

EXERCICES — CORRIGÉ

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2024–2025

Intervenants : L. Le Guillou & J. Bolmont (Sorbonne Université / LPNHE)

TD 2

Rappels de mécanique classique — Référentiels non-galiléens : composition des vitesses et des accélérations — Forces inertielles : force d'entraînement, force de Coriolis — Dynamique terrestre : champ de pesanteur, déviation vers l'Est, pendule de Foucault.

1. Référentiels non-galiléens en mécanique classique

Pour tout cet exercice, on considérera deux référentiels : le référentiel \mathcal{R} , inertiel (ou galiléen), muni d'un repère orthonormé direct $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$; et le référentiel \mathcal{R}' , en mouvement quelconque par rapport à \mathcal{R} , et par conséquent, non galiléen. On munit le référentiel \mathcal{R}' d'un repère $(O', \mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z)$.

Préambule : dérivation d'un vecteur dans une base tournante

Cas particulier d'une rotation autour de \mathbf{e}_z . Supposons que le trièdre formé par les vecteurs unitaires de la base $\{\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z\}$ soit en rotation par rapport au trièdre $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$, et que cette rotation s'effectue autour de l'axe Oz . Cette rotation ne s'effectue pas nécessairement à vitesse angulaire constante. on appellera $\theta(t)$ l'angle formé par les vecteurs \mathbf{e}_x et \mathbf{e}'_x ; cet angle varie au cours du temps. Dans cette configuration particulière, les vecteurs \mathbf{e}_z et \mathbf{e}'_z sont confondus, et le mouvement de rotation s'effectue dans le plan $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$.

1.1 — Donnez l'expression des vecteurs de base \mathbf{e}'_x et \mathbf{e}'_y en fonction de $\theta(t)$, \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y . Déduisez-en l'expression des dérivées des vecteurs \mathbf{e}'_x et \mathbf{e}'_y en fonction du temps.

Si θ est l'angle $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}'_x)$, on peut décomposer les vecteurs \mathbf{e}'_x et \mathbf{e}'_y sur la base $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$,

$$\mathbf{e}'_x = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y \quad \mathbf{e}'_y = -\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y$$

Si l'angle θ dépend du temps, la dérivation des vecteurs \mathbf{e}'_x et \mathbf{e}'_y par rapport au temps dans le référentiel \mathcal{R} s'écrit :

$$\left(\frac{d\mathbf{e}'_x}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = -\dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}_x + \dot{\theta} \cos \theta \mathbf{e}_y = \dot{\theta} \mathbf{e}'_y = \omega \mathbf{e}'_y.$$

De même,

$$\left(\frac{d\mathbf{e}'_y}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = -\dot{\theta} \cos \theta \mathbf{e}_x - \dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}_y = -\dot{\theta} \mathbf{e}'_x = -\omega \mathbf{e}'_x.$$

où on note $\omega = \dot{\theta}$ la dérivée de θ par rapport au temps (vitesse angulaire instantanée).

On notera $\boldsymbol{\omega}$ le vecteur *vitesse angulaire* de rotation, défini par :

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_z = \dot{\theta} \mathbf{e}_z = \omega \mathbf{e}_z$$

La norme du vecteur $\boldsymbol{\omega}$ est ainsi la vitesse angulaire de rotation instantanée de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} , sa direction est celle de l'axe de rotation (ici, selon z), et par convention, ω sera positif si la rotation a lieu dans le sens trigonométrique, et négatif dans le cas contraire.

1.2 — Montrez que les dérivées des vecteurs \mathbf{e}'_x et \mathbf{e}'_y peuvent s'écrire, dans le référentiel \mathcal{R} :

$$\left(\frac{d\mathbf{e}'_x}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_x \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\mathbf{e}'_y}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_y$$

où on note \times le produit vectoriel de deux vecteurs.

La vérification est immédiate (ici, dans le cas particulier considéré, $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}'_z$) :

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_x = \omega \mathbf{e}'_z \times \mathbf{e}'_x = \omega \mathbf{e}'_y = \left(\frac{d\mathbf{e}'_x}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_y = \omega \mathbf{e}'_z \times \mathbf{e}'_y = -\omega \mathbf{e}'_x = \left(\frac{d\mathbf{e}'_y}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$$

Cas d'une rotation d'axe quelconque. On admettra que le résultat précédent se généralise quelle que soit la direction de l'axe de rotation entre les trièdres des deux bases. Ainsi, si $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ est le vecteur vitesse angulaire (instantané) décrivant la rotation de la base $\{\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z\}$ de \mathcal{R}' par rapport à la base $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ de \mathcal{R} , les dérivées temporelles des vecteurs de la base en rotation s'écriront de même :

$$\left(\frac{d\mathbf{e}'_x}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_x \quad \left(\frac{d\mathbf{e}'_y}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_y \quad \left(\frac{d\mathbf{e}'_z}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_z$$

1.3 — Considérons dans le référentiel \mathcal{R} un vecteur quelconque \mathbf{U} ,

$$\mathbf{U} = U_x \mathbf{e}_x + U_y \mathbf{e}_y + U_z \mathbf{e}_z$$

où (U_x, U_y, U_z) sont les composantes de \mathbf{U} dans la base $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ fixe dans \mathcal{R} . Exprimez la dérivée de \mathbf{U} par rapport au temps $(d\mathbf{U}/dt)_{\mathcal{R}}$ dans \mathcal{R} .

Comme dans \mathcal{R} la base $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ est fixe et donc indépendante du temps, la dérivée temporelle du vecteur \mathbf{U} s'écrit :

$$\left(\frac{d\mathbf{U}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \frac{dU_x}{dt} \mathbf{e}_x + \frac{dU_y}{dt} \mathbf{e}_y + \frac{dU_z}{dt} \mathbf{e}_z = \dot{U}_x \mathbf{e}_x + \dot{U}_y \mathbf{e}_y + \dot{U}_z \mathbf{e}_z.$$

1.4 — Faites de même dans \mathcal{R}' , et montrez que la dérivée $(d\mathbf{U}/dt)_{\mathcal{R}'}$ du vecteur \mathbf{U} dans \mathcal{R}' vérifie (relation de Varignon) :

$$\left(\frac{d\mathbf{U}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\mathbf{U}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{U} = \left(\frac{d\mathbf{U}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{U}$$

Si on décompose le vecteur \mathbf{U} sur la base $\{\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z\}$, Comme précédemment, mais cette fois dans le référentiel \mathcal{R}' , ses composantes s'écriront :

$$\mathbf{U} = U'_x \mathbf{e}'_x + U'_y \mathbf{e}'_y + U'_z \mathbf{e}'_z. \quad (1)$$

et la dérivée de \mathbf{U} dans \mathcal{R}' s'écrira de même :

$$\left(\frac{d\mathbf{U}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} = \frac{dU'_x}{dt} \mathbf{e}'_x + \frac{dU'_y}{dt} \mathbf{e}'_y + \frac{dU'_z}{dt} \mathbf{e}'_z$$

Si on dérive maintenant l'expression (1) dans \mathcal{R} , où la base $\{\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z\}$ tourne, on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{U}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} &= \frac{dU'_x}{dt} \mathbf{e}'_x + U'_x \left(\frac{d\mathbf{e}'_x}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \frac{dU'_y}{dt} \mathbf{e}'_y + U'_y \left(\frac{d\mathbf{e}'_y}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \frac{dU'_z}{dt} \mathbf{e}'_z + U'_z \left(\frac{d\mathbf{e}'_z}{dt}\right)_{\mathcal{R}} \\ &= \frac{dU'_x}{dt} \mathbf{e}'_x + \frac{dU'_y}{dt} \mathbf{e}'_y + \frac{dU'_z}{dt} \mathbf{e}'_z + U'_x \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_x + U'_y \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_y + U'_z \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_z \end{aligned}$$

où on reconnaît :

$$\left(\frac{d\mathbf{U}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\mathbf{U}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{U} = \left(\frac{d\mathbf{U}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{U}.$$

Vitesse d'un point matériel dans les deux référentiels

1.5 — Considérons un point matériel M en mouvement quelconque. On repère sa position à chaque instant dans les référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' respectivement par les vecteurs positions $\mathbf{r}(t)$ et $\mathbf{r}'(t)$:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{O}\mathbf{M} : (x(t), y(t), z(t)) \quad \mathbf{r}'(t) = \mathbf{O}'\mathbf{M} : (x'(t), y'(t), z'(t))$$

En utilisant le résultant précédent, montrez que la vitesse instantanée $\mathbf{u}(t)$ du point M mesurée dans le référentiel \mathcal{R} est liée à la vitesse instantanée $\mathbf{u}'(t)$ de M dans \mathcal{R}' par la relation :

$$\mathbf{u}(t) = \left(\frac{d\mathbf{O}\mathbf{M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\mathbf{O}\mathbf{O}'}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{d\mathbf{O}'\mathbf{M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{O}'\mathbf{M} = \mathbf{v}_{\mathbf{O}'/\mathcal{R}} + \mathbf{u}'(t) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O}'\mathbf{M}$$

On désigne parfois le terme $\mathbf{v}_{\mathbf{O}'/\mathcal{R}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O}'\mathbf{M}$ comme étant **la vitesse d'entraînement** du point M par rapport au référentiel \mathcal{R} (notée \mathbf{v}_e ou $\mathbf{v}_{e/\mathcal{R}}$).

