

## EXERCICES — CORRIGÉ

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2024–2025

Intervenants : L. Le Guillou & J. Bolmont (Sorbonne Université / LPNHE)

### TD 4

Transformations de Lorentz — Conséquences : dilatation du temps, contraction des longueurs, simultanéité — Intervalle d'espace-temps — Temps de vie des muons — Concept d'espace-temps — Diagrammes d'espace-temps : diagrammes de Loedel, de Minkowski

## 1. Conséquences de la transformation de Lorentz

On considère un référentiel  $\mathcal{R}$ , inertiel, et un second référentiel  $\mathcal{R}'$ , en translation uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$  à la vitesse  $\mathbf{v} = v_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ . On choisit dans chaque référentiel une origine ( $O$  et  $O'$ , respectivement), et on munit les deux référentiels d'axes orthonormés  $(Ox, Oy, Oz)$  et  $(O'x', O'y', O'z')$  orientés de la même manière, et de telle façon que le mouvement relatif des deux référentiels soit selon  $Ox$  et  $O'x'$  :  $\mathbf{v} = v_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = v \mathbf{e}_x$ .

Enfin, on choisira l'origine des temps dans les deux référentiels de telle sorte que lorsque les origines  $O$  et  $O'$  se confondent, on a  $t = t' = 0$ .

**1.1** — Écrivez les équations de la transformation de Lorentz qui permettent de passer des coordonnées d'un événement  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  aux coordonnées du même événement  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ . De même, écrivez les équations de la transformation inverse. Vérifiez qu'en appliquant successivement ces deux transformations, on obtient bien l'identité.

Si on considère un événement  $M$  de coordonnées  $(ct, \mathbf{r}) = (ct, x, y, z)$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , on obtiendra ses coordonnées spatio-temporelles  $(ct', \mathbf{r}') = (ct', x', y', z')$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  en utilisant les équations de la transformation de Lorentz. Dans la configuration considérée, elles s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \end{array} \right. \quad \text{i.e.} \quad \left\{ \begin{array}{l} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{array} \right. \quad \text{et réciproquement} \quad \left\{ \begin{array}{l} ct = \gamma(ct' + \beta x') \\ x = \gamma(x' + \beta ct') \\ y = y' \\ z = z' \end{array} \right.$$

avec

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

On peut mettre ces équations sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & +\beta\gamma & 0 & 0 \\ +\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

De manière immédiate, on peut vérifier que ces deux transformations sont bien l'inverse l'une de l'autre :

$$\begin{pmatrix} \gamma & +\beta\gamma & 0 & 0 \\ +\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^2(1 - \beta^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^2(1 - \beta^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

car  $\gamma^2(1 - \beta^2) = 1$ .

**1.2** — Supposons que deux événements successifs  $A$  et  $B$  se produisent au même point  $x'_A = x'_B$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ . Dans  $\mathcal{R}'$ , ces deux événements sont séparés par une durée  $\Delta t' = 1$  s. Que vaut la durée entre les événements  $A$  et  $B$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  ?

Faites de même pour deux événements  $C$  et  $D$  qui se produisent cette fois au même point  $x_C = x_D$  dans  $\mathcal{R}$ , séparés par 1 s dans  $\mathcal{R}$ . Commentez.

Connaissant les coordonnées  $(ct'_A, x'_A)$  et  $(ct'_B, x'_B)$  des événements  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{R}'$ , on peut calculer par la transformation de Lorentz leurs coordonnées temporelles  $t_A$  et  $t_B$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ ,

$$ct_A = \gamma(ct'_A + \beta x'_A) \quad ct_B = \gamma(ct'_B + \beta x'_B).$$

La différence entre ces deux équations donne immédiatement

$$c(t_B - t_A) = \gamma [c(t'_B - t'_A) + \beta(x'_B - x'_A)]$$

Soit,

$$t_B - t_A = \gamma(t'_B - t'_A) > (t'_B - t'_A) \quad \text{i.e.} \quad \Delta t_{A \rightarrow B} = \gamma \Delta t'_{A \rightarrow B} > \Delta t'_{A \rightarrow B}$$

car  $x'_A = x'_B$ .

Si  $\Delta t'_{A \rightarrow B} = 1$  s, et si  $\beta = 3/5$ , on trouve

$$\gamma = 1.25 \quad \Delta t_{A \rightarrow B} = \gamma \Delta t'_{A \rightarrow B} = 1.25 \text{ s}$$

et la durée entre les événements  $A$  et  $B$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  est plus longue (1.25 s) : c'est l'effet relativiste de *dilatation du temps*.

Si on procède de même pour les événements  $C$  et  $D$  qui ont lieu au même point dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , on trouve cette fois dans  $\mathcal{R}'$  :

$$ct'_C = \gamma(ct_C - \beta x_C) \quad ct'_D = \gamma(ct_D - \beta x_D).$$

Ce qui donne cette fois :

$$c(t'_D - t'_C) = \gamma [c(t_D - t_C) - \beta(x_D - x_C)]$$

Soit,

$$t'_D - t'_C = \gamma(t_D - t_C) > (t_C - t_D) \quad \text{i.e.} \quad \Delta t'_{C \rightarrow D} = \gamma \Delta t_{C \rightarrow D} > \Delta t_{C \rightarrow D}$$

car  $x_C = x_D$ .

La durée écoulée entre les événements  $C$  et  $D$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  est plus longue (1.25 s) que celle mesurée dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . On constate ainsi que l'effet de dilatation des temps est symétrique.

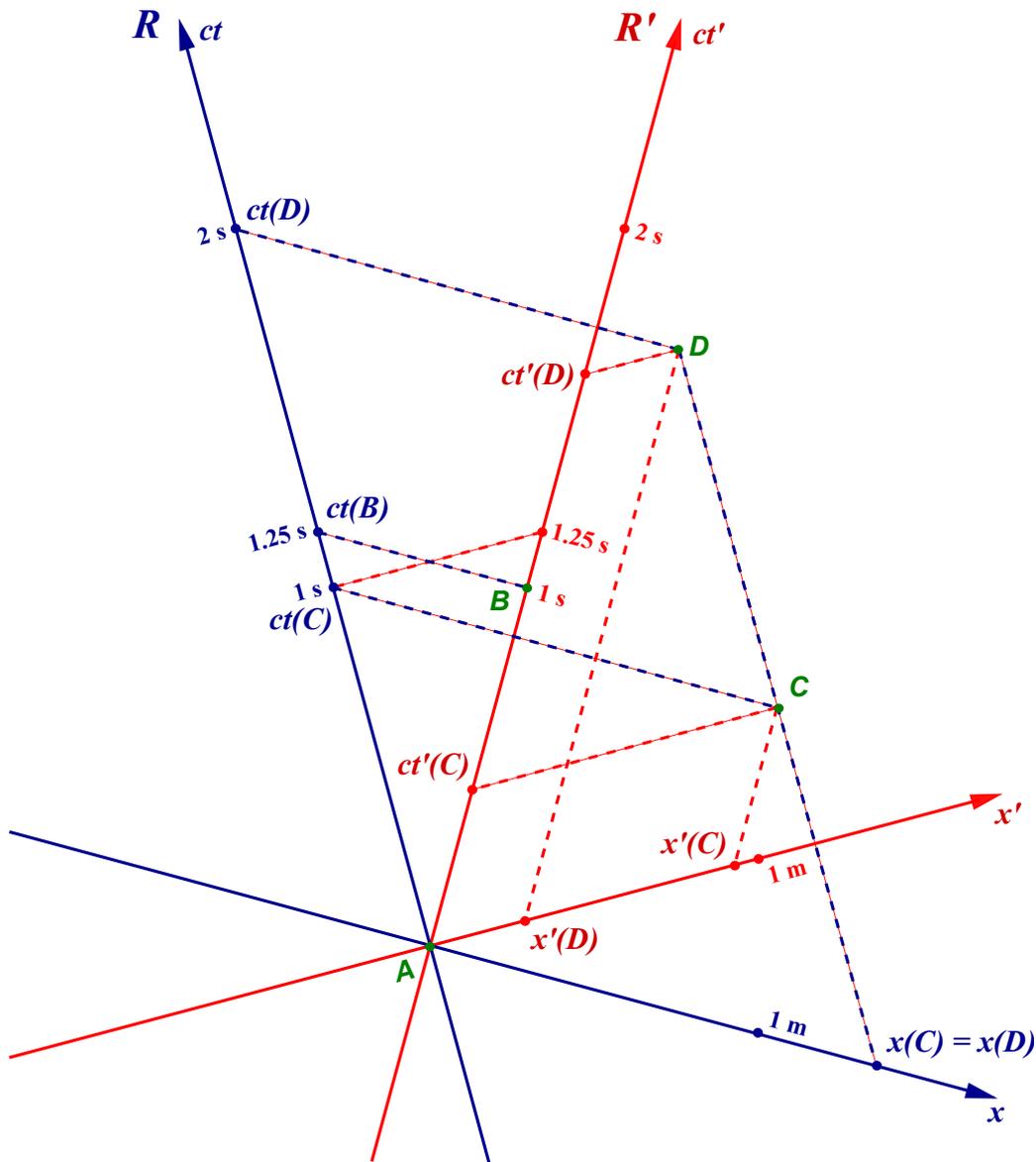


Fig. 1 – Dilatation du temps (diagramme de Loedel) : les événements  $A$  (ici choisi à l'origine) et  $B$  qui ont lieu à la même position  $x'_A = x'_B$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  s'y produisent avec  $\Delta t' = 1$  s d'écart. Dans le référentiel  $\mathcal{R}$ ,  $\Delta t = t_B - t_A = 1.25$  s est plus grand. Réciproquement, les événements  $C$  et  $D$  sont séparés par une seconde dans  $\mathcal{R}$ , et par 1.25 seconde dans  $\mathcal{R}'$ .

1.3 — Imaginons deux événements  $E$  et  $F$  qui se produisent au même instant  $t$ , en deux points différents d'abscisses  $x_E$  et  $x_F$ , avec  $x_E < x_F$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Ces deux événements sont-ils aussi simultanés dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  ?

Qu'en est-il dans un référentiel  $\mathcal{R}''$  qui se déplace à la vitesse  $(-v)$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  ? Commentez.

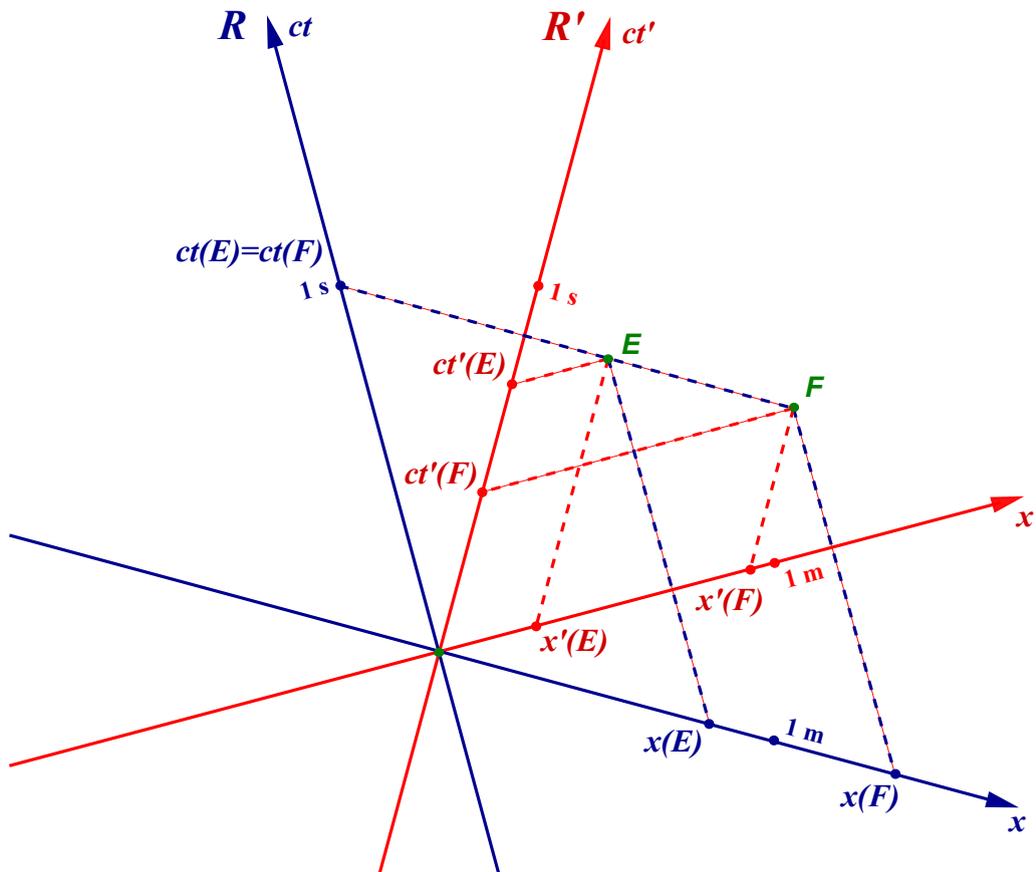


Fig. 2 – Relativité du concept de simultanéité (diagramme de Loedel) : les événements  $E$  et  $F$  sont simultanés dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ ,  $\Delta t' = t'_F - t'_E < 0$  : autrement dit, l'événement  $F$  se produit avant l'événement  $E$ .

En procédant comme précédemment, on peut calculer les coordonnées temporelles des événements  $E$  et  $F$  dans  $\mathcal{R}'$ ,

$$ct'_E = \gamma(ct_E - \beta x_E) \quad ct'_F = \gamma(ct_F - \beta x_F).$$

Ce qui donne, en soustrayant la première équation de la seconde,

$$c(t'_F - t'_E) = \gamma [c(t_F - t_E) - \beta(x_F - x_E)] = -\beta\gamma(x_F - x_E) \quad \text{avec } x_F > x_E$$

Soit,

$$\Delta t'_{E \rightarrow F} = t'_F - t'_E = -\gamma \frac{v}{c}(x_F - x_E) < 0.$$

Autrement dit, dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , les deux événements ne sont plus simultanés, et l'événement  $F$  se produit *avant* l'événement  $E$ .

Si on tiens le même raisonnement dans un référentiel  $\mathcal{R}''$  qui se déplace à la vitesse  $-v$  par rapport à  $\mathcal{R}$ , on obtiendra un résultat similaire, mais pour lequel il faut remplacer  $v$  par  $-v$  dans l'expression précédente :

$$\Delta t''_{E \rightarrow F} = t''_F - t''_E = +\gamma \frac{v}{c}(x_F - x_E) > 0.$$

Et cette fois, dans le référentiel  $\mathcal{R}''$ , l'événement  $F$  se produit *après* l'événement  $E$ .

Ainsi, le concept de simultanéité est relatif, et lié à un référentiel donné : deux événements simultanés dans un référentiel ne le sont pas forcément dans un autre référentiel. De plus, on peut construire des situations où l'ordre temporel des événements dépend du référentiel dans lequel on se place...

1.4 — Considérons un objet de longueur  $\ell$  au repos dans  $\mathcal{R}$ . La mesure de sa longueur consiste à repérer la position des extrémités  $M$  et  $N$  de cet objet, *au même instant*, dans le référentiel où on effectue la mesure. Quelle longueur trouve-t-on dans  $\mathcal{R}$ ? Et dans  $\mathcal{R}'$  ?

