Licence de Physique — Relativité Restreinte

Exercices

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2023–2024

Intervenants : L. Le Guillou & J. Bolmont (Sorbonne Université / LPNHE)

TD 4

Transformations de Lorentz — Conséquences : dilatation du temps, contraction des longueurs, simultanéité — Intervalle d'espace-temps — Temps de vie des muons — Concept d'espace-temps — Diagrammes d'espace-temps : diagrammes de Loedel, de Minkowski

1. Conséquences de la transformation de Lorentz

On considère un référentiel $\mathcal{R}$, inertiel, et un second référentiel $\mathcal{R}'$, en translation uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ à la vitesse $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$. On choisit dans chaque référentiel une origine (O et O', respectivement), et on munit les deux référentiels d'axes orthonormés (Ox, Oy, Oz) et $(O'x', O'y', O'z')$ orientés de la même manière, et de telle façon que le mouvement relatif des deux référentiels soit selon Ox et $O'x'$: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = v\,\mathbf{e}_x$.

Enfin, on choisira l'origine des temps dans les deux référentiels de telle sorte que lorsque les origines O et O' se confondent, on a $t = t' = 0$.

1.1 — Écrivez les équations de la transformation de Lorentz qui permettent de passer des coordonnées d'un événement M dans le référentiel $\mathcal{R}$ aux coordonnées du même événement M dans le référentiel $\mathcal{R}'$. De même, écrivez les équations de la transformation inverse. Vérifiez qu'en appliquant successivement ces deux transformations, on obtient bien l'identité.

1.2 — Supposons que deux événements successifs A et B se produisent au même point $x'_A = x'_B$ dans le référentiel $\mathcal{R}'$. Dans $\mathcal{R}'$, ces deux événements sont séparés par une durée $\Delta t' = 1\,\mathrm{s}$. Que vaut la durée entre les événements A et B dans le référentiel $\mathcal{R}$?

Faites de même pour deux événements C et D qui se produisent cette fois au même point $x_C = x_D$ dans $\mathcal{R}$, séparés par 1 s dans $\mathcal{R}$. Commentez.

1.3 — Imaginons deux événements E et F qui se produisent au même instant t, en deux points différents d'abscisses x_E et x_F, avec $x_E < x_F$ dans le référentiel $\mathcal{R}$. Ces deux événements sont-ils aussi simultanés dans le référentiel $\mathcal{R}'$?

Qu'en est-il dans un référentiel $\mathcal{R}''$ qui se déplace à la vitesse $(-\mathbf{v})$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$? Commentez.

1.4 — Considérons un objet de longueur ℓ au repos dans $\mathcal{R}$. La mesure de sa longueur consiste à repérer la position des extrémités M et N de cet objet, *au même instant*, dans le référentiel où on effectue la mesure. Quelle longueur trouve-t-on dans $\mathcal{R}$? Et dans $\mathcal{R}'$?

Dans tout l'exercice, on pourra prendre $v = 3c/5$ pour les applications numériques.

2. Invariance de l'intervalle d'espace-temps

2.1 — Montrez que la transformation de Lorentz entraîne l'invariance de l'intervalle élémentaire d'espace-temps $\mathrm{d}s^2$:

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\mathbf{r}^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 \tag{1}$$

2.2 — Si $\mathrm{d}\mathbf{r}$ est l'élément d'espace parcouru par un objet matériel pendant la durée $\mathrm{d}t$, montrez que la pseudo-norme carrée de l'intervalle élémentaire d'espace-temps $\mathrm{d}s^2$ peut aussi s'écrire : $\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}\tau^2$, où τ est le temps propre de l'objet en question. Déduisez-en que l'intervalle de temps propre est aussi un invariant de Lorentz.

3. Temps de vie des muons atmosphériques

Les muons[1] sont des particules élémentaires instables, notées μ : le muon μ^-, sorte de cousin plus lourd de l'électron, et son anti-particule, l'anti-muon μ^+. Sur Terre, ils sont essentiellement produits par l'interaction de rayons cosmiques de haute énergie avec la partie supérieure de l'atmosphère terrestre, qui, par collisions successives avec les molécules de l'air, engendrent des gerbes de particules descendantes (fig. 1). Parmi les particules produites (pions, muons, etc), ce sont principalement les muons qui atteignent le sol (les pions ont une durée de vie trop brève). Le flux de muons au niveau de la mer est approximativement de 170 muons par mètre carré et par seconde.

