LICENCE DE PHYSIQUE — RELATIVITÉ RESTREINTE

EXERCICES

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2023–2024
Intervenants : L. Le Guillou & J. Bolmont (Sorbonne Université / LPNHE)

TD 2

Rappels de mécanique classique — Référentiels non-galiléens : composition des vitesses et des accélérations — Forces inertielles : force d'entraînement, force de Coriolis — Dynamique terrestre : champ de pesanteur, déviation vers l'Est, pendule de Foucault.

1. Référentiels non-galiléens en mécanique classique

Pour tout cet exercice, on considérera deux référentiels : le référentiel $\mathcal{R}$, inertiel (ou galiléen), muni d'un repère orthonormé direct $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$; et le référentiel $\mathcal{R}'$, en mouvement quelconque par rapport à $\mathcal{R}$, et par conséquent, non galiléen. On munit le référentiel $\mathcal{R}'$ d'un repère $(O', \mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z)$.

Préambule : dérivation d'un vecteur dans une base tournante

Cas particulier d'une rotation autour de $\mathbf{e}_z$. Supposons que le trièdre formé par les vecteurs unitaires de la base $\{\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z\}$ soit en rotation par rapport au trièdre $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$, et que cette rotation s'effectue autour de l'axe Oz. Cette rotation ne s'effectue pas nécessairement à vitesse angulaire constante. on appellera $\theta(t)$ l'angle formé par les vecteurs $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}'_x$; cet angle varie au cours du temps. Dans cette configuration particulière, les vecteurs $\mathbf{e}_z$ et $\mathbf{e}'_z$ sont confondus, et le mouvement de rotation s'effectue dans le plan $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$.

1.1 — Donnez l'expression des vecteurs de base $\mathbf{e}'_x$ et $\mathbf{e}'_y$ en fonction de $\theta(t)$, $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_y$. Déduisez-en l'expression des dérivées des vecteurs $\mathbf{e}'_x$ et $\mathbf{e}'_y$ en fonction du temps.

On notera $\boldsymbol{\omega}$ le vecteur *vitesse angulaire* de rotation, défini par :

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{e}_z = \dot{\theta}\,\mathbf{e}_z = \omega\,\mathbf{e}_z$$

La norme du vecteur $\boldsymbol{\omega}$ est ainsi la vitesse angulaire de rotation instantanée de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$, sa direction est celle de l'axe de rotation (ici, selon z), et par convention, ω sera positif si la rotation a lieu dans le sens trigonométrique, et négatif dans le cas contraire.

1.2 — Montrez que les dérivées des vecteurs $\mathbf{e}'_x$ et $\mathbf{e}'_y$ peuvent s'écrire, dans le référentiel $\mathcal{R}$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}'_x}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_x \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}'_y}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_y$$

où on note $\times$ le produit vectoriel de deux vecteurs.

Cas d'une rotation d'axe quelconque. On admettra que le résultat précédent se généralise quelle que soit la direction de l'axe de rotation entre les trièdres des deux bases. Ainsi, si $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ est le vecteur vitesse angulaire (instantané) décrivant la rotation de la base $\{\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z\}$ de $\mathcal{R}'$ par rapport à la base $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}'_z\}$ de $\mathcal{R}$, les dérivées temporelles des vecteurs de la base en rotation s'écriront de même :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}'_x}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_x \qquad \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}'_y}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_y \qquad \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}'_z}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_z$$

1.3 — Considérons dans le référentiel $\mathcal{R}$ un vecteur quelconque $\mathbf{U}$,

$$\mathbf{U} = U_x\,\mathbf{e}_x + U_y\,\mathbf{e}_y + U_z\,\mathbf{e}_z$$

où (U_x, U_y, U_z) sont les composantes de $\mathbf{U}$ dans la base $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ fixe dans $\mathcal{R}$. Exprimez la dérivée de $\mathbf{U}$ par rapport au temps $(\mathrm{d}\mathbf{U}/\mathrm{d}t)_{\mathcal{R}}$ dans $\mathcal{R}$.