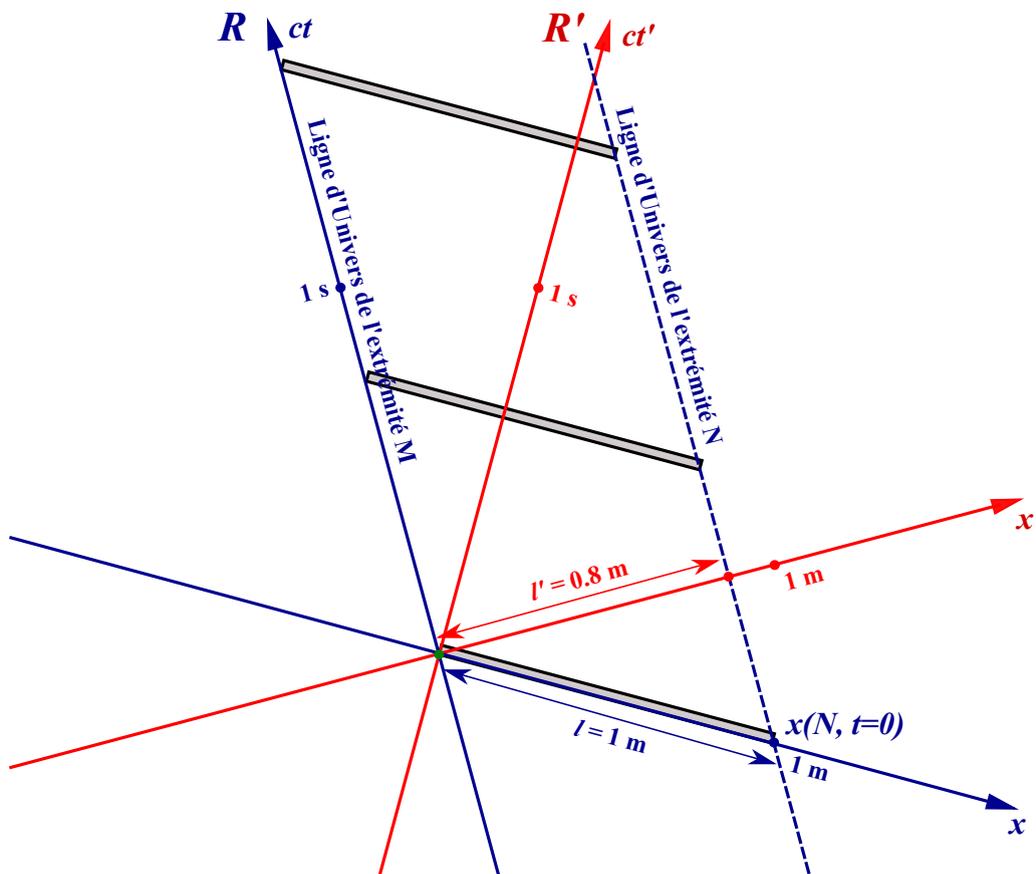


Fig. 3 – Contraction des longueurs (diagramme de Loedel) : L’objet au repos dans  $\mathcal{R}$  y possède une longueur  $\ell$ . On a représenté ici la ligne d’univers de ses extrémités,  $M$  et  $N$ . La région d’espace-temps délimitée par ces deux lignes d’univers est le tube d’univers de l’objet, c’est à dire le volume d’espace-temps qu’il occupe au fur et à mesure que le temps s’écoule. La mesure de la longueur du même objet dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  consiste à repérer la position de ses extrémités au même instant  $t'$  : on effectue ainsi une coupe de son tube d’espace-temps à un instant  $t'$  donné (à  $t' = 0$  sur le dessin). On trouve une longueur  $\ell' = \ell/\gamma \leq \ell$  plus courte que dans le référentiel  $\mathcal{R}$  (qui est aussi ici le référentiel propre de l’objet).

Dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , l’objet est immobile, et la trajectoire de ses extrémités est :  $x_M(t) = x_M(0) = \text{constante}$  et  $x_N(t) = x_M(0) + \ell$ . Sa longueur est naturellement  $\ell$  (longueur propre de l’objet).

Appliquons la transformation de Lorentz, à un instant  $t'$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  :

$$\begin{cases} x_M = \gamma (x'_M + \beta ct') \\ x_N = \gamma (x'_N + \beta ct') \end{cases}$$

En soustrayant la première équation de la seconde, et en se plaçant *au même temps  $t'$*  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , on trouve :

$$\ell = x_N - x_M = \gamma (x'_N - x'_M) = \gamma \ell' \quad \text{soit} \quad \ell' = \frac{1}{\gamma} \ell \leq \ell.$$

La longueur  $\ell'$  mesurée de l'objet dans  $\mathcal{R}'$  est ainsi plus courte que dans le référentiel  $\mathcal{R}$  où l'objet est au repos; numériquement, en prenant  $\ell = 1 \text{ m}$  et  $v = 3c/5$ , on trouve  $\ell' = 0.8 \text{ m}$ . C'est l'effet relativiste de *contraction des longueurs*, parfois aussi appelée *contraction de Lorentz-FitzGerald*. L'effet est bien sûr symétrique : un objet de longueur  $\ell$  immobile dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  paraîtra contracté du même facteur dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

Dans tout l'exercice, on pourra prendre  $v = 3c/5$  pour les applications numériques.

## 2. Invariance de l'intervalle d'espace-temps

**2.1** — Montrez que la transformation de Lorentz entraîne l'invariance de l'intervalle élémentaire d'espace-temps  $ds^2$  :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (1)$$

Considérons un événement quelconque  $E$ , de coordonnées  $(ct, x, y, z)$  dans un référentiel inertiel  $\mathcal{R}$ . Dans un autre référentiel inertiel  $\mathcal{R}'$ , en translation uniforme à la vitesse  $v$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ , les coordonnées du même événement  $E$  s'obtiennent par la transformation de Lorentz :

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Considérons un intervalle élémentaire d'espace-temps  $(c dt, d\mathbf{r}) = (c dt, dx, dy, dz)$  entre deux événements infiniment proches, vus dans le référentiel inertiel  $\mathcal{R}$ . Dans  $\mathcal{R}'$  cet intervalle devient :

$$\begin{cases} c dt' = \gamma(c dt - \beta dx) \\ dx' = \gamma(dx - \beta c dt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \end{cases}$$

Écrivons la pseudo-norme carrée de cet intervalle dans  $\mathcal{R}'$  :

$$\begin{aligned} ds'^2 &= c^2(dt')^2 - (d\mathbf{r}')^2 = c^2(dt')^2 - (dx')^2 - (dy')^2 - (dz')^2 \\ &= \gamma^2(c dt - \beta dx)^2 - \gamma^2(dx - \beta c dt)^2 - dy^2 - dz^2 \\ &= \gamma^2 c^2 dt^2 + \gamma^2 \beta^2 dx^2 - 2\gamma^2 \beta c dt dx - \gamma^2 dx^2 - \gamma^2 \beta^2 c^2 dt^2 + 2\gamma^2 \beta c dt dx - dy^2 - dz^2 \\ &= \gamma^2(1 - \beta^2) c^2 dt^2 - \gamma^2(1 - \beta^2) dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2 = ds^2 \end{aligned}$$

La pseudo-norme carrée de l'intervalle élémentaire d'espace-temps est un invariant de Lorentz.

**2.2** — Si  $d\mathbf{r}$  est l'élément d'espace parcouru par un objet matériel pendant la durée  $dt$ , montrez que la pseudo-norme carrée de l'intervalle élémentaire d'espace-temps  $ds^2$  peut aussi s'écrire :  $ds^2 = c^2 d\tau^2$ , où  $\tau$  est le temps propre de l'objet en question. Déduez-en que l'intervalle de temps propre est aussi un invariant de Lorentz.

Soit  $\mathcal{R}^*$  le référentiel propre de l'objet, ou, plus précisément, le référentiel galiléen tangent qui se confond avec le référentiel de l'objet considéré à l'instant  $t$ . On a alors, par invariance de la norme au carré de l'intervalle d'espace-temps :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2 = c^2 (dt^*)^2 - (d\mathbf{r}^*)^2 = c^2 d\tau^2$$

Car dans le référentiel propre  $\mathcal{R}^*$ , l'intervalle élémentaire de temps est l'intervalle de temps propre :  $dt^* = d\tau$ ; de plus, l'objet est immobile dans son propre référentiel :  $dr^* = 0$ .

Comme  $ds^2$  est un invariant de Lorentz, et que la vitesse de la lumière dans le vide  $c$  est la même dans tous les référentiels galiléens, alors  $d\tau^2$  est aussi un invariant. Le *temps propre*  $\tau$ , c'est à dire le temps qu'indiquerait une horloge parfaite attachée à l'objet considéré, est un invariant de Lorentz, et correspond à une réalité physique indépendante de l'observateur et du choix du référentiel d'observation.

### 3. Temps de vie des muons atmosphériques

Les muons<sup>1</sup> sont des particules élémentaires instables, notées  $\mu$  : le muon  $\mu^-$ , sorte de cousin plus lourd de l'électron, et son anti-particule, l'anti-muon  $\mu^+$ . Sur Terre, ils sont essentiellement produits par l'interaction de rayons cosmiques de haute énergie avec la partie supérieure de l'atmosphère terrestre, qui, par collisions successives avec les molécules de l'air, engendrent des gerbes de particules descendantes (fig. 4). Parmi les particules produites (pions, muons, etc), ce sont principalement les muons qui atteignent le sol (les pions ont une durée de vie trop brève). Le flux de muons au niveau de la mer est approximativement de 170 muons par mètre carré et par seconde.

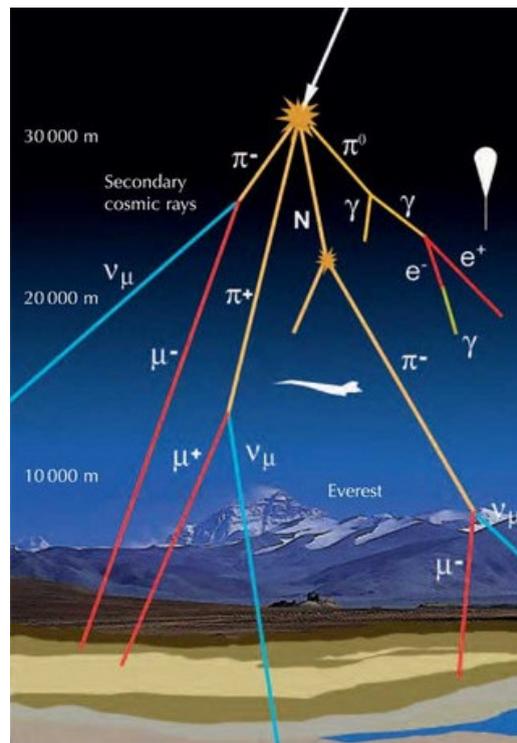
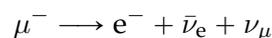


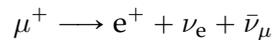
Fig. 4 – Schéma (simplifié) d'une gerbe atmosphérique produite par un rayon cosmique de haute énergie.

Les muons sont instables et se désintègrent spontanément en un électron et deux neutrinos, selon la réaction :



1. On les a initialement appelés mu-mésons, ou encore mésotrons, avant de finalement les nommer "muons".

De même, l'anti-muon se désintègre symétriquement en un positon et deux neutrinos,



La durée de vie moyenne des muons est  $\tau = 2.2 \mu\text{s}$  au repos. Pour une population de muons donnée, le nombre de muons diminue avec le temps selon une loi exponentielle,

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}.$$

où  $N_0$  est le nombre de muons à l'instant  $t = 0$  choisi comme origine du temps. Au fur et à mesure de leur descente vers le sol, les muons des gerbes atmosphériques se désintègrent ainsi progressivement.

En 1941, Bruno Rossi (1905-1993), physicien italo-américain, et son assistant David Hall mesurent le flux de muons sur un dénivelé de 1624 m entre Echo Lake (3240 m d'altitude) et Denver (1616 m), en utilisant un dispositif de comptage à base de plaques métalliques (pour freiner les muons incidents) et de plusieurs compteurs Geiger-Müller. Ils constatent que le flux de muons ne décroît pas aussi rapidement qu'attendu lorsqu'on se rapproche du niveau de la mer [B. Rossi et D. B. Hall, *Phys. Rev.* **59**, 223 (1941)].

La mesure sera refaite en 1962, par David H. Frisch (1918-1991) et James H. Smith au moyen d'un détecteur constitué de plaques de fer (toujours pour freiner les muons, mais aussi pour sélectionner une gamme de vitesse en choisissant une certaine épaisseur de fer) et de scintillateurs "plastique" : lorsqu'un muon freiné par les plaques de fer traverse le scintillateur, un peu de lumière est émise, et cette émission est détectée au moyen d'un photomultiplicateur. Si, de plus, le muon, ralenti, se désintègre dans le détecteur, un second signal signe la présence de l'électron produit. La présence de ces deux signaux successifs confirme que la particule incidente est bien un muon. De plus, dans ce cas la distribution des durées entre le signal du muon fortement ralenti et le signal de l'électron est une exponentielle décroissante, qui permet éventuellement de re-mesurer la durée de vie moyenne du muon au repos [D. H. Frisch et J. H. Smith, *Measurement of the Relativistic Time Dilation Using  $\mu$ -Mesons*. *American Journal of Physics* **31**(5), 342–355].

D. H. Frisch et J. H. Smith effectuent la mesure au sommet du Mont Washington (New Hampshire, États-Unis, 1916 m d'altitude), puis la refont de retour au MIT à Cambridge (Massachusetts), quasiment au niveau de la mer (env. 4 m d'altitude).

**3.1** — Connaissant la durée de vie moyenne des muons, et en considérant que leur vitesse est très proche de celle de la lumière, estimez leur libre parcours moyen dans l'atmosphère (on néglige ici les éventuelles interactions avec l'air, peu dense).

Si on néglige les interactions avec les molécules de l'air, le libre parcours moyen est simplement le produit de la durée de vie moyenne et de la vitesse des muons,

$$\ell = c\tau = 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \times 2.2 \times 10^{-6} \text{ s} \approx 660 \text{ m}.$$

**3.2** — Frisch et Smith comptent 568 muons par heure au sommet du Mont Washington. Combien faut-il de temps aux muons pour parcourir verticalement la distance entre le sommet et le site proche du niveau de la mer? En supposant que l'efficacité de détection des muons de leur dispositif est constante, estimez numériquement le taux de muons attendus (par heure) au niveau de la mer.

Les muons parcourent la différence de hauteur entre le sommet et le MIT proche du niveau de la mer en  $\Delta t = (1916 \text{ m} - 4 \text{ m})/c \approx 6.38 \mu\text{s}$ .

Du fait de leurs désintégrations spontanées, le nombre de muons décroît selon  $N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$ ; on s'attend au niveau de la mer à ce que le nombre de détections diminue de la même manière. On attend ainsi un taux de détection de :

$$N_{\text{mer}} = N_{\text{Mt Washington}} \times e^{-\Delta t/\tau} = 568 \text{ muons/h} \times e^{-6.38 \mu\text{s}/2.2 \mu\text{s}} \approx 31 \text{ muons/h}$$

**3.3** — Frisch et Smith déplacent leur dispositif en bas de la montagne, et comptent cette fois 412 muons par heure au niveau de la mer. Interprétez ce résultat dans le cadre relativiste, dans le référentiel terrestre (supposé ici galiléen). Déduisez-en le facteur  $\gamma(v)$  des muons, et la vitesse  $v$  des muons par rapport au sol.

