{3}{4}CV^2$, elle deviendra comme $13\frac{6}{11}V + 48\frac{9}{56}V^2$. C'est pourquoi dans le cas de la quatriéme colonne où la vîtesse étoit 1, la résistance totale est à sa partie proportionnelle au quarré de la vîtesse, comme $13\frac{6}{11} + 48\frac{9}{56}$ ou $61\frac{12}{17}$ à $48\frac{9}{56}$; & par conséquent la résistance du pendule dans l'eau, est à cette partie de la résistance dans l'air, laquelle est proportionnelle au quarré de la vîtesse (& cette résistance est seule à considérer dans les mouvemens les plus prompts) comme $61\frac{12}{17}$ à $48\frac{9}{56}$ & 535 à $1\frac{1}{5}$ conjointement, c'est-à-dire, comme 571 à 1. Si tout le fil du pendule oscillant étoit plongé dans l'eau, sa résistance seroit encore plus

plus grande ; enforte que la résistance du pendule qui oscille dans l'eau, laquelle est proportionnelle au quarré de la vîtesse, & qui doit être seule considérée dans les corps mûs le plus vîte, est à la résistance de ce même pendule entier lorsqu'il oscille dans l'air avec la même vîtesse, comme 850 à 1 environ, c'est-à-dire, comme la densité de l'eau à la densité de l'air à peu près.

Il falloit prendre dans ce calcul cette partie de la résistance du pendule dans l'eau, qui étoit comme le quarré de la vîtesse, mais (ce qui paroîtra peut-être extraordinaire) la résistance dans l'eau augmentoit dans une raison plus que doublée de la vîtesse. Et en en cherchant la raison, j'ai trouvé que le vaisseau dans lequel je faisois osciller ce pendule étoit trop étroit pour la grandeur du globe du pendule, & qu'il s'opposoit un peu à cause de sa petitesse au mouvement que l'eau faisoit pour céder, car lorsque le globe suspendu, dont le diamétre étoit d'un pouce, étoit plongé; la résistance augmentoit à peu près en raison doublée de la vîtesse. Je l'ai éprouvé en formant un pendule de deux globes, dont l'inférieur qui étoit le plus petit oscilloit dans l'eau, pendant que le supérieur, qui étoit le plus grand, & qui étoit attaché au même fil, fort près de la surface de l'eau, oscilloit dans l'air, & aidoit au mouvement oscillatoire qu'il faisoit durer plus longtemps ; le succès de ces expériences est marqué dans la table suivante.

Arc décrit dans la premiere chute.	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arc décrit dans la derniere ascension.	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Différence des arcs proportionnels au mouvement perdu.	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Nombre des oscillations.	$3\frac{3}{8}$	$6\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{12}$	$21\frac{1}{5}$	34	53	$62\frac{1}{5}$

Pour comparer entr'elles les résistances des milieux, j'ai fait osciller des pendules de fer dans du mercure. La longueur du fil de fer étoit presque de trois pieds, & le diamétre du globe du pendule étoit d'un tiers de pouce environ. J'avois attaché au même fil de fer, fort près de la surface du mercure, un autre globe de plomb assez grand pour faire durer le mouvement du pendule plus long-temps. Et j'avois rempli alternativement d'eau commune, & de mercure le petit vase qui tenoit environ trois livres de mercure, afin de faire osciller alternativement le pendule dans l'un & l'autre fluide, & de pouvoir trouver, par ce moyen, la proportion des résistances; je trouvai que la résistance du vif-argent étoit à celle de l'eau comme 13 ou 14 à 1 environ: c'est-à-dire, comme la densité du vif-argent à celle de l'eau. Lorsque je suspendois un globe un peu plus grand, lorsque je me servois, par exemple, d'un globe dont le diamétre étoit de $\frac{1}{3}$ ou de $\frac{2}{3}$ de pouces, la résistance du vif-argent étoit à celle de l'eau comme 12 ou 10 à 1 environ. Mais je me fie davantage à la premiere expérience, à cause que dans ces dernieres le vase étoit un peu petit pour la grosseur du globe qui y étoit plongé, & qu'en augmentant le globe il auroit aussi fallu augmenter le vase. J'aurois fait aussi des expériences semblables dans de plus grands vases, & dans d'autres liqueurs tant froides que chaudes, & sur des métaux fondus, s'il ne m'avoit pas paru suffisamment certain, par les expériences que je viens de décrire, que la résistance que des corps mus très-vîte éprouvent est à peu près proportionnelle à la densité des fluides dans lesquels ils se meuvent. Je dis à peu près & non exactement, parce qu'il n'est pas douteux que les fluides qui ont plus de ténacité résistent plus, à densité pareille, que ceux qui sont plus fluides; ainsi l'huile froide résiste plus que la chaude, l'huile chaude plus que l'eau de pluie, & l'eau plus que l'esprit de vin. Mais dans les liquides fluides, comme l'air, l'eau douce ou salée, l'esprit de vin, l'esprit de térébentine, l'esprit de sel, l'huile chaude & dégagée de sa partie grossiere par la distillation, l'huile de vitriol, le mercure, les métaux fondus, & enfin dans toutes les espéces de liquides, s'il y en a qui soient assez fluides pour conserver plus long-temps que le vase dans lequel ils ſont le mouvement qu'on leur a imprimé, & qui étant verſés ſe ſéparent facilement en gouttes, je ne doute point que les réſiſtances n'obſervent la regle que je viens de rapporter : ſur-tout ſi on fait les expériences ſur de plus grands globes ſuſpendus, & qui ſoient mus plus vîte.

Enfin, comme pluſieurs croyent qu'il y a une certaine matiere éthérée très-ſubtile qui traverſe librement les pores des corps & tous leurs interſtices; & que cette matiere qui flue dans les pores des corps doit cauſer une réſiſtance: pour connoître ſi la réſiſtance que les corps qui ſe meuvent éprouvent s'exerce toute entiere ſur leur ſuperficie externe, ou ſi les ſuperficies de leurs parties internes éprouvent une réſiſtance ſenſible, j'imaginai l'expérience ſuivante. Je ſuſpendis à un fil long de 11 pieds & attaché à un crochet d'acier très-ferme par le moyen d'un anneau auſſi d'acier, une petite boëte de ſapin ronde, enſorte que cela compoſoit un pendule de 11 pieds. Le crochet qui étoit très-pointu par en haut étoit concave & tranchant, afin que l'anneau qui tenoit à ce crochet par ſa partie ſupérieure put ſe mouvoir très-librement; & c'étoit à la partie inférieure de cet anneau que le fil étoit attaché. Ce pendule étant ainſi compoſé je l'élevai à la hauteur de 6 pieds environ, dans un plan perpendiculaire à la partie interne du crochet, de peur que lorſque le pendule oſcilleroit l'anneau ne vacillat le long du crochet. Car le point de ſuſpenſion dans lequel l'anneau touche le crochet doit demeurer immobile. Je marquois exactement la hauteur à laquelle j'élevois le pendule, enſuite le laiſſant tomber, je marquois trois autres hauteurs auſquelles il revenoit à la fin de la premiere, de la ſeconde & de la troiſieme oſcillation. Je répétai ſouvent cette expérience afin d'être ſur que ces hauteurs fuſſent exactement marquées. Cela fait, je remplis la boëte de plomb & des métaux les plus peſans; mais je peſai auparavant la boëte vuide avec la partie du fil qui l'entouroit, & la moitié du fil qui étoit tendu entre le crochet & la boëte. Car ce fil par ſa tenſion agit toujours ſur le pendule, pour le tirer hors de sa position perpendiculaire, avec la moitié de son poids. J'ajoutai à ce poids celui de l'air contenu dans la boëte, & tous ces poids ensemble faisoient à peu près la 78e partie de celui de la boëte lorsqu'elle étoit pleine de métal. Or comme la boëte, lorqu'elle étoit pleine de métal, augmentoit la longueur du pendule en tendant le fil par son poids, j'acourcis ce fil afin que la longueur du pendule fut la même qu'auparavant. Ensuite, élevant le pendule au même lieu d'où je l'avois premierement fait tomber, je comptai 77 oscillations environ, jusqu'à ce que la boëte fut revenue à la seconde hauteur que j'avois marquée, & ensuite 77 autres jusqu'à ce qu'elle fut revenue à la troisiéme hauteur, & encore 77 jusqu'à ce qu'elle fut revenue à la quatriéme : d'où je conclus, que la résistance entiere de la boëte pleine n'étoit pas à la résistance de la boëte vuide dans une plus grande raison que de 78 à 77. Car si les résistances avoient été égales dans l'un & l'autre cas, la boëte pleine, ayant 78 fois plus de force d'inertie que la boëte vuide, auroit dû conserver son mouvement 78 fois plus long-temps, & par conséquent, le pendule auroit dû faire toujours dans ce cas 78 oscillations avant de retourner aux hauteurs marquées ; mais il n'en fit que 77.

Donc, si A représente la résistance de la superficie externe de la boëte, & B la résistance des parties internes de la boëte vuide ; & que les résistances des parties internes des corps qui ont la même vîtesse, soient comme la matiere ou le nombre des particules qui éprouvent la résistance : la résistance des parties internes de la boéte pleine sera $78\ B$: donc la résistance totale de la boëte vuide $A+B$ sera à la résistance totale de la boëte pleine $A+78B$, comme 77 à 78 ; d'où l'on tire $A+B : 77B :: 77 : 1$, donc, $A+B : B :: 77 \times 77 : 1$, ce qui donne $A : B :: 5928 : 1$. Donc la résistance des parties internes de la boëte vuide est 5000 fois moindre que la résistance de sa superficie externe, & davantage. C'est ainsi que nous avons examiné l'hypotése dans laquelle on prétend que la plus grande résistance de la boëte pleine ne vient d'aucune cause inconnue, mais seulement de l'action de quelque fluide très-subtil renfermé entre les parties du métal.

J'ai rapporté de mémoire cette expérience, car le papier sur lequel j'en avois écrit le détail a été perdu. Ainsi j'ai été forcé d'obmettre les fractions dont je ne me souvenois plus, n'ayant pas le loisir de la répéter. Comme je m'étois servi d'abord d'un crochet qui étoit trop foible, le retardement de la boëte pleine arrivoit plutôt. Et en en cherchant la raison, je trouvai que c'étoit parce que le crochet trop foible cédoit au poids de la boëte, & qu'obéissant à ses oscillations, il se plioit de côté & d'autre. Je pris donc un crochet plus fort, ensorte que le point de suspension demeurât immobile, & alors tout se passa comme je l'ai décrit ci-dessus.

SEPTIÈME SECTION.

Des mouvemens des fluides & de la résistance des projectiles.

PROPOSITION XXXII. THÉORÉME XXVI.

Si deux systêmes semblables de corps sont composés d'un nombre égal de particules, & que les particules correspondantes soient respectivement semblables & proportionnelles dans l'un & l'autre systême, qu'elles soient posées de même entr'elles, qu'elles ayent entre elles une raison donnée de densité, & qu'elles commencent à se mouvoir entr'elles semblablement dans des temps proportionnels, c'est-à-dire, celles qui sont dans un même systême entr'elles, & si les particules d'un même systême ne se touchent point, excepté dans les momens où elles se réfléchissent, enfin si elles ne s'attirent ni ne se fuyent mutuellement que par des forces accélératrices qui soient inversement comme les diamétres des particules correspondantes, & directement comme les quarrés des vîtesses : je dis, que les particules de ces systêmes continueront à se mouvoir entr'elles de la même maniere dans des temps proportionnels.

Je dis que les corps semblables, & posés de même, se meuvent entr'eux de la même maniere dans des temps proportionnels lorsque leur position entr'eux est toujours la même à la fin de ces temps : comme lorsqu'on compare, par exemple, les particules d'un systême avec les particules correspondantes de l'autre. Il suit delà, que les temps dans lesquels les parties semblables & proportionnelles des figures semblables seront décrites par des particules correspondantes seront des temps proportionnels. Donc si on a deux systêmes de cette sorte, les particules correspondantes ayant commencé à se mouvoir de la même maniere continueront de même jusqu'à ce qu'elles se rencontrent. Car si aucune force n'agissoit sur elles, elles avanceroient uniformement en ligne droite par la premiere loy du mouvement. Mais si elles agissoient l'une sur l'autre mutuellement par quelques forces, & que ces forces fussent inversement comme les diamétres des particules correspondantes, & directement comme les quarrés des vîtesses ; les positions des particules étant semblables, & les forces étant proportionnelles, les forces totales qui agiroient alors sur les particules correspondantes, étant composées des forces qui agissent sur chacune des particules (par le second corollaire des loix) auroient des déterminations semblables à celles qu'elles auroient si elles tendoient à des centres placés semblablement entre ces particules ; & les forces totales seroient entr'elles comme chacune des forces composantes, c'est-à-dire, inversement comme les diamétres des particules correspondantes, & directement comme les quarrés des vîtesses : & elles feroient par conséquent que les particules correspondantes continueroient à décrire des figures semblables.

Tout cela arrivera ainsi (par les corol. 1. & 8. de la Prop. 4. L. 1.) pourvu que les centres soient en repos. Mais s'ils se meuvent, comme leurs situations demeurent les mêmes entre les particules des systêmes, à cause qu'ils sont mus d'une maniere semblable ; il arrivera des changemens semblables dans les figures que ces particules décrivent. Donc les mouvemens des particules semblables correspondantes seront semblables jusqu'à leurs premieres rencontres, &

par conséquent les rencontres & les réfléxions seront semblables, & ensuite (par ce qui a déja été démontré) elles auront les mêmes mouvemens entr'elles, jusqu'à ce qu'elles se rencontrent de nouveau; & ainsi de-suite à l'infini. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Delà, si deux corps quelconques, semblables & situés de même par rapport aux particules correspondantes des systêmes, commencent à se mouvoir de même entre ces particules dans des temps proportionnels, & que leurs grandeurs & leurs densités entr'elles soient comme les grandeurs & les densités des particules correspondantes : elles continueront à se mouvoir de même dans des temps proportionnels. C'est la même chose pour les plus grandes parties de l'un & l'autre systême que pour les particules.

Cor. 2. Et si toutes les parties semblables & posées de même des systêmes sont en repos entr'elles : & que deux d'entr'elles, plus grandes que les autres, & qui se correspondent mutuellement dans l'un & l'autre systême, commencent à se mouvoir d'une façon quelconque d'un mouvement semblable, & selon des lignes posées de même : elles produiront des mouvemens semblables dans les autres parties des systêmes, & elles continueront à se mouvoir de même entr'elles dans des temps proportionnels; & par conséquent à décrire des espaces proportionnels à leurs diamétres.

PROPOSITION XXXIII. THÉORÉME XXVII.

Les mêmes choses étant posées, je dis que les parties les plus grandes des systêmes éprouvent une résistance en raison composée, de la raison doublée de leurs vîtesses, de la raison doublée de leurs diamétres, & de la raison de la densité des parties du systême.

Car la résistance vient en partie des forces centripétes ou centrifuges par lesquelles les particules des systêmes agissent les unes sur les autres, & en partie des rencontres & des réfléxions des particules, & des parties les plus grandes. Les résistances du premier genre sont entr'elles comme les forces motrices entieres qui les produiſent, c'eſt-à-dire, comme les forces accélératrices entieres, & les quantités de matiere dans les parties correſpondantes; ou, ce qui revient au même par l'hypotéſe, comme les quarrés des vîteſſes directement, & les diſtances des particules correſpondantes inverſement, & comme les quantités de matiere dans les particules correſpondantes directement: c'eſtpourquoi, les diſtances des particules d'un ſyſtême étant aux diſtances correſpondantes des particules de l'autre ſyſtême, comme le diamétre d'une particule, ou d'une partie dans le premier ſyſtême au diamétre d'une particule ou d'une partie dans l'autre ſyſtême, & que les quantités de matiere ſont comme les denſités des parties, & les cubes des diamétres, les réſiſtances ſont l'une à l'autre comme les quarrés des vîteſſes, les quarrés des diamétres, & les denſités des particules des ſyſtêmes. *C. Q. F. D.*

Les réſiſtances du ſecond genre ſont comme les nombres des réflexions correſpondantes, & les forces conjointement. Mais les nombres des réflexions ſont entr'eux comme les vîteſſes des parties correſpondantes directement, & inverſement comme les eſpaces entre ces réflexions. Les forces des réflexions ſont comme les vîteſſes, les grandeurs, & les denſités des parties correſpondantes conjointement, c'eſt-à-dire, comme les vîteſſes, les cubes des diamétres & les denſités des parties. Et en compoſant toutes ces raiſons, les réſiſtances des parties correſpondantes ſont entr'elles conjointement comme les quarrés des vîteſſes, les quarrés des diamétres & les denſités des parties. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Donc, ſi ces ſyſtêmes ſont deux fluides élaſtiques comme l'air, & que leurs parties ſoient en repos entr'elles: que deux corps ſemblables & proportionnels aux parties des fluides, quant à la grandeur & à la denſité, & poſés de même entre ces parties, ſoient jettés d'une façon quelconque, ſuivant des lignes poſées de même; & que les forces accélératrices, par leſquelles les particules de ces fluides agiſſent mutuellement les unes ſur les autres, ſoient inverſement comme les diamétres des corps jettés, & directement

directement comme les quarrés des vîtesses : ces corps produiront, dans les fluides, des mouvemens semblables, & ils y décriront, dans des temps proportionnels, des espaces proportionnels à leurs diamétres.

Cor. 2. Ainsi un corps qui se meut avec une grande vîtesse dans le même fluide éprouve une résistance en raison doublée de sa vîtesse à peu près. Car si les forces, par lesquelles les particules éloignées agissent mutuellement les unes sur les autres, étoient augmentées en raison doublée de la vîtesse, sa résistance seroit dans la même raison doublée exactement ; donc dans un milieu dont les parties éloignées n'agissent aucunement les unes sur les autres, la résistance est exactement en raison doublée de la vîtesse.

Soient *A*, *B*, *C* trois milieux composés de parties semblables, égales & disposées régulierement à des distances égales ; que les parties des milieux *A* & *B* se fuient mutuellement avec des forces qui soient entr'elles comme *T* & *V*, & que celles du milieu *C* soient destituées entierement de ces sortes de forces. Si quatre corps égaux *D*, *E*, *F*, *G* se meuvent dans ces milieux, les deux premiers *D* & *E* dans les deux premiers *A* & *B*, & les deux autres *F* & *G* dans le troisiéme *C* ; & que la vîtesse du corps *D* soit à la vîtesse du corps *E*, & la vîtesse du corps *F* à la vîtesse du corps *G* en raison sousdoublée des forces *T* aux forces *V* : la résistance du corps *D* sera à la résistance du corps *E*, & la résistance du corps *F* à la résistance du corps *G* en raison doublée des vîtesses ; & par conséquent, la résistance du corps *D* sera à la résistance du corps *F* comme la résistance du corps *E* à la résistance du corps *G*. Supposez que ces corps *D* & *F* ayent des vîtesses égales ainsi que les corps *E* & *G* ; en augmentant les vîtesses des corps *D* & *F* dans une raison quelconque, & diminuant les forces des particules du milieu *B* dans la même raison doublée, le milieu *B* approchera tant qu'on voudra de la forme & de la condition du milieu *C*, & par conséquent, les résistances des corps égaux *E* & *G*, qui ont des vîtesses égales dans ces milieux, approcheront sans cesse de l'égalité, ensorte que leur différence deviendra enfin plus petite que toute différence donnée. Donc, comme les résistances des corps *D* & *F* sont entr'elles comme les résistances des corps *E* & *G*, elles approcheront aussi sans cesse de même de l'égalité. Donc les résistances des corps *D* & *F* sont à peu près égales lorsqu'ils se meuvent très-vîte : & par conséquent, comme la résistance du corps *F* est en raison doublée de sa vîtesse, la résistance du corps *D* sera dans la même raison à peu près.

Cor. 3. La résistance d'un corps, qui se meut très-vîte dans un milieu quelconque élastique, est la même à peu près que si les parties du fluide n'avoient aucune force centrifuge, & qu'elles ne se fuyassent pas mutuellement : pourvu que la force élastique du fluide soit l'effet des forces centrifuges des particules, & que la vîtesse soit si grande que les forces n'ayent pas assez de temps pour agir.

Cor. 4. Donc, comme les résistances des corps semblables qui ont des vîtesses égales, & dont les parties qui ne sont pas contigues ne se fuyent pas mutuellement, sont comme les quarrés des diamétres ; les résistances des corps qui ont des vîtesses égales & qui se meuvent très-vîte sont aussi, dans un fluide élastique, comme les quarrés des diamétres à peu près.

Cor. 5. Comme les corps semblables, égaux, & qui ont des vîtesses égales dérangent, dans des milieux qui ont la même densité, des quantités égales de matiere en temps égaux, & leur impriment une égale quantité de mouvement lorsque les particules de ces milieux ne se fuient point mutuellement, soit que ces particules soient très-petites & en grand nombre, soit qu'elles soient plus grandes & que leur nombre soit moindre, & que réciproquement (par la troisieme loi du mouvement) ces corps éprouvent une réaction égale de cette même matiere, c'est-à-dire, que cette matiere leur résiste également : il est clair aussi, que dans les fluides élaſtiques de la même denſité, les réſiſtances que les corps éprouvent ſont égales, à peu près, lorſqu'ils ſe meuvent très-vîte; ſoit que ces fluides ſoient composés de particules très-groſſieres, ou qu'ils le ſoient des plus ſubtiles de toutes. Car la ſubtilité du milieu ne diminue pas beaucoup la réſiſtance des projectiles qui ſe meuvent très-vîte.

Cor. 6. Tout cela ſe paſſe ainſi dans les fluides dont la force élaſtique eſt l'effet des forces centrifuges des parties. Mais ſi cette force vient d'une autre cauſe, comme de l'extenſion des parties telle que celle qu'on remarque dans la laine ou dans les branches des arbres, ou de quelqu'autre cauſe quelconque, qui rende le mouvement des parties entr'elles moins libre : alors la fluidité du milieu étant moindre, la réſiſtance ſera plus grande que dans les précédens corollaires.

PROPOSITION XXXIV. THÉORÊME XXVIII.

Si un globe & un cylindre de diamétres égaux ſe meuvent avec une vîteſſe égale, dans le ſens de l'axe du cylindre, dans un milieu rare & composé de parties égales, & ſituées librement à des diſtances égales les unes des autres, la réſiſtance du globe ſera ſouſdouble de celle du cylindre.

Car l'action du milieu ſur le corps étant la même (par le Cor. 5. des loix) ſoit qu'il ſe meuve dans un milieu en repos, ſoit que les particules de ce milieu viennent choquer ce corps ſuppoſé en repos avec la même vîteſſe : commençons par conſidérer ici le corps comme étant en repos, & voyons avec quelle force ce milieu, qui eſt ſuppoſé ſe mouvoir, agira ſur lui.

Que C repréſente donc le centre d'un corps ſphérique $ABKI$ dont le demi diamétre eſt CA, que les particules du milieu frappent ce corps ſphérique avec une vîteſſe donnée ſelon des lignes paralleles à AC: & que FB ſoit une de ces droites. Soit priſe ſur cette ligne la ligne LB égale au demi diamétre CB, & ſoit Fig. 40.