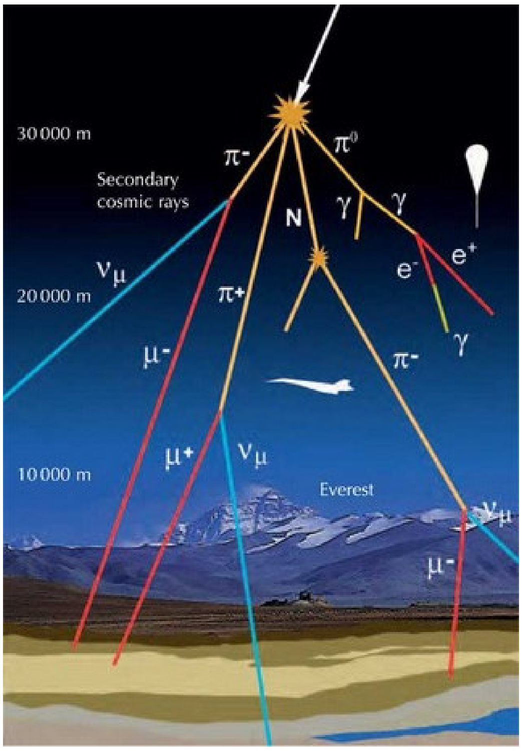


Fig. 1 – Schéma (simplifié) d'une gerbe atmosphérique produite par un rayon cosmique de haute énergie.

1. On les a initialement appelés mu-mésons, ou encore mésotrons, avant de finalement les nommer "muons".

Les muons sont instables et se désintègrent spontanément en un électron et deux neutrinos, selon la réaction :

$$\mu^- \longrightarrow \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e} + \nu_\mu$$

De même, l'anti-muon se désintègre symétriquement en un positon et deux neutrinos,

$$\mu^+ \longrightarrow \mathrm{e}^+ + \nu_\mathrm{e} + \bar{\nu}_\mu$$

La durée de vie moyenne des muons est $\tau = 2.2\,\mu$s au repos. Pour une population de muons donnée, le nombre de muons diminue avec le temps selon une loi exponentielle,

$$N(t) = N_0\, e^{-t/\tau}.$$

où N_0 est le nombre de muons à l'instant $t = 0$ choisi comme origine du temps. Au fur et à mesure de leur descente vers le sol, les muons des gerbes atmosphériques se désintègrent ainsi progressivement.

En 1941, Bruno Rossi (1905-1993), physicien italo-américain, et son assistant David Hall mesurent le flux de muons sur un dénivelé de 1624 m entre Echo Lake (3240 m d'altitude) et Denver (1616 m), en utilisant un dispositif de comptage à base de plaques métalliques (pour freiner les muons incidents) et de plusieurs compteurs Geiger-Müller. Ils constatent que le flux de muons ne décroît pas aussi rapidement qu'attendu lorsqu'on se rapproche du niveau de la mer [B. Rossi et D. B. Hall, Phys. Rev. **59**, 223 (1941)].

La mesure sera refaite en 1962, par David H. Frisch (1918-1991) et James H. Smith au moyen d'un détecteur constitué de plaques de fer (toujours pour freiner les muons, mais aussi pour sélectionner une gamme de vitesse en choisissant une certaine épaisseur de fer) et de scintillateurs "plastique" : lorsqu'un muon freiné par les plaques de fer traverse le scintillateur, un peu de lumière est émise, et cette émission est détectée au moyen d'un photomultiplicateur. Si, de plus, le muon, ralenti, se désintègre dans le détecteur, un second signal signe la présence de l'électron produit. La présence de ces deux signaux successifs confirme que la particule incidente est bien un muon. De plus, dans ce cas la distribution des durées entre le signal du muon fortement ralenti et le signal de l'électron est une exponentielle décroissante, qui permet éventuellement de re-mesurer la durée de vie moyenne du muon au repos [D. H. Frisch et J. H. Smith, *Measurement of the Relativistic Time Dilation Using μ-Mesons*. American Journal of Physics **31**(5), 342–355].