1.4 — Faites de même dans $\mathcal{R}'$, et montrez que la dérivée $(\mathrm{d}\mathbf{U}/\mathrm{d}t)_{\mathcal{R}'}$ du vecteur $\mathbf{U}$ dans $\mathcal{R}'$ vérifie (relation de Varignon) :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{U} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{U}$$

Vitesse d'un point matériel dans les deux référentiels

1.5 — Considérons un point matériel M en mouvement quelconque. On repère sa position à chaque instant dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ respectivement par les vecteurs positions $\mathbf{r}(t)$ et $\mathbf{r'}(t)$:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{OM} : (x(t), y(t), z(t)) \qquad \mathbf{r'}(t) = \mathbf{O'M} : \big(x'(t), y'(t), z'(t)\big)$$

En utilisant le résultant précédent, montrez que la vitesse instantanée $\mathbf{u}(t)$ du point M mesurée dans le référentiel $\mathcal{R}$ est liée à la vitesse instantanée $\mathbf{u}'(t)$ de M dans $\mathcal{R}'$ par la relation :

$$\mathbf{u}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{OO'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{O'M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{O'M} = \mathbf{v}_{O'/\mathcal{R}} + \mathbf{u}'(t) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O'M}$$

On désigne parfois le terme $\mathbf{v}_{O'/\mathcal{R}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O'M}$ comme étant ***la vitesse d'entraînement*** du point M par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ (notée $\mathbf{v}_{\mathrm{e}}$ ou $\mathbf{v}_{\mathrm{e}/\mathcal{R}}$).

1.6 — Montrer qu'on se ramène à la règle d'addition des vitesses pour les référentiels galiléens si $\mathbf{v}_{O'/\mathcal{R}}$ est constante et s'il n'y a pas de rotation.

Accélération d'un point matériel dans les deux référentiels

1.7 — En procédant comme précédemment, montrez que l'accélération $\mathbf{a}(t)$ du point matériel M mesurée dans $\mathcal{R}$ inertiel peut être reliée à son accélération $\mathbf{a}'(t)$ mesurée dans $\mathcal{R}'$ (référentiel quelconque, non galiléen) par la relation :

$$\mathbf{a}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}} = \mathbf{a}'(t) + \mathbf{a}_{\mathrm{e}} + \mathbf{a}_{\mathrm{c}} \qquad \text{où} \quad \mathbf{a}'(t) = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{O'M}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}'}$$

et où les termes d'accélération supplémentaires sont ***l'accélération d'entraînement*** a_{e} et ***l'accélération de Coriolis*** a_{c} qui s'écrivent respectivement :

$$\mathbf{a}_{\mathrm{e}} = \mathbf{a}_{\mathrm{e}/\mathcal{R}} = \mathbf{a}(O'/\mathcal{R}) + \boldsymbol{\omega} \times \big(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O'M}\big) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{O'M}$$

$$\mathbf{a}_{\mathrm{c}} = 2\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}'$$

Forces ou pseudo-forces inertielles

Si le référentiel $\mathcal{R}$ est inertiel/galiléen, la seconde loi de Newton ("RFD") y est valide, et pour un objet matériel quelconque de masse m dont la position est repérée par $\mathbf{r}(t) = \mathbf{OM}$, on aura :

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = m\,\mathbf{a} \qquad \text{avec l'accélération} \quad \mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

où $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}}$ est la somme des forces extérieures qui s'exercent sur l'objet considéré.

