LICENCE DE PHYSIQUE — RELATIVITÉ RESTREINTE

EXERCICES

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2024–2025

Intervenants : L. Le Guillou & J. Bolmont (Sorbonne Université / LPNHE)

TD 5

Loi relativiste de composition des vitesses — Concept de rapidité — Effet Phare — Aberration des étoiles

1. Composition des vitesses

Vues dans le laboratoire, deux particules A et B s'éloignent de l'origine choisie O dans des directions opposées avec chacune une vitesse $3c/4$ mesurée dans le référentiel du laboratoire.

1.1 — Est-il correct de dire que la vitesse relative de A par rapport à B est $3c/2$, c'est à dire supérieure à c ? Quelle est la vitesse de A par rapport à B ? Et réciproquement ?

1.2 — Supposons deux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, avec $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_x$ la vitesse relative de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$. Un rayon lumineux se propage à la vitesse $\mathbf{u} = c\,\mathbf{e}_x$ vers l'avant dans $\mathcal{R}$; quelle est sa vitesse de propagation dans $\mathcal{R}'$? Même question pour un rayon lumineux se propageant cette fois vers l'arrière.

1.3 — En partant de la loi de composition des vitesses, montrez algébriquement que la vitesse d'un objet ne peut dépasser c quel que soit le référentiel où on mesure cette vitesse.

2. Rapidité

2.1 — Préambule. Soient a et b deux nombres réels. À partir de la définition de la fonction *tangente hyperbolique*, montrez que la tangente hyperbolique d'une somme de deux réels s'écrit :

$$\mathrm{th}(a+b) = \frac{\mathrm{th}\,a + \mathrm{th}\,b}{1 + \mathrm{th}\,a\,\mathrm{th}\,b} \tag{1}$$

et, de même, que,

$$\mathrm{th}(a-b) = \frac{\mathrm{th}\,a - \mathrm{th}\,b}{1 - \mathrm{th}\,a\,\mathrm{th}\,b} \tag{2}$$

Soient deux référentiels inertiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, en translation l'un par rapport à l'autre, avec pour vitesse relative $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v\,\mathbf{e}_x$. On suppose que les axes des repères des deux référentiels sont parallèles, et on utilise la convention habituelle : on fixera $t = t' = 0$ à l'instant où les origines O et O' des repères des deux référentiels se confondent.

Soit un mobile matériel en mouvement dans le référentiel inertiel $\mathcal{R}'$ avec une vitesse $\mathbf{u'} = u'_x\,\mathbf{e}_x$ parallèle à l'axe des x' (et des x).

2.2 — Donnez l'expression de sa vitesse $\mathbf{u}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$.

2.3 — On appelle *rapidité* de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ la grandeur φ définie par :

$$\beta = \frac{v}{c} = \operatorname{th}\varphi \qquad \textit{i.e.} \quad \varphi = \operatorname{argth}\beta.$$

De même, on peut définir la rapidité ψ du mobile matériel dans $\mathcal{R}$ (et respectivement sa rapidité ψ' dans $\mathcal{R}'$) par :

$$\frac{u_x}{c} = \operatorname{th}\psi \qquad \text{et} \qquad \frac{u'_x}{c} = \operatorname{th}\psi'.$$

Exprimez la loi relativiste de composition des vitesses en terme de rapidités. Commentez.

2.4 — Exprimez $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$ en fonction de la rapidité φ du référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$. Écrivez la transformation de Lorentz sous forme matricielle, en faisant apparaître la rapidité φ. Commentez.

3. Distribution angulaire de la lumière émise par une source en mouvement (effet phare)

Une source de lumière O' émet des photons de manière isotrope dans son référentiel $\mathcal{R}'$. Cette source lumineuse est animée d'une vitesse $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_x$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$. Pour illustrer, on pourra prendre $v = c/2$.

3.1 — Exprimez les composantes u'_x, u'_y et u'_z de la vitesse $\mathbf{u'}$ d'un rayon lumineux dans le référentiel $\mathcal{R}'$ en fonction des angles θ' et ϕ', où θ' est l'angle zénithal entre la direction du mouvement relatif (par exemple l'axe $O'x'$) et la direction du rayon lumineux, et ϕ' est l'angle azimutal dans le plan $y'O'z'$ (coordonnées sphériques, mais avec $O'x'$ comme axe de référence).

3.2 — En utilisant la loi relativiste de composition des vitesses, établissez les composantes u_x, u_y et u_z du vecteur vitesse $\mathbf{u}$ du même rayon lumineux, mais cette fois dans le référentiel $\mathcal{R}$, où la source se déplace à la vitesse $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_x$.

3.3 — Vérifiez que la norme du vecteur vitesse $\mathbf{u}$ dans $\mathcal{R}$ vaut également c, comme attendu d'après le second postulat de la relativité restreinte.

3.4 — Exprimez les coordonnées du vecteur vitesse $\mathbf{u}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$, en fonction des angles θ et ϕ, où θ est l'angle zénithal par rapport à la direction de la vitesse relative, et ϕ l'angle azimutal dans le plan orthogonal, définis de la même manière que précédemment (coordonnées sphériques avec l'axe Ox comme axe de référence).

