

Licence de Physique

Relativité Restreinte : Résumé de Cours (4)

Parcours SPRINT & Double Majeure – Année Universitaire 2023–2024

Intervenants : L. Le Guillou & J. Bolmont (Sorbonne Université / LPNHE)

Invariance de la vitesse c de la lumière (dans le vide) — Postulats d'Einstein — Transformations de Lorentz — Conséquences : dilatation du temps, contraction des longueurs, simultanéité — Espace-temps : événements, intervalle d'espace-temps, cône de lumière — Diagrammes d'espace-temps : diagrammes de Minkowski, de Loedel.

1. De la mécanique classique à la relativité restreinte

Limites de la mécanique classique galiléenne. Si la vitesse de propagation d'un rayon lumineux (dans le vide) est c dans un référentiel inertiel donné \mathcal{R} , la mécanique classique prédit que, pour un observateur en translation uniforme à la vitesse v dans le référentiel \mathcal{R} , la vitesse du rayon lumineux deviendra $c' = c + v$ ou $c' = c - v$ dans le référentiel de l'observateur, selon que l'observateur s'approche ou s'éloigne de la source à la vitesse v (loi classique de composition des vitesses, en supposant les deux mouvements colinéaires).

Cette prédiction est à mettre en relation avec l'hypothèse de l'**éther**¹, à la fois comme support des ondes électromagnétiques (ce qui inclut la lumière) et comme référentiel privilégié où les ondes lumineuses se propagent à la vitesse $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ prédite par les équations de Maxwell; en effet, les équations de Maxwell ne sont pas invariantes par les transformations de Galilée. On s'attend ainsi à ce qu'il soit possible expérimentalement de détecter le mouvement relatif d'un observateur par rapport à l'éther, le milieu de propagation des ondes lumineuses (le *vent d'éther*).

Cependant, les différentes expériences visant à mettre en évidence le *vent d'éther* ont toutes donné un résultat négatif : les expériences de Michelson et Morley (1881, puis 1887, souvent répétée et améliorée depuis), de Trouton et Noble (1901-03), etc. Il apparaît que la vitesse de la lumière vaut toujours c dans le vide, quel que soit le référentiel inertiel d'observation considéré, en contradiction flagrante avec les lois de la mécanique de Galilée et Newton. Cette contradiction engendre de vifs débats entre physiciens à la fin du XIX^{ème} siècle; la question de l'existence de l'éther, constitue, avec le problème de la stabilité des atomes suite à la découverte de l'électron ("catastrophe ultraviolette"), ce qu'on désigne parfois comme la "crise de la physique" au tournant du XX^{ème} siècle.

1. Historiquement, l'idée selon laquelle la lumière est une onde qui se propage dans un matériau ténu baptisé "éther", présent partout même dans le vide, est bien plus ancienne que la synthèse de l'électromagnétisme de Maxwell. Christiaan Huygens formule cette hypothèse dans son "*Traité de la Lumière*" dès 1678. Cette idée s'imposera avec la découverte des phénomènes de diffraction et d'interférences.

Solution : la relativité restreinte. Plusieurs physiciens (dont Lorentz, FitzGerald, Poincaré) proposent des solutions formelles *ad hoc* pour réconcilier mécanique classique et électromagnétisme, sans toutefois en tirer toutes les conséquences physiques. A. Einstein propose en 1905 de reconstruire les lois de la mécanique à partir de deux postulats :

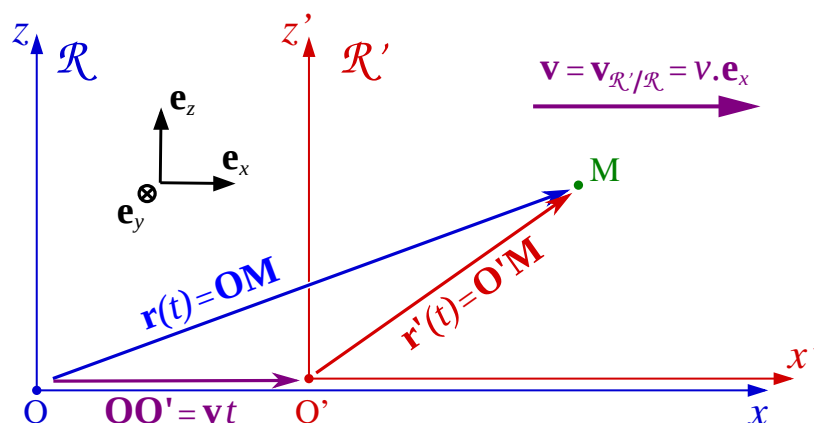
1. **Principe de relativité** : les lois de la physique sont invariantes par changement de référentiel galiléen;
2. **La vitesse de la lumière dans le vide est la même dans tous les référentiels galiléens** : la vitesse c de la lumière dans le vide est invariante par changement de référentiel.