D. H. Frisch et J. H. Smith effectuent la mesure au sommet du Mont Washington (New Hampshire, États-Unis, 1916 m d'altitude), puis la refont de retour au MIT à Cambridge (Massachusetts), quasiment au niveau de la mer (env. 4 m d'altitude).

3.1 — Connaissant la durée de vie moyenne des muons, et en considérant que leur vitesse est très proche de celle de la lumière, estimez leur libre parcours moyen dans l'atmosphère (on néglige ici les éventuelles interactions avec l'air, peu dense).

3.2 — Frisch et Smith comptent 568 muons par heure au sommet du Mont Washington. Combien faut-il de temps aux muons pour parcourir verticalement la distance entre le sommet et le site proche du niveau de la mer ? En supposant que l'efficacité de détection des muons de leur dispositif est constante, estimez numériquement le taux de muons attendus (par heure) au niveau de la mer.

3.3 — Frisch et Smith déplacent leur dispositif en bas de la montagne, et comptent cette fois 412 muons par heure au niveau de la mer. Interprétez ce résultat dans le cadre relativiste, dans le référentiel terrestre (supposé ici galiléen). Déduisez-en le facteur $\gamma(v)$ des muons, et la vitesse v des muons par rapport au sol.

3.4 — Interprétez le phénomène dans le référentiel propre des muons, où leur durée de vie moyenne est $\tau = 2.2\,\mu$s.

L'expérience de David H. Frisch et James H. Smith a fait l'objet d'un film, *Time Dilation : An Experiment With Mu-Mesons* (1962), où Frisch et Smith présentent l'expérience au fur et à mesure de son exécution. Le film est disponible en ligne : https://www.youtube.com/watch?v=rbzt8gDSYIM

4. À la croisée des destinées : lignes d'univers et diagrammes de Minkowski

L'objectif de cet exercice est de présenter un autre type de diagrammes d'espace-temps, parfois désignés comme "diagrammes de Minkowski". Ces diagrammes sont plus délicats à utiliser car la graduation des axes demande quelques précautions.

Leia et Luke se déplacent avec une vitesse relative constante v. L'axe $\mathbf{e_x}$ des abcisses de Leia est orienté selon la vitesse de Luke, l'axe $\mathbf{e_x}'$ des abcisses de Luke étant opposé à la vitesse de Leia.

4.1 — Tracez les lignes d'univers, c'est à dire les lignes constituées de l'ensemble des événements des vies respectives de Leia et de Luke :

(i) sur un graphe d'espace-temps (x, t) dans le repère de Leia.

(ii) sur un graphe d'espace-temps (x', t') dans le repère de Luke.

Luke et Leia mettent leurs montres à $t = t' = 0$ lorsqu'ils se croisent : autrement dit, $x = x' = 0$ quand $t = t' = 0$.

4.2 — Représentez, sur le graphe (x, t), deux événements A et B. Calculer les intervalles de coordonnées Δt, Δx, Δy, Δz entre A et B, pour Leia, en fonction des intervalles $\Delta t'$, $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$ pour Luke. Calculer $c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2$.

4.3 — Représentez, sur le graphe (x, t), deux événements C et D de la vie de Luke. Calculez la valeur de l'intervalle Δt entre C et D pour Leia, en fonction de $\Delta t'$, pour Luke, et de la vitesse de celui-ci par rapport à celle-là. Pour donner une idée de l'effet en question, envisagez le cas $v = 3c/5$, et $\Delta t' = 1\,\mathrm{s}$.

4.4 — Luke tient un sabre laser tendu vers l'avant (c'est à dire selon l'axe $\mathbf{e_x}'$). Déterminez et représentez la ligne d'univers de la pointe du sabre de Luke sur le graphe (x, t). Quelle définition peut adopter Leia pour la grandeur qu'elle va appeler "longueur du sabre de Luke" ? Calculez cette longueur $\Delta\ell$ en fonction de la longueur $\Delta\ell'$ pour Luke et de sa vitesse. Envisagez le cas $v = 3c/5$, $\Delta\ell' = 1\,\mathrm{m}$.

4.5 — Tracez sur le graphe (x, t) :

(i) quelques lignes d'univers du réseau $x' = \mathrm{cte}$ pour Luke.

(ii) quelques lignes du réseau $t' = \mathrm{cte}$ pour Luke.