La durée de vie moyenne du muon se comprend *dans son référentiel propre*. C'est cette grandeur que l'on obtient lorsqu'on effectue la mesure pour des muons quasiment à l'arrêt dans le détecteur (car freiné par les épaisseurs de fer au-dessus). Si le référentiel du muon est en mouvement à une vitesse  $v$  importante, il faut tenir compte de l'effet relativiste de dilatation des temps. Ainsi, deux événements de la "vie" du muon séparés par un intervalle  $\Delta\tau$  dans son référentiel propre seront séparés par un temps  $\Delta t = \gamma(v)\Delta\tau > \Delta\tau$  dans le référentiel de l'observateur au repos (ici, celui des expérimentateurs). Dans le référentiel des expérimentateurs, la population de muons évolue ainsi selon une loi exponentielle modifiée :

$$N(t) = N_0 e^{-t/(\gamma(v)\tau)}$$

où  $\gamma(v)\tau$  est la durée de vie moyenne apparente des muons pour les observateurs au repos, étirée par l'effet de dilatation du temps.

On peut ainsi en déduire le facteur  $\gamma(v)$  des muons et leur vitesse :

$$\frac{N_{\text{mer}}}{N_{\text{Mt Washington}}} = e^{-\Delta t/(\gamma(v)\tau)}$$

d'où

$$\gamma(v) = \frac{\Delta t}{\tau} \times \frac{1}{\ln N_{\text{Mt Washington}} - \ln N_{\text{mer}}} \approx \frac{6.38 \mu\text{s}}{2.2 \mu\text{s}} \times \frac{1}{\ln 568 - \ln 412} \approx 9.03$$

Ce qui permet d'en déduire la vitesse des muons détectés :

$$\beta = \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \approx 0.995 \quad v \approx 0.995 c$$

Dans l'expérience de Frisch et Smith, la gamme de vitesse (et d'énergie) des muons qui s'arrêtent dans le scintillateur est déterminée par l'épaisseur choisie de fer placé au dessus du scintillateur : les muons qui vont moins vite sont arrêtés dans les blocs de fer et n'atteignent pas le scintillateur, tandis que ceux qui vont plus vite traversent le scintillateur sans s'y arrêter. Frisch et Smith ont déterminé qu'avec l'épaisseur de fer choisie, ils détectent les muons dont la vitesse est comprise entre  $0.9950 c$  et  $0.9954 c$  à leur entrée dans les blocs de fer.

**3.4** — Interprétez le phénomène dans le référentiel propre des muons, où leur durée de vie moyenne est  $\tau = 2.2 \mu\text{s}$ .

Dans le référentiel propre du muon, sa durée de vie moyenne est bien  $\tau = 2.2 \mu\text{s}$  : par contre, la distance qu'il parcourt, à savoir la hauteur de la montagne, semble plus courte au muon, par l'effet de contraction relativiste des longueurs (dite aussi contraction de Lorentz-FitzGerald), et cette distance est réduite d'un coefficient  $1/\gamma \approx 1/9.03$ . La distance à parcourir étant plus courte (pour les muons, la montagne qui vient à leur rencontre est 9 fois plus petite que pour l'expérimentateur), la décroissance du nombre de muons est donc aussi plus lente (du même facteur obtenu à la question précédente).

L'expérience de David H. Frisch et James H. Smith a fait l'objet d'un film, *Time Dilation : An Experiment With Mu-Mesons* (1962), où Frisch et Smith présentent l'expérience au fur et à mesure de son exécution. Le film est disponible en ligne : <https://www.youtube.com/watch?v=rbzt8gDSYIM>

On sait aujourd’hui produire à volonté et manipuler des populations de muons pour réaliser des expériences de physique des particules, notamment pour effectuer des mesures de précision des propriétés des muons. L’un des dispositifs essentiels de ces expériences est l’anneau de stockage de muons (*muons storage ring*), petit accélérateur circulaire où les muons tournent à des vitesses très proches de  $c$ , ce qui permet d’y maintenir des populations de muons pendant des temps très longs, bien au-delà des  $2.2 \mu\text{s}$  de durée de vie moyenne des muons au repos (fig. 5).



Fig. 5 – Anneau de stockage de muons au CERN, “g-2 Muon Storage Ring”, construit en 1974, utilisé notamment pour la mesure du moment magnétique “anormal” du muon (Photo CERN)

#### 4. À la croisée des destinées : lignes d’univers et diagrammes de Minkowski

*L’objectif de cet exercice est de présenter un autre type de diagrammes d’espace-temps, parfois désignés comme “diagrammes de Minkowski”. Ces diagrammes sont plus délicats à utiliser car la graduation des axes demande quelques précautions.*

Leia et Luke se déplacent avec une vitesse relative constante  $v$ . L’axe  $e_x$  des abscisses de Leia est orienté selon la vitesse de Luke, l’axe  $e_{x'}$  des abscisses de Luke étant opposé à la vitesse de Leia.

**4.1** — Tracez les lignes d’univers, c’est à dire les lignes constituées de l’ensemble des événements des vies respectives de Leia et de Luke :

- (i) sur un graphe d’espace-temps  $(x, t)$  dans le repère de Leia.
- (ii) sur un graphe d’espace-temps  $(x', t')$  dans le repère de Luke.

Luke et Leia mettent leurs montres à  $t = t' = 0$  lorsqu’ils se croisent : autrement dit,  $x = x' = 0$  quand  $t = t' = 0$ .

Pour un événement de coordonnées  $(ct, x, y, z)$  dans  $\mathcal{R}$ , ses coordonnées deviennent  $(ct', x', y', z')$  dans  $\mathcal{R}'$  avec (transformation de Lorentz) :

$$\left\{ \begin{array}{l} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{array} \right. \quad \text{et, réciproquement} \quad \left\{ \begin{array}{l} ct = \gamma(ct' + \beta x') \\ x = \gamma(x' + \beta ct') \\ y = y' \\ z = z' \end{array} \right.$$

Construisons le diagramme d'espace-temps dit "de Minkowski" étape par étape.

On place traditionnellement l'axe d'espace ( $Ox$ ) en abscisse, et l'axe du temps ( $Oct$ ) en ordonnée. L'axe des temps  $t'$  du référentiel  $\mathcal{R}'$  se confond avec la *ligne d'Univers* de Luke; c'est l'ensemble des points-événements pour lesquels  $x' = 0$ . D'après ce qui précède,

$$x' = 0 \quad \text{implique} \quad \gamma(x - \beta ct) = 0 \quad \text{i.e.} \quad x = \beta ct \quad \text{ou encore} \quad ct = \frac{1}{\beta}x$$

ce qui correspond à une droite de pente  $+1/\beta$  (en général  $\beta$  est petit devant 1, et par conséquent  $1/\beta$  est grand), passant par l'origine.

De la même manière, l'axe des  $x'$  correspond à l'ensemble des points-événements pour lesquels  $t' = 0$ , ce qui implique :

$$t' = 0 \quad \text{implique} \quad \gamma(ct - \beta x) = 0 \quad \text{i.e.} \quad ct = \beta x.$$

On peut ainsi tracer les axes  $Ox'$  et  $Oct'$  dans le repère  $(Ox, Oct)$  (fig. 6, haut).

En procédant de même cette fois dans le repère  $(Ox', Oct')$ , on montre que l'axe des  $t$  correspond à la droite  $ct' = -(1/\beta)x'$ , et que l'axe des  $x$  est la droite  $ct' = -\beta x$  dans le repère  $(Ox', Oct')$  (fig. 6, bas).

**4.2** — Représentez, sur le graphe  $(x, t)$ , deux événements A et B. Calculer les intervalles de coordonnées  $\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z$  entre A et B, pour Leia, en fonction des intervalles  $\Delta t', \Delta x', \Delta y', \Delta z'$  pour Luke. Calculer  $c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2$ .

Voir figure 6.

La transformation de Lorentz nous donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x) \\ \Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c\Delta t) \\ \Delta y' = \Delta y \\ \Delta z' = \Delta z \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} c\Delta t = \gamma(c\Delta t' + \beta\Delta x') \\ \Delta x = \gamma(\Delta x' + \beta c\Delta t') \\ \Delta y = \Delta y' \\ \Delta z = \Delta z' \end{array} \right.$$

Et, de manière immédiate,

$$c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2.$$

par invariance de  $(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$  (cf. exercice précédent).

**4.3** — Représentez, sur le graphe  $(x, t)$ , deux événements C et D de la vie de Luke. Calculez la valeur de l'intervalle  $\Delta t$  entre C et D pour Leia, en fonction de  $\Delta t'$ , pour Luke, et de la vitesse de celui-ci par rapport à celle-là. Pour donner une idée de l'effet en question, envisagez le cas  $v = 3c/5$ , et  $\Delta t' = 1$  s.

Comme vu précédemment, on aura :

$$c\Delta t = \gamma(c\Delta t' + \beta\Delta x') \quad \text{i.e.} \quad \Delta t = \gamma \left( \Delta t' + \frac{\beta\Delta x'}{c} \right)$$

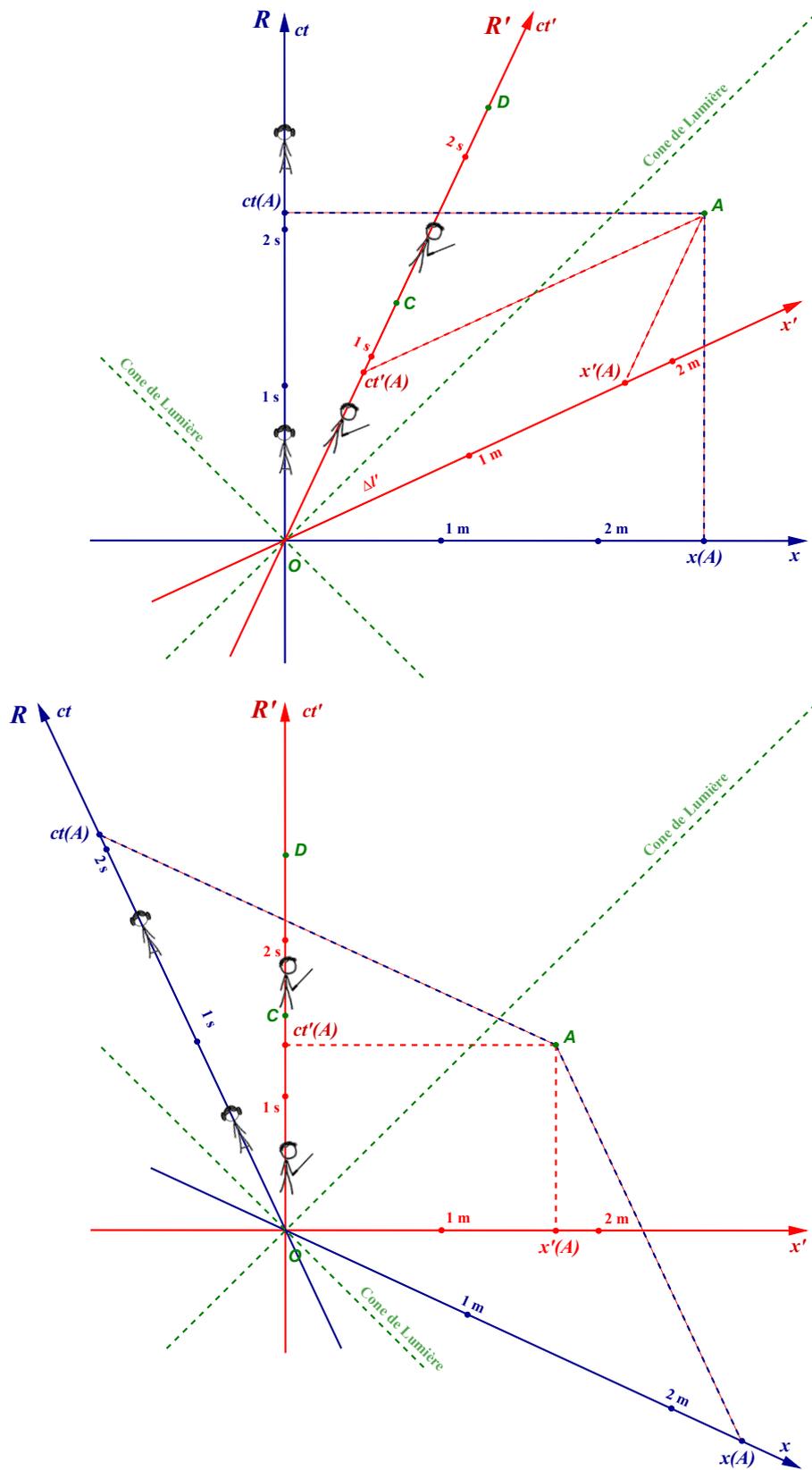


Fig. 6 – Diagrammes de Minkowski. (Haut) : diagramme du point de vue de Leia, dans le référentiel  $\mathcal{R}$ ; (Bas) : diagramme du point de vue de Luke, dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ .

Comme les événements  $C$  et  $D$  se produisent tous deux en  $x' = 0$ , sur la ligne d'univers de Luke, on a  $\Delta x' = 0$  et par conséquent,

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \gamma \Delta \tau$$

où  $\tau$  est le *temps propre* de Luke.

Pour  $v = 3c/5$ , et  $\Delta t' = 1$  s, on trouve numériquement :

$$\gamma(v) = \frac{5}{4} = 1.25 \quad \text{et} \quad \Delta t = 1.25 \text{ s.}$$

Deux événements séparés d'une seconde dans le référentiel de Luke apparaissent ainsi séparés de 1.25 s dans le référentiel de Leia ("dilatation du temps").

Bien évidemment, la situation est symétrique : deux événements séparés d'une seconde dans le référentiel de Leia apparaîtront aussi comme séparés de 1.25 s dans le référentiel de Luke (absence de référentiel privilégié). Malgré les apparences, il n'y a là aucune contradiction.

Dans cette description élémentaire, les deux référentiels sont galiléens, donc en translation uniforme l'un par rapport à l'autre, les deux protagonistes ne pourront jamais se recroiser et comparer le temps écoulé à leurs horloges respectives.

Pour que les deux personnages puissent de nouveau se croiser, il est nécessaire que l'un des deux fasse demi-tour, mais dans ce cas son référentiel n'est plus galiléen (cf. l'étude détaillée du "paradoxe" des jumeaux).

**4.4** — Luke tient un sabre laser tendu vers l'avant (c'est à dire selon l'axe  $e_x'$ ). Déterminez et représentez la ligne d'univers de la pointe du sabre de Luke sur le graphe  $(x, t)$ . Quelle définition peut adopter Leia pour la grandeur qu'elle va appeler "longueur du sabre de Luke"? Calculez cette longueur  $\Delta \ell$  en fonction de la longueur  $\Delta \ell'$  pour Luke et de sa vitesse. Envisagez le cas  $v = 3c/5$ ,  $\Delta \ell' = 1$  m.

Une mesure de longueur s'effectue en repérant *simultanément* les positions des deux extrémités de l'objet à mesurer. Comme la simultanéité est un concept relatif en relativité restreinte, des observateurs placés dans des référentiels différents mesurent ainsi des longueurs différentes pour un même objet (fig. 7).

Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , la trajectoire de Luke est donnée par  $x'_{\text{Luke}}(t') = 0$ , tandis que celle de la pointe de son sabre est  $x'_{\text{pointe}}(t) = \Delta \ell'$ .