Fig. 40.

menée BD qui touche la ſphere en B. Sur KC & BD ſoient abbaiſſées les perpendiculaires BE, LD, la force avec laquelle une particule de ce milieu frappe le globe en B, en tombant obliquement ſelon la droite FB, ſera à la force avec laquelle la même particule frapperoit perpendiculairement en b le cylindre $ONGQ$ décrit autour du globe & ayant pour axe ACI, comme LD eſt à LB, ou BE à BC. De plus, l'efficacité de cette force pour mouvoir le globe ſuivant ſon incidence FB ou AC, eſt à ſon efficacité pour mouvoir ce globe du côté vers lequel elle eſt déterminée, c'eſt-à-dire, du côté de la droite BC ſelon laquelle elle preſſe le corps directemeut, comme BE eſt à BC. Et en compoſant ces raiſons, l'efficacité d'une particule ſur le globe, lorſqu'elle y tombe obliquement ſelon la droite FB, pour le mouvoir du côté de ſon incidence, eſt à l'efficacité de cette même particule lorſqu'elle tombe perpendiculairement ſur le cylindre ſelon la même droite, pour le mouvoir du même côté, comme BE^2 eſt à BC^2. C'eſt pourquoi, ſi ſur bE qui eſt perpendiculaire à la baſe circulaire NAO du cylindre, & égale au rayon AC, on prend $bH = \frac{BE^2}{BC}$, bH ſera à bE comme l'effet de la particule ſur le globe eſt à ſon effet ſur le cylindre. Et par conſéquent, le ſolide formé par toutes les droites bH, ſera au ſolide formé par toutes les droites bE, comme l'effet de toutes les particules ſur le globe eſt à l'effet de toutes les particules ſur le cylindre. Mais le premier de ces ſolides eſt un paraboloïde dont le ſommet eſt C, l'axe CA, & le paramétre CA; & le dernier eſt le cylindre circonſcript à ce paraboloïde. De plus, il eſt connu que le paraboloïde eſt la moitié du cylindre circonſcript; donc la force totale du milieu ſur le globe eſt la moitié de la force totale de ce même milieu ſur le cylindre. Et par conſéquent, ſi les particules qui compoſent le milieu étoient en repos, & que le globe & le cylindre ſe muſſent avec la même vîteſſe, la réſiſtance que le globe éprouveroit ſeroit ſouſdouble de celle du cylindre. *C. Q. F. D.*

SCHOLIE.

Fig. 41.

On peut comparer par la même méthode les autres figures entr'elles quant à la réſiſtance qu'elles éprouvent, & trouver celles qui ſont les plus propres à conſerver longtemps leur mouvement dans des milieux réſiſtans. Si par exemple, on veut conſtruire, ſur la baſe circulaire *CEBH*, décrite du centre *O* & du rayon *OC*, un cône tronqué *CBGF*, dont la hauteur ſoit *OD*, & qui ſoit de tous les cônes tronqués, conſtruits ſur la même baſe & la même hauteur, & qui ſe meuvent ſuivant leur axe du côté de *D*, celui qui éprouve la moindre réſiſtance; coupez en deux parties égales la hauteur *OD* en *Q*, & prolongez *OQ* en *S*, en ſorte que $QS = QC$, & *CFGB* ſera le cône tronqué demandé.

D'où on tire, chemin faiſant, (l'angle *CSB* étant toujours aigu) que ſi le ſolide *ADBE* eſt formé par la révolution de la figure elliptique ou ovale *ADBE* autour de l'axe *AB*, & que la figure génératrice ſoit touchée par les trois droites *FG*, *GH*, *HI* dans les points *F*, *B* & *I*, ſelon cette loi, que *GH* ſoit perpendiculaire à l'axe dans le point de contact *B*, & que *FG*, *HI* faſſent avec la même ligne *GH* des angles *FGB*, *BHI* de 135 dégrés, le ſolide formé par la révolution de la figure *ADFGHIE* autour du même axe *AB* éprouvera moins de réſiſtance que le premier ſolide, pourvu que l'un & l'autre avancent ſuivant l'axe *AB*, & que *B* ſoit le côté qui précede dans l'un & dans l'autre, je ne crois pas cette propoſition inutile pour la conſtruction des vaiſſeaux. Fig. 42.

Que ſi la figure *DNFG* eſt une courbe d'une telle nature, que ſi par un de ſes points quelconques *N* on abaiſſe la perpendiculaire *NM* ſur l'axe *AB*, & que d'un point donné *G* on mene la droite *GR* qui ſoit parallele à la droite qui touche la figure en *N*, & qui coupe en *R* l'axe prolongé, on aura $MN : GR :: GR^3 : 4BR \times GB^2$; le ſolide formé par la révolution de cette figure autour de l'axe *AB* éprouvera une moindre réſiſtance,

Du Mouvement des Corps.

Fig. 42.

en se mouvant de A vers B, dans le milieu rare dont on a parlé, qu'aucun autre solide circulaire quelconque décrit sur la même hauteur & la même base.

PROPOSITION XXXV. PROBLÉME VII.

On demande la résistance qu'éprouve un globe qui se meut uniformément dans un milieu rare formé de très-petites particules égales, en repos, & situées librement à des distances égales les unes des autres.

Cas 1. Supposé que le cylindre qui a le même diamétre, & la même hauteur que le globe s'avance avec la même vîtesse, dans le même milieu, & dans le sens de son axe. Que les particules du milieu dans lequel le globe ou le cylindre se plonge rejaillissent avec toute la force de la réflexion. Comme la résistance que le globe éprouve, est (par la derniere Proposition) la moitié de celle qu'éprouve le cylindre, le globe étant au cylindre comme 2 à 3, & le cylindre en tombant perpendiculairement sur ces particules, qui rejaillissent très-fortement, leur communiquant une vîtesse double de la sienne : le cylindre, dans le temps dans lequel il aura parcouru en avançant uniformement la moitié de la longueur de son axe, communiquera aux particules du milieu un mouvement, qui sera au mouvement total du cylindre, comme la densité du milieu est à la densité du cylindre ; & le globe dans le temps dans lequel il parcourt toute la longueur de son diamétre en avançant uniformement communiquera le même mouvement à ces particules ; & dans le temps pendant lequel il parcourt les deux tiers de son diamétre il communiquera aux particules un mouvement qui sera à son mouvement total, comme la densité du milieu à la densité du globe. Et par conséquent, le globe éprouve une résistance qui est à la force qui peut produire tout son mouvement ou le lui ôter, dans le temps qu'il met à parcourir les deux tiers de son diamétre en avançant uniformement, comme la densité du milieu est à la densité du globe.

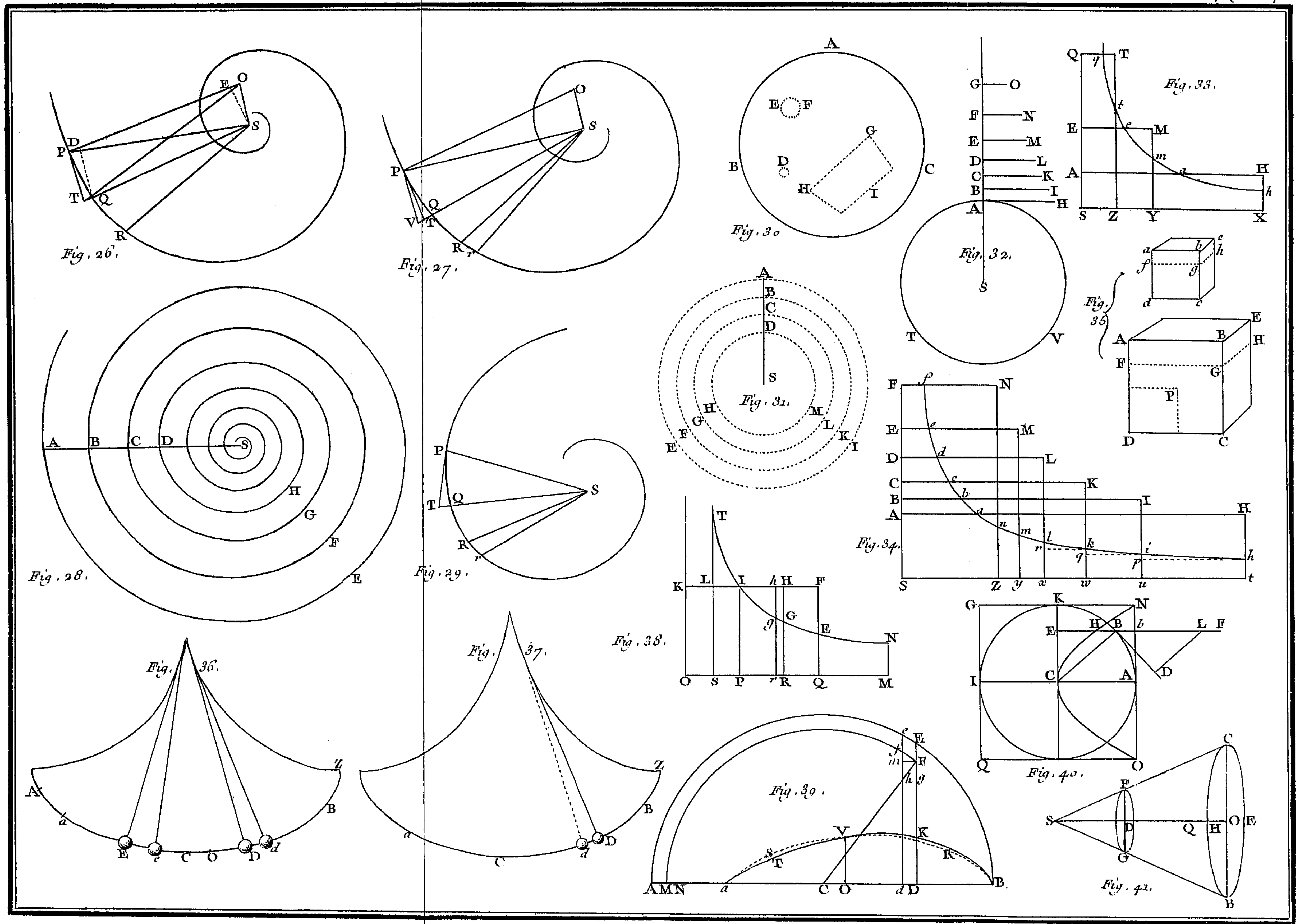


Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 42.

Cas 2. Suppoſons que les particules du milieu qui tombent ſur le globe ou ſur le cylindre ne ſoient pas réfléchies ; & que le cylindre en tombant perpendiculairement ſur ces particules leur communique la vîteſſe ſimple qui l'anime, il ſouffrira alors une réſiſtance qui ſera ſousſdouble de celle qu'il éprouve dans le premier cas, & la réſiſtance qu'éprouvera le globe ſera par conſéquent auſſi ſouſdouble de ce qu'elle étoit auparavant.

Cas 3. Suppoſons que les particules du milieu rejailliſſent de deſſus le globe par la force de la réflexion qu'on ſuppoſe n'être ni nulle, ni grande, mais moyenne ; la réſiſtance qu'éprouvera le globe ſera dans cette même raiſon, c'eſt-à-dire, moyenne entre la réſiſtance dans le premier cas, & la réſiſtance dans le ſecond. *C. Q. F. T.*

Cor. 1 Delà, ſi le globe & les particules ſont infiniment dures & privées de toute force élaſtique, & par conſéquent auſſi de toute force réfléchiſſante ; la réſiſtance que le globe éprouvera ſera à la force par laquelle tout ſon mouvement peut lui être communiqué ou ôté, dans le temps dans lequel un globe quadruple parcourt la troiſiéme partie de ſon diamétre, comme la denſité du milieu à la denſité du globe.

Cor. 2. La réſiſtance que le globe éprouve eſt, toutes choſes égales, en raiſon doublée de la vîteſſe.

Cor. 3. Cette réſiſtance eſt auſſi, toutes choſes égales, en raiſon doublée du diamétre.

Cor. 4. Cette réſiſtance eſt encore comme la denſité du milieu, toutes choſes égales.

Cor. 5. Et par conſéquent cette réſiſtance eſt dans la raiſon composée de la raiſon doublée de la vîteſſe, de la raiſon doublée du diamétre, & de la raiſon de la denſité du milieu.

Cor. 6. Le mouvement du globe & la réſiſtance qu'il éprouve, peuvent s'exprimer ainſi. Soit *AB* le temps dans lequel le globe peut perdre tout ſon mouvement par la réſiſtance qu'il éprouve, Fig. 43.
laquelle on ſuppoſe uniformement continuée. Soient élevées *AD*,

Du Mouvement des Corps.

Fig. 43.

BC perpendiculairement sur AB, & que BC exprime le mouvement total du corps, soit tracée, par le point C, l'hyperbole CF dont les asymptotes soient AD, AB, & soit prolongée AB jusqu'à un point quelconque E. Soit élevée ensuite la perpendiculaire EF qui rencontre l'hyperbole en F, & soit achevé le parallélograme $CBEG$, enfin soit tirée AF qui rencontre BC en H. Si le globe dans un temps quelconque BE décrit dans un milieu non résistant l'espace $CBEG$ par son mouvement primitif BC continué uniformement, lequel espace $CBEG$ est représenté par l'aire du parallélograme, le même corps, dans un milieu résistant, décrira l'espace $CBEF$, représenté par l'aire de l'hyperbole, & son mouvement à la fin de ce temps sera représenté par EF ordonnée à l'hyperbole, & alors il aura perdu la partie FG de son mouvement. Et la résistance qu'il éprouvera à la fin du même temps sera représentée par la longueur BH, la partie CH de la résistance étant détruite. Tout cela est clair par les Cor. 1. & 3. de la Prop. 5. du Liv. 2.

Cor. 7. Delà, si le globe pendant le temps T perd tout son mouvement M par la résistance R continuée uniformement : ce même globe perdra dans le temps t dans un milieu résistant la partie $\frac{tM}{T+t}$ de son mouvement M, par la résistance R décroissante en raison doublée de la vîtesse, la partie $\frac{TM}{T+t}$ demeurant la même ; & il décrira un espace qui sera à l'espace décrit par le mouvement uniforme M, dans le même temps t, comme le logarithme du nombre $\frac{T+t}{T}$ multiplié par le nombre 2, 302585092994 est au nombre $\frac{t}{T}$, à cause que l'aire hyperbolique $BCFE$ est au rectangle $BCGE$ dans cette Proportion.

SCHOLIE.

J'ai exposé dans cette Proposition la résistance & la retardation des projectiles sphériques dans les milieux qui ne sont pas continus, & j'ai fait voir que cette résistance est à la force par laquelle le mouvement total du globe peut être produit ou détruit, dans le temps qu'il employe à parcourir les deux tiers de son diamétre par une vîtesse uniformement continuée, comme la densité du milieu est à la densité du globe, pourvu que le globe & les particules du milieu soient très-élastiques, & qu'elles ayent beaucoup de force réfléchissante : & enfin que cette force est deux fois moindre lorsque le globe & les particules du milieu sont infiniment dures, & entierement incapables de réflexion. Dans les milieux continus tels que l'eau, l'huile chaude, & le vif-argent, dans lesquels le globe ne tombe pas immédiatement sur toutes les particules résistantes du fluide, mais presse seulement les particules les plus voisines, celles-là en pressent d'autres, & les autres d'autres encore, la résistance est encore deux fois moindre. Le globe, dans de tels milieux très-fluides, éprouve une résistance, qui est à la force qui peut lui ôter ou lui communiquer tout son mouvement, dans le temps dans lequel il peut parcourir les $\frac{3}{8}$ parties de son diamétre, par son mouvement uniformement continué, comme la densité du milieu est à la densité du globe. C'est ce que je tâcherai de faire voir dans les Propositions suivantes.

PROPOSITION XXXVI. PROBLÉME VIII.

Trouver le mouvement de l'eau qui s'écoule par un trou fait dans le fond d'un vase cylindrique.

Soit *ACDB* le vase cylindrique, *AB* son ouverture supérieure, *CD* le fond de ce vase parallele à l'horison, *EF* un trou circulaire fait dans le milieu de ce fond, *G* le centre de ce trou, Fig. 44.

Fig. 44.

& GH l'axe du cylindre perpendiculaire à l'horiſon. Suppoſez un cylindre de glace $APQB$ de la même largeur que l'intérieur du vaſe, qui ait le même axe, & qui deſcende continuellement avec un mouvement uniforme; & que ſes parties, dans le moment qu'elles auront atteint la ſuperficie AB, ſe liquifient, & en ſe convertiſſant en eau, qu'elles s'écoulent dans le vaſe par leur gravité, & forment, en tombant, une cataracte ou colonne d'eau $ABNFEM$ qui paſſe par le trou EF & qui l'empliſſe entierement. Suppoſez que la vîteſſe avec laquelle cette glace deſcend ſoit uniforme, ainſi que celle de l'eau contigue dans le cercle AB, que cette vîteſſe ſoit celle que cette eau peut acquérir en tombant, & en parcourant dans ſa chute la hauteur IH, & que IH & HG ſoient en ligne droite. Par le point I ſoit menée la ligne KL parallele à l'horiſon & rencontrant en K & en L les côtés de la glace. La vîteſſe de l'eau qui s'écoule par le trou EF ſera la même que celle que l'eau peut acquérir en tombant de I, & en parcourant dans ſa chute la hauteur IG. Donc, par les Théorêmes de Galilée, IG ſera à IH en raiſon doublée de la vîteſſe de l'eau qui s'écoule par le trou, à la vîteſſe de l'eau dans le cercle AB, c'eſt-à-dire, en raiſon doublée du cercle AB au cercle EF; car les vîteſſes de l'eau qui paſſe dans le même temps, & en quantité égale par différens cercles ſont réciproquement comme les aires de ces cercles. Il s'agit ici de la vîteſſe de l'eau qui s'écoule vers l'horiſon. Quant au mouvement parallele à l'horiſon, par lequel les parties de l'eau qui tombent s'approchent l'une de l'autre, il ne doit point être conſidéré ici parce qu'il ne vient point de la gravité, & qu'il ne change rien au mouvement perpendiculaire à l'horiſon qni eſt produit par la gravité. Nous ſuppoſons cependant que les parties de l'eau ayent quelque cohérence, & que par leur cohéſion elles s'approchent l'une de l'autre en tombant, par des mouvemens paralleles à l'horiſon; enſorte qu'elles forment une ſeule cataracte, & qu'elles ne ſoient point diviſées en pluſieurs cataractes. Mais nous ne faiſons point attention ici au mouvement parallele à l'horiſon qui eſt produit par cette cohéſion.

Fig. 44.

Cas 1. Concevez que toute la cavité du vaſe, laquelle environne l'eau tombante *ABNFEM*, ſoit pleine de glace, enſorte que l'eau paſſe à travers cette glace comme à travers un antonnoir. Si l'eau ne frotte point la glace, ou, ce qui eſt la même choſe, ſi elle coule librement le long de la glace, & qu'à cauſe de ſon parfait poli, elle n'éprouve aucune réſiſtance par ſon frottement contre la glace, elle s'écoulera par le trou *EF* avec la même vîteſſe qu'auparavant, & tout le poids de la colonne d'eau *ABNFEM* ſera employé à produire cet écoulement comme auparavant, & le fond du vaſe ſoutiendra le poids de la glace qui environne la colonne.

Suppoſez que la glace ſe fonde dans le vaſe; l'écoulement de l'eau demeurera le même qu'auparavant, quant à la vîteſſe. Car elle ne ſera pas moindre, puiſque la glace qui eſt devenue eau fait effort pour deſcendre: & elle ne ſera pas plus grande parce que la glace devenue eau ne peut deſcendre qu'elle n'empêche l'autre eau, dont la chute eſt égale à la ſienne, de deſcendre, & la même force doit donner la même vîteſſe à l'eau qui s'écoule.

Mais le trou dans le fond du vaſe, doit être un peu plus grand qu'auparavant, à cauſe des mouvemens obliques des particules de l'eau qui s'écoule. Car toutes les particules de l'eau ne paſſent pas perpendiculairement par le trou; mais venant de toutes parts des côtés du vaſe & convergeant vers ce trou, elles y paſſent par des mouvemens obliques; & tendant toutes à s'échapper par embas leur mouvement conſpire avec celui de la veine d'eau qui paſſe perpendiculairement. Cette veine d'eau eſt un peu plus mince hors de l'ouverture que dans l'ouverture même, ſon diamétre & celui de l'ouverture, ſi je les ai bien meſurés, étant l'un à l'autre, à peu près, comme 5 à 6 ou comme $5\frac{1}{2}$ à $6\frac{1}{2}$. Je m'étois ſervi d'une lame plate très-mince percée dans le milieu, & dont l'ouverture circulaire avoit $\frac{5}{8}$ parties de pouces de diamétre. Et de

Du Mouvement des Corps.

peur que la veine d'eau qui s'écouloit ne fut accélérée en tombant, & ne devint plus mince par l'accélération, je n'attachai point cette lame au fond du vase, mais à un de ses côtés, afin que la veine sortit par une ligne parallele à l'horison. Ensuite lorsque le vase fut plein d'eau, j'ouvris le trou pour la laisser écouler; & le diamétre de la veine, mesuré exactement, étoit, à la distance de près d'un demi pouce de l'ouverture, de $\frac{21}{40}$ parties de pouces. Donc le diamétre de ce trou circulaire étoit au diamétre de la veine d'eau comme 25 à 21 à peu près. Par-là, l'eau en passant par l'ouverture convergeoit de toutes parts, & la veine devenoit ensuite plus mince & plus accélérée à la distance d'un demi pouce de l'ouverture que dans l'ouverture même, dans la raison de 25×25 à 21×21, ou de 17 à 12 à peu près, c'est-à-dire, environ dans la raison sousdoublée de deux à un. Et il est certain, par l'expérience, que la quantité de l'eau qui s'écoula en un temps donné par l'ouverture circulaire faite dans le fond du vase, est la même que celle qui doit s'écouler dans le même temps avec la vîtesse dont on a parlé, non par cette ouverture, mais par une ouverture circulaire dont le diamétre est au diamétre de cette premiere ouverture comme 21 à 25. Donc cette eau qui s'écoule a, à peu près, la même vîtesse en embas, dans cette même ouverture, qu'un corps grave peut acquérir en tombant & en parcourant dans sa chute la moitié de la hauteur de l'eau stagnante dans le vase. Mais après être sortie du vase, elle s'accélére en convergeant jusqu'à ce qu'elle soit arrivée à une distance du trou qui soit presqu'égale à son diamétre, & qu'elle ait acquis une vîtesse plus grande, en raison sousdoublée de 2 à 1 à peu prés, que celle qu'un corps grave peut acquérir en tombant & en parcourant à peu près dans sa chute toute la hauteur de l'eau qui est en repos dans le vase.

Fig. 44.

Dans ce qui suit, le diamétre de la veine sera donc représenté par la plus petite ouverture que nous nommerons EF. Soit supposé un plan VW parallele à l'ouverture EF & placé au-dessus

Fig. 45.

d'elle à une distance égale à peu près au diamétre de cette ouverture, & soit dans ce plan *VW* une ouverture *ST* plus grande que la premiere; que la veine passe aussi par cette ouverture, que cette veine emplisse exactement l'ouverture inférieure *EF*, le diamétre de l'ouverture supérieure étant au diamétre de l'ouverture inférieure comme 25 à 21 à peu près. De cette façon la veine passera perpendiculairement par l'ouverture inférieure; & la quantité de l'eau qui s'écoulera sera la même à peu près, eu égard à la grandeur de l'ouverture, que celle que la solution du Problême requiert. Ensorte qu'on peut regarder l'espace renfermé par ces deux plans & la veine d'eau qui s'écoule, comme le fond du vase. Afin que la solution du problême devienne plus simple & plus mathématique, il vaut mieux prendre le seul plan inférieur pour le fond du vase, & supposer que l'eau qui passoit à travers la glace, ou l'antonnoir, & qui s'écouloit du vase par l'ouverture *E F* faite dans le plan inférieur conservoit toujours son mouvement, & la glace son état de repos. Soit donc, dans ce qui suivra, *ST* le diamétre du trou circulaire décrit du centre *Z* par lequel la cataracte s'écoule du vase lorsque toute l'eau contenue dans le vase est fluide. Et soit *EF* le diamétre du trou rempli exactement par la cataracte en tombant, soit que l'eau sorte du vase par le trou supérieur *ST*, soit qu'elle tombe par les parois de la glace qui est dans le vase, comme à travers un antonnoir. Si le diamétre *ST* du trou supérieur est au diamétre *EF* du trou inférieur comme 25 à 21 à peu près, & que la distance perpendiculaire entre les plans des trous soit égale au diamétre du trou inférieur *EF*. La vîtesse de l'eau, qui s'écoule du vase par le trou *ST*, sera dans ce même trou celle que le corps peut acquérir en tombant de la moitié de la hauteur *IZ*: mais la vîtesse de l'une & l'autre cataracte qui tombent sera dans l'ouverture *EF* celle que le corps peut acquérir en tombant de toute la hauteur *IG*.