4.6 — Quelles sont, sur ce graphe, les lignes qui représentent les axes t' et x' de Luke ? Soit un événement A. Représentez, sur le graphe (x, t), ses coordonnées pour Leia et pour Luke respectivement.

4.7 — Reste à graduer les axes t' et x' sur le graphe (x, t).

(i) Représentez sur le graphe la partie $t > 0$ de l'hyperbole $t^2 - x^2/c^2 = 1\,\mathrm{s}^2$. à quelle valeur de t correspond son intersection avec l'axe t ? A quelle valeur de t' correspond son intersection avec la représentation de l'axe t' ?

(ii) Mêmes questions à propos de l'hyperbole $x^2 - c^2t^2 = 1\,\mathrm{m}^2$ et de ses intersections avec les axes x et x'.

4.8 — Représentez sur le graphique :

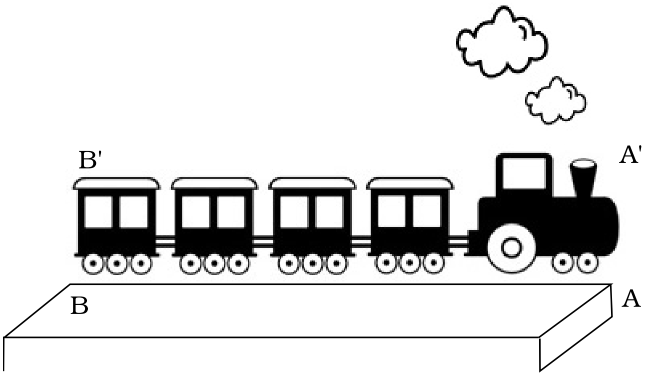
(i) le temps t de l'événement ($t' = 1\,\mathrm{s}$, $x' = 0$) de la vie de Luke.

(ii) la longueur ℓ attribuée au sabre de Luke par Leia.

5. Contraction des longueurs et ordre temporel des événements

L'exercice suivant est un "classique académique" : il n'existe bien évidemment pas de train suffisamment rapide pour que les effets relativistes soient raisonnablement mesurables. Cet exemple permet toutefois d'illustrer les effets de perspectives dans l'espace-temps. Il existe un certain nombre de variantes de ce problème, avec par exemple deux trains qui se croisent, etc. Une variante plus complexe est le problème célèbre de "la règle et du trou", traité plus loin dans une déclinaison cinématographique.

On considère un train de longueur L se déplaçant à la vitesse v et passant devant un quai de gare sans s'arrêter. La longueur du quai est aussi L et lors d'un précédent voyage, le train s'étant arrêté, le chef de gare et le chauffeur du train ont pu vérifier à l'arrêt que train et quai avaient exactement la même longueur.



Lors de ce passage par la station, le train se déplace à vitesse constante et ne s'arrête pas en gare. On considère donc 4 événements :

- P La tête du train A' coïncide avec l'arrière du quai B.
- Q La tête du train A' (avec la locomotive et le conducteur) coïncide avec l'avant du quai A (où se tient le chef de gare).
- R La queue du train B' coïncide avec l'arrière du quai B.
- S La queue du train B' coïncide avec l'avant du quai A.

Pour simplifier l'analyse, on supposera que le chef de gare (A) et le conducteur du train (A') synchronisent leurs horloges respectives à $t = t' = 0$ lorsqu'ils se croisent. On supposera aussi qu'on dispose d'observateurs et d'horloges en queue de train et à l'arrière du quai, et que toutes les horloges d'un référentiel donné ont été préalablement synchronisées entre elles (par des échanges de signaux lumineux).

5.1 — Établissez les coordonnées spatio-temporelles des 4 événements P, Q, R et S dans les deux référentiels, $\mathcal{R}$ (le quai) et $\mathcal{R}'$ (le train). On pourra se servir de la transformation de Lorentz.

5.2 — Quelle est la longueur du train dans son référentiel $\mathcal{R}'$? vu du quai (référentiel $\mathcal{R}$) ?

5.3 — Quelle est la longueur du quai vu dans le référentiel $\mathcal{R}'$ du train ?

5.4 — Commentez l'ordre des événements Q et R dans les 2 référentiels. Qu'en concluez-vous ? Est-ce cohérent avec les points de vue des deux observateurs sur les longueurs du train et du quai ?