À partir de ces postulats, A. Einstein trouve les nouvelles équations de changement de référentiel (déjà formulées par Lorentz et Poincaré), et construit un nouvel ensemble de lois mécaniques baptisé **relativité restreinte** (*special relativity*), aux conséquences surprenantes et contre-intuitives.

2. Les transformations de Lorentz

À partir des postulats choisis, on montre que le temps n'est pas invariant par changement de référentiel, et que les concepts de temps universel, de longueur invariante, de simultanéité ne sont plus des concepts valides. Lors d'un changement de référentiel, les coordonnées d'espace et de temps se *mélangent*, et il est nécessaire de raisonner sur des **événements**, c'est à dire des points dans l'espace-temps repérés par leurs coordonnées spatiales $\mathbf{r} = (x, y, z)$ et temporelle t .

Transformations spéciales de Lorentz ("boost" de Lorentz). Il s'agit du cas particulier où les axes (Ox) et $(O'x')$ des référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' sont choisis parallèles à la vitesse relative $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$ des deux référentiels (On pourrait raisonner de même en choisissant plutôt les axes $(Oy)/(O'y')$ ou $(Oz)/(O'z')$).



Considérons un **événement** quelconque M se produisant dans le référentiel \mathcal{R} à la position $\mathbf{r} : (x, y, z)$ et à l'instant t . On montre que lorsqu'on passe du référentiel inertiel \mathcal{R} au référentiel inertiel \mathcal{R}' , les

coordonnées $(t, \mathbf{r} : (x, y, z))$ de l'événement M deviennent, dans \mathcal{R}' :

$$\left\{ \begin{array}{l} t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \end{array} \right. \quad \text{i.e.} \quad \left\{ \begin{array}{l} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{array} \right. \quad \text{et réciproquement} \quad \left\{ \begin{array}{l} ct = \gamma(ct' + \beta x') \\ x = \gamma(x' + \beta ct') \\ y = y' \\ z = z' \end{array} \right.$$

où $(t', \mathbf{r}' : (x', y', z'))$ sont les coordonnées du même événement M dans \mathcal{R}' , et où on pose en général :

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c} \quad \text{et} \quad \gamma = \gamma(\mathbf{v}) = (1 - \beta^2)^{-1/2} = (1 - \boldsymbol{\beta}^2)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}.$$

Avec la convention suivante : les origines O et O' des repères des deux référentiels inertiels considérés se confondent à $t = t' = 0$. On appelle cette transformation la **transformation de Lorentz**.

On peut mettre ces équations sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & +\beta\gamma & 0 & 0 \\ +\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Forme générale des transformations de Lorentz. Si on se place dans le cas plus général où la vitesse relative \mathbf{v} de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} n'est pas parallèle aux axes (Ox) et $(O'x')$, les équations des transformations de Lorentz peuvent s'écrire sous la forme générale suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} ct' = \gamma \left(ct - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{r} \right) \\ \mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\gamma - 1) \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v}^2} \mathbf{v} - \gamma \mathbf{v}t \end{array} \right.$$

Ces équations se réduisent au cas précédent quand \mathbf{v} est parallèle aux axes (Ox) et $(O'x')$.

3. Conséquences : dilatation du temps, contraction des longueurs, caractère relatif de la simultanéité

Les transformations de Lorentz ont de nombreuses conséquences pratiques assez surprenantes et contre-intuitives. Le temps n'est plus universel : il s'écoule différemment selon le référentiel considéré. Le concept de simultanéité devient relatif. La synchronisation des horloges dans un référentiel donné nécessite d'élaborer un protocole à base d'échanges de signaux lumineux (basé sur le fait que la vitesse c de la lumière dans le vide est constante et universelle).

Dilatation du temps. Temps propre. Pour deux événements se produisant au même point dans \mathcal{R}' , on aura $\Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c\Delta t) = 0$, et donc $\Delta x = \beta c\Delta t = vt$. L'intervalle de temps $\Delta t'$ vaut ainsi :

$$c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x) = \gamma(1 - \beta^2)c\Delta t = \frac{1}{\gamma}c\Delta t \quad \text{d'où} \quad \Delta t = \gamma\Delta t' > \Delta t'$$

Le temps semble s'écouler plus lentement dans le référentiel \mathcal{R}' : la durée Δt séparant les deux mêmes événements dans \mathcal{R} est supérieure à la durée $\Delta t'$ mesurée dans \mathcal{R}' .