En dérivant dans \mathcal{R} l'expression vectorielle $\mathbf{O}\mathbf{M} = \mathbf{O}\mathbf{O}' + \mathbf{O}'\mathbf{M}$, on obtient immédiatement, en appliquant la relation de Varignon :

$$\mathbf{u}(t) = \left(\frac{d\mathbf{O}\mathbf{M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\mathbf{O}\mathbf{O}'}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{d\mathbf{O}'\mathbf{M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} = \left(\frac{d\mathbf{O}\mathbf{O}'}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{d\mathbf{O}'\mathbf{M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{O}'\mathbf{M}$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}_{\mathbf{O}'/\mathcal{R}} + \mathbf{u}'(t) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O}'\mathbf{M}.$$

Cette relation est la loi de composition des vitesses pour le cas d'un référentiel \mathcal{R}' non galiléen.

1.6 — Montrer qu'on se ramène à la règle d'addition des vitesses pour les référentiels galiléens si $\mathbf{v}_{\mathbf{O}'/\mathcal{R}}$ est constante et s'il n'y a pas de rotation. En l'absence de toute rotation de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} , $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \mathbf{0}$, et le résultat précédent se réduit à

$$\mathbf{u}(t) = \left(\frac{d\mathbf{O}\mathbf{M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}_{\mathbf{O}'/\mathcal{R}}$$

si de plus la vitesse relative $\mathbf{v}_{\mathbf{O}'/\mathcal{R}}$ est constante, on retrouve la loi de composition des vitesses entre référentiels galiléens.

Accélération d'un point matériel dans les deux référentiels

1.7 — En procédant comme précédemment, montrez que l'accélération $\mathbf{a}(t)$ du point matériel M mesurée dans \mathcal{R} inertiel peut être reliée à son accélération $\mathbf{a}'(t)$ mesurée dans \mathcal{R}' (référentiel quelconque, non galiléen) par la relation :

$$\mathbf{a}(t) = \left(\frac{d^2 \mathbf{OM}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}} = \mathbf{a}'(t) + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c \quad \text{où} \quad \mathbf{a}'(t) = \left(\frac{d^2 \mathbf{O'M}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}'}$$

et où les termes d'accélération supplémentaires sont l'**accélération d'entraînement** \mathbf{a}_e et l'**accélération de Coriolis** \mathbf{a}_c qui s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_e &= \mathbf{a}_{e/\mathcal{R}} = \mathbf{a}(O'/\mathcal{R}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O'M}) + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{O'M} \\ \mathbf{a}_c &= 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}' \end{aligned}$$

L'accélération du point matériel considéré, mesurée dans le référentiel \mathcal{R} , peut s'écrire :

$$\mathbf{a}(t) = \left(\frac{d^2 \mathbf{OM}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}.$$

En utilisant la loi de composition des vitesses établie précédemment, on obtient :

$$\mathbf{a}(t) = \left(\frac{d^2 \mathbf{OM}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\mathbf{v}_{O'/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{d\mathbf{u}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \times \mathbf{O'M} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\mathbf{O'M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}.$$

De manière immédiate, $(d\boldsymbol{\omega}/dt)_{\mathcal{R}} = (d\boldsymbol{\omega}/dt)_{\mathcal{R}'} = d\boldsymbol{\omega}/dt$. En utilisant la relation de Varignon, l'expression précédente devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \left(\frac{d\mathbf{v}_{O'/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{d\mathbf{u}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}' + \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \times \mathbf{O'M} + \boldsymbol{\omega} \times \left[\left(\frac{d\mathbf{O'M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O'M} \right] \\ \mathbf{a}(t) &= \mathbf{a}_{O'/\mathcal{R}} + \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}' + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{O'M} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O'M}) \end{aligned}$$

Ce qui, en regroupant les termes, donne :

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}'(t) + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c \quad \text{où} \quad \mathbf{a}'(t) = \left(\frac{d^2 \mathbf{O'M}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}'}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_e &= \mathbf{a}_{e/\mathcal{R}} = \mathbf{a}(O'/\mathcal{R}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O'M}) + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{O'M} \\ \mathbf{a}_c &= 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}' \end{aligned}$$

Forces ou pseudo-forces inertielles

Si le référentiel \mathcal{R} est inertiel/galiléen, la seconde loi de Newton ("RFD") y est valide, et pour un objet matériel quelconque de masse m dont la position est repérée par $\mathbf{r}(t) = \mathbf{OM}$, on aura :

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = m \mathbf{a} \quad \text{avec l'accélération} \quad \mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$$

où $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}}$ est la somme des forces extérieures qui s'exercent sur l'objet considéré.

1.8 — En utilisant le résultat précédent sur l'accélération, donnez la relation entre la somme des forces qui s'exercent sur l'objet et son accélération mesurée dans le référentiel non galiléen \mathcal{R}' . Montrez qu'on peut mettre cette relation sous la forme :

$$m \mathbf{a}' = m \mathbf{a} - m \mathbf{a}_e - m \mathbf{a}_c \quad \text{soit} \quad m \mathbf{a}' = \sum \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_c$$

où $\mathbf{F}_e = -m \mathbf{a}_e$ est la force (ou pseudo-force) inertielle d'entraînement, et $\mathbf{F}_c = -m \mathbf{a}_c$ la force (ou pseudo-force) inertielle de Coriolis.

Dans le référentiel galiléen \mathcal{R} , la seconde loi de Newton est vérifiée, et on a :

$$m \mathbf{a} = \sum \mathbf{F}_{\text{ext}}.$$

où \mathbf{a} est l'accélération de l'objet étudié mesurée dans \mathcal{R} . Par ailleurs, on a établi que l'accélération du même objet mesurée dans \mathcal{R}' , \mathbf{a}' , vérifie :

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}'(t) + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c$$

Et par conséquent,

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = m \mathbf{a}(t) = m \mathbf{a}'(t) + m \mathbf{a}_e + m \mathbf{a}_c \quad \text{soit} \quad m \mathbf{a}'(t) = \sum \mathbf{F}_{\text{ext}} - m \mathbf{a}_e - m \mathbf{a}_c$$

Ce qu'on peut encore écrire :

$$m \mathbf{a}' = \sum \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_c$$

où $\mathbf{F}_e = -m \mathbf{a}_e$ est la force (ou pseudo-force) inertielle d'entraînement, et $\mathbf{F}_c = -m \mathbf{a}_c$ la force (ou pseudo-force) inertielle de Coriolis. Ces forces, dites *inertielles*, apparaissent parce que le référentiel \mathcal{R}' n'est pas galiléen/inertiel.

On constate ainsi qu'il est possible de conserver la forme générale de la seconde loi de Newton même dans les référentiels non galiléens, à condition d'ajouter ces forces ou pseudo-forces supplémentaires au bilan des forces.

1.9 — **Cas d'un mouvement relatif de translation uniformément accéléré.** Si on suppose que le référentiel \mathcal{R}' est en translation, mais à accélération constante, par rapport à \mathcal{R} , montrez comment se simplifient dans ce cas les équations précédentes. Application : dans une voiture qui accélère, décrivez qualitativement la force d'entraînement subie par les passagers. Faites de même lorsque la voiture freine.

Dans le cas d'un mouvement relatif de translation, $\boldsymbol{\omega} = 0$, et l'accélération \mathbf{a} dans \mathcal{R} s'écrit alors :

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}'(t) + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c \quad \text{où} \quad \mathbf{a}_e = \mathbf{a}_{O'/\mathcal{R}} \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_c = 0.$$

Ce qui donne :

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}'(t) + \mathbf{a}_{O'/\mathcal{R}}.$$

La force d'entraînement subie par les objets dans le référentiel \mathcal{R}' vaut alors simplement :

$$\mathbf{F}_e = -m \mathbf{a}_e = -m \mathbf{a}_{O'/\mathcal{R}}.$$

Cette force est de sens opposé à l'accélération du référentiel \mathcal{R}' par rapport au référentiel \mathcal{R} .



Fig. 1 – À gauche, une voiture (référentiel \mathcal{R}') qui accélère par rapport à la route (référentiel \mathcal{R}) : les objets dans la voiture subissent une force d’entraînement $\mathbf{F}_e = -m \mathbf{a}_e$ de sens opposé à l’accélération du référentiel de la voiture, qui les tire en arrière. À droite, la même voiture freine : l’accélération est de sens opposé (décélération), et cette fois la force d’entraînement tire les objets vers l’avant de la voiture.

1.10 — Cas d’un mouvement de rotation à vitesse constante. On considère maintenant que les origines de \mathcal{R} et \mathcal{R}' se confondent, et que le référentiel \mathcal{R}' est en rotation à vitesse ω constante (par exemple, en choisissant les axes de telle sorte que $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z = \omega \mathbf{e}'_z$). Donnez l’expression de la vitesse d’un point matériel M dans les deux référentiels. Écrivez de même l’expression de son accélération, mesurée dans \mathcal{R} et \mathcal{R}' . Quelle forme prend la force inertielle d’entraînement dans ce cas ? Comment est-elle orientée ? Faites un schéma. Que reconnaissez-vous ?