5.5 — Quelle est nécessairement la nature de l'intervalle d'espace-temps $\widetilde{QR}$? Quelles sont les conséquences en terme de causalité ?

5.6 — Tracez une représentation des tubes d'Univers du train et du quai dans les deux référentiels. Commentez.

6. Effet Doppler (relativiste)

Leia et Han ont une vitesse relative v constante. Leur coïncidence est prise, par tous deux, comme événement origine O. Leia choisit son axe x selon la vitesse de Han qui, lui, choisit son axe x' opposé à la vitesse de Leia. À intervalles réguliers à sa montre Han émet (événements O, E_1, E_2, E_3, $\ldots$) des éclats lumineux que Leia reçoit (événements O, R_1, R_2, R_3, $\ldots$).

6.1 — Représentez ce scénario (lignes d'univers de Leia, de Han, de la lumière et événements divers) sur un graphe d'espace-temps (x, t) dans le repère de Leia et sur un graphe d'espace-temps (x', t') dans le repère de Han.

6.2 — Indiquez sur le graphe de Leia les intervalles de coordonnées Δx et Δt entre les deux événements O et E_1 observés par Leia.

6.3 — Calculez sans transformation de Lorentz, Δt en fonction de v et de l'intervalle $\Delta\tau$ entre les deux émissions O et E_1 à la montre de Han.

6.4 — Calculez l'intervalle de temps Δt_R entre deux réceptions O et R_1 de ces éclats vus par Leia. Interprétez.

6.5 — Déduisez-en la relation entre la fréquence d'émission des signaux ν_E par Han et la fréquence de réception ν_R par Leia.

7. Forme vectorielle des transformations de Lorentz

On considère deux référentiels inertiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Le référentiel $\mathcal{R}'$ est en translation uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ à une vitesse $\mathbf{v}$. On adopte la convention habituelle : à $t = t' = 0$, les origines O et O' se confondent. Par contre, on ne fait aucune hypothèse particulière sur l'orientation des axes des repères $(Oxyz)$ et $(O'x'y'z')$ des deux référentiels : leurs orientations sont quelconques.

En utilisant la propriété d'isotropie de l'espace, et en décomposant les vecteurs $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r'}$ selon des composantes perpendiculaires et parallèles au mouvement, établissez les transformations de Lorentz sous forme vectorielle, c'est-à-dire donnant t' et $\mathbf{r}'$ en fonction de t et $\mathbf{r}$ et $\mathbf{v}$, la vitesse relative du repère (x', y', z') par rapport au repère (x, y, z).

NB : on pourra commencer par étudier le cas particulier où $\mathcal{R}'$ se déplace le long de l'axe x de $\mathcal{R}$.

8. L'attaque de l'Etoile Noire

Pour détruire l'Étoile Noire, Luke envisage de survoler parallèlement sa surface afin de faire pénétrer discrètement son vaisseau (de longueur L) par un orifice de l'Étoile de même diamètre L (figure 2). Son vaisseau atteignant sans difficulté la vitesse $v = \sqrt{3}c/2 \simeq 0.87c$, Luke compte profiter de la contraction des longueurs : dans le référentiel de l'Étoile Noire, son vaisseau apparaîtra plus court et pourra donc passer sans difficulté par l'ouverture de largeur L.