Si on utilise la transformation de Lorentz, on peut écrire, à tout instant  $t$  dans  $\mathcal{R}$  :

$$\begin{cases} x'_{\text{Luke}} = \gamma (x_{\text{Luke}} - \beta ct) \\ x'_{\text{pointe}} = \gamma (x_{\text{pointe}} - \beta ct) \end{cases}$$

Si on se place à un instant  $t$  donné dans le référentiel de Leia (simultanéité dans  $\mathcal{R}$ ), on peut alors écrire (l'expression se simplifie car il s'agit du même instant  $t$ ) :

$$\Delta \ell' = x'_{\text{pointe}} - x'_{\text{Luke}} = \gamma (x_{\text{pointe}} - x_{\text{Luke}}) = \gamma \Delta \ell \quad \text{soit} \quad \Delta \ell = \frac{1}{\gamma} \Delta \ell' \leq \Delta \ell'$$

Numériquement, pour  $v = 3c/5$ , et  $\Delta \ell' = 1$  m, on obtient :

$$\Delta \ell = \frac{1}{\gamma} \Delta \ell' = 0.8 \text{ m} < 1 \text{ m}$$

C'est l'effet de "contraction des longueurs". De la même manière, l'effet est symétrique : un objet de 1 m de long immobile dans le référentiel de Leia apparaîtra contracté du même facteur  $1/\gamma$  pour Luke.

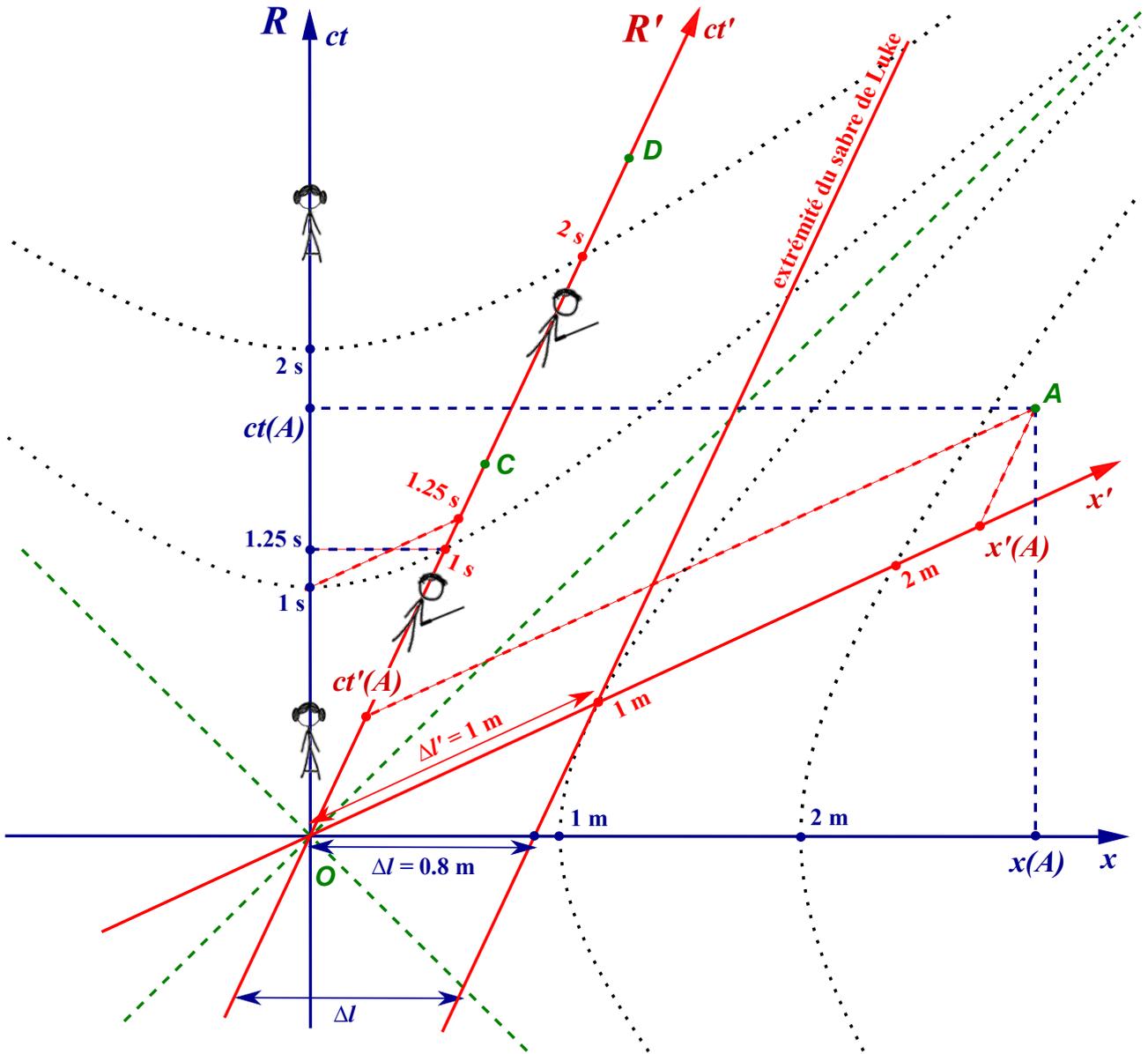


Fig. 7 – Diagramme d'espace-temps (diagramme de Minkowski). Lignes d'univers de Leia, restée en  $x = 0$  (en bleu, axe  $Oct$ ) et de Luke, en translation uniforme à la vitesse  $v = v(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$  par rapport à Leia. Les familles d'hyperboles  $t^2 - x^2/c^2 = \text{cte}$  et  $x^2 - c^2t^2 = \text{cte}$  permettent de graduer les axes. On constate ainsi que deux événements de la vie de Luke séparés d'une seconde dans son référentiel (temps propre) sont séparés par 1.25 s dans le référentiel  $\mathcal{R}$  de Leia. On constate aussi qu'un objet de longueur  $\Delta l' = 1$  m dans  $\mathcal{R}'$  ne mesure que  $\Delta l = 0.8$  m dans  $\mathcal{R}$ . Luke aboutira bien sûr à des conclusions similaires pour des événements de la vie de Leia et pour un objet fixe dans  $\mathcal{R}'$  (tous les référentiels galiléens étant équivalents).

Pour la dilatation du temps comme pour la contraction des longueurs, on parle parfois d'un "effet de perspective dans l'espace-temps".

4.5 — Tracez sur le graphe  $(x, t)$  :

- (i) quelques lignes d'univers du réseau  $x' = \text{cte}$  pour Luke.
- (ii) quelques lignes du réseau  $t' = \text{cte}$  pour Luke.

Cf. figure 7.

4.6 — Quelles sont, sur ce graphe, les lignes qui représentent les axes  $t'$  et  $x'$  de Luke ? Soit un événement A. Représentez, sur le graphe  $(x, t)$ , ses coordonnées pour Leia et pour Luke respectivement.

Cf. figure 7.

4.7 — Reste à graduer les axes  $t'$  et  $x'$  sur le graphe  $(x, t)$ .

- (i) Représentez sur le graphe la partie  $t > 0$  de l'hyperbole  $t^2 - x^2/c^2 = 1 \text{ s}^2$ . à quelle valeur de  $t$  correspond son intersection avec l'axe  $t$  ? A quelle valeur de  $t'$  correspond son intersection avec la représentation de l'axe  $t'$  ?
- (ii) Mêmes questions à propos de l'hyperbole  $x^2 - c^2 t^2 = 1 \text{ m}^2$  et de ses intersections avec les axes  $x$  et  $x'$ .

Considérons la branche  $t > 0$  de l'hyperbole d'équation  $t^2 - x^2/c^2 = 1 \text{ s}^2$ . De manière immédiate, l'intersection avec l'axe des  $t$  se produit lorsque  $x = 0$ , ce qui correspond à la graduation  $t = 1 \text{ s}$  (ou plus précisément  $ct = c \times 1 \text{ s}$ ).

Par ailleurs, on a, par invariance de l'intervalle d'espace-temps, pour n'importe quel point événement  $E$  de coordonnées  $(ct, x)$  dans  $\mathcal{R}$  et  $(ct', x')$  dans  $\mathcal{R}'$  (on considère ici l'intervalle entre  $E$  et l'origine) :

$$t'^2 - x'^2/c^2 = t^2 - x^2/c^2 = 1 \text{ s}^2$$

L'intersection de l'hyperbole  $t^2 - x^2/c^2 = 1 \text{ s}^2$  avec l'axe des  $t'$  a lieu quand  $x' = 0$ , et par conséquent quand  $t'^2 = t^2 - x^2/c^2 = 1 \text{ s}^2$ , c'est à dire pour  $t' = 1 \text{ s}$ . Ce qui nous permet de graduer l'axe des  $t'$  (fig. 7).

On peut montrer de même que l'hyperbole  $x^2 - c^2 t^2 = 1 \text{ m}^2$  coupe l'axe des  $x$  en  $x = 1 \text{ m}$ , et coupe aussi l'axe des  $x'$  en  $x' = 1 \text{ m}$ , ce qui permet de graduer l'axe des  $x'$ .

4.8 — Représentez sur le graphique :

- (i) le temps  $t$  de l'événement ( $t' = 1 \text{ s}$ ,  $x' = 0$ ) de la vie de Luke.
- (ii) la longueur  $\ell$  attribuée au sabre de Luke par Leia.

Voir figure 7. La figure 8 présente la même situation décrite dans une variante de ces diagrammes d'espace-temps, les diagrammes symétriques de Loedel.

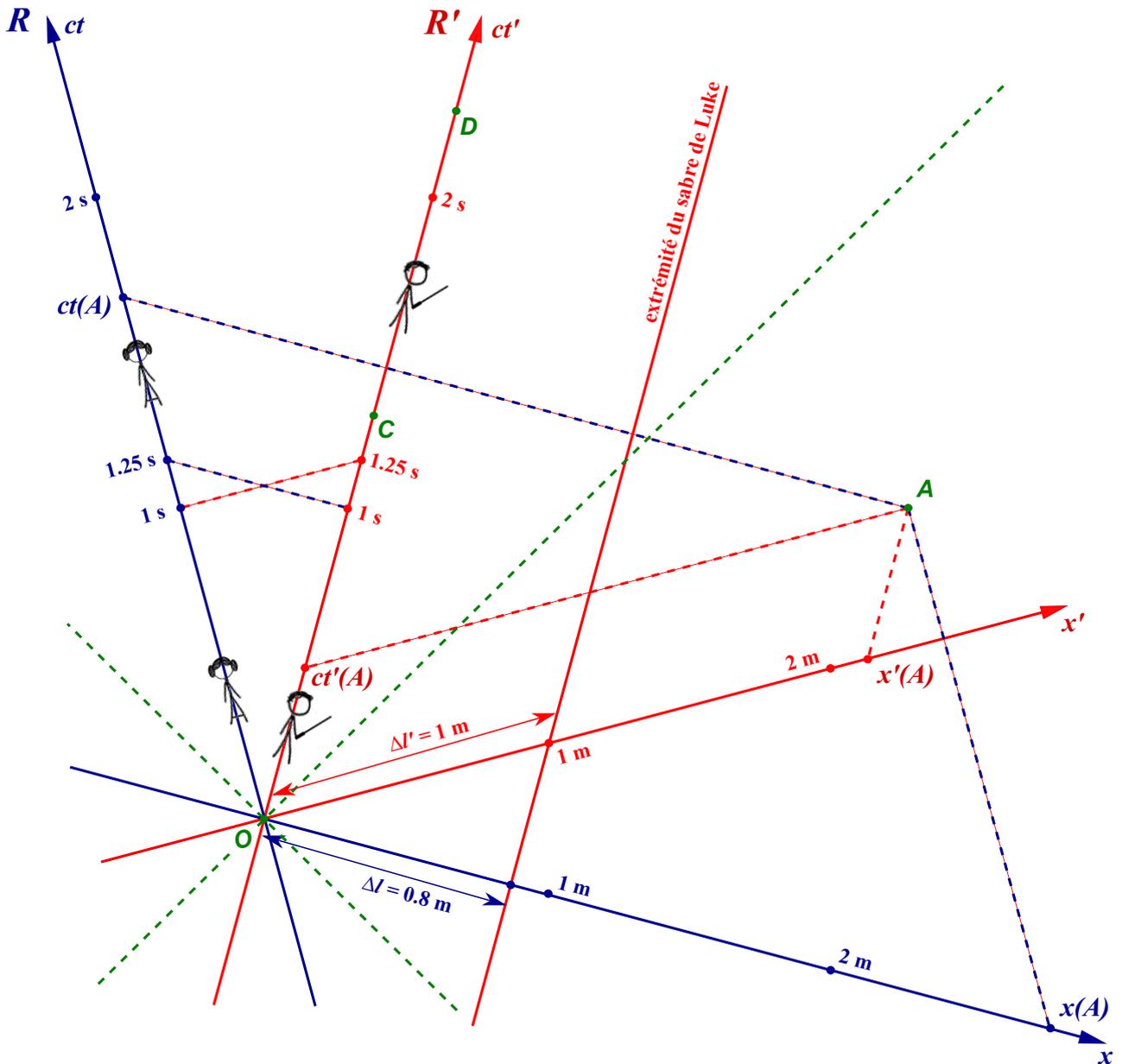
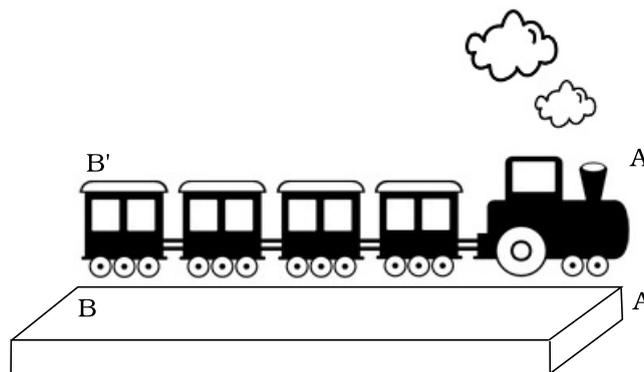


Fig. 8 – Diagramme d’espace-temps, variante dite “diagramme de Loedel”. Contrairement aux diagrammes dits “de Minkowski”, ce type de diagramme d’espace-temps présente l’avantage de ne pas favoriser graphiquement l’un des référentiels par rapport à l’autre, ce qui est plus conforme à la symétrie effective entre les référentiels. Les graduations sont aussi identiques sur tous les axes, ce qui en simplifie la construction et l’interprétation. Dans la suite des exercices, nous utiliserons ces deux types de diagrammes.

### 5. Contraction des longueurs et ordre temporel des événements

L'exercice suivant est un "classique académique" : il n'existe bien évidemment pas de train suffisamment rapide pour que les effets relativistes soient raisonnablement mesurables. Cet exemple permet toutefois d'illustrer les effets de perspectives dans l'espace-temps. Il existe un certain nombre de variantes de ce problème, avec par exemple deux trains qui se croisent, etc. Une variante plus complexe est le problème célèbre de "la règle et du trou", traité plus loin dans une déclinaison cinématographique.

On considère un train de longueur  $L$  se déplaçant à la vitesse  $v$  et passant devant un quai de gare sans s'arrêter. La longueur du quai est aussi  $L$  et lors d'un précédent voyage, le train s'étant arrêté, le chef de gare et le chauffeur du train ont pu vérifier à l'arrêt que train et quai avaient exactement la même longueur.