3.5 — Exprimez les angles θ et ϕ qui définissent dans $\mathcal{R}$ la direction du rayon lumineux en fonction de θ' et ϕ'.

3.6 — Montrez que pour $0 \leqslant \beta < 1$ (source se déplaçant vers l'avant), on a nécessairement $\theta < \theta'$. Calculez explicitement θ pour $\beta = 1/2$ et $\theta' = \pi/2$. Commentez.

3.7 — Bonus : étudiez la distribution angulaire des photons dans $\mathcal{R}$ autour de la direction Ox (direction du mouvement relatif).

4. Aberration des étoiles

L'aberration des étoiles est un phénomène découvert par l'astronome James Bradley (1693–1762) en 1725 en étudiant l'évolution de la position de l'étoile γ Draconis : lorsqu'on observe une même étoile tout au long de l'année, celle-ci semble parcourir une petite ellipse plus ou moins aplatie selon la latitude de l'étoile, et ce, en une année. Toutes les étoiles sont affectées par ce phénomène : l'angle d'où provient la lumière semble varier avec la vitesse relative de l'observateur, à la manière de la pluie pour un piéton en mouvement. James Bradley tentait de mesurer la parallaxe [1] des étoiles proches, en particulier de γ Draconis (*Eltamin*, la 3$^{\text{ème}}$ étoile la plus brillante de la constellation du Dragon) : au lieu de cela, il découvrit l'aberration des étoiles et la nutation (petit mouvement de l'axe de rotation terrestre qui se superpose à la précession des équinoxes, de 18.6 années de période).

4.1 — Considérons une étoile lointaine située dans la direction du pôle de l'écliptique (axe Oz de l'orbite terrestre autour du Soleil). Un astronome sur Terre observe régulièrement cette étoile. On appelle v la vitesse de l'astronome par rapport au référentiel de Copernic. Calculez l'angle apparent θ' que fait la direction de l'étoile avec le pôle de l'écliptique [2] pour l'astronome. Faites l'application numérique ($v \simeq 30\,\text{km.s}^{-1}$).

4.2 — Généralisez le résultat précédent pour une étoile inclinée avec un angle θ par rapport au pôle de l'écliptique (angle zénithal). Décrivez la trajectoire apparente des étoiles en fonction de θ.

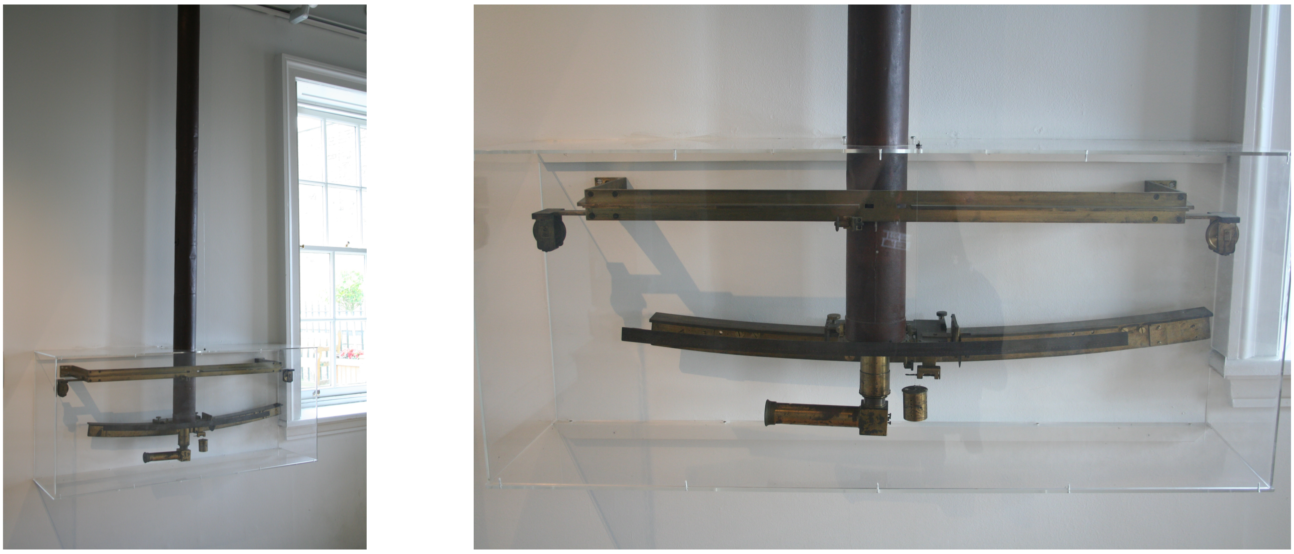

Fig. 1 – Secteur zénithal (télescope pointant au zénith, permettant la mesure de la distance zénithale des étoiles). Conçu pour James Bradley, il est installé à l'observatoire de Greenwich. C'est avec cet instrument que J. Bradley découvrit l'aberration de la lumière et la nutation de l'axe terrestre (photos L. Le Guillou).

1. La parallaxe annuelle de γ Draconis est en fait de 22×10^{-3} arcsec, soit environ 1000 fois plus faible que l'effet de l'aberration.
2. L'écliptique est la trajectoire apparente du Soleil sur la sphère céleste ; le plan de l'écliptique est le plan de l'orbite terrestre autour du Soleil.