Fig. 45.

Cas 2. Si le trou *EF* n'est pas dans le milieu du fond du vase, mais qu'il ſoit placé quelqu'autre part : l'eau s'écoulera avec la même vîteſſe qu'auparavant, pourvû que la grandeur du trou ſoit la même. Car quoiqu'un corps grave employe un temps plus long à tomber à la même profondeur par une ligne oblique, que par une ligne perpendiculaire, il acquiert, dans l'un & l'autre cas, la même vîteſſe en tombant, comme *Galilée* l'a démontré.

Fig. 45.

Cas 3. La vîteſſe de l'eau qui s'écouleroit par une ouverture faite dans un des côtés du vaſe ſeroit encore la même. Car ſi l'ouverture eſt petite, & que l'intervalle entre les ſuperficies AB & KL ſoit preſque nul, le filet d'eau qui ſortira horiſontalement prendra une forme parabolique : & on connoîtra, par le paramétre de cette parabole, que la vîteſſe de l'eau qui s'écoule eſt celle qu'un corps pourroit acquérir en tombant de la hauteur HG ou IG de l'eau qui eſt en repos dans le vaſe. Et ayant fait l'expérience, j'ai trouvé que ſi la hauteur de l'eau qui eſt en repos dans le vaſe eſt de 20 pouces au-deſſus du trou, & que la hauteur du trou au-deſſus du plan parallele à l'horiſon ſoit auſſi de 20 pouces, le filet d'eau qui jaillira tombera dans ce plan, environ à la diſtance de 37 pouces de la perpendiculaire abbaiſſée de ce trou ſur le plan. Si on faiſoit abſtraction de la réſiſtance, le filet d'eau devroit tomber dans ce plan à la diſtance de quarante pouces, le paramétre de la parabole que ce filet d'eau formeroit étant de 80 pouces.

Cas 4. De plus, l'eau qui s'écoule ſortiroit avec la même vîteſſe ſi quelque cauſe la faiſoit jaillir en en-haut. Car un petit filet d'eau monteroit par un mouvement perpendiculaire à la hauteur GH ou GI de l'eau qui eſt en repos dans le vaſe, ſi ſon élévation n'étoit un peu diminuée par la réſiſtance de l'air, & par conſéquent elle s'écoule avec la vîteſſe qu'elle pourroit acquérir en tombant de cette hauteur. Chaque particule de l'eau qui eſt en repos dans le vaſe eſt également preſſée de tous côtés, (par la Prop. 19. du Liv. 2.) & en cédant à cette preſſion elle eſt portée avec la même force de toutes parts, ſoit qu'elle deſcende par le trou fait dans le fond du vase, soit qu'elle s'écoule horisontalement par un trou fait dans un de ses côtés, soit qu'elle sorte par un canal & qu'ensuite elle monte par un petit trou fait dans la partie supérieure du canal. La vîtesse avec laquelle l'eau s'écoulera sera celle que nous avons déterminée dans cette Proposition; c'est non seulement ce que l'on peut conclure par le raisonnement, mais encore ce qui est évident par les expériences très-connues que nous venons de rapporter.

Fig. 45.

Cas 5. La vîtesse de l'eau qui s'écoule est la même, soit que la forme de l'ouverture soit circulaire, soit qu'elle soit quarrée, triangulaire, ou de figure quelconque, pourvu que sa capacité soit la même. Car la vîtesse de l'eau qui s'écoule ne dépend point de la figure de l'ouverture, mais de sa hauteur au-dessous du plan *KL*.

Cas 6. Si la partie inférieure du vase *ABCD* est plongée dans une eau dormante, & que la hauteur de l'eau dormante au-dessus du fond du vase soit *GR*: la vîtesse avec laquelle l'eau qui est dans le vase s'écoulera par l'ouverture *EF* dans l'eau stagnante sera celle que l'eau pourroit acquérir en tombant de la hauteur *IR*. Car tout le poids de l'eau contenue dans le vase, & qui est au-dessous de la superficie de l'eau dormante, sera soutenu en équilibre par le poids de l'eau dormante, donc, il accélérera très-peu le mouvement de l'eau qui descend dans le vase; ce qu'on peut voir trés-clairement par les expériences, en mesurant les temps dans lesquels l'eau s'écoule.

Cor. 1. Delà, si la hauteur *CA* de l'eau est prolongée en *K*, ensorte que *AK* soit à *CK* en raison doublée, de l'aire du trou fait dans une partie quelconque du fond du vase à l'aire du cercle *AB*: la vîtesse de l'eau qui s'écoule sera égale à la vîtesse que l'eau peut acquérir en tombant, & en parcourant dans sa chute la hauteur *KC*.

Cor. 2. Et la force qui peut produire tout le mouvement de l'eau qui s'écoule est égale au poids de la colonne d'eau cylindri-

Du Mouvement des Corps.

Fig. 45.

que dont la base est l'ouverture EF, & la hauteur $2\,GI$ ou $2\,CK$. Car dans le temps que l'eau jailliſſante pourroit égaler cette colonne, elle pourroit acquérir, en tombant par ſon poids de la hauteur GI, la même vîteſſe que celle avec laquelle elle jaillit.

Cor. 3. Le poids de toute l'eau dans le vaſe $ABCD$ eſt à la partie de ce poids qui eſt employée à faire écouler l'eau comme la ſomme des cercles AB & EF au double du cercle EF. Car ſoit IO moyenne proportionnelle entre IH & IG; l'eau qui ſort par l'ouverture EF, pendant le temps qu'une goutte tombant de I employe à parcourir la hauteur IG, ſera égale au cylindre dont la baſe eſt le cercle EF & la hauteur $2\,IG$, c'eſt-à-dire, au cylindre dont la baſe eſt le cercle AB & la hauteur $2\,IO$, car le cercle EF eſt au cercle AB en raiſon ſouſdoublée de la hauteur IH à la hauteur IG, c'eſt-à-dire, dans la raiſon ſimple de la moyenne proportionnelle IO à la hauteur GI: & dans le temps qu'une goutte tombant de I peut parcourir la hauteur IH, l'eau qui s'écoule ſera égale au cylindre dont la baſe eſt le cercle AB & la hauteur $2\,IH$: & dans le temps dans lequel la goutte en tombant de I par H en G décrit la différence des hauteurs HG, l'eau qui ſort, c'eſt-à-dire, l'eau totale dans le ſolide $ABNFEM$ ſera égale à la différence des cylindres, c'eſt-à-dire, au cylindre dont la baſe eſt AB & la hauteur $2\,HO$. Et par conſéquent, l'eau totale contenue dans le vaſe $ABCD$ eſt à toute l'eau qui tombe dans le ſolide $ABNFEM$ comme HG à $2\,HO$, c'eſt-à-dire, comme $HO+OG$ à $2\,HO$, ou $IH+IO$ à $2\,IH$. Mais le poids de toute l'eau dans le ſolide $ABNFEM$ eſt employé à la faire écouler: & par conſéquent, le poids de toute l'eau du vaſe eſt à la partie de ce poids employée à produire l'écoulement, comme $IH+IO$ à $2\,IH$, & par conſéquent, comme la ſomme des cercles EF & AB au double du cercle EF.

Cor. 4. Et delà, le poids de toute l'eau contenue dans le vaſe $ABCD$ eſt à l'autre partie du poids que le fonds du vaſe ſoutient

tient, comme la somme des cercles *AB* & *EF* est à leur différence *EF*.

Cor. 5. La partie du poids que le fond du vase soutient, est à l'autre partie du poids qui est employée à l'écoulement de l'eau, comme la différence des cercles *AB* & *EF* est au double du plus petit cercle *EF*, ou comme l'aire du fond du vase au double de l'aire du trou. Fig. 45.

Cor. 6. Mais la partie du poids, par laquelle seule le fond est pressé, est au poids total de l'eau qui incombe perpendiculairement sur le fond, comme le cercle *AB* est à la somme des cercles *AB* & *EF*, ou comme le cercle *AB* est à l'excès du double du cercle *AB* sur le fond du vase. Car la partie du poids par laquelle seule le fond est pressé est (par le Cor. 4.) au poids de toute l'eau contenue dans le vase, comme la différence des cercles *AB* & *EF* est à la somme de ces mêmes cercles : & le poids de toute l'eau contenue dans le vase est au poids de toute l'eau incombante perpendiculairement sur le fond, comme le cercle *AB* est à la différence des cercles *AB* & *EF*. Donc la partie du poids, par laquelle seule le fond est pressé, est au poids de toute l'eau qui incombe perpendiculairement sur le fond, comme le cercle *AB* est à la somme des cercles *AB* & *EF*, ou comme l'excès du double du cercle *AB* sur le fond.

Cor. 7. Si dans le milieu du trou *EF* on place un petit cercle *PQ* décrit du centre *G* & parallele à l'horison : le poids de l'eau que ce petit cercle soutient est plus grand que la troisiéme partie du poids du cylindre d'eau, dont la base est ce petit cercle & la hauteur *GH*. Car soit *ABNFEM* la cataracte ou la colonne d'eau qui tombe, & dont l'axe est *GH* comme ci-devant, & supposez que toute l'eau qui est dans le vase se géle, tant celle qui entoure la cataracte que celle qui est au-dessus du petit cercle, & dont la fluidité n'est pas nécessaire pour opérer la plus vîte descente de l'eau. Soit de plus, *PQH* la colonne d'eau congelée au-dessus du petit cercle, dont le sommet soit *H* & la hauteur Fig. 46.

GH. Et ſuppoſez que cette cataracte vienne à tomber par ſon poids entier, & qu'elle n'incombe plus ſur *PHQ*, mais qu'elle coule ſans éprouver aucun frottement, ſi ce n'eſt, peut-être, vers le ſommet même de la glace vers lequel la cataracte dans le commencement de la chute commence à être un peu concave. Comme l'eau congelée *AMEC*, *BNFD* autour de la cataracte eſt convexe par la ſuperficie interne *AME*, *BNF* qui eſt du côté de la cataracte, de même cette colonne *PQH* ſera convexe vers la cataracte, & par conſéquent, elle ſera plus grande que le cône dont la baſe ſeroit le petit cercle *PQ* & la hauteur la ligne *GH*, c'eſt-à-dire, qu'elle ſera plus grande que le tiers du cylindre décrit ſur cette même baſe & ayant la même hauteur. Or ce petit cercle ſoutient le poids de cette colonne, c'eſt-à-dire, un poids qui eſt plus grand que le poids du cône, ou que celui de la troiſiéme partie de ce cylindre.

Fig. 46.

Cor. 8. Le poids de l'eau que le très-petit cercle *PQ* ſoutient, paroît être moindre que le poids des deux tiers du cylindre d'eau dont la baſe eſt le petit cercle & la hauteur *GH*: car les choſes poſées ci-deſſus ſubſiſtant, qu'on ſuppoſe décrite la moitié d'un ſphéroïde dont la baſe eſt ce petit cercle, & le demi axe ou la hauteur *HG*. Cette figure ſera égale aux deux tiers de ce cylindre, & renfermera la colonne d'eau congelée *PQH* dont le petit cercle *PQ* ſoutient le poids: car afin que le mouvement de l'eau ſoit fort direct, il faut que la ſuperficie externe de cette colonne concourre avec la baſe *PQ* ſous un angle un peu aigu, à cauſe que l'eau eſt perpétuellement accélérée en tombant, & qu'en vertu de ſon accélération la colonne devient plus mince; & comme cet angle eſt moindre qu'un droit, cette colonne, par embas, ſera renfermée dans l'intérieur du demi ſphéroïde, & elle ſe terminera en pointe par le haut, afin que le mouvement horizontal de l'eau ne ſoit pas infiniment plus prompt vers le ſommet du ſphéroïde que ſon mouvement vers l'horiſon. Et plus le cercle *PQ* ſera petit, plus le haut de la colonne ſera reſſerré;

Fig. 46.

lorſque ce cercle ſera infiniment diminué, l'angle PHQ diminuera auſſi à l'infini, & par conſéquent la colonne ſera renfermée dans l'intérieur du demi ſphéroïde. Cette colonne eſt donc moindre que le demi ſphéroïde, ou que les deux tiers du cylindre dont la baſe eſt ce petit cercle & la hauteur GH; or ce petit cercle ſoutient la force de l'eau, laquelle eſt égale au poids de cette colonne, puiſque le poids de l'eau environnante eſt employé à la faire écouler.

Cor. 9. Le poids de l'eau que le très-petit cercle PQ ſoutient, eſt égal au poids du cylindre d'eau dont la baſe eſt ce petit cercle & la hauteur $\frac{1}{2}$ GH à peu près. Car ce poids eſt moyen arithmétique entre le poids du cône, & celui du demi ſphéroïde dont on a parlé. Mais ſi ce petit cercle n'étoit pas extrêmement petit, & qu'on l'augmentât juſqu'à ce qu'il fut égal à l'ouverture EF, il ſoutiendroit le poids de toute l'eau qui s'appuie deſſus perpendiculairement, c'eſt-à-dire, le poids du cylindre d'eau, dont la baſe eſt ce petit cercle & la hauteur GH.

Cor. 10. Et (ſelon moi) le poids que ce petit cercle ſoutient eſt toujours au poids du cylindre d'eau, dont la baſe eſt ce petit cercle & la hauteur $\frac{1}{2}$ GH, comme EF^2 eſt à $EF^2 - \frac{1}{2} PQ^2$, ou comme le cercle EF eſt à l'excès de ce cercle ſur la moitié du petit cercle PQ à peu près.

LEMME IV.

La réſiſtance d'un cylindre qui avance uniformement ſelon ſon axe, ne change point, ſoit que ſon axe ſoit augmenté ou diminué; elle eſt donc la même que la réſiſtance du cercle décrit ſur le même diamétre, & qui s'avance avec la même vîteſſe ſelon une ligne droite perpendiculaire à ſon plan.

Car les côtés du cylindre s'oppoſent très-peu à ſon mouvement: & le cylindre ſe change en cercle ſi on diminue infiniment ſon axe.

PROPOSITION XXXVII. THÉORÉME XXIX.

La résistance causée par la grandeur de la section transversale d'un cylindre qui se meut uniformement selon son axe dans un milieu comprimé, infini, & non élastique, est à la force qui peut produire ou arrêter tout le mouvement qu'il a pendant qu'il parcourt le quadruple de son axe, comme la densité du milieu est à la densité du cylindre à peu près.

Fig. 47. Car si le vase $ABCD$ touche par son fond CD la superficie de l'eau stagnante, & que l'eau s'écoule de ce vase dans l'eau stagnante par le canal cylindrique $EFTS$ perpendiculaire à l'horison, qu'on place le petit cercle PQ, qui est parallele à l'horison, où l'on voudra dans le milieu du canal, & qu'on prolonge CA en K, ensorte que AK soit à CK dans la raison doublée de la raison que l'excès de l'orifice EF du canal sur le petit cercle PQ a au cercle AB: il est clair, (par le cas 5, le cas 6, & le Cor. 1. de la Prop. 36.) que la vîtesse de l'eau qui passe par l'espace annulaire entre le petit cercle & les côtés du vase, sera celle que l'eau peut acquérir en tombant, & en parcourant dans sa chute la hauteur KC ou IG.

Et, (par le Cor. 10. de la Prop. 36.) si on suppose la largeur du vase infinie, ensorte que la petite ligne HI s'évanouisse, & que les hauteurs IG, HG deviennent égales; la force de l'eau qui s'écoule dans le petit cercle sera au poids du cylindre dont la base est ce petit cercle & la hauteur $\frac{1}{2}IG$, comme EF^2 est à $EF^2-\frac{1}{2}PQ^2$ à peu près. Car la force de l'eau qui s'écoule par un mouvement uniforme dans tout le canal, sera la même dans le petit cercle PQ en quelque lieu du canal qu'il soit placé.

Soit à présent supposé que les ouvertures EF, ST du canal soient fermées, que le petit cercle monte dans ce fluide comprimé de toutes parts, & qu'il force, par son ascension, l'eau supérieure de descendre par l'espace annulaire compris entre le petit

Fig. 47.

cercle & les côtés du canal : la vîtesse du petit cercle qui monte, sera à la vîtesse de l'eau qui descend, comme la différence des cercles EF & PQ au cercle PQ, & la vîtesse du petit cercle qui monte sera à la somme des vîtesses, c'est-à-dire, à la vîtesse relative de l'eau descendante avec laquelle elle surpasse celle du cercle ascendant, comme la différence des cercles EF, PQ est au cercle EF, ou comme $EF^2 - PQ^2$ est à EF^2. Soit cette vîtesse relative égale à la vîtesse avec laquelle on a fait voir ci-dessus que l'eau passoit par ce même espace annulaire pendant que le petit cercle demeuroit immobile, c'est-à-dire, à la vîtesse que l'eau peut acquérir en tombant & en parcourant dans sa chute la hauteur IG : la force de l'eau dans le petit cercle qui monte sera la même qu'auparavant, (par le Cor. 5. des Loix) c'est-à-dire, que la résistance du petit cercle qui monte sera au poids du cylindre d'eau dont la base est ce petit cercle & la hauteur $\frac{1}{2} IG$, comme EF^2 est à $EF^2 - \frac{1}{2} PQ^2$ à peu près. Mais la vîtesse du petit cercle sera à la vîtesse que l'eau peut acquérir en tombant & en parcourant dans sa chute la hauteur IG, comme $EF^2 - PQ^2$ est à EF^2.

Qu'on augmente la largeur du canal à l'infini : les raisons entre $EF^2 - PQ^2$ & EF^2, ainsi que la raison entre EF^2, & $EF^2 - \frac{1}{2} PQ^2$ deviendront à la fin des raisons d'égalité. Et par conséquent la vîtesse du petit cercle sera alors celle que l'eau peut acquérir en tombant & en parcourant dans sa chute la hauteur IG, mais sa résistance sera égale au poids du cylindre dont la base est ce petit cercle & la hauteur la moitié de la hauteur IG, de laquelle hauteur le cylindre doit tomber pour acquérir la même vîtesse que le petit cercle qui remonte ; & le cylindre parcourera avec cette vitesse & dans le temps employé à tomber le quadruple de son axe. Mais la résistance du cylindre qui s'avance avec cette vîtesse selon son axe est la même que la résistance du petit cercle (par le Lemme 4.). Donc elle est égale, à peu près, à la force qui peut produire le mouvement qu'il a pendant qu'il parcourt le quadruple de ſon axe.

Si on augmente ou diminue l'axe du cylindre, ſon mouvement, ainſi que le temps employé à parcourir le quadruple de cet axe augmentera ou diminuera dans la même raiſon, donc cette force, qui peut produire ou détruire le mouvement augmenté ou diminué, pendant un temps pareillement augmenté ou diminué, ne changera point; & elle eſt par conſéquent égale à la réſiſtance du cylindre, car elle demeure toujours la même, par le Lemme 4.

Si la denſité du cylindre augmente ou diminue, ſon mouvement, ainſi que la force qui peut produire ou détruire le mouvement dans le même temps augmentera ou diminuera dans la même raiſon. Donc la réſiſtance d'un cylindre quelconque ſera à la force par laquelle tout ſon mouvement peut être produit ou détruit, pendant le temps qu'il employe à parcourir le quadruple de ſon axe, comme la denſité du milieu eſt à la denſité du cylindre à peu près. *C. Q. F. D.*

Le fluide doit être comprimé pour qu'il ſoit continu, & il doit être continu & non élaſtique, afin que toute la preſſion qui vient de ſa compreſſion ſe propage en un inſtant, & qu'agiſſant également ſur toutes les parties du corps mû, il ne change point ſa réſiſtance La preſſion qui eſt l'effet du mouvement du corps eſt employée à mouvoir les parties du fluide, & produit de la réſiſtance. Mais la preſſion qui provient de la compreſſion du fluide, quelque forte qu'elle ſoit, ſi elle ſe propage en un inſtant, ne produit aucun mouvement dans les parties du fluide continu, ni aucun changement dans le mouvement; ainſi elle n'augmente ni ne diminue la réſiſtance. Aſſurément l'action du fluide qui vient de ſa compreſſion ne peut pas être plus forte dans les parties poſtérieures du corps mû que dans ſes parties antérieures, donc la réſiſtance dont on a parlé dans cette Propoſition ne peut diminuer & ne ſera pas plus forte dans les parties antérieures que dans les poſtérieures, pourvu que ſa propagation ſe faſſe avec infiniment plus de vîteſſe que le mouvement du corps preſſé. Et ſi le fluide eſt continu, & qu'il ne ſoit point élaſtique, cette propagation ſe fera infiniment plus vîte & ſera inſtantanée.

Cor. 1. Les réſiſtances qu'éprouvent les cylindres qui s'avancent uniformement dans le ſens de leurs axes dans des milieux continus & infinis, ſont en raiſon compoſée de la raiſon doublée des vîteſſes, de la raiſon doublée des diamétres, & de la raiſon de la denſité des milieux.

Cor. 2. Si la largeur du canal n'eſt pas augmentée à l'infini, mais que le cylindre renfermé dans un milieu en repos avance dans le ſens de ſon axe, & qu'en même temps ſon axe coïncide avec celui du canal : la réſiſtance qu'il éprouvera ſera à la force par laquelle tout ſon mouvement peut être produit ou détruit, dans le temps qu'il employe à parcourir le quadruple de ſon axe, en raiſon compoſée de la raiſon ſimple de EF^2 à $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$, de la raiſon doublée de EF^2 à $EF^2 - PQ^2$, & de la raiſon de la denſité du milieu à la denſité du cylindre. Fig. 47.

Cor. 3. Les mêmes choſes étant poſées, & la longueur L étant au quadruple de l'axe du cylindre dans une raiſon compoſée de la raiſon ſimple de $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$ à EF^2 & de la raiſon doublée de $EF^2 - PQ^2$ à EF^2 : la réſiſtance qu'éprouvera le cylindre ſera à la force qui peut produire ou détruire tout ſon mouvement, pendant le temps employé à parcourir la longueur L, comme la denſité du milieu eſt à la denſité du cylindre.

SCHOLIE.

Dans cette Propoſition nous avons trouvé la réſiſtance qui vient de la grandeur de la ſection tranſverſale du cylindre ſeulement, & nous avons négligé la partie de la réſiſtance qui peut venir de l'obliquité des mouvemens. Car de même que dans le premier cas de la Prop. 36. l'obliquité des mouvemens, par leſquels les parties d'eau contenues dans le vaſe convergeoient de toutes parts vers l'ouverture EF, empêchoit l'écoulement de cette eau par cette ouverture : ainsi dans cette Proposition, l'obliquité des mouvemens, par lesquels les parties de l'eau pressées par le bout antérieur du cylindre, cedent à la pression & divergent de tous côtés, retarde leur passage par les lieux qui sont autour des parties antécédentes du cylindre en allant vers ses parties postérieures, augmente la résistance, & fait que le fluide est agité à une plus grande distance, & cela, à peu près, dans la même raison, que celle dans laquelle l'écoulement de l'eau hors du vase diminue, c'est-à-dire, en raison doublée de 25 à 21 à peu près. Et de même que dans le premier cas de cette Proposition, nous avons fait ensorte que les parties de l'eau passassent en très-grand nombre perpendiculairement par l'ouverture *EF*, en supposant que toute l'eau contenue dans le vase qui étoit gelée autour de la cataracte, & dont le mouvement étoit oblique & inutile, demeuroit en repos : ainsi dans cette Proposition, afin que l'obliquité des mouvemens soit ôtée, & que les parties de l'eau cédant très-facilement, par un mouvement direct & très-prompt, prêtent un passage très-facile au cylindre, & qu'il ne reste que la résistance qui vient de la grandeur de la section transversale, laquelle on ne peut diminuer qu'en diminuant le diamétre du cylindre, il faut supposer que les parties du fluide, dont les mouvemens sont obliques & inutiles, & qui causent de la résistance, soient en repos entr'elles à chaque bout du cylindre, qu'elles coherent entr'elles, & qu'elles joignent le cylindre.