Lors de ce passage par la station, le train se déplace à vitesse constante et ne s'arrête pas en gare. On considère donc 4 événements :

- $P$  La tête du train  $A'$  coïncide avec l'arrière du quai  $B$ .
- $Q$  La tête du train  $A'$  (avec la locomotive et le conducteur) coïncide avec l'avant du quai  $A$  (où se tient le chef de gare).
- $R$  La queue du train  $B'$  coïncide avec l'arrière du quai  $B$ .
- $S$  La queue du train  $B'$  coïncide avec l'avant du quai  $A$ .

Pour simplifier l'analyse, on supposera que le chef de gare ( $A$ ) et le conducteur du train ( $A'$ ) synchronisent leurs horloges respectives à  $t = t' = 0$  lorsqu'ils se croisent. On supposera aussi qu'on dispose d'observateurs et d'horloges en queue de train et à l'arrière du quai, et que toutes les horloges d'un référentiel donné ont été préalablement synchronisées entre elles (par des échanges de signaux lumineux).

5.1 — Établissez les coordonnées spatio-temporelles des 4 événements  $P, Q, R$  et  $S$  dans les deux référentiels,  $\mathcal{R}$  (le quai) et  $\mathcal{R}'$  (le train). On pourra se servir de la transformation de Lorentz.

On appellera  $\mathcal{R}$  le référentiel du quai, et  $\mathcal{R}'$  celui du train.

Du fait du choix des coordonnées spatiales et temporelles dans les deux référentiels considérés, les coordonnées de l'événement  $Q$  (à savoir la coïncidence de l'avant du train  $A'$  avec la tête du quai  $A$ ) sont, de manière immédiate, dans  $\mathcal{R}$  et dans  $\mathcal{R}'$  respectivement :

$$x_Q = 0 \quad t_Q = 0 \quad \text{et} \quad x'_Q = 0 \quad t'_Q = 0$$

De même, les coordonnées spatiales des événements  $P$ ,  $R$  et  $S$  sont immédiates :

$$\begin{aligned}x_P &= x(B) = -L & x'_P &= x'(A') = 0 \\x_R &= x(B) = -L & x'_R &= x'(B') = -L \\x_S &= x(A) = 0 & x'_S &= x'(B') = -L\end{aligned}$$

Pour déterminer les coordonnées temporelles de ces trois événements, on peut utiliser le fait que *le quai a pour longueur  $L$  dans le référentiel du quai, et le train a pour longueur  $L$  dans le référentiel du train.*

Ainsi, entre les événements  $P : A' \equiv B$  et  $Q : A' \equiv A$ , l'avant du train  $A'$  a parcouru toute la longueur du quai, **qui mesure  $L$  dans le référentiel du quai  $\mathcal{R}$** , à la vitesse  $v$ . L'intervalle de temps  $\Delta t_{P \rightarrow Q}$  entre ces deux événements, **vu dans le référentiel du quai  $\mathcal{R}$** , vaut donc  $\Delta t(P \rightarrow Q) = L/v$ . On en déduit la coordonnée temporelle de l'événement  $P$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  :

$$t_P = t_Q - \Delta t_{P \rightarrow Q} = 0 - L/v = -L/v$$

Puis, en utilisant la transformation de Lorentz, on établit la coordonnée  $t'_P$  du même événement, mais dans le référentiel du train  $\mathcal{R}'$  :

$$t'_P = \gamma \left( t_P - \frac{\beta x_P}{c} \right) = \gamma \left( -\frac{L}{v} + \frac{vL}{c^2} \right) = -\frac{L\gamma}{v} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = -\frac{1}{\gamma} \frac{L}{v}$$

On peut tenir un raisonnement analogue pour l'intervalle de temps entre les événements  $Q : A' \equiv A$  et  $S : B' \equiv A$ . Entre ces deux événements, l'avant du quai  $A$  a parcouru toute la longueur du train, qui mesure  $L$  **dans le référentiel du train  $\mathcal{R}'$** , à la vitesse  $-v$ . L'intervalle de temps  $\Delta t'_{Q \rightarrow S}$  entre ces deux événements, **vu cette fois dans le référentiel du train  $\mathcal{R}'$** , vaut donc  $\Delta t'_{Q \rightarrow S} = +L/v$ . On en déduit la coordonnée temporelle de l'événement  $S$  cette fois dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  :

$$t'_S = t'_Q + \Delta t'_{Q \rightarrow S} = 0 + L/v = +L/v$$

Puis, en utilisant la transformation de Lorentz inverse, on établit la coordonnée  $t_S$  du même événement dans le référentiel du quai  $\mathcal{R}$  :

$$t_S = \gamma \left( t'_S + \frac{\beta x'_S}{c} \right) = \gamma \left( \frac{L}{v} - \frac{vL}{c^2} \right) = \frac{L\gamma}{v} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = +\frac{1}{\gamma} \frac{L}{v}$$

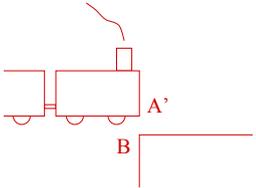
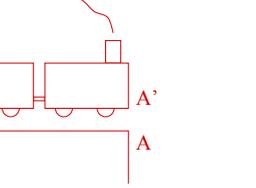
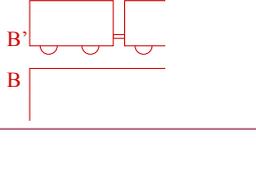
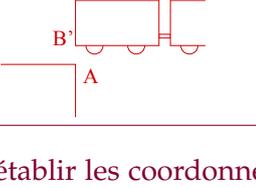
Enfin, on peut établir les coordonnées temporelles de l'événement  $R$  de deux manières : soit à partir de celles de l'événement  $P$  en raisonnant dans  $\mathcal{R}'$ , ou à partir de celles de  $S$  en raisonnant dans  $\mathcal{R}$ . Suivons cette dernière voie : entre les événements  $R$  et  $S$ , l'arrière du train  $B'$  a parcouru toute la longueur du quai, qui mesure  $L$  **dans le référentiel du quai  $\mathcal{R}$** , à la vitesse  $v$ . L'intervalle de temps  $\Delta t_{R \rightarrow S}$  entre ces deux événements, **vu cette fois dans le référentiel du quai  $\mathcal{R}$** , vaut donc  $\Delta t_{R \rightarrow S} = +L/v$ . On en déduit la coordonnée temporelle de l'événement  $R$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  :

$$t_R = t_S - \Delta t_{R \rightarrow S} = \frac{1}{\gamma} \frac{L}{v} - L/v = \frac{L\gamma}{v} \left( \frac{1}{\gamma} - 1 \right)$$

Puis, en utilisant la transformation de Lorentz, on établit la coordonnée  $t'_R$  du même événement dans le référentiel du train  $\mathcal{R}'$  :

$$t'_R = \gamma \left( t_R - \frac{\beta x_R}{c} \right) = \gamma \left( \frac{1}{\gamma} \frac{L}{v} - \frac{L}{v} + \frac{vL}{c^2} \right) = \frac{L\gamma}{v} \left[ \frac{1}{\gamma} - \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right] = \frac{L}{v} \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right)$$

Les coordonnées des 4 événements considérés sont regroupées dans le tableau suivant :

Événement	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}'$
$P : A' \equiv B$ 	$x_P = -L$ $t_P = -\frac{L}{v}$	$x'_P = 0$ $t'_P = -\frac{1}{\gamma} \frac{L}{v}$
$Q : A' \equiv A$ 	$x_Q = 0$ $t_Q = 0$	$x'_Q = 0$ $t'_Q = 0$
$R : B' \equiv B$ 	$x_R = -L$ $t_R = \frac{L}{v} \left( \frac{1}{\gamma} - 1 \right) < 0$	$x'_R = -L$ $t'_R = \frac{L}{v} \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) > 0$
$S : B' \equiv A$ 	$x_S = 0$ $t_S = \frac{1}{\gamma} \frac{L}{v}$	$x'_S = -L$ $t'_S = \frac{L}{v}$

Il est aussi possible d'établir les coordonnées temporelles de tous les événements en résolvant pour chaque événement le système de deux équations à deux inconnues  $(t, t')$  formé par les équations de la transformation de Lorentz, ce qui donne bien sûr le même résultat.

**5.2** — Quelle est la longueur du train dans son référentiel  $\mathcal{R}'$ ? vu du quai (référentiel  $\mathcal{R}$ )?

Dans son propre référentiel, la longueur du train est sa longueur propre, à savoir  $L$ . Vu dans le référentiel du quai, il apparaît contracté et sa longueur dans  $\mathcal{R}$  est  $L/\gamma$ . C'est cohérent par exemple avec l'intervalle de temps entre les événements  $Q$  et  $S$  mesuré dans  $\mathcal{R}$  : le train a défilé devant l'avant du quai en un temps  $L/(\gamma v)$ , car sa longueur dans  $\mathcal{R}$  est justement  $L/\gamma$ .

**5.3** — Quelle est la longueur du quai vu dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  du train?

De la même manière, le quai est contracté dans  $\mathcal{R}'$  et sa longueur y est  $L/\gamma$ .

**5.4** — Commentez l'ordre des événements  $Q$  et  $R$  dans les 2 référentiels. Qu'en concluez-vous? Est-ce cohérent avec les points de vue des deux observateurs sur les longueurs du train et du quai?

On note que  $t_R < 0$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du quai, tandis que  $t'_R > 0$  dans le référentiel du train  $\mathcal{R}'$ . Autrement dit, la coïncidence de l'arrière du train avec celle de l'arrière du quai se produit **avant** celle de la tête du train avec l'avant du quai dans le référentiel du quai, mais elle se produit **après** dans le référentiel du train. L'ordre de ces deux événements s'inverse selon le référentiel considéré. C'est cohérent avec l'effet de contraction des longueurs : dans le référentiel du quai, le train est plus court que le quai et la coïncidence des extrémités arrières du quai et du train se produit donc avant celle de leurs extrémités avant; au contraire, dans le référentiel du train, c'est le quai qui est plus court, et la coïncidence des extrémités arrières du quai et du train se produit après celle de leurs extrémités avant. Il n'y a là aucune contradiction.

**5.5** — Quelle est nécessairement la nature de l'intervalle d'espace-temps  $\widetilde{QR}$ ? Quelles sont les conséquences en terme de causalité?

L'ordre des événements  $Q$  et  $R$  s'inversant entre les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ , l'intervalle d'espace-temps  $\widetilde{QR}$  est nécessairement de **genre espace**. L'événement  $Q$  n'appartient pas au cône de lumière de l'événement  $R$  (et réciproquement), et il ne peut exister aucun lien causal entre ces deux événements.

On peut vérifier algébriquement que  $\widetilde{QR}^2 < 0$ . En effet,

$$\widetilde{QR}^2 = c^2 (t_R - t_Q)^2 - (x_R - x_Q)^2 = c^2 \frac{L^2}{v^2} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)^2 - L^2 = L^2 \left[ \frac{c^2}{v^2} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)^2 - 1 \right].$$

Or,

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \beta^2 \quad \text{d'où} \quad \beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \quad \text{et} \quad \frac{c^2}{v^2} = \frac{1}{\beta^2} = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1}.$$

En substituant dans l'expression de  $\widetilde{QR}^2$ , cela donne :

$$\begin{aligned} \widetilde{QR}^2 &= L^2 \left[ \frac{c^2}{v^2} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)^2 - 1 \right] = L^2 \left[ \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right)^2 - 1 \right] \\ &= L^2 \left[ \frac{(\gamma - 1)^2}{\gamma^2 - 1} - 1 \right] = L^2 \left[ \frac{(\gamma - 1)^2}{(\gamma - 1)(\gamma + 1)} - 1 \right] = L^2 \left[ \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} - 1 \right] = -\frac{2L^2}{\gamma + 1} < 0. \end{aligned}$$

**5.6** — Tracez une représentation des tubes d'Univers du train et du quai dans les deux référentiels. Commentez.

La succession des événements qui se produisent lors du croisement du train et du quai est représentée sur les figures 9 (diagramme de Loedel) et 10 (diagramme de Minkowski).

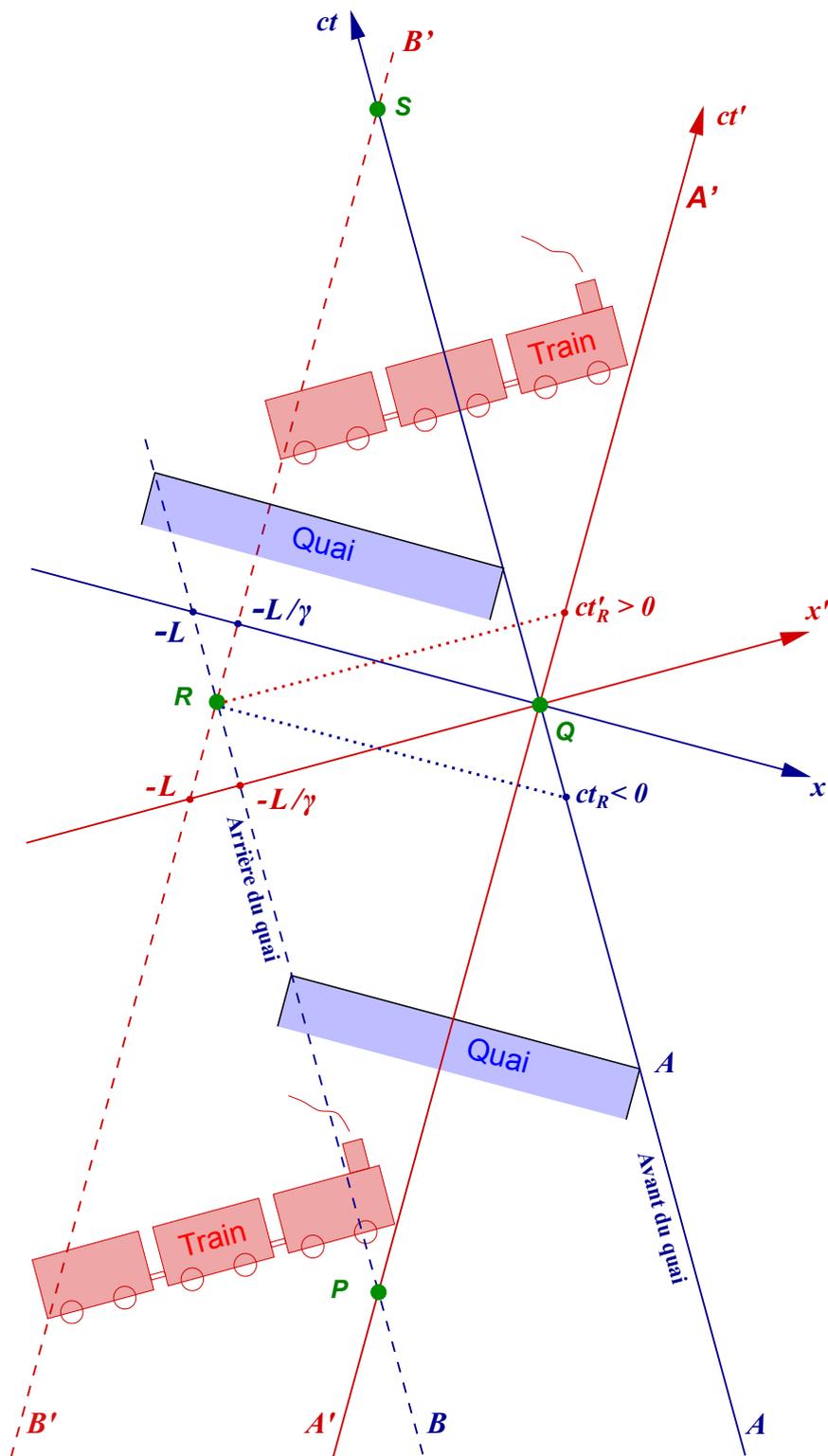


Fig. 9 – Diagramme d’espace-temps (diagramme de Loedel). Trajectoires du quai (en bleu, dans  $\mathcal{R}$ ) et du train (en rouge, dans  $\mathcal{R}'$ ), avec la représentation de leurs “tubes d’Univers”. On voit directement que la longueur du quai est  $L/\gamma$  dans le référentiel du train, et que réciproquement, la longueur du train est  $L/\gamma$  dans le référentiel du quai. L’inversion de l’ordre tempore des événements  $Q$  et  $R$  est aussi clairement visible.