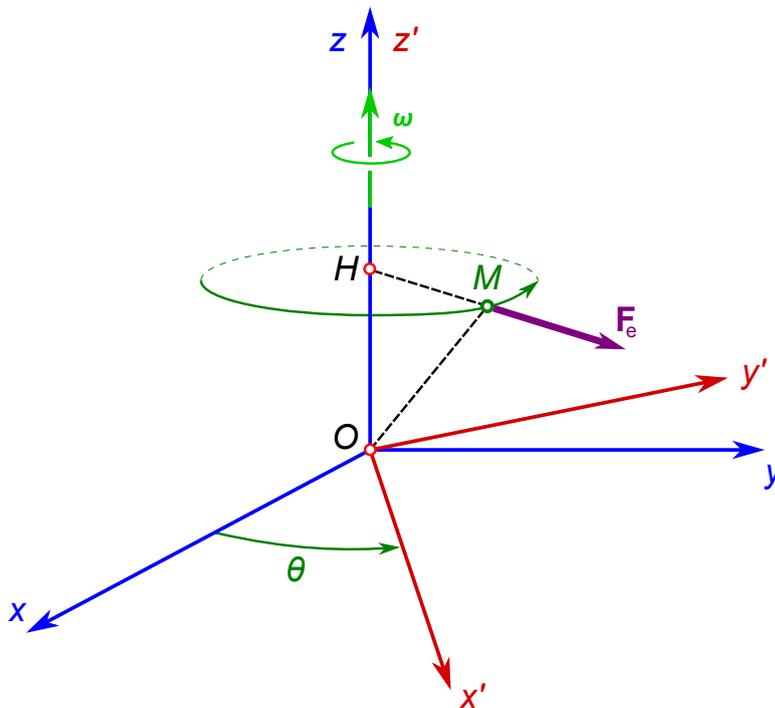


Fig. 2 – Le référentiel \mathcal{R}' est en rotation à vitesse constante par rapport au référentiel \mathcal{R} galiléen.

Dans le cas d’une simple rotation à vitesse constante, l’accélération \mathbf{a} dans \mathcal{R} s’écrit :

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}'(t) + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c$$

où le terme d’accélération d’entraînement se réduit à :

$$\mathbf{a}_e = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O}'\mathbf{M}) = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OM})$$

car ici les deux origines O et O' se confondent. On peut décomposer \mathbf{OM} en une composante selon l'axe de rotation et une composante orthogonale à cet axe : si on appelle H la projection de M sur l'axe de rotation, on aura :

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OH} + \mathbf{HM} \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_e = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{OH} + \mathbf{HM}]) = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{HM}).$$

En projetant sur les axes, ou encore en utilisant la relation du double produit vectoriel,

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}$$

on trouve :

$$\mathbf{a}_e = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{HM}) = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{HM}) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{HM} = -\omega^2 \mathbf{HM}$$

où on reconnaît l'expression du terme d'accélération centripète.

La force d'entraînement correspondante \mathbf{F}_e s'en déduit :

$$\mathbf{F}_e = -m \mathbf{a}_e = +m\omega^2 \mathbf{HM}.$$

C'est ce terme qu'on désigne en général comme la *force centrifuge*, qui est d'autant plus intense que la vitesse de rotation est grande (la force est proportionnelle au carré de la vitesse angulaire de rotation), et proportionnelle à la distance à l'axe de rotation.

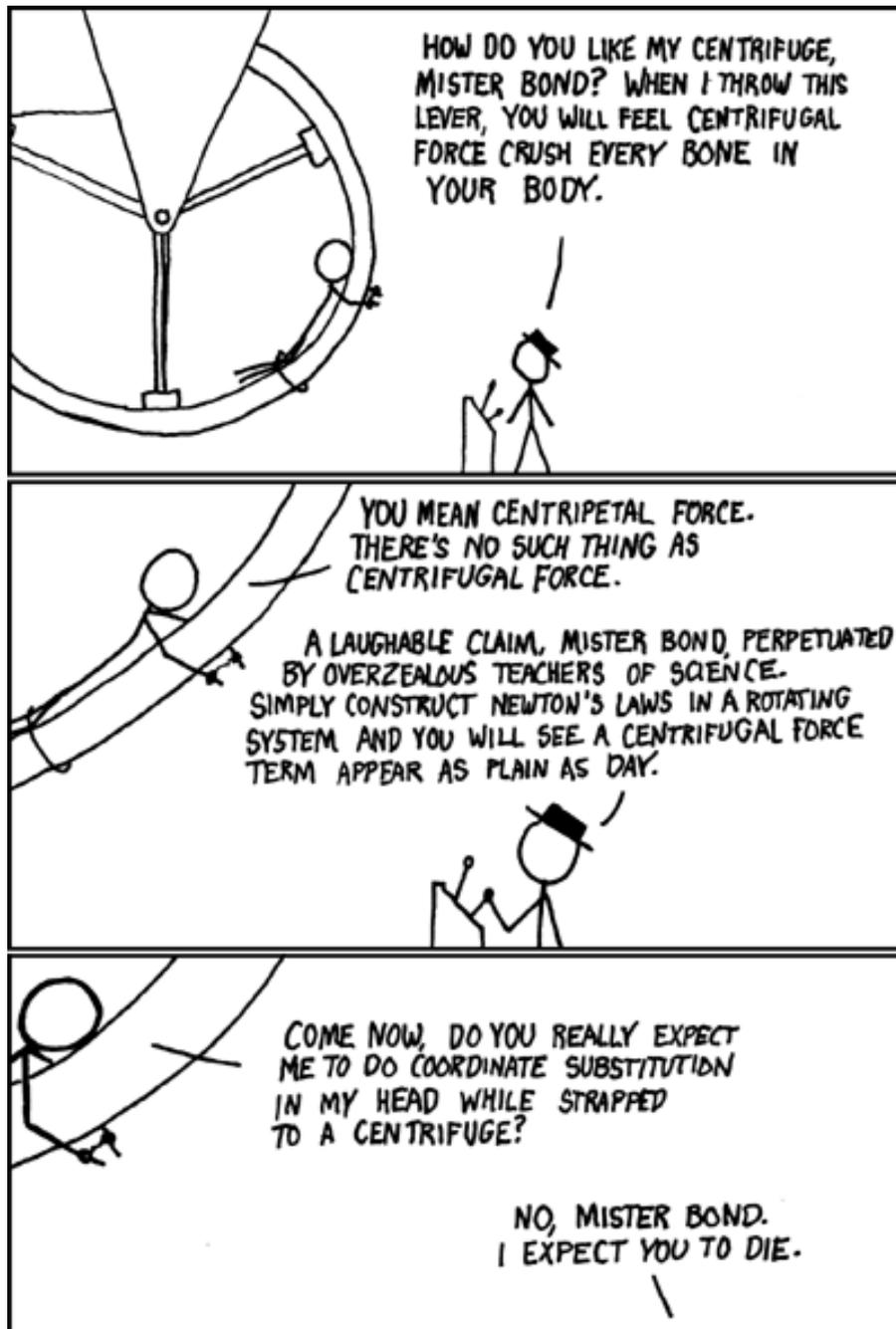


Fig. 3 – XKCD “Centrifugal force” : <http://xkcd.com/123/>. En référence à la scène de Moonraker (1979) où James Bond (Roger Moore) est piégé dans une centrifugeuse (<https://www.youtube.com/watch?v=v5N1Aukm4Bo>), et aux dialogues de Goldfinger (1964) (<https://www.youtube.com/watch?v=wzwPI1zJ9K0>).

2. L'ascenseur

On considère une cabine d'ascenseur dans laquelle un observateur étudie le mouvement d'un objet de masse m suspendue à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . Comme c'est souvent le cas, cette cabine d'ascenseur ne possède aucune fenêtre.

Ascenseur immobile dans un champ de gravitation

Dans un premier temps, la cabine suspendue à son câble et la masse m sont immobiles, sur Terre, dont l'accélération de pesanteur est notée g . L'expérience étant de courte durée, le référentiel terrestre est considéré comme inertiel.

2.1 — Effectuez le bilan des forces qui s'exercent sur la masse m et dessinez un schéma de l'expérience.

La masse m est soumise à deux forces :

— Son poids \mathbf{P} , dirigé vers le bas, tel que $\mathbf{P} = -mg \mathbf{e}_z$.

— La force de traction \mathbf{T} exercée par le ressort, dirigée vers le haut, telle que $\mathbf{T} = +k(\ell - \ell_0) \mathbf{e}_z$.

2.2 — Déduisez-en l'expression de l'allongement du ressort, c'est-à-dire la quantité $\Delta\ell = \ell - \ell_0 > 0$.

En appliquant la relation fondamentale de la dynamique ("RFD", 2^{ème} loi de Newton) dans le référentiel de la cabine, et en sachant que la masse est immobile, à l'équilibre, on a :

$$m\mathbf{a} = \mathbf{0} = \mathbf{P} + \mathbf{T} = -mg \mathbf{e}_z + k(\ell - \ell_0) \mathbf{e}_z.$$

Ainsi, l'allongement du ressort est

$$\ell - \ell_0 = \frac{mg}{k}.$$

Ascenseur tracté par un vaisseau spatial en mouvement à accélération constante

Cette fois, on suppose que la cabine d'ascenseur (pressurisée) et tout son contenu sont tractés *hors de tout champ de gravitation* par un vaisseau spatial possédant un mouvement uniformément accéléré. L'accélération du vaisseau, et donc celle de la cabine, est appliquée par le même câble qui sert à la faire descendre ou monter dans la cage d'ascenseur.

2.3 — En supposant que l'accélération est imposée depuis suffisamment longtemps pour que la masse m soit à l'équilibre, effectuez le bilan des forces qui s'exercent sur la masse et dessiner un schéma de l'expérience. On notera a le module de l'accélération de la cabine.

Cette fois, la cabine d'ascenseur subit un mouvement uniformément accéléré. Le référentiel associé n'est donc plus inertiel. Puisque le mouvement s'effectue uniquement en translation, seule la force d'inertie d'entraînement est à prendre en compte. Par ailleurs, la masse m est encore une fois à l'équilibre.

Il est intéressant de noter que l'observateur, dans la cabine, va naturellement définir les notions de "bas" et de "haut" en fonction de ce qu'il observe. Dans notre cas, il utilisera la direction du ressort pour définir la verticale, de la même manière qu'il pourrait définir la "verticale" à l'aide d'un fil à plomb.