Fig. 48. Soient, *ABCD* un rectangle, *AE* & *BE* deux arcs paraboliques ayant pour axe *AB*, & pour paramétre une ligne qui soit à l'espace *HG*, que le cylindre doit parcourir en tombant, pendant qu'il acquiert sa vîtesse, comme *HG* à $\frac{1}{2}AB$. Soient aussi *CF* & *DF* deux autres arcs paraboliques, ayant pour axe *CD*, & un paramétre quadruple du précédent; la circonvolution de la figure autour de l'axe *EF* produira un solide, dont la partie du milieu *ABCD* sera le cylindre dont nous parlons, & les extrémités *ABE* & *CDF* renfermeront des parties du fluide qui seront en repos entr'elles

tr'elles, & qui s'étant durcies formeront deux corps solides qui seront adhérens aux deux bouts du cylindre comme une tête & une queue. Et la résistance du solide *EACFDB*, qui s'avance vers *E* dans le sens de son axe *FE*, sera à peu près celle dont nous avons parlé dans cette Prop. c'est-à-dire, qu'elle aura à la force par laquelle tout le mouvement du cylindre peut-être détruit ou produit, pendant le temps qu'il employe à parcourir la longueur 4 *AC* d'un mouvement uniformement continué, la même raison à peu près, qu'à la densité du fluide à la densité du cylindre. Et par cette force la résistance ne peut pas être moindre que dans la raison de 2 à 3 par le Cor. 7. de la Prop. 36. Fig. 48.

LEMME V.

Si un cylindre, une sphere & un sphéroïde, dont les largeurs sont égales, sont placés successivement dans le milieu d'un canal cylindrique de façon que leurs axes coïncident avec l'axe du canal : ces corps s'opposeront également à l'écoulement de l'eau par le canal.

Car les espaces entre le canal & le cylindre, la sphere & le sphéroïde, par lesquels espaces l'eau passe, sont égaux : & l'eau passe également par des espaces égaux.

Cela est ainsi en supposant que toute l'eau, dont la fluidité n'est pas nécessaire pour que l'eau passe très-vîte se géle au-dessus du cylindre, de la sphere & du sphéroïde, comme je l'ai expliqué dans le Cor. 7. de la Prop. 36.

LEMME VI.

Les mêmes choses étant posées, les corps dont on vient de parler sont pressés également par l'eau qui s'écoule par le canal.

C'est ce qui est clair, par le Lemme 5. & par la troisiéme loi du mouvement, car l'eau & ces corps agissent mutuellement & également l'un sur l'autre.

LEMME VII.

Si l'eau est en repos dans le canal, & que ces corps se meuvent avec une vîtesse égale dans le canal vers des côtés opposés, leurs résistances seront égales entr'elles.

C'est ce qui est clair par le Lemme précédent, car les mouvemens relatifs demeurent les mêmes entr'eux.

SCHOLIE.

Il en est de même de tous les corps convexes & ronds dont les axes coïncident avec l'axe du canal. Il peut se trouver quelque différence par le plus ou le moins de frottement; mais nous avons supposé dans ces Lemmes que les corps étoient parfaitement polis, que la ténacité, & les frottemens du milieu étoient nuls, & que les parties du fluide, qui par leurs mouvemens obliques & inutiles peuvent troubler, retarder & empêcher l'écoulement de l'eau par le canal, étoient en repos entr'elles, comme si elles étoient durcies par la gelée, & qu'elles étoient attachées aux corps par leurs parties antérieures & postérieures, comme je l'ai fait voir dans le scholie de la Proposition précédente. Dans les Propositions suivantes on traite de la moindre résistance que peuvent éprouver les solides de circonvolution dont les plus grandes sections sont données. Les corps qui nâgent dans des fluides, lorsqu'ils se meuvent en ligne droite, font que le fluide s'éleve vers leurs parties antérieures, & s'abbaissent vers les postérieures, surtout si leurs formes sont obtuses; & que par là ils éprouvent une résistance un peu plus grande que si la forme de leurs parties antérieures & postérieures étoit aigue. Et les corps mûs dans des fluides élastiques, s'ils sont obtus par leurs extrémités, condensent un peu plus le fluide vers leurs parties antérieures, & le dilatent un peu plus vers les postérieures; & par conséquent, ils éprouvent une résistance un peu plus grande que s'ils étoient aigus par leurs extrémités. Dans ces Lemmes, & dans ces Propositions nous ne parlons pas des fluides élastiques, mais seulement de ceux qui ne le sont pas; nous ne parlons pas non plus des corps qui nâgent sur les fluides, mais de ceux qui y sont plongés entierement. Et lorsqu'on connoît la résistance que ces corps éprouvent dans les fluides non élastiques, il suffira d'augmenter un peu cette résistance, tant dans les fluides élastiques comme dans l'air, par exemple, que dans les superficies des eaux stagnantes comme les marais & les mers.

PROPOSITION XXXVIII. THÉORÉME XXX.

La résistance d'un globe qui avance uniformement dans un milieu infini, comprimé & non élastique, est à la force par laquelle tout son mouvement peut être détruit ou produit, pendant le temps qu'il employe à parcourir les $\frac{8}{3}$ parties de son diamétre, comme la densité du fluide est à la densité du globe à peu près.

Car le globe est au cylindre circonscript comme 2 est à 3; & par conséquent, la force qui peut détruire tout le mouvement du cylindre, pendant qu'il parcourt la longueur de 4 de ses diamétres, détruira tout le mouvement du globe pendant qu'il parcourera les deux tiers de cette longueur, c'est-à-dire, $\frac{8}{3}$ parties de son propre diamétre. Et la résistance du cylindre est à cette force, à peu près, comme la densité du fluide est à la densité du cylindre ou du globe, par les Lemmes 5, 6 & 7. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Les résistances des globes dans des milieux infinis & comprimés, sont en raison composée de la raison doublée de la vîtesse, de la raison doublée des diamétres, & de la raison de la densité des milieux.

Cor. 2. La plus grande vîtesse avec laquelle un globe, par la force de son poids comparatif, peut descendre dans un milieu résistant, est celle que ce même globe peut acquérir par le même poids, lorsqu'il tombe sans éprouver de résistance, & qu'il parcourt dans sa chute un espace qui est aux $\frac{4}{3}$ de son diamétre, comme la densité du globe est à la densité du fluide. Car le globe, dans le temps qu'il a employé à tomber, & par la vîtesse qu'il aura acquise en tombant, décrira un espace qui sera aux $\frac{3}{8}$ parties de son diamétre comme la densité du globe à la densité du fluide ; & la force du poids qui produit ce mouvement sera à la force qui pourroit le produire dans le temps que le globe parcoureroit les $\frac{3}{8}$ parties de son diamétre avec la même vîtesse, comme la densité du fluide est à la densité du globe. Donc, par cette Proposition, la force du poids sera égale à la résistance, & par conséquent elle ne peut accélérer le globe.

Cor. 3. La densité du globe & sa vîtesse au commencement du mouvement étant données, ainsi que la densité du fluide comprimé & en repos, dans lequel le globe se meut ; on a, pour un temps quelconque, la vîtesse du globe, sa résistance & l'espace qu'il décrit, par le Cor. 7. de la Prop. 35.

Cor. 4. Un globe qui se meut dans un fluide comprimé en repos, & de la même densité que lui, a plutôt perdu la moitié de son mouvement qu'il n'auroit décrit la longueur de deux de ses diamétres, par le même Cor. 7. de la Prop. 35.

PROPOSITION XXXIX. THÉORÉME XXXI.

La résistance d'un globe qui avance uniformement dans un fluide renfermé & comprimé dans un canal cylindrique, est à la force, par laquelle tout son mouvement peut être produit ou détruit, dans le temps pendant lequel il parcourt $\frac{3}{8}$ parties de son diamétre, dans une raison composée de la raison de l'orifice du canal à l'excès de cet orifice sur la moitié du grand cercle du globe, de la raison doublée de l'orifice du canal à l'excès de cet orifice sur le grand cercle du globe, & de la raison de la densité du fluide à la densité du globe à peu près.

Cette Proposition est claire par le Cor. 2. de la Prop. 37. &

la démonſtration eſt du même genre que celle de la Prop. précédente.

SCHOLIE.

Dans les deux dernieres Propoſitions (comme dans le Lemme 5.) j'ai regardé comme gelée toute l'eau qui précede le globe & dont la fluidité augmente la réſiſtance qu'il éprouve. Si toute cette eau venoit à ſe fondre, la réſiſtance ſeroit un peu augmentée. Mais cette augmentation ſeroit très-peu de choſe dans ces Propoſitions & l'on peut la négliger, parce que la ſuperficie convexe du globe fait preſque le même effet que la glace.

PROPOSITION XL. PROBLÊME IX.

Trouver par les phénomenes la réſiſtance d'un globe qui ſe meut dans un milieu comprimé & très-fluide.

Soit A le poids du globe dans le vuide, B ſon poids dans un milieu réſiſtant, D ſon diamétre, F l'eſpace qui eſt à $\frac{4}{3}$ D comme la denſité du globe eſt à la denſité du milieu, c'eſt-à-dire, comme A eſt à $A - B$; que G ſoit le temps dans lequel le globe tombant par ſon poids B, ſans trouver de réſiſtance, parcourt l'eſpace F, & que H ſoit la vîteſſe que ce globe a acquiſe dans ſa chute. La vîteſſe H ſera la plus grande vîteſſe avec laquelle le globe peut deſcendre par ſon poids B dans un milieu réſiſtant, par le Cor. 2. de la Prop. 38. & la réſiſtance que le globe éprouve, en deſcendant avec cette vîteſſe, ſera égale à ſon poids B : mais la réſiſtance qu'il éprouve avec une autre vîteſſe quelconque ſera au poids B en raiſon doublée de cette vîteſſe à la plus grande vîteſſe H, par le Cor. 1. de la Prop. 38.

C'eſt là la réſiſtance qui vient de l'inertie de la matiere du fluide. Mais celle qui vient de l'élaſticité, de la ténacité, & du frottement de ſes parties, ſe trouve de cette maniere.

Soit un globe abandonné à lui-même en ſorte qu'il tombe par ſon poids B dans le fluide, & ſoit P le temps qu'il employe à tomber, exprimé en secondes, supposant de même le temps G exprimé en secondes. Soit trouvé le nombre N qui répond au logarithme $0,4342944819\,\frac{2P}{G}$, & soit L le logarithme du nombre $\frac{N+1}{N}$: la vîtesse acquise en tombant sera $\frac{N-1}{N+1}H$, mais la hauteur décrite sera $\frac{2PF}{G} - 1,3862943611\,F + 4,605170186\,LF$. Si le fluide est assez profond, on peut négliger le terme $4,605170186\,LF$; & on aura $\frac{2PF}{G} - 1,3862943611\,F$ pour la hauteur décrite à peu près. Tout cela est clair, par la Prop. 9. du Livre second & ses corollaires, en supposant que le globe n'éprouve aucune autre espéce de résistance que celle qui vient de l'inertie de la matiere. Car s'il éprouvoit quelqu'autre résistance, il descendroit plus lentement, & par la rétardation on connoîtroit la quantité de cette résistance.

Afin de connoître plus facilement la vîtesse & la chute du corps qui tombe dans un fluide, j'ai dressé la table suivante, dont la premiere colonne représente les temps de la chute; la seconde, les vîtesses acquises en tombant, la plus grande vîtesse étant 100000000; la troisiéme, l'espace parcouru en tombant pendant ces temps, $2F$ étant l'espace que le corps parcourt dans le temps G avec la plus grande vîtesse, & la quatriéme, les espaces parcourus dans les mêmes temps avec cette plus grande vîtesse. Les nombres dans la quatriéme colonne sont $\frac{2P}{G}$, & en soustrayant le nombre $1,3862944 - 4,6051702\,L$, on aura les nombres de la troisiéme colonne, & il faudra multiplier ces nombres par l'espace F afin d'avoir les espaces parcourus en tombant.

J'ai ajouté une cinquiéme colonne aux quatre premieres, laquelle contient les espaces parcourus par le corps, dans ces mêmes temps, lorsqu'il tomboit dans le vuide par la force de son poids comparatif B.

Temps. *P*	*Viteſſes du corps tombant dans le fluide.*	*Eſpaces parcourus en tombant dans le fluide.*	*Eſpaces parcourus par le plus grand mouvement.*	*Eſpaces parcourus en tombant dans le vuide.*
0,001 G	$99999\frac{29}{30}$	0,000001 F	0,002 F	0,000001 F
0,01 G	999967	0,0001 F	0,02 F	0,0001 F
0,1 G	9966799	0,0099834 F	0,2 F	0,01 F
0,2 G	19737532	0,0397361 F	0,4 F	0,04 F
0,3 G	29131261	0,0886815 F	0,6 F	0,09 F
0,4 G	37994896	0,1559070 F	0,8 F	0,26 F
0,5 G	46211716	0,2402290 F	1,0 F	0,35 F
0,6 G	53704957	0,3402706 F	1,2 F	0,16 F
0,7 G	60436778	0,4545405 F	1,4 F	0,49 F
0,8 G	66403677	0,5815071 F	1,6 F	0,64 F
0,9 G	71629787	0,7196609 F	1,8 F	0,81 F
1 G	76159416	0,8675617 F	2 F	1 F
2 G	96402758	2,6500055 F	4 F	4 F
3 G	99505475	4,6186570 F	6 F	9 F
4 G	99932930	6,6143765 F	8 F	16 F
5 G	99990920	8,6137964 F	10 F	25 F
6 G	99998771	10,6137179 F	12 F	36 F
7 G	99999834	12,6137073 F	14 F	49 F
8 G	99999980	14,6137059 F	16 F	64 F
9 G	99999997	16,6137057 F	18 F	81 F
10 G	$99999999\frac{3}{5}$	18,6137056 F	20 F	100 F

SCHOLIE.

Afin de pouvoir trouver par expérience les réſiſtances des fluides, je fis un vaiſſeau de bois qui étoit quarré, & qui avoit de dedans en dedans 9 pouces de Londres de longueur & de largeur, & $9\frac{1}{2}$ pieds de profondeur, je l'emplis d'eau de pluye; & ayant fait des globes de cire qui renfermoient du plomb au centre, je marquai les temps que ces globes mirent à tomber de la hauteur de 112 pouces. Le pied cube de Londres peſe 76 livres romaines d'eau de pluie, & un pouce cube de ce même pied peſe $\frac{19}{36}$ onces de cette livre ou $253\frac{1}{3}$ grains; & un globe d'eau d'un pouce de diamétre peſe 132, 645 grains dans l'air, ou 132, 8 grains dans le vuide; & un autre globe quelconque eſt comme l'excès de ſon poids dans le vuide ſur ſon poids dans l'eau.

Du Mouvement des Corps.

Expérience 1. Un globe, dont le poids étoit de $156\frac{1}{4}$ grains dans l'air, & de 77 dans l'eau employa 4 secondes à tomber de la hauteur de 112 pouces. Et ayant répété la même expérience, le résultat fut le même.

Le poids de ce globe dans le vuide étoit de $156\frac{13}{38}$ grains, & l'excès de ce poids sur le poids du globe dans l'eau est de $79\frac{13}{38}$ grains, d'où l'on tirera le diamétre du globe de 0, 84224 parties de pouces. Mais cet excès est au poids du globe dans le vuide, comme la densité de l'eau est à la densité du globe; & les $\frac{2}{3}$ parties du diamétre du globe (c'est-à-dire, 2, 24597 pouces) sont à l'espace $2F$, qui sera par conséquent de 4, 4256 pouces dans la même raison. Le globe, dans le temps d'une seconde, parcourt $193\frac{1}{3}$ pouces, en tombant dans le vuide par la force de tout son poids, qui est de $156\frac{13}{38}$ grains, & par son poids, qui est dans l'eau de 77 grains, il parcourt dans l'eau dans le même temps lorsqu'il y tombe sans éprouver de résistance 95, 219 pouces; & dans le temps G, qui est à une seconde en raison sousdoublée de l'espace F, ou comme 2, 2128 pouces sont à 95,219 pouces, il parcourera 2, 2128 pouces, & il acquerera la vîtesse H, qui est la plus grande avec laquelle il puisse descendre dans l'eau. Or le temps G est $0''$, 15244. Et dans ce temps G, avec cette plus grande vîtesse H, le globe parcourera l'espace $2F$ qui est de 4, 4256 pouces; donc en 4 secondes il parcourera un espace de 116, 1245 pouces. Et en soustrayant l'espace $1, 3862944F$, ou 3, 0676 pouces, il restera l'espace 113, 0569 pouces que le globe parcourera en tombant dans l'eau dans un très-grand vase pendant 4 secondes. Cet espace, à cause du peu de largeur du vaisseau de bois dont j'ai parlé, doit être diminué en une raison composée de la raison sousdoublée de l'orifice du vase à l'excès de cet orifice sur la moitié du grand cercle du globe, & de la raison simple de ce même orifice à son excès sur le grand cercle du globe, c'est-à-dire, dans la raison de 1 à 0, 9914. Ce qui étant fait on aura l'espace de 112, 08 pouces que le globe auroit dû parcourir à peu près, par la théo-

rie,

rie, en 4 secondes, en tombant dans ce vase de bois lorsqu'il étoit plein d'eau & il en parcourut 112 dans l'expérience.

Exper. 2. Trois globes égaux, dont le poids de chacun étoit de $76\frac{1}{3}$ grains dans l'air, & de $5\frac{1}{16}$ grains dans l'eau, étant abandonnés à eux-mêmes dans l'eau, l'un après l'autre, parcoururent dans leur chute 112 pouces en 15 secondes.

En faisant le calcul, on trouve le poids de chacun de ces globes dans le vuide de $76\frac{5}{12}$ grains, l'excès de ce poids sur le poids dans l'eau de $71\frac{17}{48}$ grains, le diamétre de ces globes de 0, 81296 pouces, les $\frac{8}{3}$ parties de ce diamétre de 2, 16789 pouces, l'espace $2F$ de 2, 3217 pouces, l'espace que le corps parcourut en tombant, sans éprouver de résistance, dans le temps de 1″ par son poids qui étoit de $5\frac{1}{16}$ grains, de 12, 808 pouces, & le temps G de 0″, 301056. Donc le globe, par la plus grande vîtesse avec laquelle il puisse descendre dans l'eau par la force de son poids qui étoit de $5\frac{1}{16}$ grains dans le temps de 0″, 301056 parcourera un espace de 2, 3217 pouces, & dans le temps de 15″ il parcourera un espace de 115, 678 pouces, & en soustrayant l'espace 1, 3862944F, ou 1, 609 pouces, il restera l'espace 114, 069 pouces que le globe devroit parcourir en tombant dans le même temps dans un plus grand vaisseau. Car il faut ôter, à cause du peu de largeur de notre vaisseau, un espace de 0, 895 pouces environ. Ainsi il restera un espace de 113, 174 pouces que le globe devoit parcourir à peu près par la théorie en tombant dans ce vase pendant le temps de 15″. Or il en parcourut 112 dans l'expérience, ainsi la différence est insensible.

Exper. 3. Trois globes égaux dont le poids de chacun étoit de 121 grains dans l'air, & d'un grain dans l'eau, étant abandonnés successivement à eux-mêmes, parcoururent en tombant dans l'eau 112 pouces dans les temps de 46″, 47″ & 50″.

Par la théorie, ces globes devoient parcourir cette hauteur en 40″ environ. Pourquoi donc tomberent-ils plus lentement? Peut-être faut-il l'attribuer à ce que dans les mouvemens lents, la proportion de la résistance qui vient de la force d'inertie, à la résistance qui vient des autres causes est moindre, peut-être aussi cela doit-il être plûtôt attribué à quelques petites bulles qui s'attacherent au globe, ou à la raréfaction de la cire, causée, ou par la chaleur de la main qui jettoit le globe, ou par celle de l'air, ou enfin à quelques erreurs insensibles commises en pesant ces globes dans l'eau, je ne sçai à laquelle de ces causes m'arrêter. Ainsi je conclus de cette expérience, qu'il faut que les globes dont on se sert dans ces expériences pesent plus d'un grain dans l'eau pour les rendre certaines & qu'on puisse y ajouter foi.

Exper. 4. J'entrepris les expériences que je viens de décrire pour découvrir les résistances des fluides, avant d'avoir la théorie que j'ai exposée dans les Prop. précédentes. Ensuite, pour examiner cette théorie, je fis un vaisseau de bois de $8\frac{2}{3}$ pouces de large de dedans en dedans : & de 15 pieds $\frac{1}{3}$ de profondeur. Ensuite, je fis quatre globes composés de cire & de plomb renfermé dans le centre, le poids de chacun de ces globes étoit de $139\frac{1}{4}$ grains dans l'air, & de $7\frac{1}{8}$ grains dans l'eau. Je les laissai tomber de sorte que je pouvois remarquer, par le moyen d'un pendule qui battoit les demi secondes, les temps qu'ils employoient à tomber dans l'eau. Lorsque je pesai ces globes, & que je les fis tomber, j'avois eu soin qu'ils fussent froids depuis quelque temps ; parce que la chaleur raréfie la cire, & que cette raréfaction diminue son poids dans l'eau, & que de plus la cire que la chaleur a raréfiée ne retourne pas dans le moment qu'elle est réfroidie à sa premiere densité. Ces globes étoient entierement plongés dans l'eau avant de tomber ; de peur que le poids de la partie qui n'auroit pas été plongée n'eut accéléré leur chute dans le premier instant. Et lorsqu'ils étoient entierement plongés & en repos, je les laissois tomber avec bien de la précaution, de peur que ma main ne leur donnât quelqu'impulsion. Ils tomberent successivement en $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$, 50 & 51 oscillations, & parcoururent en tombant 15 pieds & 2 pouces. Le temps étant alors un peu plus froid que lorsque j'avois pesé les globes, je répétai l'expérience un autre jour, & ils tomberent en 49, $49\frac{1}{2}$, 50 & 53 oscillations. Et un troisieme jour ils tomberent en $49\frac{1}{2}$, 50, 51 & 53 oscillations. Et enfin, ayant répété très-souvent cette expérience, les globes tomberent le plus ordinairement en $49\frac{1}{2}$ & 50 oscillations. Et quand ils employerent plus de temps, je soupçonne qu'ils étoient retardés parce qu'ils frottoient contre les parois du vase.

En faisant le calcul par la théorie, on trouve que le poids du globe dans le vuide est de $139\frac{2}{5}$ grains. L'excès de ce poids sur le poids dans l'eau de $132\frac{11}{40}$ grains. Le diamétre du globe de 0, 99868 pouces. Les $\frac{8}{3}$ de son diamétre de 2, 66315 pouces. L'espace $2F$ de 2, 8066 pouces. L'espace que le globe qui pésoit $7\frac{1}{8}$ grains parcouroit en tombant dans une seconde sans éprouver de résistance de 9, 88164 pouces. Et le temps G de 0″ 376843. Donc le globe, avec la plus grande vîtesse avec laquelle il puisse tomber dans l'eau par la force du poids de $7\frac{1}{8}$ grains, dans le temps de 0″, 376843, parcourt un espace de 2,8066 pouces, & dans le temps de 1″ un espace de 7, 44766 pouces, & dans le temps de 25″ ou de 50 oscillations, il parcourt un espace de 186, 1915 pouces. Soustrayant l'espace 1, 386294 F, ou 1, 9454 pouces, il restera l'espace 184, 2461 pouces que le globe décriroit dans le même temps dans un vase très-large. A cause du peu de largeur de celui dont je me suis servi, il faut donc diminuer cet espace en raison composée de la raison sousdoublée de l'orifice du vase à l'excès de cet orifice sur la moitié du grand cercle du globe, & de la raison simple de ce même orifice à son excès sur le grand cercle du globe; & on aura l'espace 181, 86 pouces, que le globe auroit du parcourir, à peu près, dans ce vase selon la théorie pendant 50 oscillations. Et il parcourut 182 pouces à peu près dans $49\frac{1}{2}$ ou 50 oscillations.