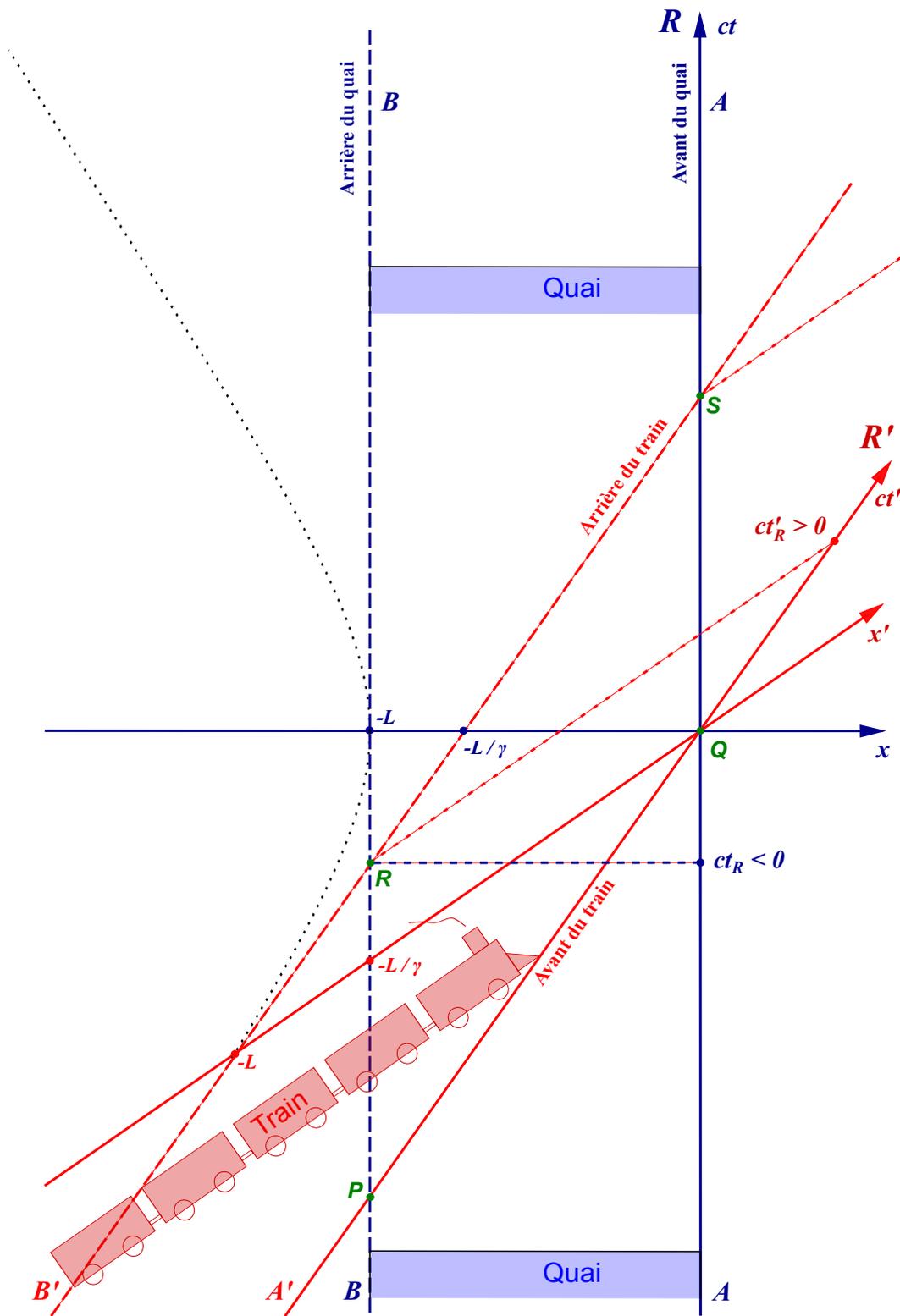


Fig. 10 – Diagramme d’espace-temps (diagramme de Minkowski). Trajectoires du quai (en bleu, dans  $\mathcal{R}$ ) et du train (en rouge, dans  $\mathcal{R}'$ ), avec la représentation de leurs “tubes d’Univers”. On voit directement que la longueur du quai est  $L/\gamma$  dans le référentiel du train, et que réciproquement, la longueur du train est  $L/\gamma$  dans le référentiel du quai. L’inversion de l’ordre temporel des événements  $Q$  et  $R$  est aussi visible. La branche  $x < 0$  de l’hyperbole  $x^2 - c^2t^2 = L^2$  permet de graduer l’axe des  $x'$ .

## 6. Effet Doppler (relativiste)

Leia et Han ont une vitesse relative  $v$  constante. Leur coïncidence est prise, par tous deux, comme événement origine  $O$ . Leia choisit son axe  $x$  selon la vitesse de Han qui, lui, choisit son axe  $x'$  opposé à la vitesse de Leia. À intervalles réguliers à sa montre Han émet (événements  $O, E_1, E_2, E_3, \dots$ ) des éclats lumineux que Leia reçoit (événements  $O, R_1, R_2, R_3, \dots$ ).

**6.1** — Représentez ce scénario (lignes d'univers de Leia, de Han, de la lumière et événements divers) sur un graphe d'espace-temps  $(x, t)$  dans le repère de Leia et sur un graphe d'espace-temps  $(x', t')$  dans le repère de Han.

**6.2** — Indiquez sur le graphe de Leia les intervalles de coordonnées  $\Delta x$  et  $\Delta t$  entre les deux événements  $O$  et  $E_1$  observés par Leia.

Voir figure 11.

**6.3** — Calculez sans transformation de Lorentz,  $\Delta t$  en fonction de  $v$  et de l'intervalle  $\Delta\tau$  entre les deux émissions  $O$  et  $E_1$  à la montre de Han.

Pendant un intervalle de temps  $\Delta t$ , Han a parcouru la distance  $\Delta x = v\Delta t$  dans le référentiel de Leia. En utilisant l'invariance de l'intervalle d'espace-temps entre les événements  $O$  et  $E_1$ , on obtient :

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2\Delta\tau^2 \quad \text{soit} \quad c^2\Delta t^2 - v^2\Delta t^2 = c^2\Delta\tau^2$$

D'où,

$$\Delta\tau^2 = \Delta t^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{\Delta t^2}{\gamma^2} \quad \text{soit} \quad \Delta t = \gamma\Delta\tau \geq \Delta\tau.$$

**6.4** — Calculez l'intervalle de temps  $\Delta t_R$  entre deux réceptions  $O$  et  $R_1$  de ces éclats vus par Leia. Interprétez.

Le temps  $\Delta t_R$  écoulé entre deux réceptions par Leia est la somme du temps  $\Delta t$  entre deux émissions (mesuré dans son référentiel) et du temps nécessaire à la propagation de l'onde lumineuse pour parcourir la distance  $\Delta x = v\Delta t$  qui la sépare de Han. On a ainsi :

$$\Delta t_R = \Delta t + \frac{\Delta x}{c} = \Delta t + \frac{v}{c}\Delta t = \gamma\Delta\tau \left(1 + \frac{v}{c}\right) = \Delta\tau\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

**6.5** — Déduisez-en la relation entre la fréquence d'émission des signaux  $\nu_E$  par Han et la fréquence de réception  $\nu_R$  par Leia.

La fréquence d'émission  $\nu_E$  (resp. de réception  $\nu_R$ ) est l'inverse de l'intervalle de temps entre deux émissions (resp. deux réceptions). On trouve ainsi :

$$\nu_R = \frac{1}{\Delta t_R} = \frac{1}{\Delta\tau} \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \quad \text{i.e.} \quad \nu_R = \nu_E \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

Qu'on peut encore écrire :

$$\nu_R = \nu_E \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.$$

La fréquence des signaux perçue par Leia est donc inférieure à celle émise par Han qui s'éloigne d'elle. C'est l'effet Doppler relativiste, valable pour les signaux électromagnétiques.

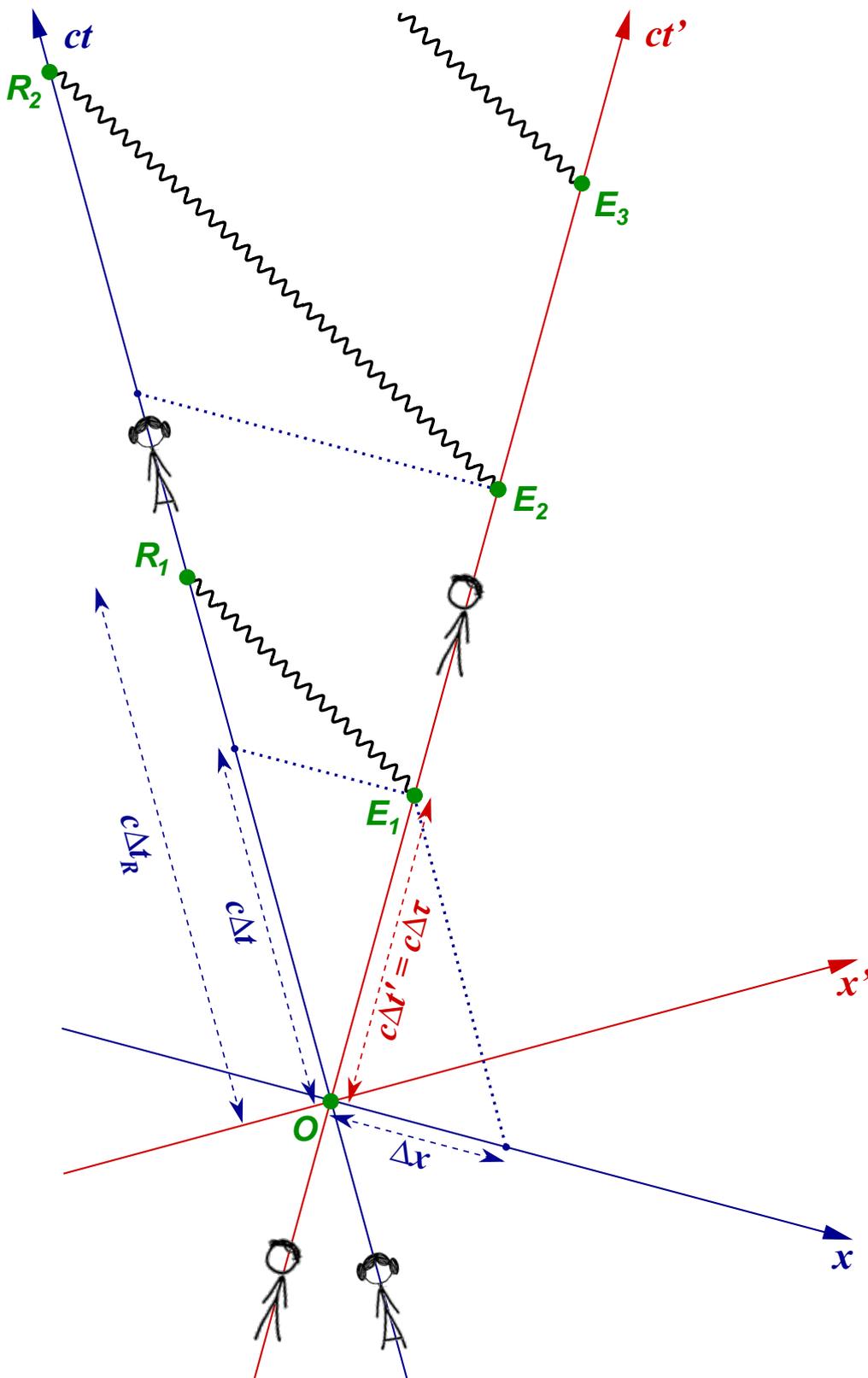


Fig. 11 – Diagramme d’espace-temps (diagramme de Loedel). Trajectoires de Leia (en bleu, dans  $\mathcal{R}$ ) et de Han (en rouge, dans  $\mathcal{R}'$ ). La ligne d’Univers de Leia se confond avec l’axe  $ct$ , tandis que celle de Han se confond avec l’axe  $ct'$ .

Par comparaison, l'effet Doppler classique s'écrit :

$$\nu_R = \frac{c - v_R}{c - v_E} \nu_E$$

où  $c$  est la célérité des ondes considérées (vitesse du son par exemple) dans le milieu de propagation, tandis que  $v_E$  et  $v_R$  sont les vitesses (comptées algébriquement<sup>2</sup>) de l'émetteur et du récepteur *par rapport au référentiel du milieu de propagation des ondes*. Ce résultat n'est évidemment pas transposable en relativité restreinte, notamment parce que la vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels, et qu'on ne peut pas définir de *référentiel du milieu de propagation* des ondes lumineuses.

## 7. Forme vectorielle des transformations de Lorentz

On considère deux référentiels inertiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ . Le référentiel  $\mathcal{R}'$  est en translation uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$  à une vitesse  $\mathbf{v}$ . On adopte la convention habituelle : à  $t = t' = 0$ , les origines  $O$  et  $O'$  se confondent. Par contre, on ne fait aucune hypothèse particulière sur l'orientation des axes des repères  $(Oxyz)$  et  $(O'x'y'z')$  des deux référentiels : leurs orientations sont quelconques.

En utilisant la propriété d'isotropie de l'espace, et en décomposant les vecteurs  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}'$  selon des composantes perpendiculaires et parallèles au mouvement, établissez les transformations de Lorentz sous forme vectorielle, c'est-à-dire donnant  $t'$  et  $\mathbf{r}'$  en fonction de  $t$  et  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{v}$ , la vitesse relative du repère  $(x', y', z')$  par rapport au repère  $(x, y, z)$ .

NB : on pourra commencer par étudier le cas particulier où  $\mathcal{R}'$  se déplace le long de l'axe  $x$  de  $\mathcal{R}$ .