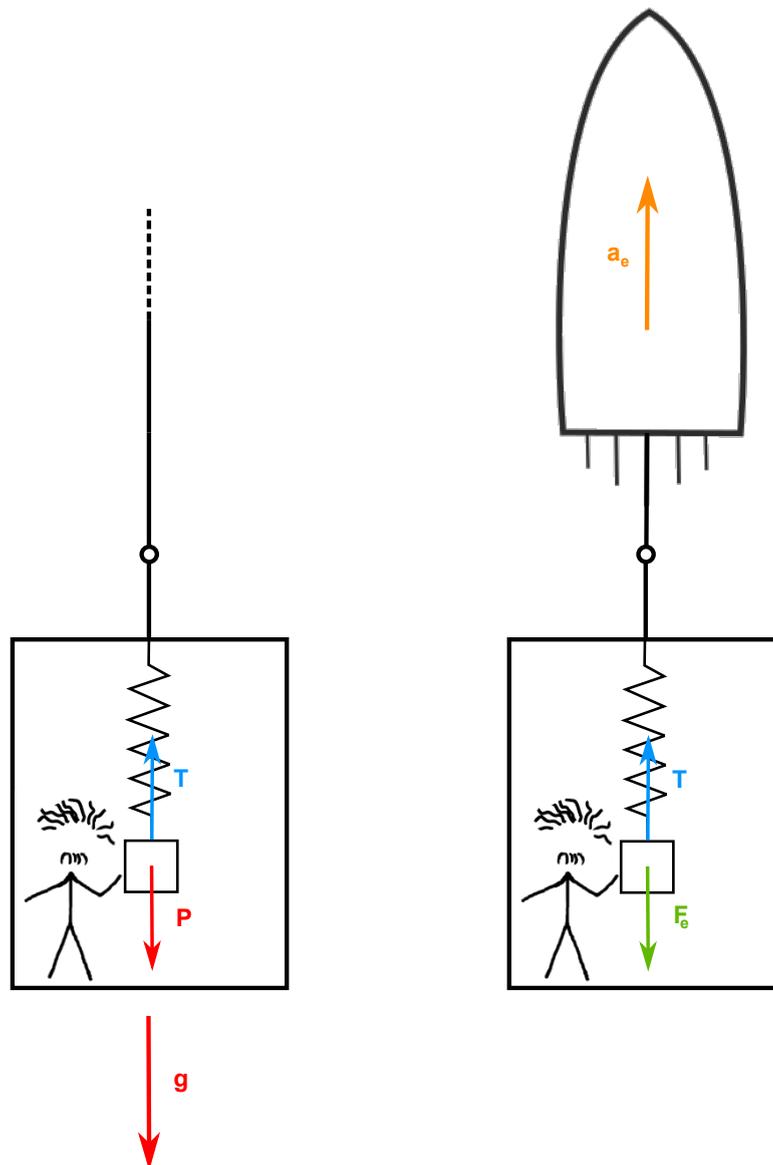


Fig. 4 – À gauche, l'ascenseur est immobile, tenu par son câble et soumis à la pesanteur. La masse accrochée au ressort subit son propre poids et la force de traction du ressort. À droite, hors de tout champ de gravitation, l'ascenseur est entraîné par un vaisseau dont le mouvement est uniformément accéléré; le référentiel de l'ascenseur n'est donc plus galiléen. La masse est cette fois en équilibre sous l'action de la force de traction exercée par le ressort, et de la force inertielle d'entraînement. Si on choisit l'accélération du vaisseau a_e égale à g , les deux situations sont indiscernables du point de vue de l'observateur dans l'ascenseur.

La masse m est encore soumise à deux forces :

- La force de traction exercée par le ressort, dirigée vers le haut, telle que $\mathbf{T} = k(\ell - \ell_0) \mathbf{e}_z$.
- La force d’inertie d’entraînement, dirigée vers le bas, telle que $\mathbf{F}_e = -m\mathbf{a}_e = -ma \mathbf{e}_z$.

Puisque qu’on précise dans l’énoncé que la cabine se trouve maintenant hors de tout champ de gravitation, le poids n’intervient pas !

2.4 — En déduire l’expression de l’allongement du ressort, c’est-à-dire la quantité $\Delta\ell = \ell - \ell_0$.

On applique de nouveau la relation fondamentale de la dynamique (RFD) dans le référentiel de la cabine, cette fois non galiléen : il faut donc tenir compte de la force inertielle d’entraînement \mathbf{F}_e :

$$m\mathbf{a}_{\text{cabine}} = \mathbf{0} = \mathbf{T} + \mathbf{F}_e = k(\ell - \ell_0) \mathbf{e}_z - ma \mathbf{e}_z.$$

L’allongement du ressort est donc donné par :

$$\Delta\ell = \ell - \ell_0 = \frac{ma}{k}.$$

On constate ainsi que pour l’observateur, mesurer l’allongement $\Delta\ell$ du ressort permet de mesurer l’accélération, ceci bien sûr en connaissant la masse m de l’objet et la raideur k du ressort.

2.5 — Le pilote ajuste l’accélération de son vaisseau de telle sorte que $a = g$. L’observateur dans l’ascenseur peut-il faire la différence entre la situation de la question 1 et celle de la question 2 avec les moyens dont il dispose ? Commentez.

Les deux expressions obtenues pour l’allongement sont identiques. Il en découle que l’observateur n’a aucun moyen à sa disposition pour connaître s’il est immobile dans un champ de gravitation ou bien s’il est en mouvement uniformément accéléré. Il est intéressant de noter que l’observateur, s’il devait étudier le problème, considérerait naturellement qu’il se trouve dans un champ de gravitation. Il est donc important de préciser que dans le deuxième cas, l’accélération est appliquée par le même câble qui sert normalement à suspendre la cabine dans la cage d’ascenseur. Si tel n’était pas le cas, l’observateur se douterait de la supercherie !

Cette expérience de pensée (*Gedankenexperiment*) imaginée par A. Einstein lui a permis de formuler le principe d’équivalence en 1907, que l’on peut exprimer de la manière suivante : “*Localement, les effets d’un champ gravitationnel sur une expérience de mécanique sont identiques aux effets d’une accélération du référentiel de l’observateur pour une expérience non soumise à la gravitation*”. Ce principe sera par la suite étendu pour inclure également les lois de l’électromagnétisme et constituera l’un des points de départ pour l’élaboration de la théorie relativiste de la gravitation, la Relativité Générale.

3. Dynamique terrestre

La Terre est en rotation sur elle-même : sa période de révolution par rapport aux étoiles, autrement dit le temps nécessaire pour que localement, une étoile donnée repasse à la même position dans le ciel, vaut $T_\star = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 04 \text{ s}$, durée aussi baptisée “jour sidéral”. Ce qu’on appelle usuellement “un jour” est le “jour solaire”, le temps qui s’écoule entre deux passages du soleil au méridien local, et sa durée moyenne au cours de l’année vaut $24 \text{ h} = 86400 \text{ s}$ (elle varie au cours de l’année car la trajectoire de la Terre autour du Soleil est légèrement elliptique).

3.1 — Déduisez-en la vitesse angulaire de rotation Ω_\oplus de la Terre dans le référentiel géocentrique, dont les axes sont liés aux étoiles.

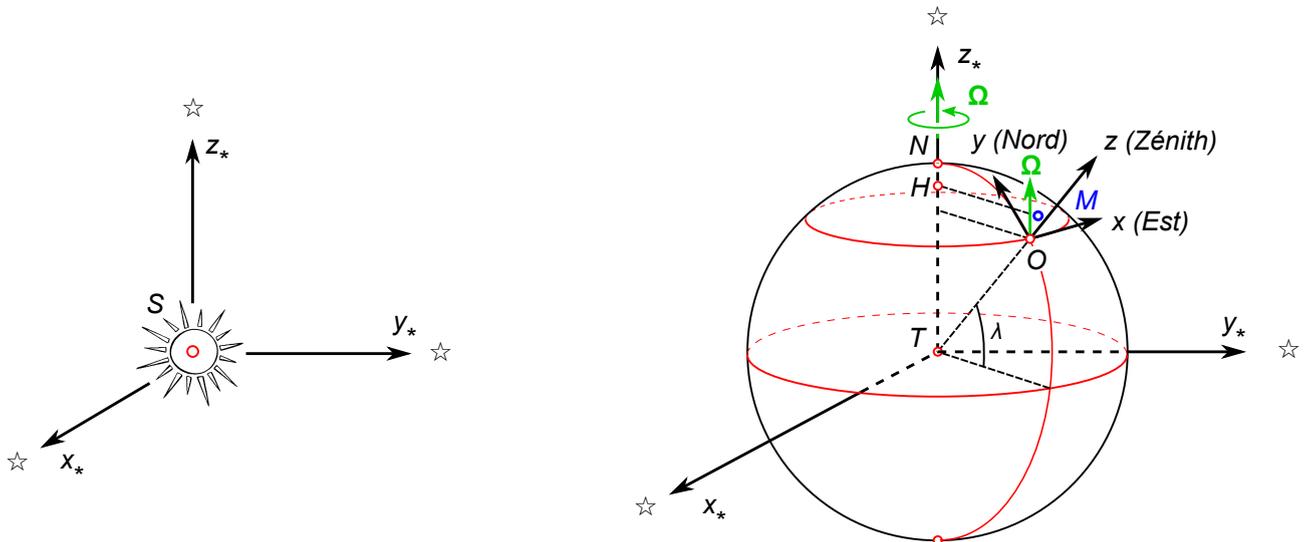


Fig. 5 – À gauche : référentiel de Copernic \mathcal{R}_0 de repère (S, x_*, y_*, z_*) , dont l’origine est le centre de gravité S du système solaire, et dont les axes sont définis par trois étoiles éloignées (ou plutôt aujourd’hui, par un ensemble de quasars). À droite : le référentiel géocentrique \mathcal{R}_g de repère (T, x_*, y_*, z_*) , dont l’origine est le centre T de la terre, et dont les axes sont définis par les étoiles; on a aussi représenté le référentiel terrestre local $\mathcal{R}_{\text{local}}$ au point O , muni d’un repère (O, x, y, z) avec Ox dirigé vers l’Est, Oy vers le Nord, et Oz selon la verticale du lieu. Pour une expérience de courte durée (comparée à la période de révolution de la Terre autour du Soleil), le référentiel géocentrique peut être considéré comme galiléen; le référentiel de Copernic est une meilleure approximation d’un référentiel galiléen.