Pour un observateur, le temps $\Delta\tau$ mesuré dans le référentiel qui lui est attaché semble toujours s'écouler plus lentement que dans tout autre référentiel : $\Delta t = \gamma\Delta\tau > \Delta\tau$. Le temps τ est le **temps propre** de l'observateur ; c'est le temps mesuré avec l'horloge personnelle (supposée parfaite) que l'observateur (ou l'objet étudié) transporte avec lui. Le temps propre est un invariant de Lorentz car $\Delta s^2 = c^2\Delta\tau^2$ (cf. section 4.).

Relativité du concept de simultanéité. Si deux événements se produisent à deux endroits différents mais au même instant t' dans le référentiel \mathcal{R}' (événements *simultanés* dans \mathcal{R}'), on aura :

$$c\Delta t = \gamma(c\Delta t' + \beta\Delta x') = \beta\gamma\Delta x' \neq 0,$$

et ces deux événements se produiront ainsi à des instants différents dans le référentiel \mathcal{R} . Deux événements simultanés dans un référentiel inertiel ne le seront pas dans un autre référentiel inertiel : la simultanéité devient ainsi un concept relatif. De plus, pour deux événements simultanés A et B dans \mathcal{R}' , il est possible de trouver des référentiels inertiels où l'événement A aura lieu avant l'événement B , et d'autres référentiels inertiels où B se produira avant A : l'ordre chronologique de certaines paires d'événements peut ainsi dépendre du référentiel de l'observateur (voir ci-après section 4.).

Contraction des longueurs. Longueur propre. La mesure d'une longueur, par exemple à l'aide d'une règle immobile dans le référentiel de l'observateur, consiste *par définition* en une lecture simultanée de la position des extrémités de l'objet à mesurer. On montre de la même manière que dans tout autre référentiel galiléen, un objet en mouvement de **longueur propre** L_0 apparaît contracté dans le référentiel d'un observateur se déplaçant à la vitesse v par rapport à l'objet : la longueur apparente est $L = L_0/\gamma < L_0$.

Equivalence des référentiels inertiels. Conséquence davantage contre-intuitive : comme les référentiels inertiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' sont équivalents, les observateurs dans \mathcal{R} et dans \mathcal{R}' font les mêmes observations (dilatation du temps, contraction des longueurs) pour l'autre référentiel, et ce, sans contradiction. Il s'agit d'un phénomène de "*perspective dans l'espace-temps*".

Invariance de la vitesse c de la lumière dans le vide et redéfinitions des unités. Comme d'une part, la vitesse c de la lumière dans le vide est la même dans tous les référentiels galiléens, et d'autre part, les mesures de fréquence et de durée sont nettement plus précises aujourd'hui que les mesures de distance, la Conférence Générale des Poids et Mesures (CGPM) a décidé en 1983 de redéfinir le mètre à partir de la seconde (la seconde étant définie comme 9 192 631 770 périodes de l'onde émise lors de la transition hyperfine de l'atome de Césium-133 dans son niveau fondamental). La CGPM a ainsi fixé la vitesse de la lumière dans le vide à exactement :

$$c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

et redéfinit le mètre comme la distance parcourue pendant $1/299792458$ seconde par la lumière dans le vide.

4. L'espace-temps : événements, intervalles, lignes d'univers, cône de lumière

Pour raisonner dans le cadre contre-intuitif de la relativité restreinte, on peut considérer que les événements ont lieu dans un **continuum espace-temps** à 4 dimensions doté d'une pseudo-métrique, que l'on appelle aussi l'**espace de Minkowski**. Dans cet espace, un point représente un événement; la position occupée par un objet ponctuel au fil du temps est sa **ligne d'univers** $\tilde{\mathbf{r}}(\tau)$; le **volume d'espace-temps** occupé par un objet non-ponctuel constitue son **tube d'univers**, etc (fig. 1). Un changement de référentiel, décrit par une transformation de Lorentz, correspondra à une transformation géométrique dans l'espace de Minkowski.

Événements. On appellera **événement** un phénomène physique qui se produit dans un référentiel inertiel \mathcal{R} à un instant t donné et à une position \mathbf{r} donnée : les coordonnées (t, \mathbf{r}) sont les **coordonnées spatio-temporelles** de l'événement en question. Comme vu précédemment, on obtient les coordonnées (t', \mathbf{r}') dans un autre référentiel du même événement en utilisant la transformation de Lorentz.