Lorsqu'on choisit les axes  $x$  et  $x'$  parallèles au mouvement relatif entre les deux référentiels, la transformation permettant de passer des coordonnées d'un événement dans  $\mathcal{R}$  à celles dans  $\mathcal{R}'$  s'écrit :

$$\begin{cases} ct' &= \gamma (ct - \beta x) \\ x' &= \gamma (x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{cases}$$

On peut généraliser au cas où les axes des repères sont quelconques. La transformation de la coordonnée temporelle s'écrit naturellement :

$$ct' = \gamma(\mathbf{v}) (ct - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}) \quad \text{où} \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c} \quad \gamma(\mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \boldsymbol{\beta}^2}}$$

---

2. En raisonnant en mécanique classique, dans le cadre galiléen, on obtient la relation suivante entre fréquence émise  $\nu_E$  et fréquence reçue  $\nu_R$  :

$$\nu_R = \frac{c - \bar{v}_R}{c - \bar{v}_E} \nu_E = \frac{1 - \bar{v}_R/c}{1 - \bar{v}_E/c} \nu_E$$

où  $c$  est la vitesse de propagation de l'onde *dans le référentiel de son milieu de propagation*,  $\mathbf{c}$  le vecteur vitesse associé, et  $\bar{v}_E$  et  $\bar{v}_R$  sont les projections algébriques (i.e. positives ou négatives) des vecteurs vitesses  $\mathbf{v}_E$  et  $\mathbf{v}_R$  sur la direction de propagation de l'onde :

$$\bar{v}_E = \frac{\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{c}}{c} = \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{e}_c \quad \text{et} \quad \bar{v}_R = \frac{\mathbf{v}_R \cdot \mathbf{c}}{c} = \mathbf{v}_R \cdot \mathbf{e}_c \quad \text{avec} \quad \mathbf{e}_c = \frac{\mathbf{c}}{c},$$

où  $\mathbf{v}_E$  et  $\mathbf{v}_R$  sont les vitesses de l'émetteur et du récepteur *par rapport au référentiel du milieu de propagation des ondes*.

Pour les coordonnées d'espace  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , seule la composante  $\mathbf{r}_{//}$  de  $\mathbf{r}$  parallèle au mouvement relatif entre référentiel est affectée, selon la même transformation que pour  $x$  précédemment, tandis que la composante transverse  $\mathbf{r}_{\perp}$  n'est pas modifiée (comme  $y$  et  $z$  précédemment) :

$$\begin{cases} \mathbf{r}'_{//} &= \gamma(\mathbf{v}) [\mathbf{r}_{//} - \boldsymbol{\beta}ct] \\ \mathbf{r}'_{\perp} &= \mathbf{r}_{\perp} \end{cases}$$

où on peut écrire  $\mathbf{r}$  comme la somme de ses composantes  $\mathbf{r}_{//}$  parallèle à  $\boldsymbol{\beta}$  et  $\mathbf{r}_{\perp}$  orthogonale à  $\boldsymbol{\beta}$  :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{//} + \mathbf{r}_{\perp} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \mathbf{r}_{//} &= \left[ \mathbf{r} \cdot \frac{\boldsymbol{\beta}}{\beta} \right] \frac{\boldsymbol{\beta}}{\beta} = \frac{(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}}{\beta^2} \\ \mathbf{r}_{\perp} &= \mathbf{r} - \mathbf{r}_{//} \end{cases}$$

Ce qui permet d'en déduire le vecteur position du même événement exprimé dans  $\mathcal{R}'$  :

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_{//} + \mathbf{r}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{v}) [\mathbf{r}_{//} - \boldsymbol{\beta}ct] + \mathbf{r}_{\perp} \quad (2)$$

$$= \mathbf{r} + [\gamma(\mathbf{v}) - 1] \mathbf{r}_{//} - \gamma(\mathbf{v})\boldsymbol{\beta}ct = \mathbf{r} + [\gamma(\mathbf{v}) - 1] \frac{(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}}{\beta^2} - \gamma(\mathbf{v})\boldsymbol{\beta}ct \quad (3)$$

On en déduit la forme générale de la transformation de Lorentz, pour des repères choisis d'orientation quelconque dans  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  :

$$\begin{cases} ct' &= \gamma(\mathbf{v}) (ct - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}) \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + [\gamma(\mathbf{v}) - 1] \frac{(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}}{\beta^2} - \gamma(\mathbf{v})\boldsymbol{\beta}ct = \mathbf{r} + [\gamma(\mathbf{v}) - 1] \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}}{v^2} - \gamma(\mathbf{v})\mathbf{v}t \end{cases}$$

## 8. L'attaque de l'Étoile Noire

Pour détruire l'Étoile Noire, Luke envisage de survoler parallèlement sa surface afin de faire pénétrer discrètement son vaisseau (de longueur  $L$ ) par un orifice de l'Étoile de même diamètre  $L$  (figure 12). Son vaisseau atteignant sans difficulté la vitesse  $v = \sqrt{3}c/2 \simeq 0.87c$ , Luke compte profiter de la contraction des longueurs : dans le référentiel de l'Étoile Noire, son vaisseau apparaîtra plus court et pourra donc passer sans difficulté par l'ouverture de largeur  $L$ .

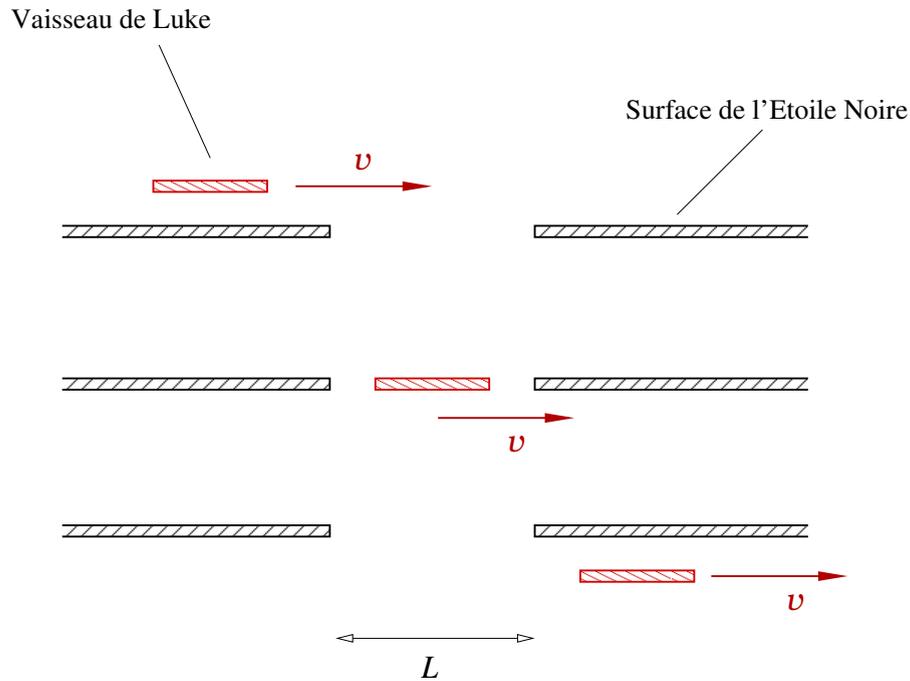


Fig. 12 – Plan d’attaque de Luke, du point de vue du référentiel de l’Étoile Noire.

8.1 — Que vaut le facteur  $\gamma(v)$  du vaisseau de Luke dans le référentiel de l’Étoile Noire (supposé galiléen)?

La vitesse du vaisseau étant  $v = \sqrt{3}c/2$ , le facteur  $\gamma(v)$  correspondant vaut :

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}}} = 2.$$

8.2 — Dans le référentiel de l’Étoile Noire, quelle sera la longueur du vaisseau de Luke (assimilé à un segment de droite)? Le vaisseau pourra-t-il pénétrer par l’ouverture de diamètre  $L$ ?

Dans le référentiel de l’Étoile Noire, le vaisseau de Luke apparaît plus court. Sa longueur est réduite d’un facteur  $1/\gamma(v)$  : la longueur du vaisseau dans le référentiel de l’Étoile Noire est par conséquent de  $L/\gamma(v)$  soit  $L/2$ . Le vaisseau doit donc pouvoir passer facilement par le trou de diamètre  $L$ .

8.3 — L’amiral de la flotte fait toutefois remarquer que dans le référentiel de son vaisseau, c’est le trou à la surface de l’Étoile Noire qui paraîtra plus petit et que le plan de Luke est par conséquent voué à l’échec. Quelle est effectivement la longueur apparente du trou dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  du vaisseau de Luke?

Dans le référentiel de Luke, la vitesse de la surface de l’Étoile Noire est  $-v$ , et le facteur  $\gamma$  associé vaut 2 (on suppose ici le mouvement du vaisseau parallèle à la surface). La longueur de l’orifice est donc réduite d’un facteur  $1/\gamma(v) = 1/2$ , et vaut  $L/\gamma(v) = L/2$ . On peut alors légitimement se demander comment le vaisseau pourrait passer par le trou qui est deux fois plus petit que le vaisseau...

Afin de réconcilier les deux points de vue, on se propose de modéliser les trajectoires respectives du vaisseau et de la surface de l’Étoile Noire dans les deux référentiels suivants :

- Le référentiel  $\mathcal{R}$  représenté sur la figure 13 : dans  $\mathcal{R}$ , la surface de l'Étoile Noire se déplace en translation uniforme selon  $e_z$  avec une vitesse faible  $u \ll c$ . À  $t = 0$ , la surface de l'Étoile Noire se confond avec le plan  $xOy$ . Dans ce même référentiel  $\mathcal{R}$ , le vaisseau de Luke se déplace sur l'axe  $Ox$ , à la vitesse  $\mathbf{v} = v e_x$ , de telle sorte que le centre du vaisseau se trouve à l'origine  $O$  à  $t = t' = 0$ .
- Le référentiel  $\mathcal{R}'$  solide du vaisseau de Luke, en translation uniforme par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  :  $\mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v e_x$ . L'origine  $O'$  du référentiel  $\mathcal{R}'$  est prise au centre du vaisseau. Elle se confond avec  $O$  à  $t = t' = 0$ .

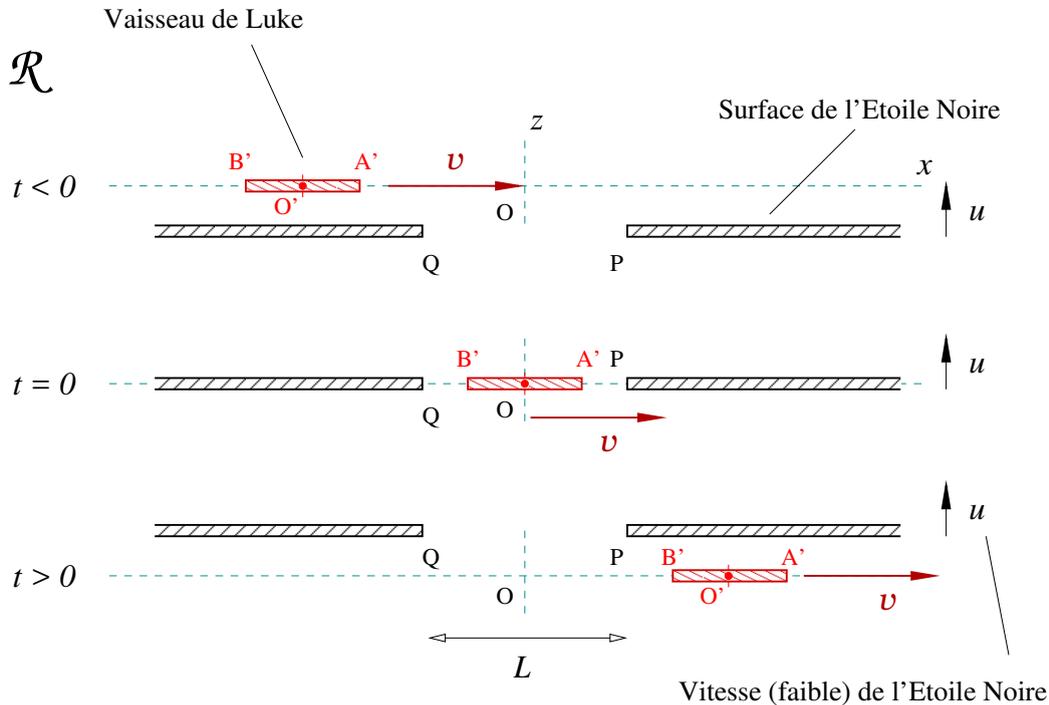


Fig. 13 – Plan d’attaque de Luke pour détruire l’étoile noire, vu dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Dans ce référentiel, le vaisseau se déplace à la vitesse  $v$  le long de l’axe des  $x$ , tandis que la surface de l’Étoile Noire se déplace à la vitesse faible  $u \ll c$  selon l’axe des  $z$ .

8.4 — Écrivez la transformation de Lorentz permettant de passer du référentiel  $\mathcal{R}$  au référentiel  $\mathcal{R}'$ . De même, écrivez la transformation inverse.

La transformation de Lorentz pour passer de  $\mathcal{R}$  à  $\mathcal{R}'$  s’écrit (avec  $\beta = v/c$ ) :

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \text{et réciproquement} \quad \begin{cases} ct = \gamma(ct' + \beta x') \\ x = \gamma(x' + \beta ct') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

8.5 — Dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , quelle est la position  $x(O')$  du centre du vaisseau en fonction du temps  $t$ ? À  $t = 0$ , que valent les abscisses des extrémités avant  $x(A')$  et arrière  $x(B')$  du vaisseau, dans le référentiel  $\mathcal{R}$ ? Au même instant  $t = 0$ , que valent les abscisses  $x(P)$  et  $x(Q)$  des extrémités du trou? De ce point de vue, le vaisseau peut-il effectivement passer par le trou?

Dans le référentiel du vaisseau  $\mathcal{R}'$ , le centre du vaisseau est pris pour origine :  $x'(O') = 0$ . En appliquant la transformation de Lorentz, on a par ailleurs :

$$x'(O') = \gamma (x(O') - vt) = 0$$

D'où on déduit la position de  $O'$  dans  $\mathcal{R}$ ,

$$x(O') = vt$$

On peut raisonner de même pour les extrémités  $A'$  et  $B'$  du vaisseau. Dans le référentiel du vaisseau  $\mathcal{R}'$ , on a :

$$x'(A') = +\frac{L}{2} \quad \text{et} \quad x'(B') = -\frac{L}{2}$$

En appliquant Lorentz, on a par ailleurs :

$$x'(A') = +\frac{L}{2} = \gamma (x(A') - vt) \quad x'(B') = -\frac{L}{2} = \gamma (x(B') - vt)$$

D'où,

$$x(A') = +\frac{1}{\gamma} \frac{L}{2} + vt = +\frac{L}{4} + vt \quad x(B') = -\frac{1}{\gamma} \frac{L}{2} + vt = -\frac{L}{4} + vt$$

Et en particulier, à  $t = 0$ ,

$$x(A') = +\frac{1}{\gamma} \frac{L}{2} = +\frac{L}{4} \quad x(B') = -\frac{1}{\gamma} \frac{L}{2} = -\frac{L}{4}$$

Par ailleurs, dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , les extrémités  $P$  et  $Q$  du trou sont fixes, aux abscisses  $x(P) = +L/2$  et  $x(Q) = -L/2$ . Il paraît donc évident que dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , le vaisseau passe sans difficulté à travers le trou (fig. 13).

On s'intéresse maintenant aux mêmes événements, mais vus dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  solidaire du vaisseau.

**8.6** — Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  dessinez dans le plan  $x'O'z'$  le vaisseau de longueur  $L$ , en repérant la position de ses 2 extrémités. Faites un dessin assez large, que l'on complétera aux questions suivantes.

Le vaisseau est fixe dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  : voir figure 14 ci-après.