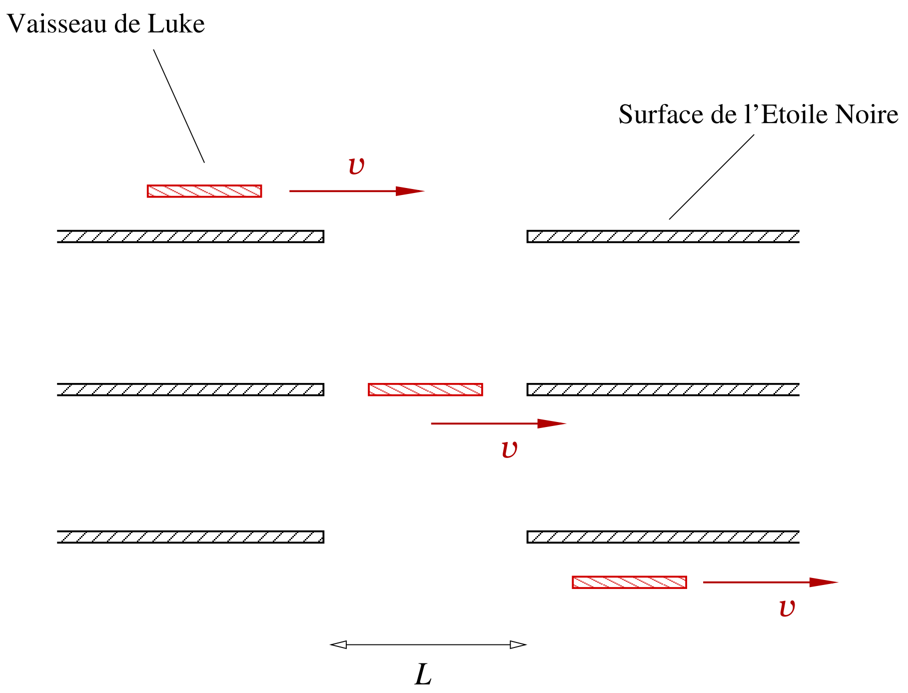


Fig. 2 – Plan d'attaque de Luke, du point de vue du référentiel de l'Étoile Noire.

8.1 — Que vaut le facteur $\gamma(v)$ du vaisseau de Luke dans le référentiel de l'Étoile Noire (supposé galiléen) ?

8.2 — Dans le référentiel de l'Étoile Noire, quelle sera la longueur du vaisseau de Luke (assimilé à un segment de droite) ? Le vaisseau pourra-t-il pénétrer par l'ouverture de diamètre L ?

8.3 — L'amiral de la flotte fait toutefois remarquer que dans le référentiel de son vaisseau, c'est le trou à la surface de l'Étoile Noire qui paraîtra plus petit et que le plan de Luke est par conséquent voué à l'échec. Quelle est effectivement la longueur apparente du trou dans le référentiel $\mathcal{R}'$ du vaisseau de Luke ?

Afin de réconcilier les deux points de vue, on se propose de modéliser les trajectoires respectives du vaisseau et de la surface de l'Étoile Noire dans les deux référentiels suivants :

— Le référentiel $\mathcal{R}$ représenté sur la figure 3 : dans $\mathcal{R}$, la surface de l'Étoile Noire se déplace en translation uniforme selon $\mathbf{e_z}$ avec une vitesse faible $u \ll c$. À $t = 0$, la surface de l'Étoile Noire se confond avec le plan xOy. Dans ce même référentiel $\mathcal{R}$, le vaisseau de Luke se déplace sur l'axe Ox, à la vitesse $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e_x}$, de telle sorte que le centre du vaisseau se trouve à l'origine O à $t = t' = 0$.

— Le référentiel $\mathcal{R}'$ solidaire du vaisseau de Luke, en translation uniforme par rapport au référentiel $\mathcal{R}$: $\mathbf{v}\,(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v\,\mathbf{e_x}$. L'origine O' du référentiel $\mathcal{R}'$ est prise au centre du vaisseau. Elle se confond avec O à $t = t' = 0$.

8.4 — Écrivez la transformation de Lorentz permettant de passer du référentiel $\mathcal{R}$ au référentiel $\mathcal{R}'$. De même, écrivez la transformation inverse.

8.5 — Dans le référentiel $\mathcal{R}$, quelle est la position $x(O')$ du centre du vaisseau en fonction du temps t ? À $t = 0$, que valent les abscisses des extrémités avant $x(A')$ et arrière $x(B')$ du vaisseau, dans le référentiel $\mathcal{R}$? Au même instant $t = 0$, que valent les abscisses $x(P)$ et $x(Q)$ des extrémités du trou ? De ce point de vue, le vaisseau peut-il effectivement passer par le trou ?