Intervalles d'espace-temps. Pour deux événements A et B séparés par l'intervalle $(\Delta t = t_B - t_A, \Delta x = x_B - x_A)$ dans \mathcal{R} et respectivement par $(\Delta t' = t'_B - t'_A, \Delta x' = x'_B - x'_A)$ dans \mathcal{R}' , on aura :

$$\begin{cases} c\Delta t' &= \gamma (c\Delta t - \beta\Delta x) \\ \Delta x' &= \gamma (\Delta x - \beta c\Delta t) \end{cases}$$

Comme montré précédemment, la distance Δx comme l'intervalle de temps Δt séparant ces événements A et B ne sont pas conservés par changement de référentiel. Par contre, la norme au carré de l'intervalle d'espace-temps Δs^2 est invariante par changement de référentiel :

$$\Delta s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2$$

ou, sous une forme plus générale, dans l'espace à 3 dimensions,

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= c^2(\Delta t)^2 - (\Delta \mathbf{r})^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \\ &= c^2(\Delta t')^2 - (\Delta \mathbf{r}')^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 \end{aligned}$$

La nature de l'intervalle d'espace-temps $\widetilde{\mathbf{AB}}$ entre les événements A et B est fonction du signe de Δs^2 :

- Si $\Delta s^2 > 0$, l'intervalle $\widetilde{\mathbf{AB}}$ est **de genre temps** : On aura forcément $c\Delta t > |\Delta \mathbf{r}|$, et par conséquent, les événements A et B peuvent être les positions successives dans l'espace-temps de la trajectoire d'un mobile se déplaçant à une vitesse $u = |\Delta \mathbf{r}|/\Delta t < c$. L'ordre des événements A et B sera le même dans tous les référentiels galiléens; l'événement A aura toujours lieu avant l'événement B , et pourra en être la cause (principe de causalité).
- Si $\Delta s^2 = 0$, l'intervalle $\widetilde{\mathbf{AB}}$ est **de genre lumière** : $|\Delta \mathbf{r}| = c\Delta t$, ce qui signifie que les événements A et B peuvent être les positions successives d'un rayon lumineux. Pour un événement M quelconque, l'ensemble des points N tels que $|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_M| = c(t_N - t_M)$ constituent la surface du **cône de lumière** de l'événement M .
- Enfin, si $\Delta s^2 < 0$, l'intervalle $\widetilde{\mathbf{AB}}$ est **de genre espace**. La distance $|\Delta \mathbf{r}|$ est supérieure à $c\Delta t$; par conséquent, aucun mobile ne peut aller de l'événement A à l'événement B , pas même un rayon lumineux. Il ne peut exister aucune relation causale entre ces deux événements; l'événement B est en dehors du **cône de lumière** de l'événement A (et réciproquement). De plus l'ordre temporel de ces deux événements dépendra du référentiel choisi (ce qui n'a aucune conséquence, car il ne peut y avoir de lien causal entre A et B).

Passé, futur, “ailleurs” et cône de lumière. Pour un événement donné A , on peut diviser l’espace-temps en différentes régions en fonction du signe de $\Delta s^2 = \widetilde{\mathbf{AM}}^2 = c^2(t_M - t_A)^2 - (\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_A)^2$.

Les événements M pour lesquels $\Delta s^2 > 0$ forment avec l’événement A un intervalle de *genre temps* : ils peuvent être la cause ou la conséquence de A . Ceux pour lesquels $t_M < t_A$ constituent le **passé** de l’événement A , tandis que ceux pour lesquels $t_M > t_A$ constituent le **futur** de A (fig. 1).

Les événements M tels que $\Delta s^2 < 0$ forment avec l’événement A un intervalle de *genre espace* : ils ne peuvent avoir de lien causal avec l’événement A : on désigne souvent cette région du continuum espace-temps comme étant **l’ailleurs** de l’événement A (fig. 1).

Enfin, les événements M tels que $\Delta s^2 = 0$ constituent la frontière entre l’ailleurs d’une part, et le passé ou le futur : l’hyper-surface correspondante s’appelle le **cône de lumière** de l’événement A (en toute rigueur, il s’agit d’un hypercône). Les événements de cette surface peuvent appartenir à la trajectoire d’un rayon lumineux qui arrive en A ou qui part de A (fig. 1).