Exper. 5. Quatre globes du poids de $154\frac{3}{8}$ grains chacun dans l'air, & de $21\frac{1}{2}$ grains dans l'eau, ayant été jettés plusieurs fois, tomboient dans le temps de $28\frac{1}{2}$, 29, $29\frac{1}{2}$ & 30 oscillations, & quelquefois en 31, 32 & 33 oscillations, & ils parcouroient en tombant 15 pieds 2 pouces.

Par la théorie ils devoient parcourir cette hauteur en 29 oscillations à peu près.

Exper. 6. Cinq globes du poids de $212\frac{3}{8}$ grains dans l'air, & de $79\frac{1}{2}$ grains dans l'eau ayant été jettés plusieurs fois tomboient en 15, $15\frac{1}{2}$, 16, 17 & 18 oscillations d'une hauteur de 15 pieds & 2 pouces.

Par la théorie ils devoient tomber en 15 oscillations à peu près.

Exper. 7. Quatre globes qui pésoient $293\frac{3}{8}$ grains dans l'air, & $35\frac{7}{8}$ grains dans l'eau ayant été jettés plusieurs fois tomboient en $29\frac{1}{2}$, 30, $30\frac{1}{2}$, 31, 32 & 33 oscillations, & parcouroient un espace de 15 pieds un pouce & demi.

Par la théorie ils auroient dû tomber en 28 oscillations à peu près.

En cherchant la cause pourquoi, de plusieurs globes égaux en poids & en grandeur, les uns tomboient plus vîte, & les autres plus lentement, j'ai trouvé celle-ci; que ces globes, dans le premier moment qu'ils étoient abandonnés à eux-mêmes & qu'ils commençoient à tomber, oscilloient autour de leurs centres, parce que celui de leurs côtés qui étoit peut-être un peu plus pesant descendoit le premier & causoit un mouvement oscillatoire. Car le globe doit communiquer une plus grande quantité de son mouvement à l'eau par ces oscillations, que s'il descendoit sans osciller; & en communiquant ce mouvement à l'eau, il perd une partie du mouvement propre qui doit le faire descendre: & il doit être par conséquent plus ou moins retardé selon qu'il fera de plus grandes ou de plus petites oscillations. De plus, le globe s'éloigne toujours du côté qui lui a fait commencer ses oscillations, & en s'éloignant, il s'approche des parois du vase, & peut quelquefois frotter contr'eux. Cette oscillation est plus forte dans les globes plus pésans, & les plus grands globes communiquent plus de mouvement à l'eau. C'est pourquoi, afin de diminuer ces oscillations, je fis de nouveaux globes composés de même de cire & de plomb, & je mis du plomb à un côté du globe près de sa superficie, & je laissai ensuite tomber ce globe de sorte que le côté le plus pésant étoit le plus bas, autant qu'il étoit possible, quand le corps commença à descendre. De cette sorte, les oscillations étoient beaucoup plus petites qu'auparavant, & les globes tomberent en des temps bien moins inégaux comme dans les expériences suivantes.

Exper. 8. Quatre globes qui pésoient chacun 139 grains dans l'air, & $6\frac{1}{2}$ grains dans l'eau, ayant été abandonnés à eux-mêmes plusieurs fois, tomberent dans des oscillations dont le nombre ne passa pas 52, & ne fut pas au-dessous de 50, & le plus souvent, ils tomberent en 51 oscillations à peu près, & parcoururent 182 pouces.

Par la théorie, ils devoient tomber en 52 oscillations environ.

Exper. 9. Ayant fait la même expérience plusieurs fois sur quatre globes qui pésoient $273\frac{1}{4}$ grains dans l'air, & $140\frac{3}{4}$ dans l'eau, ils tomberent dans des oscillations dont le nombre ne passa pas 13 & n'alla pas au-dessous de 12 & ils parcoururent un espace de 182 pouces.

Par la théorie, ces globes devoient tomber en $11\frac{1}{9}$ oscillations à peu près.

Exper. 10. La même expérience ayant été faite plusieurs fois sur quatre globes qui pesoient 384 grains dans l'air, & $119\frac{1}{2}$ dans l'eau, ils emploierent à tomber les temps de $17\frac{3}{4}$, 18, $18\frac{1}{2}$ & 19 oscillations, & ils parcoururent 181 pouces $\frac{1}{2}$. Lorsqu'ils mirent 19 oscillations à tomber, j'entendis quelquefois les coups qu'ils donnoient contre les parois du vase avant de parvenir au fond.

Par la théorie, ils auroient dû tomber en 15 oscillations $\frac{5}{9}$ à peu près.

Exper. 11. Ayant laissé tomber plusieurs fois trois globes égaux qui pesoient 48 grains dans l'air, & $3\frac{29}{32}$ dans l'eau, ils mirent $43\frac{1}{2}$, 44, $44\frac{1}{2}$, 45 & 46 oscillations à tomber, & le plus souvent ils tomboient en 44 & 45 oscillations, & parcouroient un espace de $182\frac{1}{2}$ pouces environ.

Ils devoient tomber par la théorie en $46\frac{5}{9}$ oscillations à peu près.

Exper. 12. Je fis tomber plusieurs fois trois globes égaux qui pesoient 141 grains dans l'air, & $4\frac{3}{8}$ grains dans l'eau, & ils parcoururent 182 pouces en 61, 62, 63, 64 & 65 oscillations.

Par la théorie, ils devoient tomber en $64\frac{1}{2}$ oscillations à peu près.

Il est clair par ces expériences, que lorsque ces globes tomboient lentement comme dans les expériences 2, 4, 5, 8, 11 & 12, les temps de leurs chutes s'accordoient assez avec les temps que donne la théorie, mais que lorsqu'ils tomboient plus vîte, comme dans les expériences 6, 9 & 10, la résistance qu'ils éprouvoient étoit un peu plus grande que dans la raison doublée des vîtesses. Car ces globes oscilloient un peu en tombant : & ces oscillations cessent bientôt dans les globes légers, & qui tombent lentement à cause du peu de mouvement ; mais dans les globes plus grands & plus pesans, elles durent plus long-temps à cause que le mouvement a plus de force, & ce mouvement oscillatoire ne peut être arrêté par l'eau qui environne le globe qu'après que le corps a fait plusieurs oscillations. Il se peut encore faire que les globes soient moins pressés par le fluide vers leurs parties postérieures lorsqu'ils ont plus de vîtesse ; & si on augmentoit continuellement la vîtesse, ils laisseroient à la fin un espace vuide derriere eux, à moins qu'on n'augmentât en même temps la compression du fluide. Or (par les Prop. 32 & 33.) la compression du fluide doit augmenter en raison doublée de la vîtesse, pour que la résistance soit dans cette même raison doublée. Mais comme cela n'arrive pas, les globes qui ont plus de vîtesse sont un peu moins pressés par leurs parties postérieures, & le défaut de cette pression fait que la résistance qu'ils éprouvent est un peu plus grande que dans la raison doublée de la vîtesse.

La théorie s'accorde donc avec les phénomenes des corps qui tombent dans l'eau, il nous reste à examiner ce qui arrive à ceux qui tombent dans l'air.

Exper. 13. Du haut de l'Eglise de S. Paul de Londres au mois de Juin 1710. on laissa tomber en même temps deux globes de verre, l'un plein de vif-argent, & l'autre plein d'air; & en tombant ils parcouroient 220 pieds de Londres. Une table de bois étoit suspendue par un de ses côtés par des pivots de fer, & par l'autre elle s'appuyoit sur un vérouil de bois; & les deux globes étant posés dessus tomboient en même temps, & en tirant le vérouil par le moyen d'un fil de fer, ils tomboient jusqu'à terre, & la table étant seulement soutenue par ces pivots, faisoit la bascule, & dans le même instant un pendule qui battoit les secondes, étant mis en mouvement par le fil de fer commençoit à osciller. Les diamétres & les poids des globes, ainsi que les temps de leurs chutes, étoient tels qu'ils sont marqués dans la table suivante.

Globes pleins de mercure.			*Globes pleins d'air.*		
Poids.	*Diamétres.*	*Temps de la chute.*	*Poids.*	*Diamétres.*	*Temps de la chute.*
908 *grains.*	0,8 *pouces.*	4″	510 *grains.*	5,1 *pouces.*	8″ $\frac{1}{2}$
983	0,8	4−	642	5,2	8
866	0,8	4	599	5,1	8
747	0,75	4+	515	5,0	8 $\frac{1}{4}$
808	0,75	4	483	5,0	8 $\frac{1}{2}$
784	0,75	4+	641	5,2	8

Au reste, les temps des chutes que nous avons observés dans ces expériences doivent être corrigés. Car les globes pleins de mercure devoient parcourir en 4″ (par la théorie de Galilée) 257 pieds de Londres, & ils n'en parcoururent que 220 en 3″ 42‴. Il falloit donc que la table de bois employât quelque temps à faire la bascule lorsqu'on tiroit le vérouil, & que par-là elle s'opposât au commencement à la chute des globes. Car ces globes étoient posés, à peu près, dans le milieu de cette table, & ils étoient un peu plus près de son axe que le vérouil, & par-là, le temps de la chute fut allongé de 18‴ environ; ce qui doit être corrigé en ôtant du temps de la chute ces 18‴, surtout pour les plus grands globes qui demeuroient un peu plus longtemps sur la table quand elle se déployoit, à cause de la grandeur de leurs diamétres. Cette correction étant faite, les temps dans lesquels les six plus grands globes tombérent, se trouvent de $8'' \; 12'''$, $7'' \; 42'''$, $7'' \; 57'''$, $8'' \; 12'''$, & $7'' \; 42'''$.

Le cinquiéme des globes pleins d'air avoit 5 pouces de diamétre, & pésoit 483 grains, & il tomba en $8'' \; 12'''$ & parcourut pendant ce temps 220 pieds. Le poids d'un globe d'eau égal à ce globe est de 16600 grains; & le poids d'une quantité d'air de même volume que ce globe est de $\frac{16600}{860}$ grains ou de $19\frac{3}{10}$ grains. Donc le poids de ce globe dans le vuide étoit de $502\frac{3}{10}$ grains. Et ce poids est au poids d'un volume d'air égal à ce globe, comme $502\frac{3}{10}$ grains à $19\frac{3}{10}$. Or, $2F$ sont à $\frac{8}{3}$ du diamétre de ce globe, c'est-à-dire, à $13\frac{1}{3}$ pouces dans cette raison. Donc $2F$ deviennent 28 pieds 11 pouces. Ce globe en tombant dans le vuide, par la force de tout son poids qui étoit de $502\frac{3}{10}$ grains, parcourut, dans une seconde, $193\frac{1}{3}$ pouces, comme ci-dessus, & avec un poids de 483 grains il parcourut 185, 905 pouces, & avec le même poids de 483 grains il parcourut aussi dans le vuide l'espace F ou 14 pieds $5\frac{1}{2}$ pouces en $57''' \; 58^{iv}$, & il acquit dans ce temps la plus grande vîtesse avec laquelle il peut descendre dans l'air. Avec cette vîtesse, ce globe en $8'' \; 12'''$ parcoureroit un espace de 245 pieds $5\frac{1}{3}$ pouces. En ôtant 1, 3863 F ou 20 pieds $0\frac{1}{2}$ pouces, il restera 225 pieds 5 pouces. Le globe en tombant devoit donc parcourir cet espace en $8'' \; 12'''$ par la théorie. Mais il parcourut 220 pieds dans l'expérience, ainsi la différence est insensible.

Ayant fait un calcul semblable au précédent pour les autres globes pleins d'air, j'ai dressé la table suivante.

Poids des globes.	*Diamétres.*	*Temps employés à parcourir 220 pieds en tombant.*		*Espaces qui devoient être parcourus selon la théorie.*		*Différences.*	
510 *grains.*	5,1 *pouc.*	8''	12'''	226 *pieds*	11 *p.*	6 *p.*	11 *p.*
642	5,2	7	42	230	9	10	9
599	5,1	7	42	227	10	7	10
515	5	7	57	224	5	4	5
483	5	8	12	225	5	5	5
641	5,2	7	42	230	7	10	7

Exp. 14. Au mois de Juillet 1719. le docteur *Desaguliers* recommença ces expériences en cette sorte. Il donna à des vessies de cochon une forme sphérique, en les plaçant dans des spheres de bois, car en souflant de l'air dans ces vessies, après les avoir mouillées, il les forçoit d'emplir la concavité de ces spheres. Ensuite ayant séché ces vessies & ayant ôté le bois qui les entouroit & qui pouvoit se démonter, il les laissa tomber d'un lieu qu'on avoit pratiqué dans le plus haut de la voute de la même Eglise ensorte que ces vessies tomboient alors de la hauteur de 272 pieds; & il laissa tomber dans le même instant un globe de plomb qui pésoit environ deux livres romaines. Pendant ce temps il y avoit des personnes qui étoient placées au sommet du temple d'où on laissoit tomber ces globes, & qui marquoient les temps qui s'écouloient pendant les chutes, il y avoit d'autres personnes placées sur le pavé de l'Eglise qui marquoient la différence qui se trouvoit entre le temps de la chute de la vessie & celui de la chute du globe de plomb. Ces temps étoient mesurés par des oscillations de pendules qui battoient les demi-secondes. Un de ceux qui étoient en bas avoit un horloge à ressort qui battoit les quarts de seconde; un autre avoit une autre machine faite avec soin à laquelle étoit adapté un pendule qui battoit les quarts de seconde. Un de ceux qui étoient au haut de l'Eglise avoit une machine semblable. Ces instrumens étoient faits de sorte que leurs mouvemens commençoient & s'arrêtoient quand on vouloit. Le globe de plomb tomboit en 4 secondes &

un quart à peu près. Et en ajoutant ce temps à la différence du temps dont on a parlé, on avoit le temps que la vessie employoit à tomber. Les temps dans lesquels cinq vessies tomberent, surpasserent la premiere fois le temps de la chute du globe de plomb de $14\frac{3}{4}''$, $12\frac{3}{4}''$, $14\frac{5}{8}''$, $17\frac{3}{4}''$ & $16\frac{7}{8}''$, & la seconde fois de $14\frac{1}{2}''$, $14\frac{1}{4}''$, $14''$, $19''$ & $16\frac{3}{4}''$. Ajoutant $4\frac{1}{4}''$ qui est le temps que le globe de plomb employa à tomber, les temps entiers dans lesquels les cinq vessies tomberent étoient la premiere fois de $19''$, $17''$, $18\frac{7}{8}''$, $22''$ & $21\frac{1}{8}''$; & la seconde fois de $18\frac{3}{4}''$, $18\frac{1}{2}''$, $18\frac{1}{4}''$, $23\frac{1}{4}''$ & $21''$. Et les temps marqués par ceux qui étoient au haut de l'Eglise étoient la premiere fois de $19\frac{3}{8}''$, $17\frac{1}{4}''$, $18\frac{3}{4}''$, $22\frac{1}{8}''$ & $21\frac{5}{8}''$ & la seconde fois de $19''$, $18\frac{5}{8}''$, $18\frac{3}{8}''$, $24''$ & $21\frac{1}{4}''$. Au reste, les vessies ne tomboient pas toujours en ligne droite, & quelquefois elles voltigeoient & oscilloient de côté & d'autre en tombant ce qui prolongeoit les temps de leurs chutes quelquefois d'une demi-seconde, & quelquefois d'une seconde entiere. La seconde & la quatriéme vessie tomberent plus droit la premiere fois; & la seconde fois ce furent la premiere & la quatriéme. La cinquiéme vessie étoit ridée, & ses rides retardoient uu peu sa chute. Je concluois les diamétres des vessies de leurs circonférences que je mesurois avec un fil dont je entourois. J'ai comparé la théorie avec les expériences dans les la table suivante, en supposant la densité de l'air à la densité de l'eau de pluye comme 1 à 860, & comptant les espaces que les globes devoient parcourir en tombant selon la théorie.

Poids des Vessies.	*Diamétres.*	*Temps employés à tomber de la hauteur de 272 pieds.*	*Espaces qui devoient être parcourus pendant ces temps selon la théorie.*		*Différence entre la théorie & l'expérience.*	
128 *grains.*	5,28 *pou.*	$19''$	271 *pieds*	11 *p.*	−0 *pieds*	1 *p.*
156	5,19	17	272	$0\frac{1}{2}$	+0	$0\frac{1}{2}$
$137\frac{1}{2}$	5,3	$18\frac{1}{2}$	272	7	+0	7
$97\frac{1}{2}$	5,26	22	277	4	+5	4
$99\frac{1}{8}$	5	$21\frac{1}{8}$	282	0	+10	0

Notre théorie déterminoit donc presque exactement toute la résistance qu'éprouvoient les globes mûs, tant dans l'eau que dans l'air, & cette résistance est proportionnelle (lorsque les vîtesses des globes sont égales ainsi que leurs grandeurs) à la densité des fluides.

Dans le scholie qui suit la sixiéme section, j'ai fait voir par les expériences des pendules, que les globes égaux qui ont des vîtesses égales éprouvent, lorsqu'ils se meuvent dans l'air, dans l'eau, & dans le vif-argent, des resistances qui sont comme les densités de ces fluides. Mais je l'ai fait voir ici plus exactement par les expériences des corps qui tombent dans l'air & dans l'eau ; car les pendules à chaque oscillation excitent dans le fluide un mouvement qui est toujours contraire au retour du pendule, & la résistance qui vient de ce mouvement, ainsi que celle qui vient du fil auquel le pendule est suspendu, font qu'il éprouve une résistance plus grande que celle qu'ont donné les expériences des corps qui tombent. Car par les expériences des pendules qu'on a rapportées dans ce scholie, un globe de même densité que l'eau devroit perdre la $\frac{1}{3342}$ partie de son mouvement, en parcourant dans l'air la longueur de son demi diamétre. Mais par la théorie qu'on a exposée dans cette septiéme section, & qui est confirmée par les expériences des corps qui tombent, le même globe, en parcourant la même longueur, ne devroit perdre que la $\frac{1}{4586}$ partie de son mouvement, en supposant que la densité de l'eau soit à celle de l'air comme 860 à 1. Donc les résistances étoient plus grandes dans les expériences des pendules (par les causes dont on vient de parler) que dans les expériences des globes tombans, & cela en raison de 4 à 3 environ. Mais comme les résistances que les pendules qui oscillent dans l'air, dans l'eau & dans le vif-argent, éprouvent, sont augmentées de la même maniere par des causes semblables, la proportion des résistances dans ces milieux est donnée assez exactement, tant par les expériences des pendules que par celles des corps qui tombent. Et on en peut conclure que les résistances qu'éprouvent les corps qui se meuvent dans des fluides quelconques très-ſubtils, ſont (toutes choſes égales) comme les denſités de ces fluides.

Ces choſes étant ainſi poſées, on peut déterminer à-préſent quelle partie de ſon mouvement un globe quelconque jetté dans un fluide quelconque perdra à peu près dans un temps donné. Soit D le diamétre du globe, V ſa vîteſſe dans le commencement du mouvement, & T le temps dans lequel le globe décrira dans le vuide avec la vîteſſe V un eſpace, qui ſoit à l'eſpace $\frac{8}{3}D$ comme la denſité du globe eſt à la denſité du fluide : & ce globe, étant jetté dans ce fluide, perdra dans un autre temps quelconque t la partie $\frac{tV}{T+t}$ de ſa vîteſſe, & il conſervera la partie $\frac{TV}{T+t}$ & décrira un eſpace qui ſera à l'eſpace qu'il parcoureroit dans le vuide, dans le même temps, avec la vîteſſe V ſuppoſée uniforme, comme le logarithme du nombre $\frac{T+t}{T}$ multiplié par le nombre 2, 302585093 eſt au nombre $\frac{t}{T}$, par le Cor. 7. de la Prop. 35.

Dans les mouvemens lents la réſiſtance peut être un peu moindre à cauſe que la figure d'un globe eſt un peu plus propre au mouvement que celle d'un cylindre décrit ſur le même diamétre. Et dans les mouvemens plus prompts la réſiſtance peut être un peu plus grande à cauſe que l'élaſticité & la compreſſion du fluide n'augmentent pas en raiſon doublée de la vîteſſe. Mais je ne fais pas attention ici à ces minuties.

Quand même l'air, l'eau, le vif-argent & d'autres fluides ſemblables ſeroient ſubtiliſés à l'infini, & qu'ils compoſeroient des milieux infiniment fluides, ils n'en réſiſteroient pas moins aux globes projettés. Car la réſiſtance dont on a parlé dans les Prop. précédentes vient de l'inertie de la matiere; & l'inertie eſt eſſentielle aux corps, & eſt toujours proportionnelle à leur quantité de matiere. On peut à la vérité diminuer, par la diviſion des parties du fluide, la réſiſtance qui vient de la tenacité & du frottement des parties ; mais cette division des parties de la matiere ne diminue point sa quantité ; & la quantité de la matiere restant la même, la force d'inertie reste la même ; & la résistance dont on a parlé ici est toujours proportionnelle à la force d'inertie. Afin que cette résistance diminue, il faut donc diminuer la quantité de matiere dans les espaces dans lesquels le corps se meut. C'est pourquoi les espaces célestes dans lesquels les globes des planettes & des comettes se meuvent sans cesse librement en tout sens sans aucune diminution sensible de leur mouvement doivent être vuides de tout fluide corporel, si on en excepte peut-être quelques vapeurs très-légeres & les rayons de lumiere qui les traversent.

Les projectiles excitent donc du mouvement dans les fluides, lorsqu'ils s'y meuvent, & ce mouvement vient de l'excès de la pression du fluide sur les parties antérieures du projectile sur la pression que ses parties postérieures éprouvent, & il ne peut pas être moindre dans les milieux infiniment fluides que dans l'air, l'eau & le vif-argent, à raison de la quantité de matiere que chacun contient. Mais cet excès de la pression n'excite pas seulement, à raison de sa quantité, un mouvement dans le fluide, il agit encore sur le projectile pour retarder son mouvement, & par conséquent la résistance dans tout fluide est comme le mouvement excité dans ce fluide par le projectile, & elle ne peut pas être moindre dans un milieu rempli de matiere éthérée à raison de sa densité, que dans l'air, dans l'eau & dans le vif-argent à raison de la densité de ces fluides.

HUITIÉME SECTION.

De la propagation du mouvement dans les fluides.

PROPOSITION XLI. THÉORÉME XXXII.

La pression ne se propage point en ligne droite dans un fluide, à moins que ses parties ne soient placées en ligne droite.

Fig. 49. Si les particules *a*, *b*, *c*, *d*, *e* sont placées en ligne droite, la pression peut se propager directement de *a* à *e*; mais la particule *e* pressera obliquement les particules *f* & *g* placées obliquement, & ces particules *f* & *g* ne soutiendront point cette pression à moins qu'elles ne soient soutenues par les particules plus éloignées *h* & *k*; or en étant soutenues, elles les pressent, & ces particules *h* & *k* ne peuvent pas soutenir cette pression, si elles ne sont soutenues elles-mêmes par les particules ultérieures *l* & *m* qu'elles pressent à leur tour, & ainsi de suite à l'infini. Donc la pression qui s'est ainsi communiquée, premierement aux particules qui n'étoient pas posées en ligne droite produira une déviation, & elle se propagera obliquement à l'infini : après avoir commencé à se propager obliquement elle continuera encore sa déviation, si elle tombe sur des particules ultérieures qui ne soient pas posées en ligne droite; & cela autant de fois qu'elle rencontrera des particules qui ne seront pas placées exactement en ligne droite. *C. Q. F. D.*

Cor. Si quelque partie de la pression, propagée dans un fluide d'un point donné, est interceptée, la partie restante, qui n'est point interceptée agira derriere l'obstacle. Ce qui peut se démontrer ainsi.