1.8 — En utilisant le résultat précédent sur l'accélération, donnez la relation entre la somme des forces qui s'exercent sur l'objet et son accélération mesurée dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$. Montrez qu'on peut mettre cette relation sous la forme :

$$m\,\mathbf{a}' = m\,\mathbf{a} - m\,\mathbf{a}_{\text{e}} - m\,\mathbf{a}_{\text{c}} \qquad \text{soit} \quad m\,\mathbf{a}' = \sum \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_{\text{e}} + \mathbf{F}_{\text{c}}$$

où $\mathbf{F}_{\text{e}} = -m\,\mathbf{a}_{\text{e}}$ est la force (ou pseudo-force) inertielle d'entraînement, et $\mathbf{F}_{\text{c}} = -m\,\mathbf{a}_{\text{c}}$ la force (ou pseudo-force) inertielle de Coriolis.

1.9 — Cas d'un mouvement relatif de translation uniformément accéléré. Si on suppose que le référentiel $\mathcal{R}'$ est en translation, mais à accélération constante, par rapport à $\mathcal{R}$, montrez comment se simplifient dans ce cas les équations précédentes. Application : dans une voiture qui accélère, décrivez qualitativement la force d'entraînement subie par les passagers. Faites de même lorsque la voiture freine.

1.10 — Cas d'un mouvement de rotation à vitesse constante. On considère maintenant que les origines de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ se confondent, et que le référentiel $\mathcal{R}'$ est en rotation à vitesse ω constante (par exemple, en choisissant les axes de telle sorte que $\boldsymbol{\omega} = \omega\,\mathbf{e}_z = \omega\,\mathbf{e}'_z$). Donnez l'expression de la vitesse d'un point matériel M dans les deux référentiels. Écrivez de même l'expression de son accélération, mesurée dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Quelle forme prend la force inertielle d'entraînement dans ce cas ? Comment est-elle orientée ? Faites un schéma. Que reconnaissez-vous ?

2. L'ascenseur

On considère une cabine d'ascenseur dans laquelle un observateur étudie le mouvement d'un objet de masse m suspendue à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Comme c'est souvent le cas, cette cabine d'ascenseur ne possède aucune fenêtre.

Ascenseur immobile dans un champ de gravitation

Dans un premier temps, la cabine suspendue à son câble et la masse m sont immobiles, sur Terre, dont l'accélération de pesanteur est notée g. L'expérience étant de courte durée, le référentiel terrestre est considéré comme inertiel.

2.1 — Effectuez le bilan des forces qui s'exercent sur la masse m et dessinez un schéma de l'expérience.

2.2 — Déduisez-en l'expression de l'allongement du ressort, c'est-à-dire la quantité $\Delta\ell = \ell - \ell_0 > 0$.

Ascenseur tracté par un vaisseau spatial en mouvement à accélération constante

Cette fois, on suppose que la cabine d'ascenseur (pressurisée) et tout son contenu sont tractés *hors de tout champ de gravitation* par un vaisseau spatial possédant un mouvement uniformément accéléré. L'accélération du vaisseau, et donc celle de la cabine, est appliquée par le même câble qui sert à la faire descendre ou monter dans la cage d'ascenseur.

2.3 — En supposant que l'accélération est imposée depuis suffisamment longtemps pour que la masse m soit à l'équilibre, effectuez le bilan des forces qui s'exercent sur la masse et dessiner un schéma de l'expérience. On notera a le module de l'accélération de la cabine.

2.4 — En déduire l'expression de l'allongement du ressort, c'est-à-dire la quantité $\Delta\ell = \ell - \ell_0$.

2.5 — Le pilote ajuste l'accélération de son vaisseau de telle sorte que $a = g$. L'observateur dans l'ascenseur peut-il faire la différence entre la situation de la question 1 et celle de la question 2 avec les moyens dont il dispose ? Commentez.