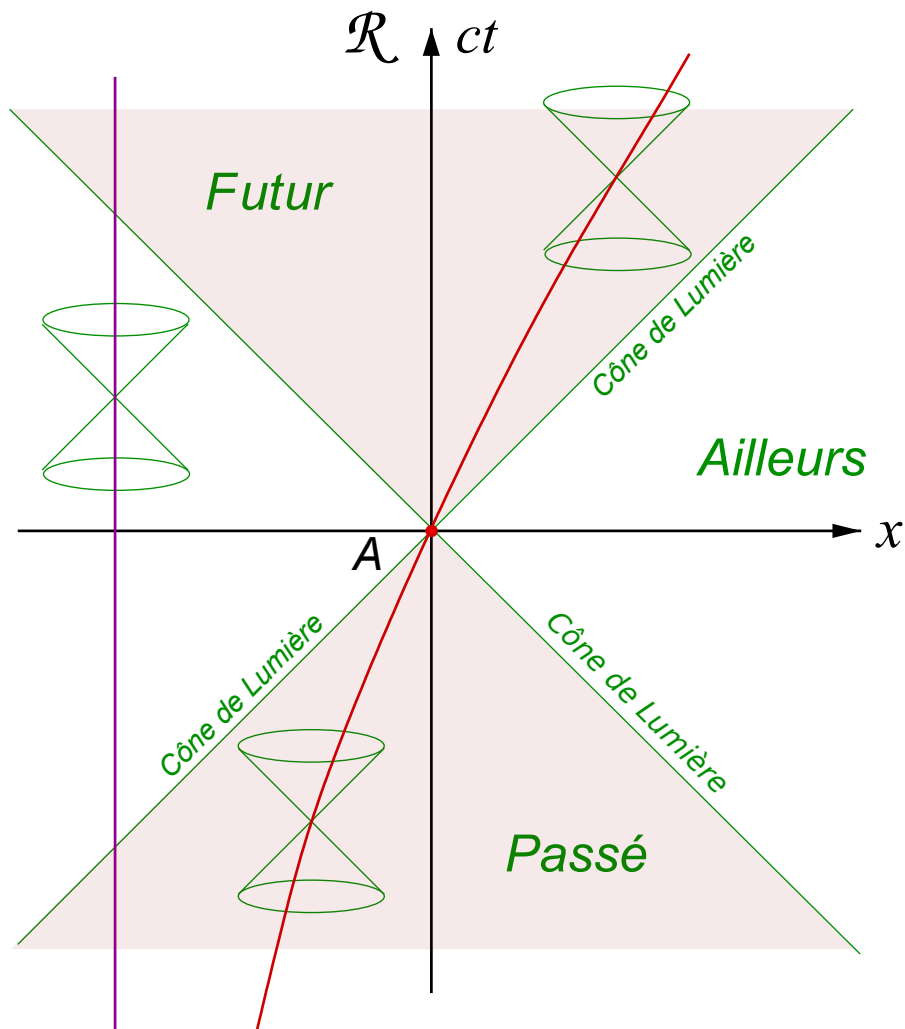


FIGURE 1 – Diagramme d'espace-temps (Minkowski). Représentation de la ligne d'univers d'un objet immobile dans \mathcal{R} (ligne violette), et ligne d'univers d'un objet en mouvement, qui passe par l'origine de \mathcal{R} à $t = 0$ (ligne rouge). Le cône de lumière de l'événement origine A est représenté en vert : il partitionne l'espace-temps en trois régions : d'une part, le **passé** et le **futur** de l'événement A , et d'autre part l'**ailleurs**, ensemble des événements sans relation causale possible avec l'événement A , (les événements de cette dernière région sont "au-delà de l'horizon" de A). On peut bien sûr construire le cône de lumière pour n'importe quel événement. Pour un objet matériel, l'ensemble de sa ligne d'univers est nécessairement comprise dans le cône de lumière de n'importe quel point événement de sa trajectoire dans l'espace-temps.

5. Diagrammes d'espace-temps : diagrammes de Minkowski, diagrammes de Loedel

Afin de se forger une intuition en relativité restreinte, il est souvent utile de représenter les événements sur un **diagramme d'espace-temps** ; cela permet notamment de mieux comprendre les effets d'un changement de référentiel. Il en existe de plusieurs sortes, les plus communs étant les diagrammes de Minkowski et les diagrammes symétriques de Loedel.

5.1. Les diagrammes dits "de Minkowski"

Hermann Minkowski (1864 – 1909) était mathématicien : il a été l'un des enseignants d'Albert Einstein à l'École polytechnique fédérale de Zurich. Avec Poincaré, il est l'un des premiers à avoir proposé de raisonner en relativité dans un espace à 4 dimensions associant les coordonnées de temps et d'espace, le **continuum espace-temps** encore appelé **espace de Minkowski**.

Sur un diagramme de Minkowski, la coordonnée d'espace (x , ou z) est représentée en abscisse, et le temps (t ou ct pour être homogène) en ordonnée. Un point représente un événement ; la succession des points représentant la position d'un objet dans l'espace à des instants t différents est la **ligne d'univers** de cet objet. Si cet objet possède une extension spatiale, on parlera plutôt de **tube d'univers**, autrement dit le volume d'espace-temps qu'occupe un objet au fur et à mesure que le temps s'écoule.