La vitesse angulaire de rotation de la Terre s’écrit simplement :

$$\boldsymbol{\Omega}_{\oplus} = \Omega_{\oplus} \mathbf{e}_{z_*} \quad \text{avec} \quad \Omega_{\oplus} = +\frac{2\pi}{T_*} = +\frac{2\pi}{23 \text{ h } 56 \text{ min } 04 \text{ s}} = +\frac{2\pi}{86164 \text{ s}} \approx 7.292 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$$

De plus, le vecteur $\boldsymbol{\Omega}_{\oplus}$ est orienté selon \mathbf{e}_{z_*} car la Terre tourne d’Ouest en Est.

Gravitation et champ de pesanteur

Le *champ de pesanteur* \mathbf{g} ressenti à la surface de la Terre est la conséquence de l’attraction gravitationnelle exercée par la planète, de l’attraction exercée par les autres astres (notamment le Soleil et la Lune, responsables des forces de marée), et de la force centrifuge due à la rotation de la Terre sur elle-même. Dans la suite, on négligera les forces de marée. Le but de cet exercice est d’analyser le sens physique du *champ de pesanteur* \mathbf{g} et de ce qu’on désigne usuellement comme le *poids* $\mathbf{P} = m \mathbf{g}$ des objets.

3.2 — En un lieu à la surface terrestre de latitude λ , on considère un objet immobile (par exemple, un corps M de masse m suspendu à un fil). Écrivez l’expression générale de l’accélération $\mathbf{a}/_{\mathcal{R}_{\text{local}}}$ de cet objet dans le référentiel $\mathcal{R}_{\text{local}}$ muni d’un repère (O, x, y, z) (fig. 5). Explicitez le terme d’accélération d’entraînement. Donnez son expression en fonction de la latitude du lieu.

Dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_g (fig. 5), qu’on peut assimiler à un référentiel galiléen (au moins pour des expériences de durée très inférieure à l’année), la masse suspendue subit deux forces : d’une part, l’attraction gravitationnelle terrestre,

$$\mathbf{F}_{\oplus} = m \mathbf{G}_{\oplus}(M)$$

où $\mathbf{G}_\oplus(M)$ est le champ gravitationnel terrestre au point M , qu'on peut écrire :

$$\mathbf{G}_\oplus(M) = -\mathcal{G} \frac{M_\oplus}{TM^2} \frac{\mathbf{TM}}{TM} \quad (\text{Loi de la gravitation universelle})$$

et d'autre part, la tension \mathbf{T}_{fil} du fil qui retient l'objet.

La seconde loi de Newton, exprimée dans \mathcal{R}_g galiléen, donne ainsi :

$$m \mathbf{a}_{/\mathcal{R}_g} = m \mathbf{G}_\oplus(M) + \mathbf{T}_{\text{fil}}.$$

Si on exprime l'accélération dans le référentiel terrestre local $\mathcal{R}_{\text{local}}$:

$$\mathbf{a}_{/\mathcal{R}_g} = \mathbf{a}_{/\mathcal{R}_{\text{local}}} + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c$$

et en remplaçant dans la relation précédente, on obtient :

$$m \mathbf{a}_{/\mathcal{R}_{\text{local}}} = m \mathbf{G}_\oplus(M) - m \mathbf{a}_e - m \mathbf{a}_c + \mathbf{T}_{\text{fil}}.$$

Si l'objet, retenu par le fil, est immobile dans $\mathcal{R}_{\text{local}}$, sa vitesse $\mathbf{u}_{/\mathcal{R}_{\text{local}}}$ y est nulle et par conséquent la force de Coriolis $\mathbf{F}_c = -m \mathbf{a}_c = -2m \boldsymbol{\Omega}_\oplus \times \mathbf{u}_{/\mathcal{R}_{\text{local}}}$ l'est aussi.

De plus le terme d'accélération d'entraînement s'écrit :

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_{O/\mathcal{R}_g} + \boldsymbol{\Omega}_\oplus \times (\boldsymbol{\Omega}_\oplus \times \mathbf{OM}) + \frac{d\boldsymbol{\Omega}_\oplus}{dt} \times \mathbf{OM}$$

On peut considérer que la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même est constante par rapport aux étoiles lointaines¹ et par conséquent que le terme en $d\boldsymbol{\Omega}_\oplus/dt$ est nul.

Pour aller plus loin, écrivons la vitesse du point O (origine du repère terrestre local $\mathcal{R}_{\text{local}}$) dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_g :

$$\mathbf{v}_{O/\mathcal{R}_g} = \left(\frac{d\mathbf{TO}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_g} = \left(\frac{d\mathbf{TO}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_{\text{local}}} + \boldsymbol{\Omega}_\oplus \times \mathbf{TO} = \boldsymbol{\Omega}_\oplus \times \mathbf{TO}$$

car le vecteur \mathbf{TO} est constant dans le référentiel local $\mathcal{R}_{\text{local}}$.

On peut en déduire l'expression de l'accélération de l'origine O du repère du référentiel local $\mathcal{R}_{\text{local}}$ vue dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_g :

$$\mathbf{a}_{O/\mathcal{R}_g} = \left(\frac{d\mathbf{v}_{O/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_g} = \left(\frac{d}{dt} [\boldsymbol{\Omega}_\oplus \times \mathbf{TO}] \right)_{\mathcal{R}_g} = \boldsymbol{\Omega}_\oplus \times \left(\frac{d\mathbf{TO}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_g} = \boldsymbol{\Omega}_\oplus \times (\boldsymbol{\Omega}_\oplus \times \mathbf{TO}).$$

Revenons maintenant à l'expression de l'accélération d'entraînement :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_e &= \mathbf{a}_{O/\mathcal{R}_g} + \boldsymbol{\Omega}_\oplus \times (\boldsymbol{\Omega}_\oplus \times \mathbf{OM}) \\ &= \boldsymbol{\Omega}_\oplus \times (\boldsymbol{\Omega}_\oplus \times \mathbf{TO}) + \boldsymbol{\Omega}_\oplus \times (\boldsymbol{\Omega}_\oplus \times \mathbf{OM}) \\ &= \boldsymbol{\Omega}_\oplus \times (\boldsymbol{\Omega}_\oplus \times (\mathbf{TO} + \mathbf{OM})) \\ &= \boldsymbol{\Omega}_\oplus \times (\boldsymbol{\Omega}_\oplus \times \mathbf{TM}). \end{aligned}$$

1. En réalité, la rotation de la Terre ralentit tout doucement, du fait de la présence de la Lune et des frottements dus aux forces de marée. On estime que sa période de rotation sur elle-même (le jour) augmente d'environ deux millisecondes par siècle. Pour des expériences qui ne durent pas des siècles, on peut négliger ce ralentissement.

Si on appelle H la projection de M sur l'axe de rotation de la Terre, on aura $\mathbf{TM} = \mathbf{TH} + \mathbf{HM}$, avec \mathbf{TH} colinéaire avec $\boldsymbol{\Omega}_{\oplus}$. L'expression précédente se simplifie alors en :

$$\mathbf{a}_e = \boldsymbol{\Omega}_{\oplus} \times (\boldsymbol{\Omega}_{\oplus} \times [\mathbf{TH} + \mathbf{HM}]) = \boldsymbol{\Omega}_{\oplus} \times (\boldsymbol{\Omega}_{\oplus} \times \mathbf{HM})$$

Pour aller plus loin, on peut soit projeter cette relation sur les axes du référentiel géocentrique, soit tirer parti des propriétés du double produit vectoriel, à savoir

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}$$

ce qui donne ici :

$$\mathbf{a}_e = \boldsymbol{\Omega}_{\oplus} \times (\boldsymbol{\Omega}_{\oplus} \times \mathbf{HM}) = (\boldsymbol{\Omega}_{\oplus} \cdot \mathbf{HM}) \boldsymbol{\Omega}_{\oplus} - (\boldsymbol{\Omega}_{\oplus} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\oplus}) \mathbf{HM} = -\Omega_{\oplus}^2 \mathbf{HM}$$

Et la force inertielle d'entraînement se réduit à :

$$\mathbf{F}_e = -m \mathbf{a}_e = +m\Omega_{\oplus}^2 \mathbf{HM}$$

où on reconnaît le terme de force centrifuge (voir ci-après).

3.3 — On appelle “poids” de l'objet la somme des forces de gravitation et de la force centrifuge qui s'exercent sur l'objet. Écrivez l'expression du poids \mathbf{P} . En posant $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, déduisez-en l'expression du “champ de pesanteur” \mathbf{g} . C'est ce champ de pesanteur \mathbf{g} qui définit la “verticale” d'un lieu (principe même du fil à plomb).