3. Dynamique terrestre

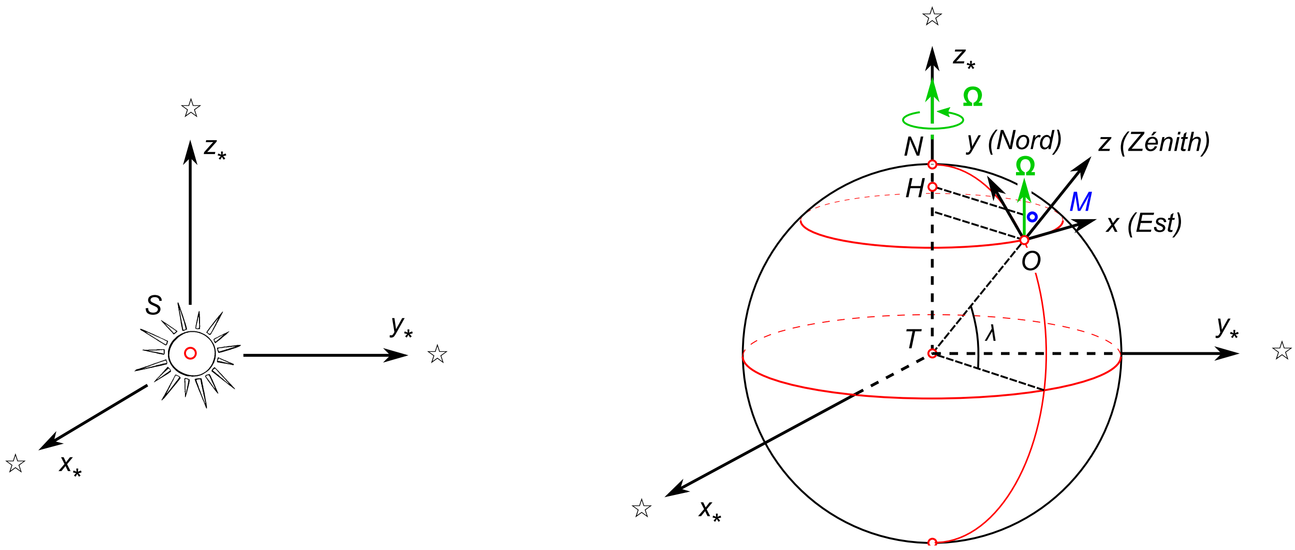

Fig. 1 – À gauche : référentiel de Copernic $\mathcal{R}_0$ de repère $(S, x_\star, y_\star, z_\star)$, dont l'origine est le centre de gravité S du système solaire, et dont les axes sont définis par trois étoiles éloignées (ou plutôt aujourd'hui, par un ensemble de quasars). À droite : le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$ de repère $(T, x_\star, y_\star, z_\star)$, dont l'origine est le centre T de la terre, et dont les axes sont définis par les étoiles ; on a aussi représenté le référentiel terrestre local $\mathcal{R}_{\text{local}}$ au point O, muni d'un repère (O, x, y, z) avec Ox dirigé vers l'Est, Oy vers le Nord, et Oz selon la verticale du lieu. Pour une expérience de courte durée (comparée à la période de révolution de la Terre autour du Soleil), le référentiel géocentrique peut être considéré comme galiléen ; le référentiel de Copernic est une meilleure approximation d'un référentiel galiléen.

La Terre est en rotation sur elle-même : sa période de révolution par rapport aux étoiles, autrement dit le temps nécessaire pour que localement, une étoile donnée repasse à la même position dans le ciel, vaut $T_\star = 23\,\text{h}\,56\,\text{min}\,04\,\text{s}$, durée aussi baptisée "jour sidéral". Ce qu'on appelle usuellement "un jour" est le "jour solaire", le temps qui s'écoule entre deux passages du soleil au méridien local, et sa durée moyenne au cours de l'année vaut $24\,\text{h} = 86400\,\text{s}$ (elle varie au cours de l'année car la trajectoire de la Terre autour du Soleil est légèrement elliptique).

3.1 — Déduisez-en la vitesse angulaire de rotation $\Omega_\oplus$ de la Terre dans le référentiel géocentrique, dont les axes sont liés aux étoiles.