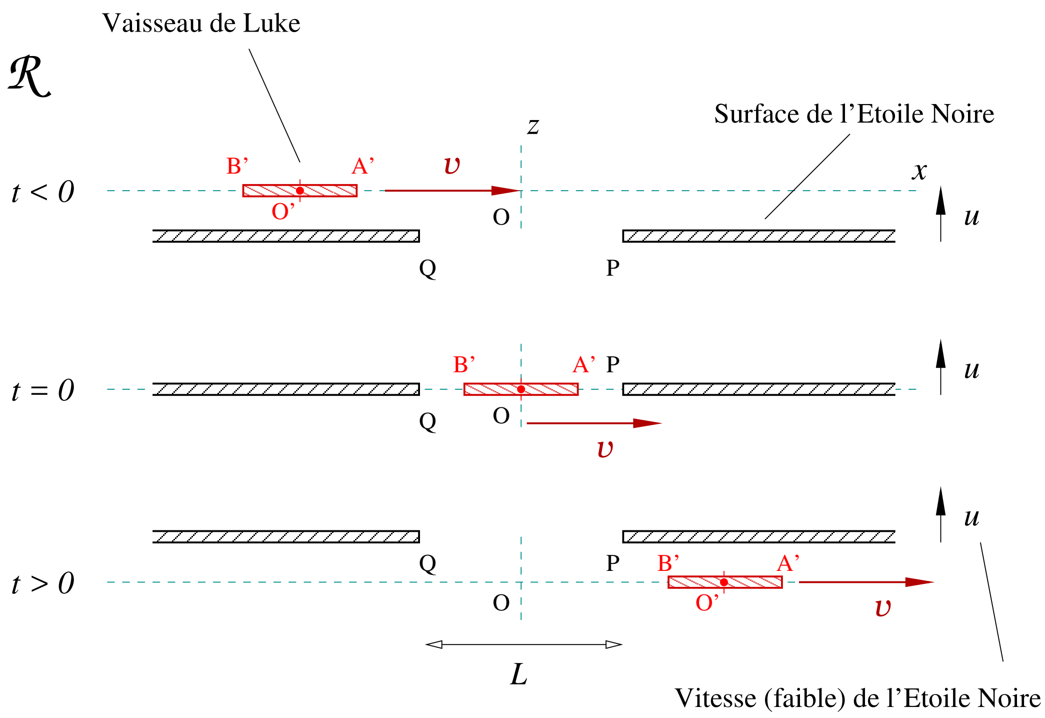


Fig. 3 – Plan d'attaque de Luke pour détruire l'étoile noire, vu dans le référentiel $\mathcal{R}$. Dans ce référentiel, le vaisseau se déplace à la vitesse v le long de l'axe des x, tandis que la surface de l'Étoile Noire se déplace à la vitesse faible $u \ll c$ selon l'axe des z.

On s'intéresse maintenant aux mêmes événements, mais vus dans le référentiel $\mathcal{R}'$ solidaire du vaisseau.

8.6 — Dans le référentiel $\mathcal{R}'$ dessinez dans le plan $x'O'z'$ le vaisseau de longueur L, en repérant la position de ses 2 extrémités. Faites un dessin assez large, que l'on complétera aux questions suivantes.

8.7 — Soit un point $M(x, y, z)$ quelconque de la surface de l'Étoile Noire. On a nécessairement x dans l'intervalle $]-\infty, -L/2] \cup [+L/2, +\infty[$. Que vaut z en fonction du temps t dans $\mathcal{R}$?

8.8 — Déterminez les coordonnées (x', y', z') des points M de la surface de l'Étoile Noire en fonction du temps t' dans $\mathcal{R}'$. Quel est le lieu des points M de la surface à l'instant $t' = 0$ dans le plan $x'O'z'$? Dessinez la position du plan de la surface de l'Étoile Noire à $t' = 0$ sur le dessin précédent.

8.9 — Que valent les coordonnées des extrémités P et Q du trou dans le référentiel $\mathcal{R}$? Déduisez-en l'équation de la trajectoire $z' = f(x')$ pour chacun de ces deux points dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

8.10 — Calculez la position de l'intersection des trajectoires des extrémités P et Q avec l'axe des x'. Dessinez les trajectoires de P et Q dans le plan $x'O'z'$.

8.11 — Décrivez la trajectoire de la surface de l'Étoile Noire dans le référentiel $\mathcal{R}'$ du vaisseau. À votre avis, qui a raison de l'amiral de la flotte ou de Luke ? Luke doit-il retourner sur Dagobah auprès de Yoda parfaire sa maîtrise de la relativité restreinte ?