Que la pression soit propagée du point *A* vers tous les côtés, & ce-

Fig. 50.

la, s'il est possible, selon des lignes droites, & que l'obstacle *NBCK* percé en *BC* intercepte toute cette pression qui passe par le trou circulaire *BC*, excepté la partie *APQ* qui passe par le trou conique. Que le cône *APQ* soit partagé en tranches par les plans transversaux *de*, *fg*, *hi*; & que pendant que le cône *ABC*, en propageant la pression, presse dans la superficie *de* la tranche conique ultérieure *degf*, & que cette tranche presse la tranche voisine *fghi* dans la superficie *fg*, & que cette seconde tranche en presse une troisieme, & ainsi de suite à l'infini. Il est clair (par la troisiéme loi du mouvement) que la premiere tranche *defg* sera autant pressée dans la superficie *fg* par la réaction de la seconde tranche *fghi*, qu'elle presse elle-même cette seconde tranche. Donc la tranche *degf* est pressée des deux côtés entre le cône *Ade* & la tranche *fhig*, & par conséquent (par le Cor 6. de la Prop. 19.) elle ne peut conserver sa figure à moins qu'elle ne soit pressée de tous côtés par une force égale : donc elle sera forcée de céder vers les côtés *df*, *eg* par le même effort par lequel elle presse les superficies *de*, *fg*; & comme elle n'est point solide mais entierement fluide elle se répandra alors à moins qu'il n'y ait un fluide ambiant qui s'oppose à son effort. Donc par l'effort qu'elle fait pour se répandre, elle pressera d'un même effort, tant le fluide ambiant vers les côtés *df*, *eg*, que la tranche *fghi*; & par conséquent la pression ne se propagera pas moins vers les côtés *df*, *eg*, dans les espaces *NO*, *KL* à droite & à gauche, que de la superficie *fg* vers *PQ*. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION XLII. THÉORÉME XXXIII.

Tout mouvement propagé dans un fluide s'éloigne de la ligne droite dans des espaces immobiles. Fig. 50.

Cas 1. Que le mouvement soit propagé du point *A* par le trou *BC*, & qu'il continue, s'il est possible, dans l'espace conique *BCQP*, selon des lignes droites qui divergent du point *A*. Sup-

Du Mouvement des Corps.

Fig. 50.

posons premierement que ce mouvement soit un mouvement d'ondulation excité dans la superficie d'une eau stagnante & soient de, fg, hi, kl, &c. les éminences de chacune de ces ondes distinguées l'une de l'autre par autant de cavités. Comme l'eau est plus haute dans les éminences des ondes que dans les parties immobiles KL, NO du fluide ; elle s'écoulera par conséquent des extrémités e, g, i, l, &c. d, f, h, k, &c. des sommets de ces éminences, vers KL & NO : & comme elle est plus basse dans les cavités de ces ondes que dans les parties immobiles KL, NO du fluide, elle s'écoulera de ces parties immobiles dans ces cavités. Par le premier écoulement de l'éminence des ondes, & par l'autre les cavités se dilateront çà & là, & s'étendront vers KL & NO. Et parce que le mouvement des ondes de A vers PQ se fait par un écoulement continu des éminences dans les cavités prochaines, & que par conséquent il n'a pas plus de vîtesse que n'en peut donner la chute ; & que la chute de l'eau de côté & d'autre se doit faire vers KL & NO avec la même vîtesse, la dilatation des ondes sera propagée d'un côté & de l'autre vers KL & NO avec la même vîtesse, avec laquelle ces ondes elles-mêmes s'étendent de A vers PQ en ligne droite. Donc tout l'espace de côté & d'autre vers KL & NO sera occupé par les ondes dilatées $rfgr$, $shis$, $tklt$, $vmnv$, &c. *C. Q. F. D.*

On peut se convaincre que cela se passe ainsi dans les eaux stagnantes.

Cas 2. Supposons à-présent que de, fg, hi, kl, mn représentent des pulsions imprimées du point A & continuées successivement dans un milieu élastique. Supposons de plus que ces pulsions soient propagées par des condensations & des raréfactions successives du milieu, ensorte que la partie la plus dense d'une pulsion quelconque occupe la superficie sphérique décrite autour du centre A, & qu'il y ait des intervalles égaux entre les pulsions successives. Que les lignes de, fg, hi, kl, &c. représentent les parties les plus denses des pulsions, lesquelles se propagent par le

trou

Fig. 50.

trou *B C*; comme le milieu eſt plus denſe dans ce lieu que dans les eſpaces d'un côté & de l'autre vers *K L* & *N O*, il ſe dilatera tant vers ces eſpaces *K L* & *N O* ſitués des deux côtés que vers les eſpaces les plus rares qui ſont entre les pulſions ; ce qui le rendant toujours plus rare vers ces intervales & plus denſe vers les pulſions, le fera participer à tous ces mêmes mouvemens.

Et parce que le mouvement progreſſif des pulſions vient du relâchement continuel des parties les plus denſes vers les intervales antécédens les plus rares ; & que ces pulſions doivent s'étendre de côté & d'autre avec la même vîteſſe à peu près vers les parties *K L*, *N O* du milieu, leſquelles ſont en repos ; ces pulſions ſe dilateront d'un côté & de l'autre dans les eſpaces immobiles *KL*, *NO*, avec la même vîteſſe à peu près avec laquelle elles ſont propagées directement du centre *A* ; & par conſéquent elles occuperont l'eſpace entier *K L O N*. *C. Q. F. D.*

On l'éprouve ainſi dans les ſons, car le ſon s'entend quoiqu'il y ait une montagne entre le corps ſonore & nous, & lorſqu'il entre dans une chambre par une fenêtre, il ſe répand dans toute la chambre, enſorte qu'on l'entend de tous ſes coins, non pas tant parce qu'il eſt réfléchi par les murailles de la chambre oppoſées au lieu où on l'entend, que parce qu'il y arrive en droiture de la fenêtre, autant qu'on en peut juger par les ſens.

Cas 3. Suppoſons enfin qu'un mouvement d'un genre quelconque ſoit propagé de *A* par l'ouverture *B C* : comme cette propagation ne ſe peut faire ſi les parties du milieu les plus proches du centre *A* ne preſſent & ne meuvent les parties ſituées au-delà ; ces parties preſſées étant fluides, elles ſe répandront de toutes parts vers les lieux où elles ſont moins preſſées, & elles ſe répandront vers toutes les parties du milieu qui ſont en repos, tant vers les latérales *KL*, *NO*, que vers les antérieures *P Q*, & par ce moyen, tout le mouvement qui a paſſé premierement par l'ouverture *B C*, commencera à ſe dilater & à s'étendre en ligne droite de cette ouverture comme de ſon origine & comme d'un centre vers toutes les parties. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION XLIII. THÉORÉME XXXIV.

Tout corps vibrant propagera de toutes parts en ligne droite dans un milieu élaſtique le mouvement des pulſions ; & dans un milieu non élaſtique il excitera un mouvement circulaire.

Cas 1. Les parties du corps vibrant en s'étendant & ſe contractant alternativement preſſeront & pouſſeront en s'étendant les parties du milieu qui les touchent, & en les preſſant elles les condenſeront; & enſuite en ſe contractant elles laiſſeront ces parties comprimées en liberté de s'étendre & de s'éloigner les unes des autres. Donc les parties du milieu qui touchent ce corps vibrant, s'étendront & ſe contracteront tour à tour, comme les parties de ce corps : & par la même raiſon que les parties de ce corps excitent des ondulations dans les parties de ce milieu qui le touchent, ces parties produiront à leur tour de ſemblables ondulations dans celles auſquelles elles ſont contigues, leſquelles en exciteront dans les parties qui en ſont les plus éloignées, & ainſi de ſuite à l'infini. Et comme les premieres parties de ce milieu ſont condenſées lorſque les parties du corps vibrant s'étendent, & qu'elles s'étendent lorſque les parties de ce corps ſe contractent, de même les autres parties du milieu ſont condenſées toutes les fois que les parties du corps s'étendent, & elles s'étendent toutes les fois que ce corps ſe contracte. Et par conſéquent elles ne ſe condenſeront & ne s'étendront pas toutes en même temps (car ſi elles conſervoient ainſi des diſtances déterminées entr'elles, elles ne ſe raréfieroient point & elles ne ſe condenſeroient point tour à tour) mais en s'approchant l'une de l'autre par la condenſation, & en s'en éloignant par l'extenſion, il y en aura quelques-unes qui s'éloigneront pendant que d'autres reviendront; & cela alternativement à l'infini. Les parties qui vont en s'éloignant & qui en allant ſe condenſent par leur mouvement progreſſif, dans lequel elles frappent contre les obſtacles, cauſent des pulſions; & par conſéquent les pulſions ſucceſſives de tout corps vibrant ſe propageront en ligne droite. Et cela à des intervalles les uns des autres à peu prés égaux à cauſe de l'égalité des intervalles des temps dans leſquels le corps à chacune de ſes vibrations excite chacune des pulſions. Et quoique les parties du corps vibrant aillent & reviennent vers un côté déterminé, cependant les pulſions qui ſe propagent de là dans le milieu ſe dilateront vers les côtés, par la Prop. précédente; & elles ſe propageront en tout ſens dans des ſuperficies à peu près ſphériques & concentriques en partant de ce corps à reſſort comme du centre commun. Nous avons quelque exemple de cela dans l'eau, car ſi on la remue avec le bout du doigt, ce mouvement ſe continue non ſeulement de côté & d'autre dans le ſens dans lequel le doigt s'eſt mû, mais il s'y continue par des eſpéces de cercles concentriques qui environnent le doigt dans l'inſtant, & qui ſe propagent de tous côtés; car la peſanteur du fluide tient lieu de force élaſtique.

Cas 2. Si le milieu n'eſt pas élaſtique : comme alors ſes parties ne peuvent être condenſées par les vibrations des parties du corps vibrant qui les preſſent, le mouvement ſe propagera en un inſtant du côté vers lequel le milieu cédera le plus facilement, c'eſt-à-dire, du côté vers lequel le corps vibrant laiſſeroit ſans cela du vuide derriere lui. Ce cas eſt le même que celui d'un corps projetté dans un milieu quelconque. Le milieu en cédant aux projectiles ne s'en écarte pas à l'infini; mais en ſe mouvant circulairement il va remplir la place que le corps laiſſe derriere lui. Donc toutes les fois qu'un corps à reſſort s'avance vers quelque côté, le milieu, en cédant, s'avance par un cercle vers le côté que le corps abandonne; & toutes les fois que le corps revient à ſon premier lieu, il en repouſſe le milieu qui revient alors à celui qu'il occupoit auparavant. Quand le corps vibrant ne ſeroit pas roide, mais abſolument flexible, ſi cependant il demeure de même grandeur, comme il ne peut preſſer par ses vibrations le milieu dans un lieu quelconque qu'il ne lui cede de la place en même temps quelqu'autre part; il arrivera que le milieu s'écartant des lieux où il est pressé, s'avancera toujours en rond vers les parties qui lui cedent. *C. Q. F. D.*

Cor. Ceux-là se trompent donc qui croyent que l'agitation des parties de la flamme cause seule la propagation de la pression en ligne droite dans le milieu ambiant. Cette pression ne vient pas seulement du mouvement des parties de la flamme, mais encore de la dilatation du total.

PROPOSITION XLIV. THÉORÉME XXXV.

Si de l'eau descend & monte alternativement dans les branches KL, MN *d'un canal; & qu'on ait un pendule dont la longueur entre le point de suspension & le centre d'oscillation soit égale à la moitié de la longueur de la colonne d'eau qui est dans le canal: je dis que l'eau montera & descendra dans ce canal dans les mêmes temps dans lesquels ce pendule oscillera.*

Fig. 51. & 52. Je mesure la longueur de la colonne d'eau dans le sens des axes du canal & des branches, & je la suppose égale à la somme de ces axes; je néglige la résistance de l'eau qui vient de son frottement contre les branches du canal. Que AB, CD représentent donc la moyenne hauteur de l'eau dans l'une & l'autre branche; & lorsque l'eau montera dans la branche KL à la hauteur EF elle descendra dans la branche MN à la hauteur GH. Soit P le corps suspendu, VP le fil auquel il tient, V le point de suspension, $RPQS$ la cycloïde que le pendule décrit, P son point le plus bas, PQ un arc égal à la hauteur AE. La force par laquelle le mouvement de l'eau est alternativement accéléré & retardé, est l'excès du poids de l'eau dans l'une ou l'autre branche sur son poids dans la branche opposée: donc, lorsque l'eau monte à la hauteur EF dans la branche KL, & que dans l'autre branche elle descend en GH, cette force est double du poids de l'eau $EABF$, & par conséquent elle est au poids de toute l'eau comme AE ou PQ à VP ou PR. Mais la

force par laquelle le corps P eſt accéléré & retardé dans la cycloïde à un lieu quelconque Q eſt (par le Cor. de la Prop. 51.) à ſon poids total, comme ſa diſtance PQ du lieu le plus bas P, à la longueur PR de la cycloïde. Ainſi les forces motrices de l'eau & du pendule, lorſqu'ils parcourent les eſpaces égaux AE, PQ, ſont comme les poids à mouvoir. Donc, ſi l'eau & le pendule ſont en repos dans le commencement, ces forces les feront mouvoir également dans des temps égaux, & feront que par un mouvement réciproque l'eau & le pendule iront & reviendront dans les mêmes temps. *C. Q. F. D.* Fig. 51. & 52.

Cor. 1. Donc toutes les aſcenſions & deſcenſions de l'eau ſont iſochrones, ſoit que le mouvement ſoit plus prompt ou plus lent.

Cor. 2. Si la longueur de toute la colonne d'eau dans le canal eſt de $6\frac{1}{9}$ pieds de Paris, l'eau deſcendra dans une ſeconde & montera dans une autre ſeconde; & ainſi de ſuite alternativement à l'infini. Car un pendule de $3\frac{1}{18}$ pieds fait une oſcillation dans une ſeconde.

Cor. 3. La longueur de la colonne d'eau étant augmentée ou diminuée, le temps de ſes oſcillations augmentera ou diminuera en raiſon ſouſdoublée de cette longueur.

PROPOSITION XLV. THÉORÈME XXXVI.

La viteſſe des ondes eſt en raiſon ſouſdoublée de leur largeur.

C'eſt ce qui ſuit de la conſtruction de la Propoſition ſuivante.

PROPOSITION XLVI. PROBLÈME X.

Trouver la viteſſe des ondes.

Il faut prendre un pendule dont la longueur entre le point de ſuſpenſion & le centre d'oſcillation ſoit égale à la largeur des ondes : & dans le même temps dans lequel le pendule achevera chaque oſcillation, les ondes parcoureront en avançant un eſpace preſque égal à leur largeur.

J'appelle largeur des ondes l'eſpace tranſverſal qui eſt entre leur moindre ou leur plus grande élévation. Que *ABCDEF* repréſente une eau ſtagnante dont la ſuperficie monte & deſcende par des ondes ſucceſſives ; que *A*, *C*, *E*, &c. ſoient les éminences de ces ondes, & *B*, *D*, *F* &c les cavités intermédiaires qui les ſéparent, comme le mouvement des ondes ſe fait par l'aſcenſion & la deſcenſion ſucceſſive de l'eau, enſorte que ſes parties *A*, *C*, *E*, &c. qui ſont les plus hautes deviennent enſuite les plus baſſes ; & que la force motrice qui fait monter les parties les plus baſſes & deſcendre les plus hautes, eſt le poids de l'eau élevée ; cette aſcenſion & cette deſcenſion alternatives ſeront analogues au mouvement d'oſcillation de l'eau dans le canal, & elles obſerveront les mêmes loix par rapport au temps : & par conſéquent (par la Prop. 44.) ſi les diſtances entre les lieux les plus hauts *A*, *C*, *E*, & les plus bas *B*, *D*, *F* des ondes ſont égales au double de la longueur du pendule ; les parties les plus hautes *A*, *C*, *E*, deviendront les plus baſſes dans le temps d'une oſcillation, & dans le temps d'une autre oſcillation elles redeviendront les plus hautes. Donc il y aura le temps de deux oſcillations entre chacune de ces ondes ; c'eſt-à-dire, que chacune de ces ondes parcourera ſa largeur dans le temps que le pendule employera à faire deux oſcillations ; mais dans ce même temps un pendule, dont la longueur ſeroit quadruple & qui par conſéquent ſeroit égal à la largeur de ces ondes, feroit une oſcillation. Donc, &c. *C. Q. F. T.*

Fig. 53.

Cor. 1. Donc les ondes qui ont $3\frac{1}{18}$ pieds de Paris de largeur en avançant dans une ſeconde parcoureront leur largeur ; & par conſéquent dans une minute elles parcoureront $183\frac{1}{3}$ pieds, & dans une heure 11000 pieds environ.

Cor. 2. Et la vîteſſe des plus grandes ou des moindres ondes augmentera ou diminuera en raiſon ſouſdoublée de leur largeur.

Cela eſt ainſi dans l'hypotèſe que toutes les parties de l'eau montent & deſcendent en ligne droite ; mais cette aſcenſion & cette deſcenſion ſe font plutôt par des cercles, ainſi par cette Propoſition le temps n'eſt déterminé qu'à peu près.

PROPOSITION XLVII. THÉORÉME XXXVII.

Des pulsions étant propagées dans un fluide, chacune des particules de ce fluide, qui vont & qui viennent par un mouvement réciproque très-prompt, sont toujours accélérées & retardées suivant les loix des oscillations des pendules.

Que AB, BC, CD, &c. représentent les distances égales des pulsions successives ; ABC l'espace dans lequel s'exécutent les mouvemens de ces pulsions propagées de A vers B ; soient E, F, G trois points physiques du milieu en repos placés sur la ligne AC à des distances égales les uns des autres ; Ee, Ff, Gg les espaces égaux très-petits dans lesquels ces points vont & viennent à chaque vibration par un mouvement réciproque ; ϵ, φ, γ, les lieux quelconques intermédiaires de ces mêmes points ; & EF, FG des petites lignes physiques, ou les parties linéaires du milieu qui sont entre ces points & qui sont transportées successivement dans les lieux $\epsilon\varphi$, $\varphi\gamma$, & ef, fg. Soit tirée PS égale à la ligne Ee : & soit cette ligne PS partagée en deux parties égales au point O, & du centre O & de l'intervale OP soit décrit le cercle $SIPi$. Que sa circonférence entiere & ses parties représentent le temps entier d'une vibration avec ses parties proportionnelles ; ensorte que le temps quelconque PH ou $PHSh$ étant écoulé, si on tire HL ou hl perpendiculaire sur PS, & qu'on prenne $E\epsilon$ égale à PL ou à Pl, le point physique E se trouvera en ϵ. Par cette loi un point quelconque E allant de E par ϵ à e, & revenant ensuite de e par ϵ à E, achevera chacune de ses vibrations avec les mêmes dégrés de retardation & d'accélération que le pendule qui oscille. Il s'agit donc de prouver que chaque point physique du milieu doit être agité par un tel mouvement. Supposons que le milieu soit mû de cette sorte par quelque cause, & voyons ce qui doit suivre de cette supposition. Fig. 54. & 55.

Dans la circonférence $PHSh$ soient pris les arcs égaux HI, IK ou hi, ik, qui ayent à la circonférence entiere la raison que

DU MOUVEMENT DES CORPS.

Fig. 54. & 55.

les droites égales EF, FG ont à l'intervale entier BC des pulſions. Et ayant abaiſſé les perpendiculaires IM, KN ou im, kn; parce que les points E, F, G ſont ſucceſſivement agités par des mouvemens ſemblables, & que pendant ce temps ils achevent leurs vibrations entieres compoſées de l'allée & du retour pendant que les pulſions ſe communiquent de B à C; ſi PH ou $PHSh$ repréſente le temps écoulé depuis le commencement du mouvement du point E, PI ou $PHSi$ repréſentera le temps écoulé depuis le commencement du mouvement du point F, & PK ou $PHSk$, le temps écoulé depuis le commencement du mouvement du point G; & par conſéquent $E\epsilon$, $F\varphi$, $G\gamma$ ſeront égaux reſpectivement à PL, PM, PN, ou à Pl, Pm, Pn, le premier dans l'allée, & le ſecond dans le retour de ces points. D'où $\epsilon\gamma$, ou $EG+G\gamma-E\epsilon$ dans l'allée ſera égal à $EG-LN$, & dans le retour à $EG+ln$. Mais $\epsilon\gamma$ eſt la largeur ou l'expanſion de la partie du milieu EG dans le lieu $\epsilon\gamma$; & par conſéquent l'expanſion de cette partie dans l'allée eſt à ſon expanſion moyenne, comme $EG-LN$ à EG; & dans le retour comme $EG+ln$ ou $EG+LN$ à EG. C'eſt pourquoi, LN étant à KH comme IM au rayon OP, & KH étant à EG comme la circonférence $PHShP$ à BC, c'eſt-à-dire, (ſi on prend V pour le rayon du cercle, dont la circonférence eſt égale à l'intervale des pulſions BC,) comme OP à V; & par conſéquent LN étant à EG comme IM à V; l'expanſion de la partie EG ou du point phyſique F dans le lieu $\epsilon\gamma$ eſt à l'expanſion moyenne de cette partie dans ſon premier lieu EG, comme $V-IM$ à V dans l'allée, & comme $V+im$ à V dans le retour. D'où, la force élaſtique du point F dans le lieu $\epsilon\gamma$ eſt à ſa force élaſtique moyenne dans le lieu EG, comme $\frac{1}{V-IM}$ à $\frac{1}{V}$ dans l'allée, mais dans le retour elle eſt comme $\frac{1}{V+im}$ à $\frac{1}{V}$. Et par le même raiſonnement les forces élaſtiques des points phyſiques E & G dans

l'allée

l'allée, sont comme $\frac{1}{V-HL}$ & $\frac{1}{V-KN}$ à $\frac{1}{V}$; & la différence des forces à la force élastique moyenne du milieu comme $\frac{HL-KN}{VV-V\times HL-V\times KN+HL\times KN}$ à $\frac{1}{V}$. C'est-à-dire, comme $\frac{HL-KN}{VV}$ à $\frac{1}{V}$, ou comme $HL-KN$ à V, en supposant (à cause des limites étroites dans lesquelles se font les vibrations) HL & KN indéfiniment plus petites que la quantité V. Comme cette quantité V est donnée, la différence des forces est comme $HL-KN$, c'est-à-dire, (à cause des proportionnelles $HL-KN$ à HK, & OM à OI ou OP, & des données HK & OP) comme OM; ou, ce qui revient au même, si Ff est coupée en deux également en Ω, comme $\Omega\varphi$. Et, par le même argument, la différence des forces élastiques des points physiques ϵ & γ dans le retour de la petite ligne physique $\epsilon\gamma$ est comme $\Omega\varphi$. Mais cette différence, (c'est-à-dire, l'excès de la force élastique du point ϵ sur la force élastique du point γ) est la force par laquelle la petite ligne physique $\epsilon\gamma$ du milieu, laquelle est entre deux, est accélérée dans l'allée & retardée dans le retour; & par conséquent, la force accélératrice de la petite ligne physique $\epsilon\gamma$ est comme sa distance au point de milieu Ω de la vibration. Donc le temps est exprimé exactement par l'arc PI. (Selon la Prop. 38. du Liv. 1.) Et la partie linéaire $\epsilon\gamma$ du milieu se mouvera selon la loi prescrite, c'est-à-dire, selon les loix des pendules oscillans: il en est de même de toutes les parties linéaires dont le milieu entier est composé. *C. Q. F. D.*

Cor. Il est clair delà, que le nombre des pulsions propagées est le même que le nombre des vibrations du corps vibrant, & qu'il n'augmente point dans leur progrès. Car la petite ligne physique $\epsilon\gamma$, dans le moment qu'elle reviendra à son premier lieu, sera en repos; & elle ne se mouvera point ensuite, à moins que le choc du corps vibrant ou celui des pulsions qui se propagent depuis ce corps, ne lui communique un nouveau mouvement.