Gravitation et champ de pesanteur

Le *champ de pesanteur* $\mathbf{g}$ ressenti à la surface de la Terre est la conséquence de l'attraction gravitationnelle exercée par la planète, de l'attraction exercée par les autres astres (notamment le Soleil et la Lune, responsables des forces de marée), et de la force centrifuge due à la rotation de la Terre sur elle-même. Dans la suite, on négligera les forces de marée. Le but de cet exercice est d'analyser le sens physique du *champ de pesanteur* $\mathbf{g}$ et de ce qu'on désigne usuellement comme le *poids* $\mathbf{P} = m\,\mathbf{g}$ des objets.

3.2 — En un lieu à la surface terrestre de latitude λ, on considère un objet immobile (par exemple, un corps M de masse m suspendu à un fil). Écrivez l'expression générale de l'accélération $\mathbf{a}_{/\mathcal{R}_{\text{local}}}$ de cet objet dans le référentiel $\mathcal{R}_{\text{local}}$ muni d'un repère (O, x, y, z) (fig. 1). Explicitez le terme d'accélération d'entraînement. Donnez son expression en fonction de la latitude du lieu.

3.3 — On appelle "poids" de l'objet la somme des forces de gravitation et de la force centrifuge qui s'exercent sur l'objet. Écrivez l'expression du poids $\mathbf{P}$. En posant $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, déduisez-en l'expression du "champ de pesanteur" $\mathbf{g}$. C'est ce champ de pesanteur $\mathbf{g}$ qui définit la "verticale" d'un lieu (principe même du fil à plomb).

3.4 — Estimez numériquement la norme de la force centrifuge. Comparez-là à celle de $\mathbf{g}$. En supposant la Terre sphérique, donnez l'expression de l'angle que fait $\mathbf{g}$ avec la direction du centre de la Terre. Que se passe-t-il aux pôles ? à l'équateur ? à Paris (latitude $\lambda = 48^{\text{o}}\,51'$ Nord) ?

Données : $\mathcal{G} = 6.67430(15) \times 10^{-11}\,\text{m}^3\,\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ $\quad M_\oplus = 5.9722 \times 10^{24}\,\text{kg}$ $\quad g_{\text{Paris}} = 9.812\,\text{ms}^{-2}$
$R_\oplus = 6371\,\text{km}$ (rayon moyen volumétrique).