La figure 2 représente un diagramme de Minkowski, avec les axes x et ct associés au référentiel \mathcal{R} , et les axes x' et ct' du référentiel \mathcal{R}' , en translation par rapport à \mathcal{R} à la vitesse v . Les coordonnées d'un événement dans les deux référentiels s'obtiennent en **projetant parallèlement** le point correspondant sur les axes des deux référentiels. Il faut toutefois se souvenir que dans ce type de diagrammes, la graduation des axes n'est pas triviale, et s'obtient en traçant les hyperboles d'équations $c^2t^2 - x^2 = \text{constante}$ et $x^2 - c^2t^2 = \text{constante}$.

Le principe et la construction détaillée d'un diagramme de Minkowski sont présentés dans l'exercice "À la croisée des destinées : diagrammes de Minkowski".

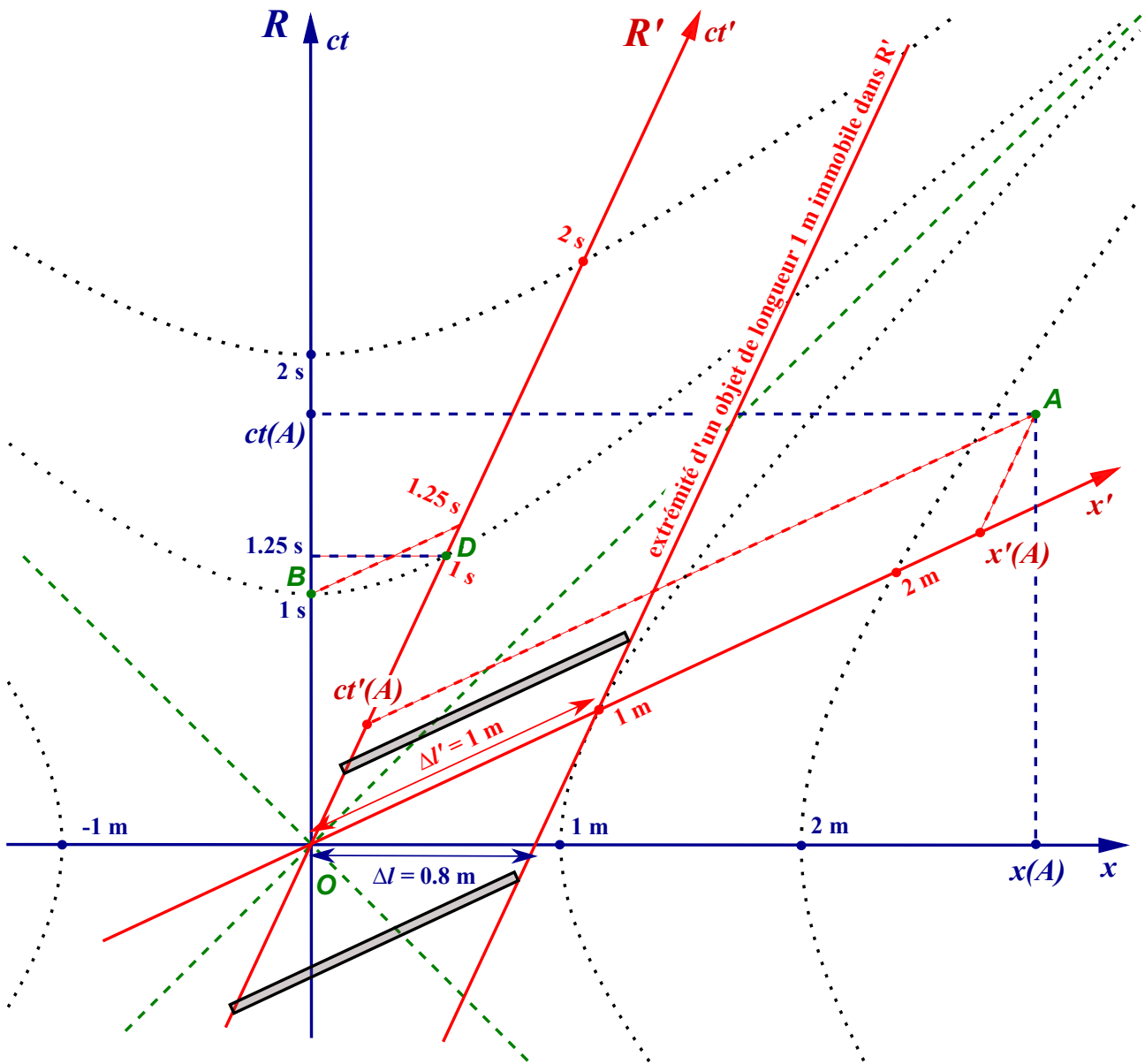


FIGURE 2 – Diagramme de Minkowski. Dans cet exemple, $\beta = 3/5$ et $\gamma = 5/4 = 1.25$. Les axes x et ct du référentiel \mathcal{R} sont représentés en bleu, et les axes x' et ct' du référentiel \mathcal{R}' sont en rouge. On obtient les coordonnées d'un événement, par exemple ici l'événement A , dans les deux référentiels en **projetant parallèlement** ce point sur les axes correspondants. Il faut toutefois être vigilant sur la graduation des axes, qui s'obtient en traçant les hyperboles d'équations $c^2t^2 - x^2 = \text{constante}$ et $x^2 - c^2t^2 = \text{constante}$. La dilatation des temps est illustrée ici par les événements B et D : les événements O et B , ayant lieu tous deux successivement en $x = 0$ dans le référentiel \mathcal{R} avec un intervalle de temps de $\Delta t = 1 \text{ s}$, sont séparés dans \mathcal{R}' par $\Delta t' = 1.25 \text{ s}$. Symétriquement, les événements O et D ont lieu successivement à la même position $x' = 0$ dans \mathcal{R}' à une seconde d'intervalle ($\Delta t' = 