D'après ce qui précède, la seconde loi de Newton (dans \mathcal{R}' non-galiléen) pour l'objet en M s'écrira :

$$m \mathbf{a}_{\mathcal{R}'_{\text{local}}} = m \mathbf{G}_{\oplus}(M) + \mathbf{T}_{\text{fil}} + \mathbf{F}_e = m \mathbf{G}_{\oplus}(M) + \mathbf{T}_{\text{fil}} - m \mathbf{a}_e$$

Soit,

$$m \mathbf{a}_{\mathcal{R}'_{\text{local}}} = m \mathbf{G}_{\oplus}(M) + m\Omega_{\oplus}^2 \mathbf{HM} + \mathbf{T}_{\text{fil}}$$

On appellera “poids” (noté \mathbf{P}) la somme de la force d'attraction gravitationnelle et de la force centrifuge :

$$\mathbf{P} = m \mathbf{G}_{\oplus}(M) + m\Omega_{\oplus}^2 \mathbf{HM}.$$

Si l'objet est immobile dans le référentiel local, le poids et la tension du fil s'équilibrent exactement; la direction du fil est aussi celle du poids de l'objet, et permet de définir la “verticale” locale du lieu (principe même du fil à plomb, voir fig. 6)).

En posant $\mathbf{P} = m \mathbf{g}$, on obtient l'expression du poids et du *champ de pesanteur local* \mathbf{g} ,

$$\mathbf{P} = m \mathbf{g} = m \mathbf{G}_{\oplus}(M) + m\Omega_{\oplus}^2 \mathbf{HM} \quad \text{soit} \quad \mathbf{g} = \mathbf{G}_{\oplus}(M) + \Omega_{\oplus}^2 \mathbf{HM} = \mathbf{G}_{\oplus}(M) - \mathbf{a}_e.$$

où $\mathbf{F}_e = -m \mathbf{a}_e = m\Omega_{\oplus}^2 \mathbf{HM}$ est la force centrifuge qui s'exerce sur l'objet du fait de la rotation de la planète sur elle-même.

3.4 — Estimez numériquement la norme de la force centrifuge. Comparez-là à celle de \mathbf{g} . En supposant la Terre sphérique, donnez l'expression de l'angle que fait \mathbf{g} avec la direction du centre de la Terre. Que se passe-t-il aux pôles? à l'équateur? à Paris (latitude $\lambda = 48^\circ 51'$ Nord)?

La distance HM dépend de la latitude λ du lieu, et vaut $HM = R_{\oplus} \cos \lambda$. Le terme de force centrifuge sera nul aux pôles et maximal à l'équateur. La norme de l'accélération centrifuge peut encore s'écrire $|\mathbf{a}_e| = \Omega_{\oplus}^2 R_{\oplus} \cos \lambda$; elle sera maximale à l'équateur ($\lambda = 0$). Numériquement, on trouve :

$$|\mathbf{a}_e|_{\text{max}} = \Omega_{\oplus}^2 R_{\oplus} \cos(\lambda = 0) = 0.034 \text{ ms}^{-2} \quad \text{à l'équateur} (\lambda = 0)$$

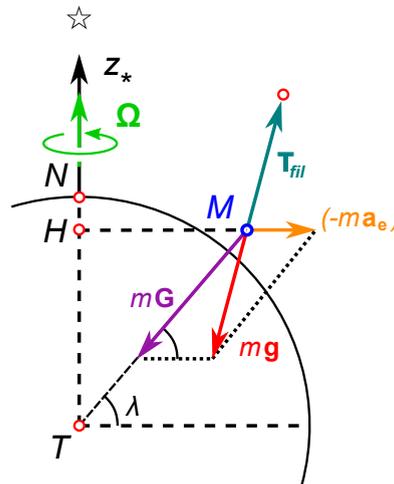


Fig. 6 – Le “poids” $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ est la combinaison de la force d’attraction gravitationnelle $m\mathbf{G}$ et de la force centrifuge. Pour l’objet considéré ici, immobile car suspendu par un fil, le poids est exactement compensé par la force \mathbf{T}_{fil} de tension que le fil exerce sur l’objet. La direction du fil définit ainsi la direction du poids, c’est à dire la “verticale” du lieu. C’est le principe même du fil à plomb utilisé par les maçons.

et,

$$|\mathbf{a}_e| = \Omega_{\oplus}^2 R_{\oplus} \cos(48^\circ 51') = 0.022 \text{ ms}^{-2} \quad \text{à Paris.}$$

Au maximum (à l’équateur), l’accélération centrifuge représente

$$\frac{|\mathbf{a}_e|}{g} \approx 0.0034 \approx 0.3\% \approx \frac{1}{17^2}.$$

du champ de pesanteur g . On dit parfois que si la Terre tournait 17 fois plus vite, la force centrifuge à l’équateur compenserait l’attraction gravitationnelle de la planète.

Du fait du terme de force centrifuge, le champ de pesanteur g ne pointe pas exactement vers le centre de la Terre; comme la verticale locale est justement définie par la direction de g , il existe un petit angle entre la verticale locale en un point de la surface terrestre et la direction du centre de la Terre. Connaissant l’expression de la force centrifuge, on peut calculer cet angle α entre \mathbf{G}_{\oplus} (pointant vers le centre de la planète) et g (fig 7).

La détermination de l’angle α se réduit à un problème de trigonométrie dans le triangle non rectangle ABM , dont on connaît deux côtés : $AB = |\mathbf{a}_e|$ et $MB = g$, et un angle : $\widehat{MAB} = \lambda$ (fig 7). En utilisant la formule des sinus, on trouve :

$$\frac{\sin \alpha}{AB} = \frac{\sin \widehat{MAB}}{MB} \quad \text{i.e.} \quad \sin \alpha = \frac{AB}{MB} \sin \widehat{MAB}$$

Soit,

$$\sin \alpha = \frac{|\mathbf{a}_e|}{g} \sin \lambda = \frac{\Omega_{\oplus}^2 HM}{g} \sin \lambda = \frac{\Omega_{\oplus}^2 R_{\oplus}}{g} \cos \lambda \sin \lambda = \frac{\Omega_{\oplus}^2 R_{\oplus}}{2g} \sin(2\lambda).$$

Cet angle sera maximal pour $\lambda = \pm \pi/4 = \pm 45^\circ$. À cette latitude, on aura $\alpha = \arcsin(\Omega_{\oplus}^2 R_{\oplus}/2g) \approx 0.0017 \text{ rad} \approx 6 \text{ arcmin}$. Au pôle la force centrifuge est nulle; à l’équateur, l’angle α est nul. À Paris, on trouve $\alpha \approx 5.9 \text{ arcmin}$.

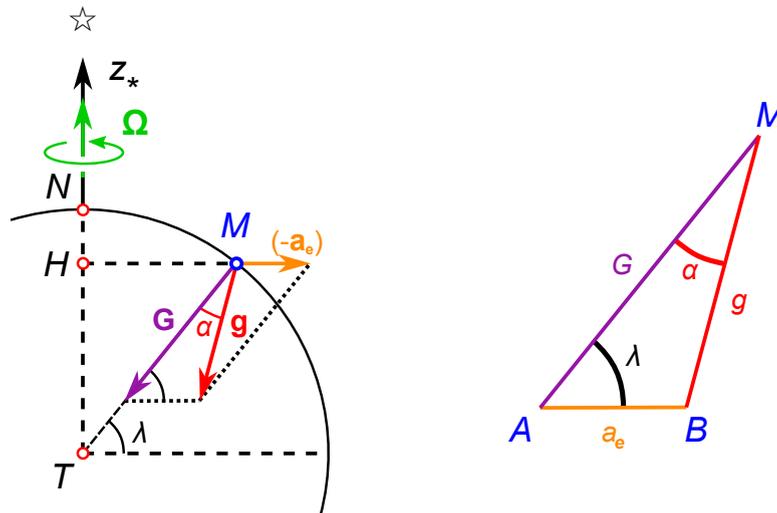


Fig. 7 – Le champ de pesanteur g ne pointe pas exactement vers le centre de la Terre, du fait de la force centrifuge. L’angle α entre G_{\oplus} (pointant vers le centre de la planète) et g est maximal aux latitudes $\lambda = \pm\pi/4 = \pm 45^\circ$ et vaut alors 6 arcmin.

Les calculs présentés ici supposent que la Terre est parfaitement sphérique, ce qui n’est pas le cas : en raison justement des effets de la force centrifuge, la Terre est déformée et présente un léger renflement à l’équateur (rayon au pôle : 6357 km ; rayon à l’équateur : 6378 km). Cette distribution de la masse terrestre affecte le champ gravitationnel qui n’est plus à symétrie sphérique, ce qui contribue aussi aux variations du champ de pesanteur g . La distribution des masses rocheuses du sous-sol, ainsi que leur composition contribuent aussi aux variations spatiales du champ de pesanteur à la surface de la Terre. La mesure précise de ces variations, appelée *gravimétrie*, s’effectue aujourd’hui avec des précisions relatives jusqu’à 10^{-9} , soit au sol (gravimètres), soit à bord d’avions, ou encore via l’étude fine des trajectoires des satellites artificiels. Elle permet d’étudier le sous-sol, par exemple pour de la prospection minière ou pétrolière.

Données : $G = 6.67430(15) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ $M_{\oplus} = 5.9722 \times 10^{24} \text{ kg}$ $g_{\text{Paris}} = 9.812 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
 $R_{\oplus} = 6371 \text{ km}$ (rayon moyen volumétrique).