Elle sera donc en repos dans le moment que les pulsions qui viennent du corps vibrant cesseront d'être propagées.

PROPOSITION XLVIII. THÉORÈME XXXVIII.

Les vîtesses des pulsions qui se propagent dans un milieu élastique sont en raison composée de la raison sousdoublée de la force élastique directement, & de la raison sousdoublée de la densité inversement ; en supposant la force élastique du fluide proportionnelle à sa condensation.

Cas 1. Si les milieux sont homogènes, & que les distances des pulsions soient égales entr'elles dans ces milieux, mais que le mouvement soit plus grand dans un des milieux : les contractions & les dilatations des parties analogues seront comme ces mêmes mouvemens. Mais cette proportion n'est pas exacte ; cependant si les contractions & les dilatations sont très-grandes, elle ne sera pas loin de l'être & on pourra la prendre physiquement pour telle. Mais les forces élastiques motrices sont comme les contractions & les dilatations ; & les vîtesses des parties égales qui ont été produites en même temps sont comme les forces. Donc les parties égales & correspondantes des pulsions correspondantes achevent ensemble leur allée & leur retour dans des espaces proportionnels aux contractions & aux dilatations, & cela avec des vîtesses qui sont comme ces espaces : & par conséquent les pulsions, qui dans le temps de l'allée & du retour parcourent en avançant leur largeur entiere, & qui succédent toujours à la place des pulsions précédentes, avancent avec une vîtesse égale dans l'un & l'autre milieu à cause de l'égalité des distances.

Cas 2. Si les distances ou les longueurs des pulsions sont plus grandes dans un milieu que dans l'autre ; supposons que les parties correspondantes décrivent des espaces proportionnels aux largeurs des pulsions à chaque fois qu'elles vont & qu'elles viennent : alors leurs contractions ainsi que leurs dilatations seront égales. Donc si les milieux sont homogènes, les forces motrices élastiques qui les agitent d'un mouvement réciproque feront auffi égales. Mais la matiere que ces forces doivent mouvoir eft comme la largeur des pulfions : & l'efpace dans lequel elles doivent achever leur allée & leur retour eft dans la même raifon. Le temps d'une allée & d'un retour eft donc en raifon compofée de la raifon foufdoublée de la matiere & de la raifon foufdoublée de l'efpace, & par conféquent il eft comme l'efpace. Mais les pulfions pendant les temps d'une allée & d'un retour parcourent leurs largeurs, c'eft-à-dire, des efpaces proportionnels aux temps; donc leurs vîteffes font égales.

Cas 3. Donc dans les milieux dont la force élaftique & la denfité font les mêmes, toutes les pulfions ont la même vîteffe. Et fi on augmente ou la denfité ou la force élaftique du milieu, comme la force motrice augmente en raifon de la force élaftique, & la matiere qu'il faut mouvoir en raifon de la denfité : le temps dans lequel les mêmes mouvemens s'exécuteront comme auparavant, augmentera en raifon foufdoublée de la denfité, & diminuera en raifon foufdoublée de la force élaftique. Et par conféquent la vîteffe des pulfions fera en raifon compofée de la raifon foufdoublée de la denfité du milieu inverfement, & de la raifon foufdoublée de la force élaftique directement. *C. Q. F. D.*

Cette Propofition deviendra encore plus évidente par la conftruction de la Propofition fuivante.

PROPOSITION XLIX. PROBLÊME XI.

La denfité & la force élaftique du milieu étant données, trouver la vîteffe des pulfions.

Suppofons que le milieu foit comprimé comme notre air par un poids qui incombe deffus; & que *A* foit la hauteur du milieu homogène dont le poids eft égal au poids incombant, & dont la denfité foit la même que celle du milieu comprimé dans lequel les pulfions font propagées. Qu'on fuppofe un pendule, dont la longueur entre le point de fufpenfion & le centre d'ofcillation Fig. 54. & 55.

soit A : & dans le temps que ce pendule employera à faire une oscillation entiere composée de l'allée & du retour, la pulsion en avançant parcourera un espace égal à la circonférence du cercle dont le rayon est A.

Fig. 54. & 55.

Car les constructions de la Proposition 47. étant conservées, si une ligne physique quelconque EF, en décrivant à chaque vibration un espace PS, est pressée dans les extrémités P & S de son allée & de son retour par une force élastique égale à son poids; elle achevera chacune de ses vibrations dans le temps dans lequel cette même ligne pourroit osciller dans une cycloïde dont le périmétre seroit égal à toute la longueur PS : & cela parce que des forces égales doivent faire parcourir dans le même temps à des corpuscules égaux des espaces égaux. C'est pourquoi comme les temps des oscillations sont en raison sousdoublée de la longueur des pendules, & que la longueur du pendule est égale à la moitié de l'arc de la cycloïde entiere; le temps d'une vibration sera au temps de l'oscillation du pendule dont la longueur est A, en raison sousdoublée de la longueur $\frac{1}{2}PS$ ou PO à la longueur A. Mais la force élastique qui presse la petite ligne physique EG lorsqu'elle est dans les extrémités P & S, étoit (dans la démonstration de la Prop. 47.) à la force élastique entiere, comme $HL - KN$ à V, c'est-à-dire, (lorsque le point K tombe sur P) comme HK à V : & cette force entiere, c'est-à-dire, le poids incombant par lequel la petite ligne EG est comprimée, est au poids de cette petite ligne comme la hauteur A du poids incombant est à la longueur EG de la petite ligne; donc, la force par laquelle la petite ligne, EG est pressée dans les lieux P & S, est au poids de cette petite ligne, comme $HK \times A$ à $V \times EG$, ou comme $PO \times A$ à VV, car HK étoit à EG comme PO à V. Ainsi, comme les temps, dans lesquels les corps égaux sont poussés dans des espaces égaux, sont réciproquement en raison sousdoublée des forces, le temps d'une vibration produite par la pression de la force élastique sera au temps d'une vibration produite par la force du poids, en raison soudoublée de VV à $PO \times A$, & ce temps est par conséquent au temps de l'oscillation du pendule dont la longueur est A, en raison soudoublée de VV à $PO \times A$ & en raison soudoublée de PO à A conjointement; c'est-à-dire, dans la raison entiere de V à A. Mais dans le temps d'une vibration entiere composée de l'allée & du retour, la pulsion, en avançant, parcourt sa largeur entiere BC. Donc le temps dans lequel la pulsion parcourt l'espace BC, est au temps d'une oscillation entiere, composée de l'allée & du retour, comme V est à A, c'est-à-dire, comme BC est à la circonférence du cercle dont le rayon est A. Donc le temps dans lequel la pulsion parcourera l'espace BC, est dans la même raison au temps dans lequel elle parcourera la longueur égale à cette circonférence; donc, dans le temps d'une telle oscillation, la pulsion parcourera une longueur égale à cette circonférence. *C. Q. F. D.* Fig. 54. & 55.

Cor. 1. La vîtesse des pulsions est celle que les graves acquierent en tombant d'un mouvement également accéléré, & en parcourant dans leur chute la moitié de la hauteur A. Car dans le temps de cette chute la pulsion parcourera avec la vîtesse qu'un corps auroit acquise en tombant un espace qui sera égal à toute la hauteur A; donc dans le temps d'une oscillation entiere composée de l'allée & du retour, elle parcourera un espace égal à la circonférence du cercle dont le rayon est A: donc le temps de la chute est au temps de l'oscillation comme le rayon du cercle est à sa circonférence.

Cor. 2. Ainsi, cette hauteur A étant directement comme la force élastique du fluide, & inversement comme sa densité; la vîtesse des pulsions sera en raison composée de la raison soudoublée de la densité inversement, & de la raison soudoublée de la force élastique directement.

PROPOSITION L. PROBLÊME XII.

Trouver les distances des pulsions.

Il faut trouver le nombre des vibrations qu'un corps excite par ses trémulations dans un temps donné. Et il faut diviser par ce nombre l'espace que la pulsion peut parcourir dans le même temps, & le quotient sera la largeur d'une pulsion. *C. Q. F. T.*

SCHOLIE.

Ces dernieres Propositions peuvent s'appliquer au mouvement de la lumiere & des sons. Car la lumiere se propageant en ligne droite ne peut consister dans la seule action. (Selon les Prop. 41 & 42.) Et quant aux sons, comme ils viennent des corps sonores ils ne sont en effet (Prop. 43.) que les pulsions de l'air propagées, c'est ce qui est confirmé par les vibrations que les sons excitent dans les corps voisins, surtout s'ils sont forts & graves, tels que ceux des tambours. Car les vibrations les plus promptes & les plus courtes sont celles qui s'excitent le plus difficilement. Or, que les sons, quels qu'ils soient, excitent des vibrations dans les cordes qui sont à l'unisson des corps sonores, c'est ce qui est connu de tout le monde, & ce qui est aussi confirmé par la vîtesse du son. Les poids spécifiques de l'eau de pluie & du vif-argent sont l'un à l'autre comme 1 à $13\frac{2}{3}$ environ, & lorsque le mercure est à la hauteur de 30 pouces anglois dans le barométre, les poids spécifiques de l'air & de l'eau de pluye sont alors l'un à l'autre comme 1 à 870 environ : donc les poids spécifiques de l'air & du vif-argent sont entr'eux comme 1 à 11890, donc la hauteur du vif-argent étant de 30 pouces dans le barométre, la hauteur de l'air uniforme, dont le poids peut comprimer notre air d'ici-bas, sera de 356700 pouces, ou de 29725 pieds anglois. C'est cette hauteur que nous avons nommée *A* dans la construction du Problême précédent. La circonférence du cercle dont le rayon est de 29725 pieds en a 186768 & comme on sçait qu'un pendule de $39\frac{1}{5}$ pouces fait une oscillation composée de son allée & de son retour en deux secondes, un pendule qui auroit 29725 pieds ou 356700 pouces devroit faire une semblable oscillation en $190\frac{3}{4}''$; donc, pendant ce temps, le son parcourera 186768 pieds, & 979 pieds en une seconde.

Au reste, dans ce calcul, je n'ai point eu d'égard à l'épaisseur des particules solides de l'air par lesquelles le son se communique en un instant. Car le poids de l'air étant au poids de l'eau comme 1 à 870, & les sels étant presque deux fois plus denses que l'eau; si on suppose que les particules de l'air sont à peu près de la même densité que les particules de l'eau ou des sels, & que la rareté de l'air vienne seulement des intervalles qui sont entre ses particules : le diamétre d'une particule d'air sera à l'intervalle entre les centres des particules comme, 1 à 9 ou 10 à peu près, & à l'intervalle entre les particules comme 1 à 8 ou 9. Et par conséquent, il faut ajouter à 979 pieds que le son doit parcourir en une seconde, selon le calcul précédent, $\frac{979}{9}$ pieds ou 109 pieds à peu près, à cause de l'épaisseur des particules de l'air : & alors le son parcourera 1088 pieds environ en une seconde.

Ajoutez à cela, que comme les vapeurs cachées dans l'air ont un autre ressort, & qu'elles sont d'un autre ton, elles participent à peine au mouvement de l'air pur qui propage les sons. Or lorsque ces parties sont en repos, ce mouvement est propagé plus vîte par le seul air pur, & cela en raison sousdoublée de la rareté de la matiere; ensorte que si l'atmosphere est composée de dix parties d'air pur & d'une partie de vapeurs, le mouvement des sons sera plus prompt, dans la raison sousdoublée de 11 à 10, c'est-à-dire, à peu près, dans la raison de 21 à 20, que s'il étoit composé de onze parties d'air pur : donc la vîtesse du mouvement du son ci-devant trouvée doit être augmentée dans cette raison. Ce qui fait que le son doit parcourir 1142 pieds en une seconde.

Cela doit être ainsi dans le printemps & dans l'automne, lorsque l'air est raréfié par une chaleur modérée, & que sa force élastique est sensiblement augmentée. Mais dans l'hyver, où l'air est condensé par le froid, & où sa force élastique est diminuée, le mouvement du son doit être plus lent en raison sousdoublée de la densité de l'air; & au contraire, dans l'été il doit être plus prompt; or on sçait par expérience que le son parcourt à peu près 1142 pieds de Londres & 1070 pieds de Paris en une seconde.

La vîtesse des sons étant connue, on connoîtra les intervalles des vibrations *M. Sauveur* a trouvé par ses expériences, qu'un tuyau ouvert, long environ de cinq pieds de Paris, rend un son du même ton que celui d'une corde qui fait cent vibrations en une seconde. Il se fait donc environ 100 vibrations à peu près dans un espace de 1070 pieds de Paris que le son parcourt en une seconde; & par conséquent une vibration occupe un espace d'environ $10\frac{7}{10}$ pieds de Paris, c'est-à-dire, deux fois la longueur du tuyau. D'où il est vraisemblable que les largeurs des vibrations des sons dans tous les tuyaux ouverts, sont égaux au double de la longueur des tuyaux.

De plus, on voit (par le Cor. de la Prop. 47. de ce Livre) pourquoi les sons cessent dans l'instant que les mouvemens du corps sonore viennent à cesser. Et pourquoi nous ne les entendons pas plus long-temps lorsque nous sommes éloignés du corps sonore que lorsque nous en sommes très-près. On voit aussi, par les principes qu'on a posés, pourquoi les sons augmentent dans les porte-voix. Car tout mouvement réciproque a coutume d'augmenter à chaque réflexion par la même cause qui le produit. Ainsi le mouvement se perd plus tard & se réfléchit plus fortement dans les tubes qui s'opposent à la dilatation du son, & par conséquent, il s'augmente par le mouvement nouveau imprimé à chaque réflexion. Ce sont-là les principaux phénomenes des sons.

SECTION

NEUVIÈME SECTION.

Du mouvement circulaire des fluides.

HYPOTHESE.

La résistance qui vient du défaut de lubricité des parties d'un fluide doit être, toutes choses égales, proportionnelle à la vîtesse avec laquelle les parties de ce fluide peuvent être séparées les unes des autres.

PROPOSITION LI. THÉORÉME XXXIX.

Si un cylindre solide infiniment long, tourne autour d'un axe donné de position par un mouvement uniforme, dans un fluide homogène & infini, que le fluide soit tourné en rond par cette seule impulsion, & que chaque partie du fluide continue uniformement dans son mouvement; les temps périodiques des parties du fluide seront comme leurs distances de l'axe du cylindre.

Soit *AFL* un cylindre mû circulairement & uniformement autour de son axe *S*, & que le fluide soit partagé en un nombre infini d'orbes cylindriques concentriques & solides de la même épaisseur, par des cercles concentriques *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c. Ce fluide étant homogène, les impressions que les orbes contigues feront les unes sur les autres seront (par l'hypotèse) comme leurs translations réciproques; & comme les superficies contigues dans lesquelles se font ces impressions. Si l'impression faite dans quelque orbe est plus forte ou plus foible dans sa partie concave que dans sa partie convexe; la plus forte impression prévaudra, & elle accélérera ou retardera le mouvement de l'orbe, selon qu'elle sera dirigée, eu égard à son mouvement, vers le même côté, ou vers le côté opposé. Donc, pour Fig. 56.

que chaque orbe persévere uniformement dans son mouvement, les impressions qui viennent de part & d'autre, doivent être égales entr'elles & avoir des directions opposées. Donc, les impressions étant comme les superficies contigues, & leurs translations réciproques, ces translations seront inversement comme les superficies, c'est-à-dire, inversement comme les distances de ces superficies à l'axe. Mais les différences des mouvemens angulaires autour de l'axe sont comme ces translations divisées par les distances, ou comme les translations directement & les distances inversement, c'est-à-dire, en composant ces raisons, inversement comme les quarrés des distances. Donc, si à chaque partie de la droite infinie $SABCDEQ$ on éleve les perpendiculaires Aa, Bb, Cc, Dd, Ee &c. réciproquement proportionnelles aux quarrés de ces parties SA, SB, SC, SD, SE &c. & que par les extrémités des perpendiculaires on imagine une ligne hyperbolique; les sommes de ces différences, c'est-à-dire, tous les mouvemens angulaires, seront comme les sommes correspondantes des lignes Aa, Bb, Cc, Dd, Ee &c. c'est-à-dire, en supposant que pour former un milieu uniformement fluide on augmente le nombre des orbes & qu'on diminue leur largeur à l'infini, comme les aires hyperboliques AaQ, BbQ, CcQ, DdQ, EeQ &c. analogues à ces sommes. Et les temps réciproquement proportionnels à ces mouvemens angulaires seront aussi réciproquement proportionnels à ces aires. Donc, le temps périodique d'une particule quelconque D est réciproquement comme l'aire DdQ, c'est-à-dire, (par la quadrature connue des courbes) directement comme la distance SD. *C. Q. F. D.*

Fig. 56.

Cor. 1. Delà, les mouvemens angulaires des particules d'un fluide sont réciproquement comme leurs distances à l'axe du cylindre, & leurs vîtesses absolues sont égales.

Cor. 2. Si un fluide est contenu dans un vase cylindrique d'une longueur infinie, & qu'il contienne un autre cylindre intérieur, que ces deux cylindres tournent autour de leur axe commun, que les temps de leurs révolutions ſoient comme leur demi diamétre, & que chacune des parties du fluide continue dans ſon mouvement, les temps périodiques de chacune des particules ſeront comme leurs diſtances à l'axe des cylindres.

Cor. 3. Si on ôte ou qu'on ajoute à un cylindre & à un fluide mû de cette ſorte un mouvement quelconque angulaire commun; comme par ce nouveau mouvement le frottement réciproque des parties du fluide n'eſt pas altéré, les mouvemens de ces parties entr'elles ne changeront pas. Car les tranſlations réciproques des parties dépendent de leur frottement. Donc une partie quelconque conſervera ſon mouvement lorſque ce mouvement ſera tel qu'il ne ſera pas plus accéléré que retardé par le frottement produit dans des parties oppoſées.

Cor. 4. Donc, ſi on ôte de ce ſyſtême entier composé du fluide & des cylindres tout le mouvement angulaire du cylindre extérieur, on aura le mouvement du fluide dans un cylindre en repos.

Cor. 5. Donc, ſi le fluide & le cylindre extérieur, étant en repos, le cylindre intérieur tourne uniformement; il communiquera un mouvement circulaire au fluide qui l'environne immédiatement, & ce mouvement ſe propagera peu à peu dans tout le fluide; & il ne ceſſera point d'augmenter juſqu'à ce que chaque partie du fluide ait acquis le mouvement dont on a parlé dans le Cor. 4.

Cor. 6. Comme le fluide fait effort pour propager ſon mouvement encore plus loin, le cylindre extérieur ſera auſſi mû circulairement par cet effort, à moins qu'il ne ſoit fortement retenu; & ſon mouvement s'accélérera juſqu'à ce que les temps périodiques de l'un & l'autre cylindre ſoient égaux entr'eux. Si le cylindre extérieur eſt fortement retenu, il s'efforcera de retarder le mouvement du fluide; & à moins que le cylindre intérieur, par quelque mouvement imprimé du dehors, ne conſerve ce mouvement, il ceſſera peu à peu par l'effort du cylindre extérieur.

Tout ceci peut s'éprouver dans une eau profonde ſtagnante.

PROPOSITION LII. THÉORÉME XL.

Si une ſphere ſolide tourne d'un mouvement uniforme, autour d'un axe donné de poſition, dans un fluide homogène & infini, que le fluide ſoit mû circulairement par cette ſeule impulſion ; & que chaque partie de ce fluide continue uniformement dans ſon mouvement : les temps périodiques des parties du fluide ſeront comme les quarrés de leurs diſtances au centre de la ſphére.

Fig. 56. *Cas* 1. Soit *AFL* une ſphere mûe circulairement d'un mouvement uniforme autour de ſon axe *S*, & que le fluide ſoit partagé en un nombre infini d'orbes concentriques de même épaiſſeur par des cercles concentriques *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP* &c. Suppoſez que ces orbes ſoient ſolides; comme le fluide eſt homogène, les impreſſions que les orbes contigues font les unes ſur les autres ſeront (par l'hypothèſe) comme leurs tranſlations réciproques, & comme les ſuperficies contigues ſur leſquelles ſe font ces impreſſions. Si l'impreſſion eſt plus forte ou plus foible dans quelque orbe vers ſa partie concave que vers ſa partie convexe; l'impreſſion la plus forte prévaudra, & elle accélérera ou retardera la vîteſſe de l'orbe ſelon qu'elle ſera dirigée du même côté ou d'un côté oppoſé à la direction de ſon mouvement. Donc, pour que chaque orbe continue uniformement dans ſon mouvement, les impulſions de part & d'autre doivent être égales entr'elles, & ſe faire vers des côtés oppoſés. Ainſi les impreſſions étant comme les ſuperficies contigues & comme leurs tranſlations réciproques; ces tranſlations ſeront inverſement comme les ſuperficies, c'eſt-à-dire, inverſement comme les quarrés des diſtances des ſuperficies au centre. Mais les différences des mouvemens angulaires autour de l'axe ſont comme ces tranſlations diviſées par les diſtances, ou comme ces tranſlations directement & les diſtances inverſement; c'eſt-à-dire, en compoſant ces raiſons, comme les cubes des diſtances inverſement. C'eſt-pourquoi, ſi à chacune des parties de la droite infinie *SABCDEQ* on éleve les perpendiculaires *Aa*,

Bb, *Cc*, *Dd*, *Ee* &c. réciproquement proportionnelles aux cubes de ces parties *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE* &c. Les ſommes des différences, c'eſt-à-dire, les mouvemens entiers angulaires, ſeront comme les ſommes correſpondantes des lignes *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee* &c. c'eſt-à-dire, (ſi le nombre des orbes augmente & que leur largeur diminue infiniment afin de former un milieu uniformement fluide) comme les aires hyperboliques *AaQ*, *BbQ*, *CcQ*, *DdQ*, *EeQ*, &c. analogues à ces ſommes. Et les temps périodiques réciproquement proportionnels aux mouvemens angulaires ſeront auſſi réciproquement proportionnels à ces aires. Donc le temps périodique d'un orbe quelconque *DIO* eſt réciproquement comme l'aire *DdQ*, c'eſt-à-dire, directement comme le quarré de la diſtance *SD*. Et c'eſt ce que j'ai voulu premierement démontrer. Fig. 56.

Cas 2. Du centre de la ſphere ſoit mené un grand nombre de droites infinies leſquelles faſſent avec l'axe des angles donnés, & qui ſe ſurpaſſent les uns les autres de différences données ; ſuppoſez que ces droites, en tournant autour de l'axe, coupent les orbes en un nombre innombrable d'anneaux ; chacun de ces anneaux aura quatre anneaux qui lui ſeront contigus, un intérieur, un extérieur, & deux autres aux côtés. Un quelconque de ces anneaux, par le frottement intérieur & extérieur, ne peut-être preſſé également dans des parties oppoſées ſi ce n'eſt par un mouvement qui ſe faſſe ſelon la loi du premier cas ; c'eſt ce qui eſt clair par la démonſtration de ce premier cas. Et par conſéquent, la ſérie quelconque d'anneaux, allant en ligne droite à l'infini depuis la ſphere, ſe mouvera ſelon la loi du premier cas, à moins que le frottement des anneaux latéraux ne s'y oppoſe. Mais dans le mouvement qui ſe fait ſelon cette loi, le frottement des anneaux latéraux eſt nul ; ainſi il n'empêchera point que le mouvement ne ſe faſſe ſelon cette loi. Si les anneaux, qui ſont également éloignés du centre, tournoient plus vîte ou plus lentement vers les pôles que vers l'écliptique ; les plus lents ſeroient accélérés, & les plus prompts feroient retardés par le frottement mutuel, & par là les temps périodiques deviendroient toujours égaux, felon la loi du cas premier. Ce frottement n'empêche donc pas que le mouvement ne fe faffe felon la loi du premier cas, & par conféquent, cette loi aura lieu : c'eft-à-dire, que les temps périodiques de chacun des anneaux feront comme les quarrés de leurs diftances au centre du globe. Ce que j'avois à démontrer en fecond lieu.