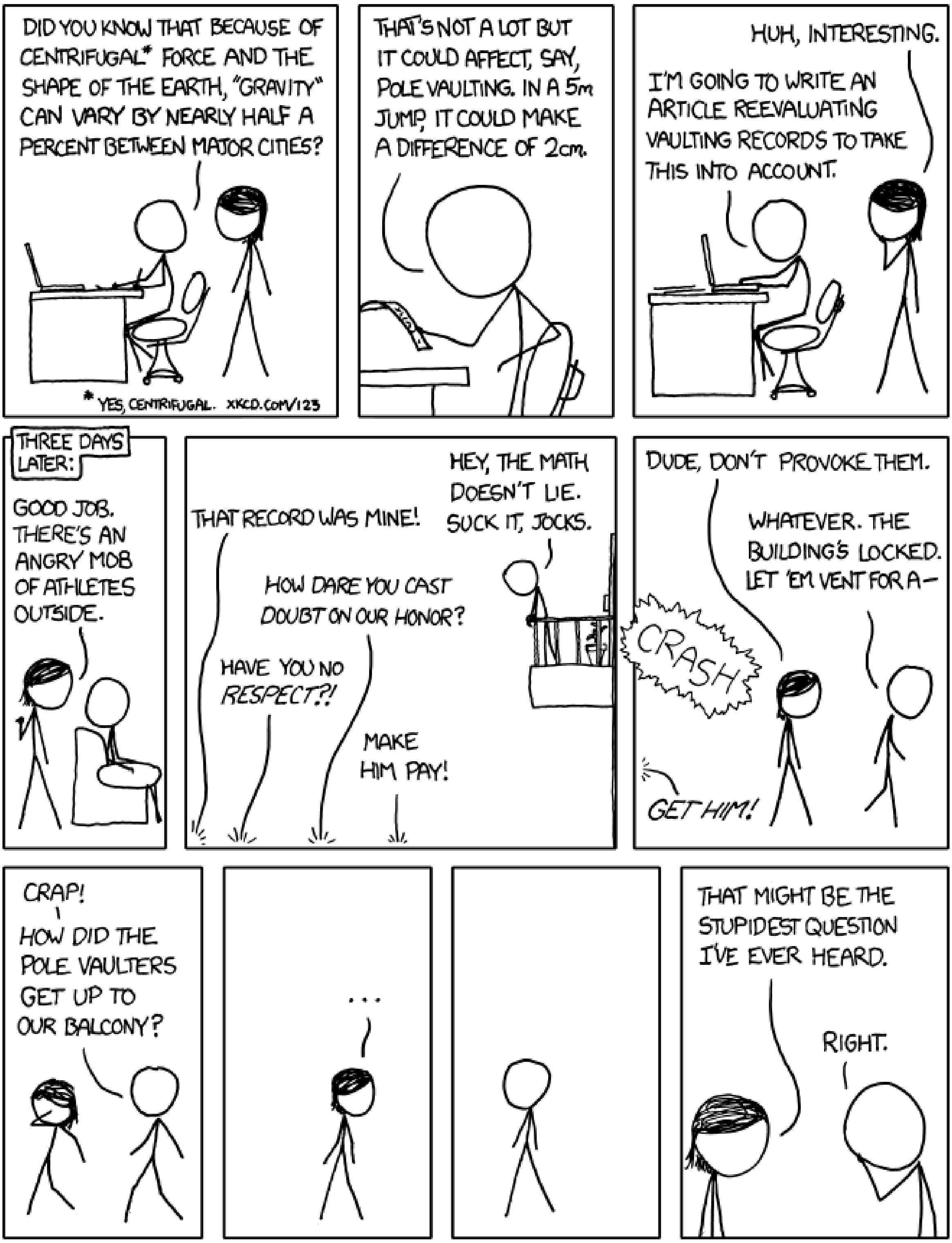

Fig. 2 – XKCD : "Local g" (Voir `https://xkcd.com/852/`*)*

Chute d'un objet dans un puits : déviation vers l'Est

On laisse tomber une bille d'acier en chute libre dans un puits de mine très profond. On négligera les forces de frottement de l'air.

3.5 — Dans le référentiel local (on prendra le point de départ à la surface comme origine des coordonnées, et l'axe Oz selon la *verticale locale* définie par exemple par la direction d'un fil à plomb), écrivez le bilan des forces qui s'exercent sur l'objet. Pensez à inclure les éventuelles forces inertielles. Attention : par définition du champ de pesanteur (voir plus haut), g contient déjà la composante d'accélération centrifuge.

3.6 — Déduisez-en les équations du mouvement.

3.7 — Quelle serait la solution des équations du mouvement si on négligeait la force de Coriolis ?

3.8 — En considérant que les vitesses dans le plan horizontal sont faibles, les termes en $\Omega_\oplus \dot{x}$ et $\Omega_\oplus \dot{y}$ sont petits et peuvent être négligés ; donnez alors une expression approchée de la trajectoire. Si la profondeur du puits est h, au bout de combien de temps la bille atteint-elle le fond du puits ? Quelle est alors la position x de la bille ?

3.9 — La première mise en évidence de l'effet est due à F. Reich en 1831, dans un puits de mine de 158 m de profondeur. En 1903, C. Flammarion a refait l'expérience en laissant tomber des billes d'acier du haut de la coupole du Panthéon ($h = 68\,\mathrm{m}$). Estimez la déviation dans ce cas. C. Flammarion trouve 7.6 mm : comparez avec votre calcul.