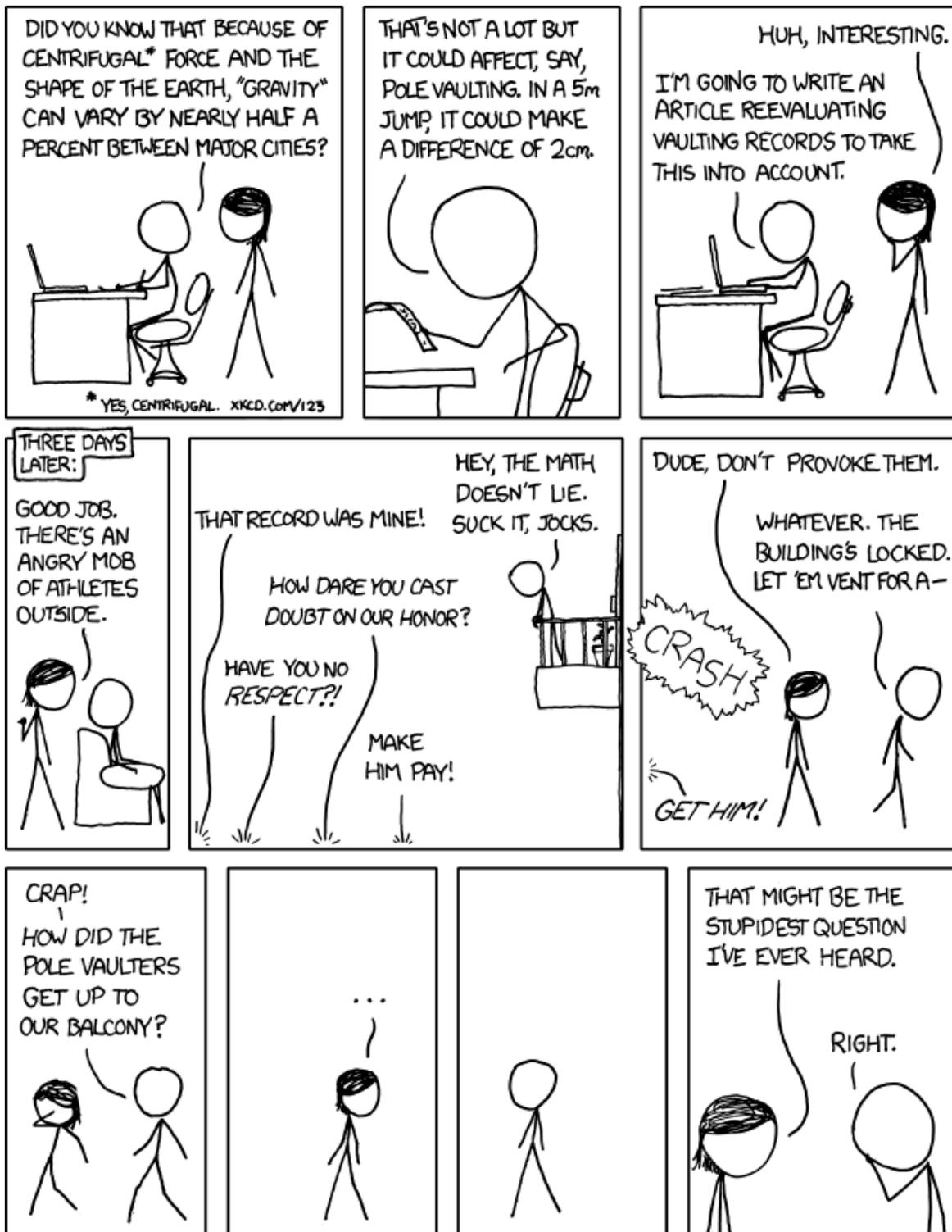


Fig. 8 – XKCD : "Local g" (Voir <https://xkcd.com/852/>)

Chute d'un objet dans un puits : déviation vers l'Est

On laisse tomber une bille d'acier en chute libre dans un puits de mine très profond. On négligera les forces de frottement de l'air.

3.5 — Dans le référentiel local (on prendra le point de départ à la surface comme origine des coordonnées, et l'axe Oz selon la *verticale locale* définie par exemple par la direction d'un fil à plomb), écrivez le bilan des forces qui s'exercent sur l'objet. Pensez à inclure les éventuelles forces inertielles. Attention : par définition du champ de pesanteur (voir plus haut), \mathbf{g} contient déjà la composante d'accélération centrifuge.

Dans le référentiel local, la bille en chute libre est soumise à son poids (ce qui inclut la force centrifuge due à la rotation terrestre) et à la force de Coriolis. La relation fondamentale de la dynamique s'écrira ainsi :

$$m \mathbf{a}_{/\mathcal{R}_{\text{local}}} = m \mathbf{g} - 2m \boldsymbol{\Omega}_{\oplus} \times \mathbf{u}_{/\mathcal{R}_{\text{local}}} \quad (2)$$

où $\mathbf{u}_{/\mathcal{R}_{\text{local}}}$ est la vitesse de la bille dans le référentiel terrestre local $\mathcal{R}_{\text{local}}$. Comme on choisit l'axe Oz selon la *verticale locale*, le champ local \mathbf{g} de pesanteur est parallèle à Oz .

3.6 — Déduisez-en les équations du mouvement.

En divisant l'équation (2) par la masse m , et en projetant sur les axes du référentiel local, on trouve :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -2\Omega_{\oplus} \dot{z} \cos \lambda + 2\Omega_{\oplus} \dot{y} \sin \lambda \\ \ddot{y} &= -2\Omega_{\oplus} \dot{x} \sin \lambda \\ \ddot{z} &= -g + 2\Omega_{\oplus} \dot{x} \cos \lambda. \end{aligned}$$

3.7 — Quelle serait la solution des équations du mouvement si on négligeait la force de Coriolis ?

Si on négligeait la force de Coriolis, les équations du mouvement se réduiraient à :

$$\ddot{x} = 0 \quad \ddot{y} = 0 \quad \ddot{z} = -g$$

dont la solution serait, en tenant compte des conditions initiales (chute libre, donc sans vitesse initiale, point de départ pris comme origine),

$$x(t) = 0 \quad y(t) = 0 \quad \dot{z}(t) = -gt \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2.$$

3.8 — En considérant que les vitesses dans le plan horizontal sont faibles, les termes en $\Omega_{\oplus} \dot{x}$ et $\Omega_{\oplus} \dot{y}$ sont petits et peuvent être négligés ; donnez alors une expression approchée de la trajectoire. Si la profondeur du puits est h , au bout de combien de temps la bille atteint-elle le fond du puits ? Quelle est alors la position x de la bille ?

Si on suppose que la trajectoire effective sera assez peu différente de celle calculée sans la force de Coriolis, les vitesses dans le plan horizontal seront faibles, et on pourra négliger les termes en $\Omega_{\oplus} \dot{x}$ et $\Omega_{\oplus} \dot{y}$ dans les équations établies précédemment, et remplacer \dot{z} par $-gt$. On obtient alors :

$$\ddot{x} \approx 2\Omega_{\oplus}gt \cos \lambda \quad \ddot{y} \approx 0 \quad \ddot{z} \approx -g.$$

Ce qui donne :

$$\dot{x} \approx \Omega_{\oplus}gt^2 \cos \lambda \quad \dot{y} \approx 0 \quad \dot{z} \approx -gt$$

et,

$$x(t) \approx \frac{1}{3}\Omega_{\oplus}gt^3 \cos \lambda \quad y(t) \approx 0 \quad z(t) \approx -\frac{1}{2}gt^2.$$

La bille atteindra le fond du puits de profondeur h à l'instant :

$$t_{\text{fond}} \approx \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

À cet instant, le décalage vers l'Est sera de :

$$x(t_{\text{fond}}) \approx \frac{1}{3} \Omega_{\oplus} g t_{\text{fond}}^3 \cos \lambda.$$

D'après l'expression analytique où apparaît le cosinus de la latitude (donc indépendant du signe de λ), l'expression de la déviation vers l'Est sera la même dans les hémisphères nord et sud.

3.9 — La première mise en évidence de l'effet est due à F. Reich en 1831, dans un puits de mine de 158 m de profondeur. En 1903, C. Flammarion a refait l'expérience en laissant tomber des billes d'acier du haut de la coupole du Panthéon ($h = 68$ m). Estimez la déviation dans ce cas. C. Flammarion trouve 7.6 mm : comparez avec votre calcul.

Dans l'exemple de l'expérience au Panthéon, on trouve numériquement :

$$t_{\text{fond}} \approx 3.72 \text{ s} \quad x(t_{\text{fond}}) \approx 8.05 \text{ mm}$$

ce qui est très proche de la mesure de la déviation vers l'Est par Flammarion.

L'effet de la force de Coriolis n'est pas négligeable sur des trajectoires longues et à des vitesses élevées (la force de Coriolis est proportionnelle à la vitesse). Par exemple, il est essentiel d'en tenir compte lorsqu'on calcule la trajectoire des missiles balistiques intercontinentaux.

Pendule de Foucault

Considérons un pendule, constitué d'une masse m parfaitement symétrique attachée à un long câble de longueur ℓ . On met ce pendule en mouvement, et on étudie soigneusement sa trajectoire pour de petites oscillations.

3.10 — Quelle est la période T_{osc} d'oscillation du pendule ? Application numérique ($m = 30$ kg, $\ell = 67$ m).

Pour de petites oscillations, la période T_{osc} du pendule simple s'écrit :

$$T_{\text{osc}} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Ce qui donne ici $T_{\text{osc}} \approx 16.42$ s.

3.11 — Écrivez le bilan des forces dans le référentiel terrestre local.

Dans le référentiel terrestre local, la masse suspendue subit son poids (qui combine la force gravitationnelle terrestre et la force centrifuge due à la rotation de la planète), la tension du fil F_{fil} qui le retient, et la force de Coriolis. L'accélération de la masse vérifie ainsi :

$$m \mathbf{a}_{/\mathcal{R}_{\text{local}}} = m \mathbf{g} + \mathbf{F}_{\text{fil}} - 2m \boldsymbol{\Omega}_{\oplus} \times \mathbf{u}_{/\mathcal{R}_{\text{local}}}$$

où le terme $\mathbf{F}_c = -2m \boldsymbol{\Omega}_{\oplus} \times \mathbf{u}_{/\mathcal{R}_{\text{local}}}$ est la force de Coriolis, et $\mathbf{u}_{/\mathcal{R}_{\text{local}}}$ la vitesse du pendule dans le référentiel terrestre local.