Cas 3. Soit à-préfent un de ces anneaux divifé par des fections tranfverfales en des particules innombrables qui forment une fubftance abfolument & uniformement fluide ; comme ces fections n'ont point de rapport à la loi du mouvement circulaire, mais feulement à la conftitution du fluide, le mouvement circulaire continuera comme auparavant. Ainfi les afpérités de tous ces anneaux (lefquels font fuppofés très-petits) ne changeront point par ces fections, non plus que la force de leurs frottemens mutuels ou bien ils changeront également. Ainfi la proportion des caufes demeurant la même, la proportion des effets fubfiftera auffi, c'eft-à-dire, la proportion des mouvemens & des temps périodiques. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Delà, les mouvemens angulaires des parties du fluide autour de l'axe de la fphere, font réciproquement comme les quarrés des diftances au centre de la fphere, & les vîteffes abfolues font réciproquement comme ces mêmes quarrés divifés par les diftances à l'axe.

Cor. 2. Si un globe tourne d'un mouvement uniforme, dans un milieu en repos, homogène & infini, autour d'un axe donné de pofition, il communiquera au fluide un mouvement de tourbillon, & ce mouvement fe continuera peu à peu à l'infini ; & il ne ceffera point d'être accéléré dans chaque partie du fluide, jufqu'à ce que les temps périodiques de chacune de ces parties foient comme les quarrés des diftances au centre du globe.

Cor. 3. Parce que les parties intérieures du tourbillon, à caufe de fa plus grande vîteffe, preffent & frottent les extérieures, que par cette action elles leur communiquent perpétuellement du mouvement, & que ces parties extérieures communiquent aussi en même temps la même quantité de mouvement à d'autres parties qui leur sont extérieures, & que par là elles conservent toujours leur quantité de mouvement sans aucune variation ; il est clair, que le mouvement se communique sans cesse du centre à la circonférence du tourbillon, & qu'il est absorbé dans l'infinité de cette circonférence. La matiere du tourbillon contenue entre deux superficies sphériques quelconques concentriques, n'est donc jamais accélérée, parce que tout le mouvement que la matiere intérieure reçoit est toujours transféré à la matiere extérieure.

Cor. 4. Donc, afin que le mouvement du tourbillon se conserve le même, il faut un principe actif par lequel le globe reçoive toujours la même quantité de mouvement qu'il imprime à la matiere du tourbillon ; & sans un tel principe, il faut nécessairement que le globe & les parties intérieures du tourbillon, communiquant sans cesse leur mouvement aux extérieures, & n'en recevant point de nouveau, perdent leur mouvement peu à peu, & qu'ils cessent enfin de tourner.

Cor. 5. Si un autre globe nâgeoit du centre de ce tourbillon, à une certaine distance & que dans le même temps il tournât continuellement, par quelque force, autour d'un axe dont l'inclinaison fut donnée ; par ce mouvement le fluide seroit forcé de tourner en tourbillon ; & ce nouveau tourbillon très-petit commenceroit à tourner avec le globe autour du centre de l'autre tourbillon, & peu à peu son mouvement se propageroit à l'infini, comme celui du premier tourbillon. Par la même raison qui fait que ce nouveau globe seroit emporté par le mouvement du premier tourbillon, le premier globe seroit aussi emporté par le mouvement du second tourbillon, ensorte que ces deux globes tourneroient autour de quelque point intermédiaire, & qu'ils se fuiroient mutuellement par leur mouvement circulaire, à moins qu'ils ne fussent rapprochés par quelqu'autre force. Ensuite, si les forces continuellement imprimées, par lesquelles ces globes continuent à se mouvoir, venoient à cesser, & que les loix de la mécanique permissent toutes ces suppositions, le mouvement de ces globes diminueroit peu à peu (par la raison indiquée dans les Cor. 3. & 4.) & enfin les tourbillons seroient en repos.

Cor. 6. Si plusieurs globes tournent constamment dans des lieux donnés autour d'axes donnés de position, & avec des vîtesses déterminées, il se formera autant de tourbillons à l'infini. Car chacun de ces globes, par la même raison que le mouvement de l'un d'entr'eux se propage à l'infini, propagera aussi son mouvement à l'infini, ensorte que chaque partie du fluide infini sera agitée du mouvement qui résulte des actions de tous ces globes. Donc ces tourbillons ne seront pas terminés par des limites certaines, mais ils se mêleront peu à peu les uns les autres; & les globes par les actions de ces tourbillons les uns sur les autres seront perpétuellement dérangés de leur place, comme on l'a fait voir dans le Cor. précédent; & par conséquent, ils ne conserveront point entr'eux une position fixe, à moins qu'ils ne soient retenus par quelqu'autre force. Mais les forces qui sont continuellement imprimées à ces globes, & qui conservent leur mouvement, venant à cesser, la matiere cessera peu à peu de former des tourbillons, & sera à la fin en repos, par la raison assignée dans les Cor. 3. & 4.

Cor. 7. Si un fluide homogène est enfermé dans un vase sphérique, & qu'il ait un mouvement de rotation uniforme autour d'un globe placé dans le centre, que ce globe & ce vase tournent du même côté autour du même axe, & que leurs temps périodiques soient comme les quarrés de leurs demi diamétres: les parties du fluide ne continueront pas à se mouvoir sans accélération ni retardation, à moins que leurs temps périodiques ne soient comme les quarrés des distances au centre du tourbillon. Car un tourbillon ne peut subsister par une autre loi.

Cor. 8. Si le vase, le fluide qui y est renfermé, & le globe conservent ce mouvement, & que de plus ils tournent d'un mou-

vement

vement angulaire commun autour d'un axe quelconque donné ; comme par ce nouveau mouvement le frottement des parties du fluide entr'elles ne change pas, les mouvemens de ces parties entre elles ne changeront pas non plus. Car les tranſlations réciproques des parties dépendent de leur frottement. Ainſi une partie quelconque perſévérera dans le mouvement qui eſt néceſſaire pour que le frottement qu'elle éprouve d'un côté ne la retarde pas plus que celui qu'elle éprouve de l'autre ne l'accélere.

Cor. 9. Ainſi ſi le vaſe eſt en repos, & que le mouvement du globe ſoit donné, le mouvement du fluide le ſera auſſi. Car concevez un plan qui paſſe par l'axe du globe, & qui ſe meuve en un ſens contraire ; & ſuppoſez que la ſomme du temps de ſa révolution & de celle du globe, ſoit au temps de la révolution du globe, comme le quarré du demi diamétre du vaſe eſt au quarré du demi diamétre du globe : les temps périodiques des parties du fluide ſeront alors, par rapport à ce plan, comme les quarrés de leurs diſtances au centre du globe.

Cor. 10. Donc ſi le vaſe & le globe ſe meuvent autour d'un même axe ou bien autour de quelque axe différent, avec une vîteſſe quelconque donnée, on aura le mouvement du fluide. Car ſi de tout le ſyſtême on ôte le mouvement angulaire du vaſe, tous les mouvemens demeureront les mêmes entr'eux comme auparavant, par le Cor. 8. & ces mouvemens ſeront donnés par le Cor. 9.

Cor. 11. Si le vaſe & le fluide ſont en repos, & que le globe tourne d'un mouvement uniforme, le mouvement ſe communiquera peu à peu à tout le fluide renfermé dans le vaſe, & le vaſe ſera mû circulairement par ce mouvement, à moins qu'il ne ſoit fortement retenu, & le fluide & le vaſe ne ceſſeront point d'être accélérés juſqu'à ce que leurs temps périodiques ſoient égaux aux temps périodiques du globe. Si le vaſe eſt retenu par quelque force, ou bien qu'il tourne par un mouvement conſtant & uniforme quelconque, le milieu parviendra peu à peu à l'état de mouvement dont on a parlé dans les Cor. 8. 9. & 10. & il ne reſtera jamais dans aucun autre état. Enſuite, ſi les forces qui faiſoient tourner le globe & le vaſe avec des mouvemens déterminés ceſſent d'agir, & que tout le ſyſtême ſoit abandonné aux loix de la méchanique; le globe & le vaſe agiront l'un ſur l'autre par le moyen du fluide, & ils ne ceſſeront point de ſe communiquer mutuellement leurs mouvemens par le moyen de ce fluide, juſqu'à ce que leurs temps périodiques ſoient égaux entre eux, & que le ſyſtême entier tourne tout enſemble comme feroit un corps ſolide.

S C H O L I E.

Dans tout ceci, je ſuppoſe le fluide compoſé d'une matiere dont la denſité & la fluidité ſoient uniformes. Dans un tel fluide, un même globe avec le même mouvement, & dans le même temps, exciteroit des mouvemens égaux & ſemblables, à des diſtances égales, dans quelque lieu du fluide qu'il fut placé. La matiere par ſon mouvement circulaire fait effort pour s'éloigner de l'axe du tourbillon, & par conſéquent elle preſſe toute la matiere qui eſt au-delà. Cette preſſion rend le frottement des parties plus fort, & leur ſéparation plus difficile; & elle diminue, par conſéquent, la fluidité de la matiere. De plus, ſi les parties du fluide ſont plus épaiſſes dans quelque endroit, la fluidité y ſera moindre, à cauſe de la diminution du nombre des ſuperficies qui ſéparent ces parties les unes des autres. Je ſuppoſe que dans les cas de cette eſpéce, on ſupplée par quelque moyen au défaut de fluidité qui vient du manque de lubricité des parties, ou de quelque retardement. Car ſans cela, la matiere étant plus cohérente dans les lieux où elle eſt moins fluide, elle ſe mouveroit plus lentement, & par conſéquent elle recevroit le mouvement plus difficilement, & le propageroit plus longtemps que la proportion aſſignée ci-deſſus ne le demande. Si la forme du vaſe n'eſt pas ſphérique, les particules ſe mouveront dans des lignes qui ne feront pas circulaires, mais conformes à la figure du vaſe, & les temps périodiques seront comme les quarrés des moyennes distances au centre à peu près. Les mouvemens seront plus lents dans les lieux entre la circonférence & le centre où les espaces sont plus grands, & ils seront plus prompts dans les lieux où ces espaces seront plus étroits, & cependant les particules qui auront le plus de vîtesse n'en tendront pas moins à la circonférence : car quoiqu'elles décrivent des arcs moins courbes, l'effort qu'elles font pour s'éloigner du centre ne sera diminué par cette moindre courbure qu'autant qu'il sera augmenté par l'augmentation de la vîtesse. En allant des espaces plus étroits dans ceux qui sont plus larges, elles s'éloigneront un peu plus du centre, & en s'éloignant leur mouvement sera retardé ; ensuite, en repassant des espaces les plus larges dans les plus étroits leur mouvement sera accéléré, & ainsi chacune de ces particules sera perpétuellement retardée & accélérée tour à tour. Cela se passera ainsi dans un vase solide. Mais la forme d'un tourbillon dans un fluide infini se connoîtra par le Cor. 6. de cette Proposition.

J'ai cherché les propriétés des tourbillons dans cette Proposition, afin de connoître s'il étoit possible d'expliquer les phénomènes célestes par les tourbillons. Il est certain, par les observations, que les temps périodiques des planettes qui tournent autour de Jupiter, sont en raison sesquiplée de leurs distances au centre de cette planette ; & la même régle a lieu pour les planettes qui tournent autour du soleil. Ainsi cette régle étant observée assez exactement par toutes les planettes autant que les observations astronomiques ont pu le faire voir jusqu'à présent, elle est une loi de la nature. Or, si les planettes qui tournent autour de Jupiter & du Soleil étoient transportées par des tourbillons, ces tourbillons devroient aussi observer la même loi en tournant. Mais les temps périodiques des particules des tourbillons sont en raison doublée de leurs distances au centre du mouvement : & cette raison ne peut être diminuée & devenir la raison sesquiplée, à moins que la matiere du tourbillon ne soit d'autant plus fluide, qu'elle s'éloigne plus du centre, ou que la résistance, causée par le défaut de lubricité des parties du fluide, n'augmente, par l'augmentation de la vîtesse avec laquelle les parties du fluide sont séparées les unes des autres, dans une plus grande raison que celle dans laquelle cette vîtesse elle-même augmente. Or l'un & l'autre répugne à la raison. Car les parties les plus épaisses & les moins fluides iroient à la circonférence, si elles ne pésoient pas vers le centre; & quoique j'aye supposé pour les démonstrations au commencement de cette section, que la résistance étoit proportionnelle à la vîtesse, il est vraisemblable cependant qu'elle augmente dans une moindre raison que la vîtesse. Ce qui étant accordé, il est certain que les temps périodiques des parties du tourbillon seront dans une plus grande raison que la raison doublée des distances au centre. Que si les tourbillons (comme c'est l'opinion de quelques-uns) se meuvent plus vîte près du centre, & ensuite plus lentement jusqu'à un certain éloignement, & enfin de nouveau plus promptement près de la circonférence; il est certain qu'ils ne pourront observer ni la raison sesquiplée des distances, ni aucune proportion déterminée. C'est donc aux Philosophes à voir comment ils pourront expliquer cette loi de la raison sesquiplée par le moyen des tourbillons.

PROPOSITION LIII. THÉORÊME XLI.

Les corps, qui sont emportés par des tourbillons & dont les orbites rentrent en elles-mêmes, sont de même densité que ces tourbillons, & se meuvent selon la même loi que leurs parties, quant à la vîtesse & à la direction.

Car si quelque petite partie d'un tourbillon, dont les particules ou les points physiques conservent entr'elles une certaine position, est supposée se congeler: comme cette particule ne change, ni quant à sa densité, ni quant à la force imprimée, ni quant à la figure, elle se mouvera par la même loi qu'auparavant: & réciproquement, ſi la partie congelée & ſolide eſt de même denſité que le reſte du tourbillon, & qu'elle ſoit rendue fluide; elle ſe mouvera de la même maniere qu'auparavant, à moins que ſes particules rendues fluides ne ſe mûſſent entr'elles. Négligeant donc ce mouvement des particules entr'elles comme ne contribuant en rien au mouvement progreſſif du tout, le mouvement total ſera le même qu'auparavant. Mais ce mouvement ſera le même que le mouvement des autres parties du tourbillon également éloignées du centre, parce que cette particule ſolide qui eſt devenue fluide devient une partie du tourbillon ſemblable aux autres parties. Donc, ſi cette partie ſolide eſt de la même denſité que la matiere du tourbillon, elle aura le même mouvement que les parties de ce tourbillon, & ſera dans un repos relatif avec la matiere ambiante. Si elle eſt plus denſe, alors elle fera plus d'effort pour s'éloigner du centre du tourbillon qu'elle n'en faiſoit auparavant; ainſi, en ſurpaſſant la force du tourbillon par laquelle cette particule étoit auparavant retenue dans ſon orbite comme en équilibre, elle s'éloignera du centre, & décrira en tournant une ſpirale, & par conſéquent ſon orbite ne reviendra plus ſur elle même. Et par le même raiſonnement, ſi elle eſt moins denſe, elle s'approchera du centre; & par conſéquent l'orbite que décrira cette particule ne reviendra point ſur elle-même, à moins qu'elle ne ſoit de la même denſité que le fluide. Et il a été démontré que dans ce cas elle obſerveroit dans ſa révolution la même loi que les parties du fluide également diſtantes du centre du tourbillon. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Donc, un ſolide qui eſt emporté par un tourbillon, & qui décrit une orbite qui rentre en elle-même, eſt dans un repos relatif avec le fluide dans lequel il nâge.

Cor. 2. Et ſi ce tourbillon eſt d'une denſité uniforme, ce corps pourra faire ſa révolution à une diſtance quelconque du centre du tourbillon.

SCHOLIE.

Fig. 57.

Il eſt donc certain que les planettes ne ſont point tranſportées par des tourbillons de matiere. Car les planettes qui tournent autour du ſoleil, ſelon l'hypotèſe de Copernic, font leurs révolutions dans des ellipſes qui ont le Soleil dans un de leurs foyers, & elles parcourent des aires proportionnelles au temps. Mais les parties d'un tourbillon ne peuvent ſe mouvoir ainſi. Que *AD*, *BE*, *CF* repréſentent trois orbes décrits autour du Soleil *S*, dont le plus extérieur *CF* ſoit concentrique au Soleil, & que les aphélies des deux intérieurs ſoient *A* & *B*, & leurs périhélies *D* & *E*. Le corps qui fait ſa révolution dans l'orbe *CF*, en décrivant des aires proportionnelles au temps, ſe meut d'un mouvement uniforme. Mais le corps qui fait ſa révolution dans l'orbe *BE*, ſe mouvera plus lentement dans l'aphélie *B*, & plus vîte dans le périhélie *E*, ſelon les loix aſtronomiques; cependant, ſelon les loix de la méchanique, la matiere du tourbillon doit ſe mouvoir plus vîte dans l'eſpace plus étroit entre *A* & *C* que dans l'eſpace plus large entre *D* & *F*; c'eſt-à-dire, que le corps révolvant ira plus vîte dans l'aphélie que dans le périhélie. Ce qui eſt contraire l'un à l'autre. Ainſi dans le commencement du ſigne de la Vierge, où Mars commence à être dans ſon aphélie, la diſtance entre les orbes de Mars & de Venus eſt à la diſtance de ces mêmes orbes dans le commencement du ſigne des Poiſſons comme 3 à 2 à peu près, & par conſéquent, la matiere du tourbillon entre ces orbes devroit aller plus vîte dans le commencement des Poiſſons que dans le commencement de la Vierge dans la raiſon de 3 à 2. Car plus l'eſpace par lequel une même quantité de matiere paſſe dans le même temps eſt étroit, & plus elle doit avoir de vîteſſe. Donc, ſi la terre eſt emportée par une matiere céleſte avec laquelle elle ſoit dans un repos relatif, & qu'elle tourne avec cette matiere autour du Soleil, ſa vîteſſe au commencement du ſigne des Poiſſons doit être à ſa vîteſſe au commen-

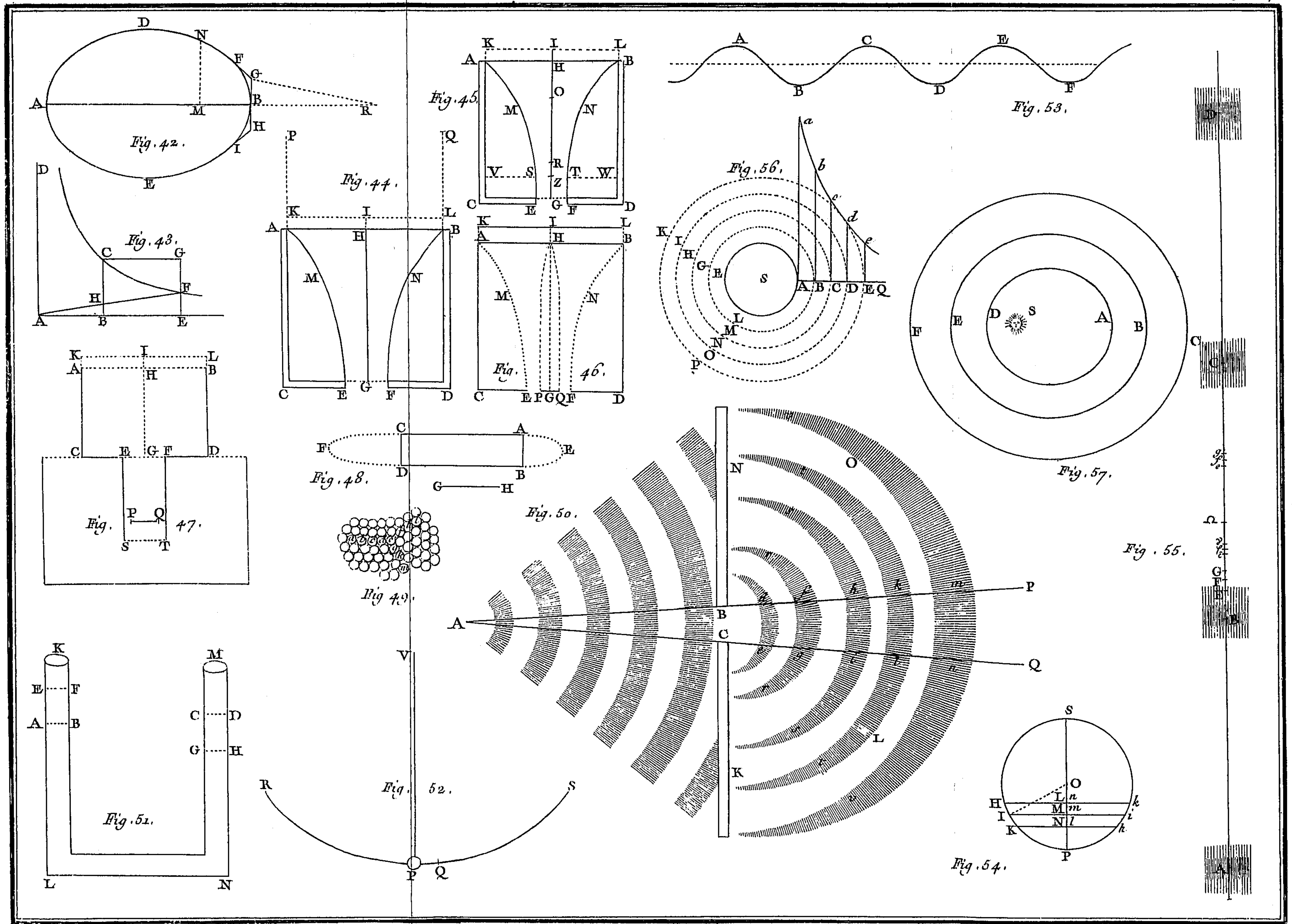


Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.

cement du ſigne de la Vierge en raiſon ſeſquialtere. Donc le mouvement diurne apparent du Soleil devroit être de 70 minutes plus vîte dans le commencement de la Vierge, & plus lent de 48 minutes dans le commencement des Poiſſons. Or, il eſt certain, (par les obſervations) que le mouvement diurne apparent du Soleil eſt plus vîte dans le commencement des Poiſſons que dans le commencement de la Vierge, & que par conſéquent la terre va plus vîte dans le commencement de la Vierge que dans le commencement des Poiſſons. Ainſi l'hypotèſe des tourbillons répugne à tous les phénomènes aſtronomiques, & paroît plus propre à les troubler qu'à les expliquer. Mais on peut comprendre par ce qui a été dit dans le premier livre comment ces mouvemens peuvent s'exécuter ſans tourbillons dans des eſpaces libres. Et cela ſera encore mieux expliqué dans le troiſiéme livre.

FIN DU TOME PREMIER.

TABLE ALPHABÉTIQUE
DES MATIERES

Contenues dans les Principes Mathématiques de la Philoſophie Naturelle.

AVERTISSEMENT.

On a mis à la fin de ce premier Volume la Table générale des Matieres des Principes, quoique leur troiſiéme Livre ſoit contenu dans le ſecond Volume ; ainſi quand on trouvera le troiſiéme Livre indiqué, il faudra recourir à ce ſecond Volume. A l'égard des citations elles doivent s'entendre ainſi, III. *x.* 484 *ſignifient Liv. III. Prop. X. pag.* 484. *Les Prop. ſont marquées en chiffres romains italiques, les pages en chiffres arabes.*

P.

Q.

R.

On

ACHEVÉ D'IMPRIMER
EN FÉVRIER 1990
PAR L'IMPRIMERIE
DE LA MANUTENTION
A MAYENNE
N° 8-90
Dépôt légal : Février 1990

ISBN 2-87647-070-5