Cet exercice est une déclinaison *GeorgeLucaesque* du célèbre problème relativiste connu comme *"le paradoxe de la règle et du trou"*, où on considère une règle de longueur L que l'on fait glisser sur une table dans laquelle il y a un trou de même longueur. Ce paradoxe a été longuement débattu, notamment par Rindler (American Journal of Physics 29, 365 (1961) ; `https://doi.org/10.1119/1.1937789`).

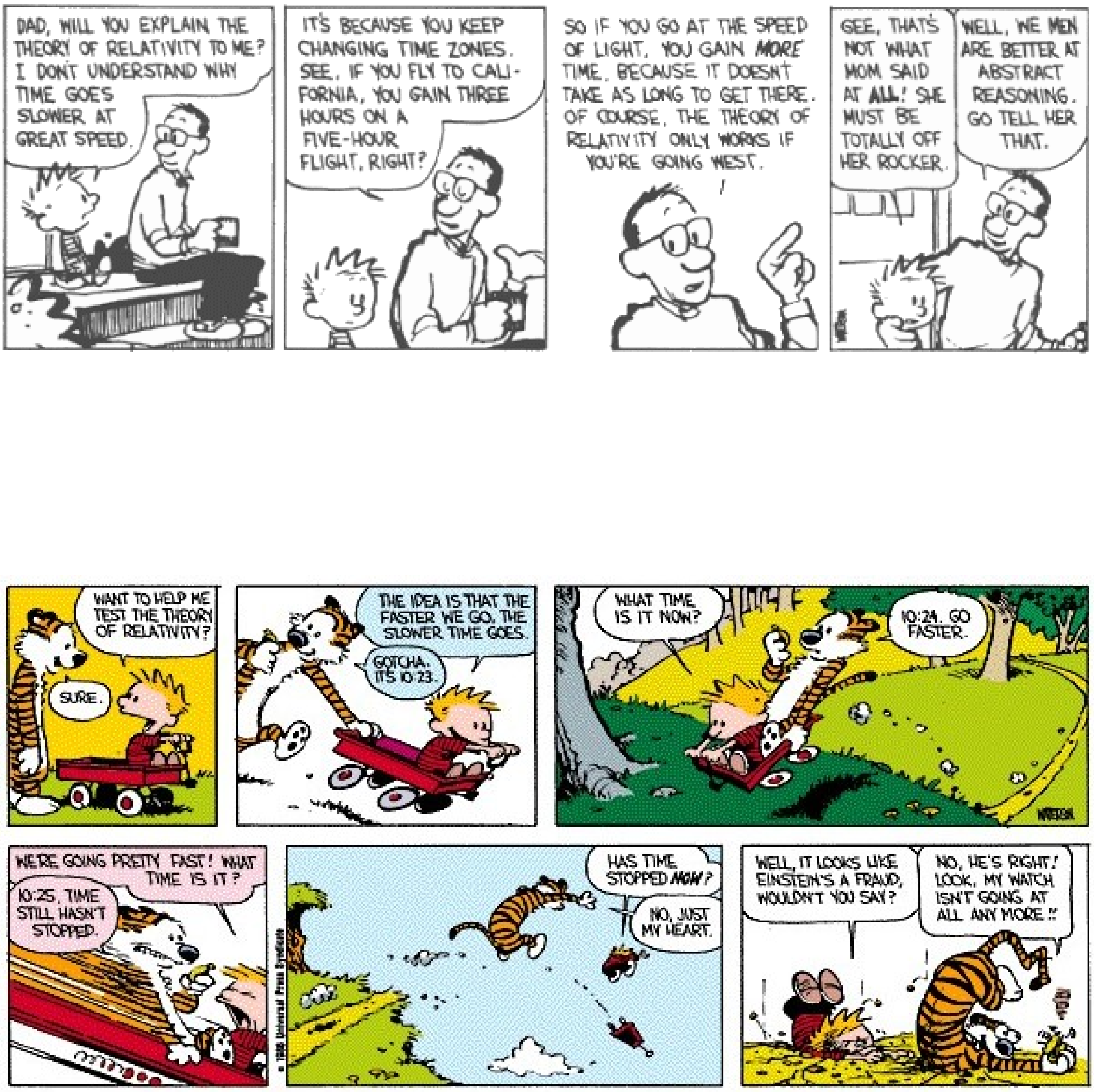


Fig. 4 – Calvin & Hobbes, Bill Waterson.