3.12 — Le comportement du pendule est plus simple à appréhender si on se place au pôle Nord terrestre. Dans ce cas particulier, décrivez qualitativement l’effet de la force de Coriolis pendant les trajectoires aller et retour du pendule au cours d’une période d’oscillation. Faites un schéma.

Pour de petites oscillations, on peut considérer que le mouvement du pendule a essentiellement lieu dans le plan horizontal. Si le pendule est placé au pôle Nord, le vecteur Ω_{\oplus} est vertical ; supposons par exemple que dans $\mathcal{R}_{\text{local}}$ la vitesse du pendule soit à un moment donné selon Oy : $\mathbf{u}/\mathcal{R}_{\text{local}} \approx u_y \mathbf{e}_y$. La force de Coriolis vaudra alors :

$$\mathbf{F}_c = -2m \Omega_{\oplus} \times \mathbf{u}/\mathcal{R}_{\text{local}} = -2m \Omega_{\oplus} \mathbf{e}_z \times u_y \mathbf{e}_y = +2m \Omega_{\oplus} u_y \mathbf{e}_x$$

lors du mouvement “aller” du pendule ($u_y > 0$), la force de Coriolis \mathbf{F}_c sera orientée selon $+\mathbf{e}_x$, tandis que lors du mouvement “retour” ($u_y < 0$), \mathbf{F}_c sera orientée selon $-\mathbf{e}_x$. On peut se convaincre que pour n’importe quelle position du plan d’oscillation du pendule, un couple va s’exercer sur le pendule, dont l’effet sera de faire lentement tourner son plan d’oscillation dans le sens inverse de la rotation terrestre (d’Est en Ouest).

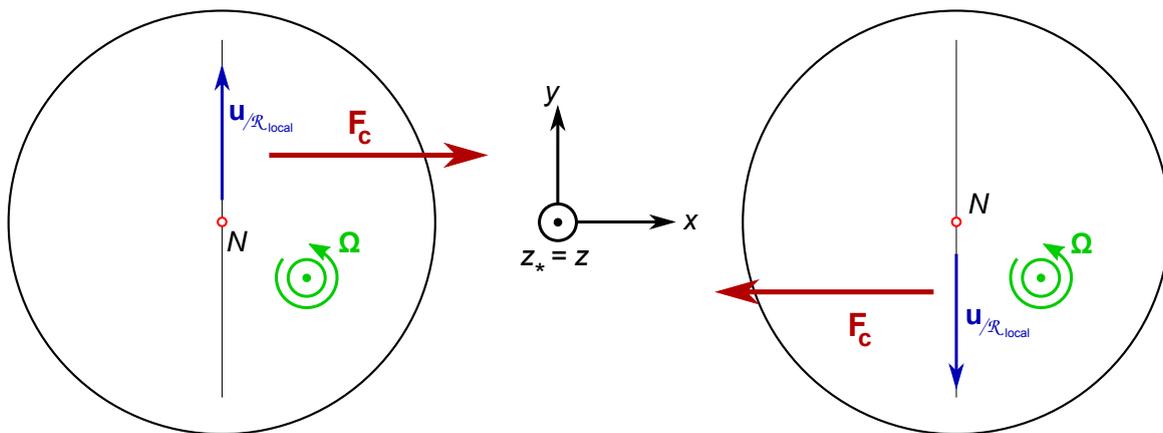


Fig. 9 – Pendule de Foucault au pôle Nord : vue de dessus. À gauche, lorsque la vitesse $\mathbf{u}/\mathcal{R}_{\text{local}}$ du pendule est selon \mathbf{e}_y (demi-oscillation “aller”), la force de Coriolis $\mathbf{F}_c = -2m \Omega_{\oplus} \times \mathbf{u}/\mathcal{R}_{\text{local}}$ est orientée selon \mathbf{e}_x ; à droite, lorsque la vitesse du pendule est selon $-\mathbf{e}_y$, la force $\mathbf{F}_c = -2m \Omega_{\oplus} \times \mathbf{u}/\mathcal{R}_{\text{local}}$ est orientée selon $-\mathbf{e}_x$.

3.13 — Toujours en supposant le pendule installé au pôle Nord, décrivez la trajectoire attendue du pendule dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_g (axes définis par les étoiles). Déduisez-en le comportement et la période de rotation du plan d’oscillation du pendule dans le référentiel local, au pôle Nord. Montrez que la période de rotation du plan du pendule s’écrit simplement :

$$T_p = \frac{2\pi}{\Omega_{\oplus}}$$

où Ω_{\oplus} est la vitesse angulaire de rotation de la Terre dans le référentiel lié aux étoiles.

Dans le référentiel \mathcal{R}_g , galiléen, le pendule n’est soumis qu’à son poids et à la tension du fil. son mouvement d’oscillation a donc lieu dans un plan fixe par rapport aux étoiles, plan déterminé par les conditions initiales (plan du lâcher du pendule). Comme dans \mathcal{R}_g la Terre tourne à la vitesse Ω_{\oplus} et effectue un tour sur elle-même en un jour sidéral, dans $\mathcal{R}_{\text{local}}$, le plan d’oscillation du pendule semble donc effectuer une rotation autour de l’axe polaire, dans le sens Est-Ouest, qui compense exactement la rotation de la Terre sur elle-même.

3.14 — Si on se place à Paris (latitude $\lambda = +48^\circ 51'$), quelle composante de Ω_{\oplus} contribue à faire tourner le plan du pendule ? Déduisez-en la période de rotation du plan d’oscillation du pendule à Paris.

Dans le référentiel local d'un lieu quelconque de latitude λ , le vecteur Ω_{\oplus} se décompose selon :

$$\Omega_{\oplus} = \Omega_{\oplus} \cos \lambda \mathbf{e}_y + \Omega_{\oplus} \sin \lambda \mathbf{e}_z$$

Pour de petites oscillations, le mouvement du pendule peut être considéré comme contenu dans le plan horizontal (Oxy). Par conséquent, seule la composante verticale de Ω_{\oplus} au lieu considéré contribuera à faire tourner le pendule. Par exemple, si on suppose qu'à un instant donné la vitesse d'oscillation est selon Oy : $\mathbf{u}/\mathcal{R}_{\text{local}} \approx u_y \mathbf{e}_y$, la force de Coriolis vaudra dans ce cas :

$$\mathbf{F}_c = -2m \Omega_{\oplus} \times \mathbf{u}/\mathcal{R}_{\text{local}} = -2m \Omega_{\oplus} (\cos \lambda \mathbf{e}_y + \sin \lambda \mathbf{e}_z) \times u_y \mathbf{e}_y = +2m \Omega_{\oplus} \sin \lambda u_y \mathbf{e}_x$$

et seule la composante verticale de Ω_{\oplus} contribuera à la rotation du plan d'oscillation du pendule. Le plan d'oscillation tournera donc comme au pôle Nord, mais avec une vitesse angulaire de rotation réduite $\Omega_{\oplus} \sin \lambda$, et une période de rotation plus longue :

$$T_p = \frac{2\pi}{\Omega_{\oplus} \sin \lambda}$$

À Paris, $\lambda = 48^\circ 51'$, ce qui donne une période de rotation du plan d'oscillation du pendule de $T_p \approx 31 \text{ h } 47 \text{ min}$. On remarque qu'à l'équateur ($\lambda = 0$), $T_p = +\infty$ et le pendule oscille dans un plan fixe.

3.15 — Allez au Panthéon (ou bien au Conservatoire National des Arts et Métiers), pour observer vous-même la rotation du pendule de Foucault; estimez la période de rotation, et vérifiez que la Terre tourne.

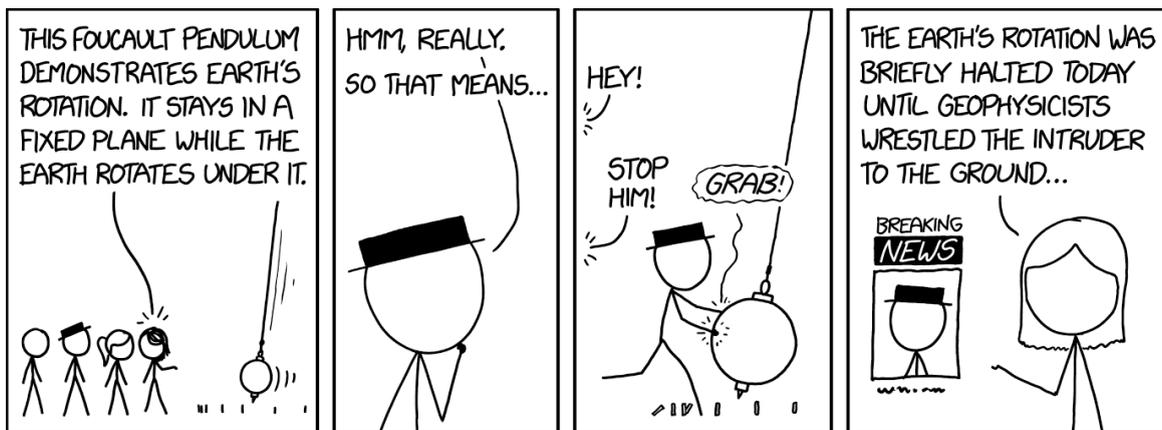


Fig. 10 – XKCD : “Foucault pendulum” (Voir <https://xkcd.com/2201/>)