1 \text{ s}$), et sont séparés par $\Delta t = 1.25 \text{ s}$ dans le référentiel \mathcal{R} (dilatation des temps). On a aussi représenté un objet de longueur $\Delta l' = 1 \text{ m}$ au repos dans \mathcal{R}' , et dont la longueur dans \mathcal{R} n'est plus que de 0.8 m (contraction des longueurs).

5.2. Les diagrammes symétriques de Loedel

Les diagrammes de Minkowski sont les plus répandus, mais ils présentent deux inconvénients : d'une part la graduation des axes n'est pas triviale, ce qui rend l'interprétation moins intuitive ; de plus, la représentation graphique est différente pour les deux référentiels considérés, ce qui est un peu contradictoire avec l'esprit même de la théorie et du principe de relativité ("tous les référentiels galiléens sont équivalents"). Plusieurs physiciens ont proposé des variantes qui rétablissent visuellement la symétrie entre les deux référentiels. On attribue à Enrique Loedel Palumbo (1901–1962), physicien uruguayen, la parenté de ces diagrammes symétriques.

La figure 3 présente un exemple de diagramme de Loedel. Le diagramme est construit de telle sorte que l'axe des t' est orthogonal à l'axe des x , et réciproquement, l'axe des t est orthogonal à celui des x' . Sur ces diagrammes, l'angle θ vérifie

$$\sin \theta = \beta = \frac{v}{c} \quad \text{et par conséquent} \quad \cos \theta = \sqrt{1 - \beta^2} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma(v)}.$$

Comme précédemment, les coordonnées d'un événement dans un référentiel donné s'obtiennent en projetant le point correspondant parallèlement aux axes de ce référentiel. Les graduations des axes sont identiques pour les deux référentiels, ce qui simplifie la construction et l'interprétation de ces diagrammes. Le facteur $1/\gamma(v)$ apparaît naturellement lors des projections parallèles (cf. fig. 3).