**8.7** — Soit un point  $M(x, y, z)$  quelconque de la surface de l'Étoile Noire. On a nécessairement  $x$  dans l'intervalle  $] -\infty, -L/2] \cup [+L/2, +\infty[$ . Que vaut  $z$  en fonction du temps  $t$  dans  $\mathcal{R}$  ?

Dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , tous les points de la surface de l'Étoile Noire se déplacent en translation uniforme à la vitesse  $\mathbf{u} = u \mathbf{e}_z$ . Pour tous les points  $M(x, y, z)$  de la surface, on a donc simplement  $z = ut$ .

**8.8** — Déterminez les coordonnées  $(x', y', z')$  des points  $M$  de la surface de l'Étoile Noire en fonction du temps  $t'$  dans  $\mathcal{R}'$ . Quel est le lieu des points  $M$  de la surface à l'instant  $t' = 0$  dans le plan  $x'O'z'$  ? Dessinez la position du plan de la surface de l'Étoile Noire à  $t' = 0$  sur le dessin précédent.

Pour tout point  $M(x, y, z)$  appartenant à la surface de l'Étoile Noire, on a  $x \in ]-\infty, -L/2] \cup [+L/2, +\infty[$ , et  $z = ut$ . Si on écrit la transformation de Lorentz inverse,

$$\begin{cases} t &= \gamma \left( t' + \frac{vx'}{c^2} \right) \\ x &= \gamma (x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' = ut \end{cases} \quad \text{où} \quad t = \frac{z}{u} = \frac{z'}{u}.$$

Et par conséquent, en utilisant les deux équations donnant  $t$ ,

$$t = \gamma \left( t' + \frac{vx'}{c^2} \right) = \frac{z'}{u} \quad \text{soit} \quad z' = \gamma \frac{vux'}{c^2} + \gamma ut'.$$

Dans le référentiel du vaisseau, à un instant  $t'$  donné, les points  $M(x', y', z')$  de la surface de l'étoile noire appartiennent au plan défini par l'équation :

$$z' = \gamma \frac{vux'}{c^2} + \gamma ut'.$$

En particulier, à  $t' = 0$ , il s'agit du plan :

$$z' = \gamma \frac{vux'}{c^2}.$$

La pente de l'intersection de la surface avec le plan  $x'O'z'$  vaut

$$+\gamma \frac{vu}{c^2} = +\sqrt{3} \frac{u}{c} \ll 1.$$

Cette pente est évidemment très petite car  $u \ll c$  (voir fig. 14).

**8.9** — Que valent les coordonnées des extrémités  $P$  et  $Q$  du trou dans le référentiel  $\mathcal{R}$ ? Déduisez-en l'équation de la trajectoire  $z' = f(x')$  pour chacun de ces deux points dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ .

Dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , les extrémités  $P$  et  $Q$  du trou ont pour coordonnées :

$$\begin{cases} x(P) = +\frac{L}{2} \\ z(P) = ut \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(Q) = -\frac{L}{2} \\ z(Q) = ut \end{cases}$$

En appliquant Lorentz, et en utilisant  $t = z/u = z'/u$ , on trouve :

$$x'(P) = \gamma(x(P) - vt) = \gamma \left( x(P) - \frac{vz'}{u} \right) = \gamma \left( \frac{L}{2} - \frac{vz'}{u} \right)$$

Et, de même,

$$x'(Q) = \gamma(x(Q) - vt) = \gamma \left( x(Q) - \frac{vz'}{u} \right) = \gamma \left( -\frac{L}{2} - \frac{vz'}{u} \right)$$

Ce qui donne la trajectoire des points  $P$  et  $Q$  dans le plan  $x'O'z'$  :

$$\begin{cases} z'(P) = -\frac{1}{\gamma} \frac{u}{v} x'(P) + \frac{u}{v} \frac{L}{2} \\ z'(Q) = -\frac{1}{\gamma} \frac{u}{v} x'(Q) - \frac{u}{v} \frac{L}{2} \end{cases}$$

La pente de ces trajectoires vaut :

$$-\frac{u}{\gamma v} = -\frac{u}{2 \times c\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{u}{c} \quad \text{avec} \quad \frac{u}{c} \ll 1$$

Pour le dessin, on notera que cette pente est négative, et qu'elle vaut en norme le tiers de la pente (positive) trouvée précédemment pour le plan de la surface de l'Étoile Noire à  $t' = 0$  (fig. 14).

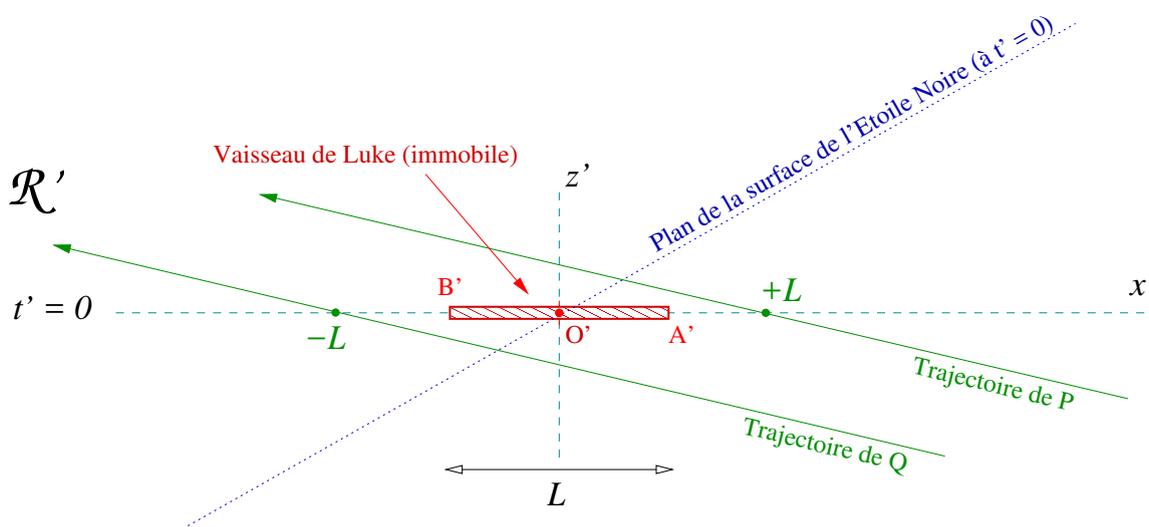


Fig. 14 – Point de vue dans le référentiel du vaisseau, à  $t' = 0$ . Les points de la surface de l'Étoile Noire. appartiennent au plan d'équation  $z' = \gamma v u x' / c^2$  avec  $u \ll c$ . Les trajectoires des extrémités du trou  $P$  et  $Q$  sont aussi représentées : l'intersection de la trajectoire de  $P$  avec l'axe des  $x'$  se produit en  $x' = +L$ , et celle de la trajectoire de  $Q$  avec l'axe des  $x'$  se produit en  $x' = -L$ .

8.10 — Calculez la position de l'intersection des trajectoires des extrémités  $P$  et  $Q$  avec l'axe des  $x'$ . Dessinez les trajectoires de  $P$  et  $Q$  dans le plan  $x'O'z'$ .

En utilisant les équations des trajectoires des points  $P$  et  $Q$ , et on trouve immédiatement l'intersection de ces trajectoires avec l'axe des  $x'$ , en posant respectivement  $z'(P) = 0$  et  $z'(Q) = 0$ .

L'intersection de la trajectoire de  $P$  avec l'axe des  $x'$  a lieu à l'abscisse :

$$-\frac{1}{\gamma} \frac{u}{v} x'(P) + \frac{u}{v} \frac{L}{2} = 0 \quad \text{soit} \quad x'(P) = \gamma \frac{L}{2} = L.$$

Et pour  $Q$ , elle a lieu à l'abscisse :

$$-\frac{1}{\gamma} \frac{u}{v} x'(Q) - \frac{u}{v} \frac{L}{2} = 0 \quad \text{soit} \quad x'(Q) = -\gamma \frac{L}{2} = -L.$$

8.11 — Décrivez la trajectoire de la surface de l'Étoile Noire dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  du vaisseau. À votre avis, qui a raison de l'amiral de la flotte ou de Luke? Luke doit-il retourner sur Dagobah auprès de Yoda parfaire sa maîtrise de la relativité restreinte?

Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  solidaire du vaisseau, la surface de l'Étoile Noire apparaît inclinée; même si la longueur du trou est inférieure à  $L$ , le mouvement de la surface est tel que le passage du vaisseau dans le trou est possible, et qu'aucune collision n'a lieu (figure 15). Luke a donc raison, et dans la mesure où son vaisseau peut être assimilé à un segment de droite de longueur  $L$ , il pourra franchir la surface de l'Étoile Noire.

Cet exercice est une déclinaison *GeorgeLucaesque* du célèbre problème relativiste connu comme "le paradoxe de la règle et du trou", où on considère une règle de longueur  $L$  que l'on fait glisser sur une table dans laquelle il y a un trou de même longueur. Ce paradoxe a été longuement débattu, notamment par Rindler (*American Journal of Physics* 29, 365 (1961); <https://doi.org/10.1119/1.1937789>).

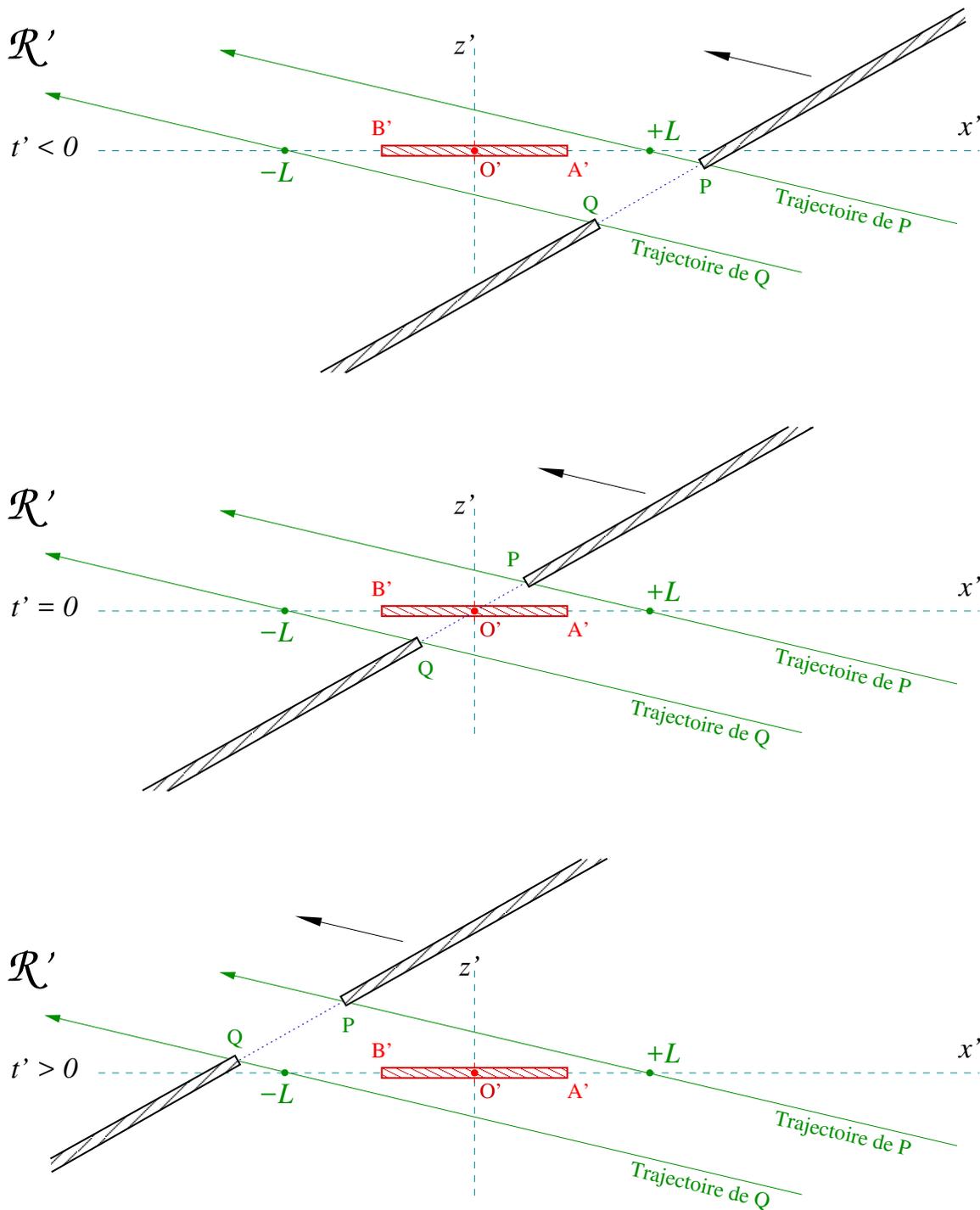


Fig. 15 – Succession des événements dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  solide du vaisseau. L'orifice dans la surface de l'Étoile Noire est effectivement plus petit que la longueur  $L$  du vaisseau, mais la surface apparaît inclinée dans  $\mathcal{R}'$ , de telle sorte que le vaisseau passe sans difficulté.

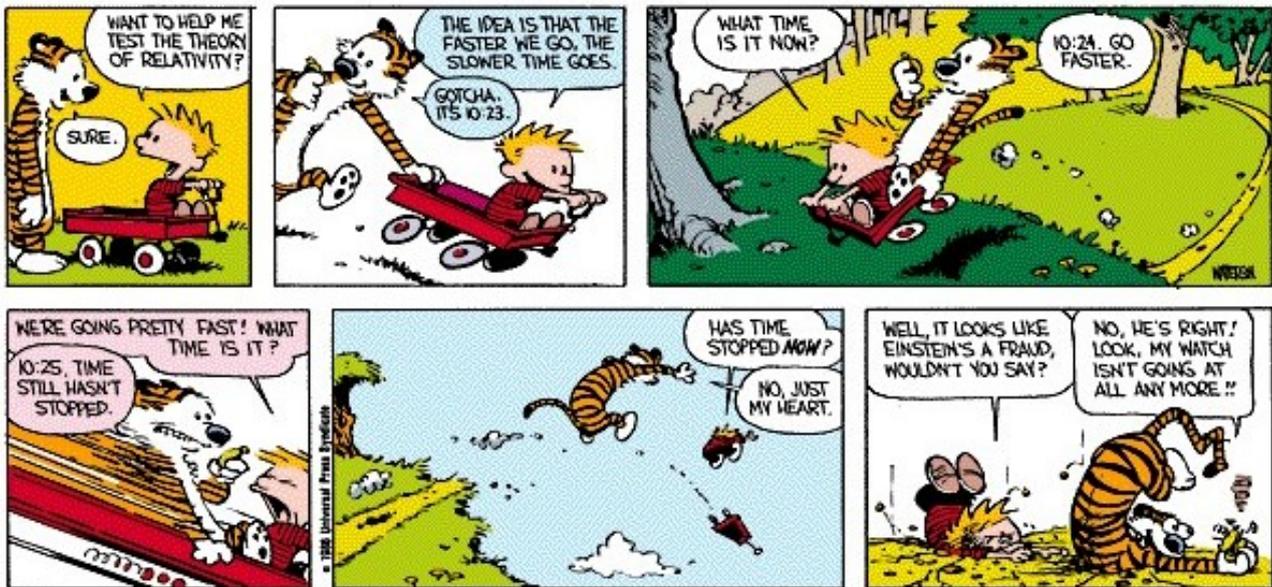


Fig. 16 – Calvin & Hobbes, Bill Waterson.