Pendule de Foucault

Considérons un pendule, constitué d'une masse m parfaitement symétrique attachée à un long câble de longueur ℓ. On met ce pendule en mouvement, et on étudie soigneusement sa trajectoire pour de petites oscillations.

3.10 — Quelle est la période T_{osc} d'oscillation du pendule ? Application numérique ($m = 30\,\mathrm{kg}$, $\ell = 67\,\mathrm{m}$).

3.11 — Écrivez le bilan des forces dans le référentiel terrestre local.

3.12 — Le comportement du pendule est plus simple à appréhender si on se place au pôle Nord terrestre. Dans ce cas particulier, décrivez qualitativement l'effet de la force de Coriolis pendant les trajectoires aller et retour du pendule au cours d'une période d'oscillation. Faites un schéma.

3.13 — Toujours en supposant le pendule installé au pôle Nord, décrivez la trajectoire attendue du pendule dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$ (axes définis par les étoiles). Déduisez-en le comportement et la période de rotation du plan d'oscillation du pendule dans le référentiel local, au pôle Nord. Montrez que la période de rotation du plan du pendule s'écrit simplement :

$$T_{\mathrm{p}} = \frac{2\pi}{\Omega_\oplus}$$

où $\Omega_\oplus$ est la vitesse angulaire de rotation de la Terre dans le référentiel lié aux étoiles.

3.14 — Si on se place à Paris (latitude $\lambda = +48^{\mathrm{o}}\,51'$), quelle composante de $\mathbf{\Omega}_\oplus$ contribue à faire tourner le plan du pendule ? Déduisez-en la période de rotation du plan d'oscillation du pendule à Paris.

3.15 — Allez au Panthéon (ou bien au Conservatoire National des Arts et Métiers), pour observer vous-même la rotation du pendule de Foucault ; estimez la période de rotation, et vérifiez que la Terre tourne.

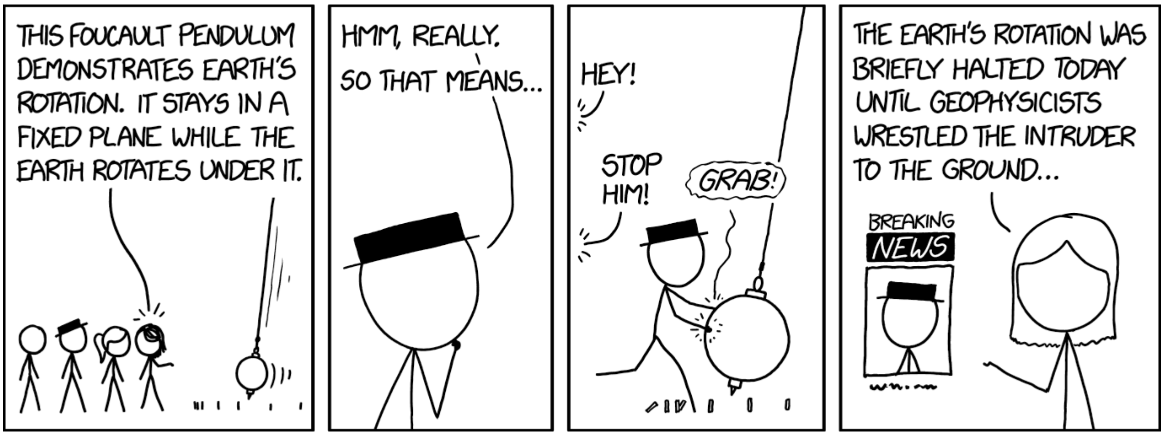

Fig. 3 – XKCD : "Foucault pendulum" (Voir https://xkcd.com/2201/*)*