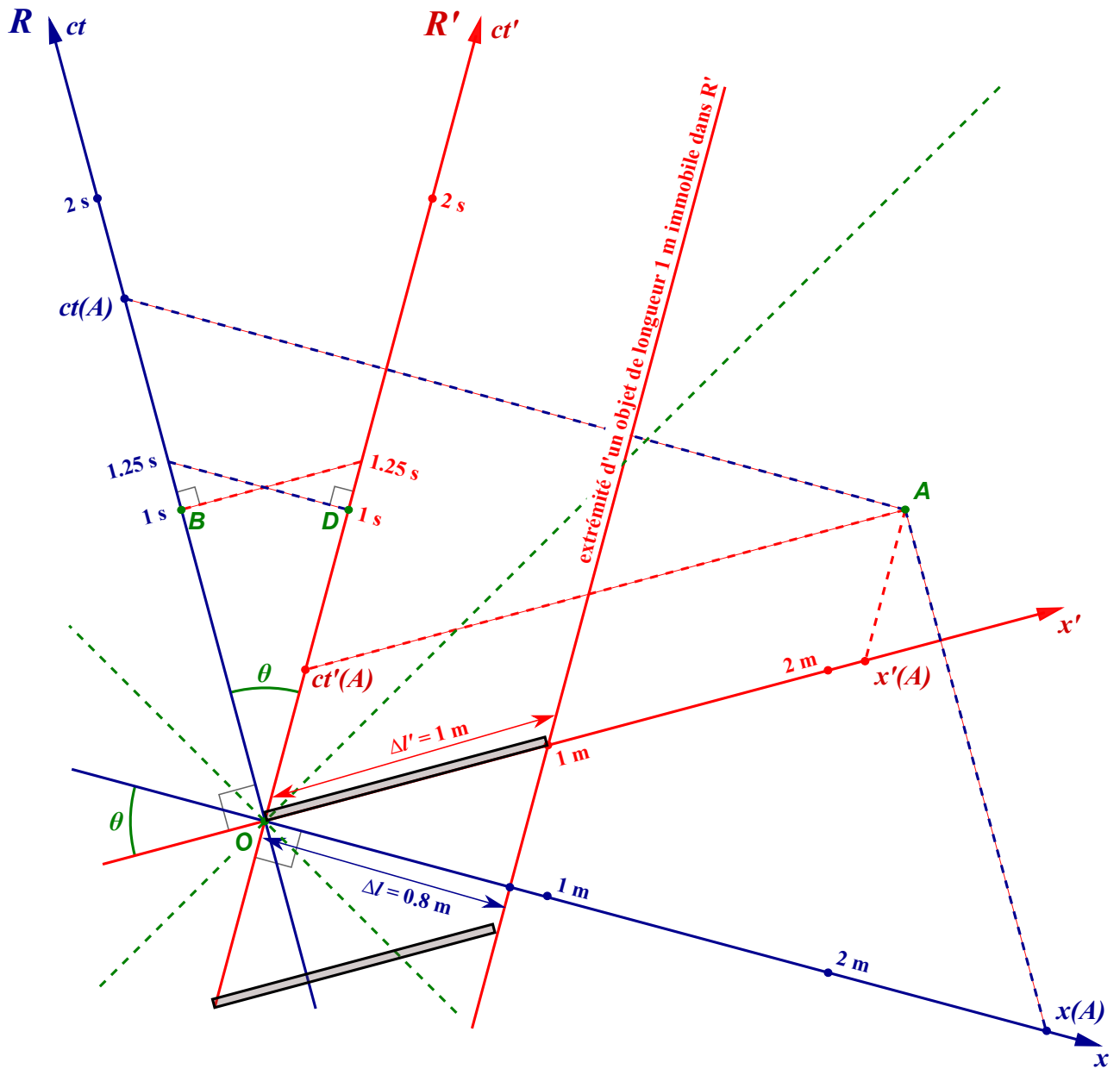


FIGURE 3 – Diagramme de Loedel. Dans cet exemple, $\beta = 3/5$ et $\gamma = 5/4 = 1.25$. Les axes x et ct du référentiel \mathcal{R} sont représentés en bleu, et les axes x' et ct' du référentiel \mathcal{R}' sont en rouge. On obtient les coordonnées d'un événement, par exemple ici l'événement A , dans les deux référentiels en **projetant parallèlement** ce point sur les axes correspondants. Les graduations sont identiques sur les axes de \mathcal{R} et de \mathcal{R}' . La dilatation des temps est illustrée ici par les événements B et D : les événements O et B , ayant lieu tous deux successivement en $x = 0$ dans le référentiel \mathcal{R} avec un intervalle de temps de $\Delta t = 1$ s, sont séparés dans \mathcal{R}' par $\Delta t' = 1.25$ s. Symétriquement, les événements O et D ont lieu successivement à la même position $x' = 0$ dans \mathcal{R}' à une seconde d'intervalle ($\Delta t' = 1$ s), et sont séparés par $\Delta t = 1.25$ s dans le référentiel \mathcal{R} (dilatation des temps). On a aussi représenté un objet de longueur $\Delta l' = 1$ m au repos dans \mathcal{R}' , et dont la longueur dans \mathcal{R} n'est plus que de 0.8 m (contraction des longueurs).

Bibliographie

D. Langlois, *Introduction à la relativité*, Vuibert (2011) : chapitres 1, 2 et 4.

M. Boratav & R. Kerner, *Relativité*, Ellipses (1991) : chapitres 2, 3 et 4.

W. Rindler, *Relativity*, Oxford Press (2006) : chapitres 1, 2 et 3.

A. Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* (“*De l’électrodynamique des corps en mouvement*”), *Annalen der Physik* (1905), vol. 322, numéro 10, pages 891–921. [DOI:10.1002/andp.19053221004](https://doi.org/10.1002/andp.19053221004)