Licence de Physique — Relativité Restreinte

Exercices — Corrigé

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2024–2025

Intervenants : L. Le Guillou & J. Bolmont (Sorbonne Université / LPNHE)

TD 5

Loi relativiste de composition des vitesses — Concept de rapidité — Effet Phare — Aberration des étoiles

1. Composition des vitesses

Vues dans le laboratoire, deux particules A et B s'éloignent de l'origine choisie O dans des directions opposées avec chacune une vitesse $3c/4$ mesurée dans le référentiel du laboratoire.

1.1 — Est-il correct de dire que la vitesse relative de A par rapport à B est $3c/2$, c'est à dire supérieure à c ? Quelle est la vitesse de A par rapport à B ? Et réciproquement ?

Utilisons la loi relativiste de composition des vitesses. Dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire, si on choisi l'axe des abscisses orienté parallèlement à la vitesse de A, les vitesses des particules A et B sont :

$$\mathbf{u}_A = +\frac{3c}{4}\,\mathbf{e}_x \qquad \mathbf{u}_B = -\frac{3c}{4}\,\mathbf{e}_x$$

Plaçons nous maintenant dans $\mathcal{R}' = \mathcal{R}_B$ le référentiel de la particule B, en translation uniforme à la vitesse $\mathbf{u}_B$ par rapport à $\mathcal{R}$. La composition des vitesses donne la vitesse de A dans le référentiel $\mathcal{R}' = \mathcal{R}_B$:

$$u(A/B) = u'(A) = \frac{u(A) - v(B/A)}{1 - \dfrac{u(A)\,v(B/A)}{c^2}} = \frac{\dfrac{3c}{4} - \left(-\dfrac{3c}{4}\right)}{1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)\left(-\dfrac{3}{4}\right)} = \frac{3c/2}{1 + 9/16} = \frac{24}{25}\,c < c$$

On trouve bien une vitesse inférieure à c pour la particule A dans le référentiel de B, contrairement à ce que donnerait la règle galiléenne de composition des vitesses.

Par symétrie, on aura de même, pour la particule B vue dans le référentiel de A :

$$u(B/A) = -\frac{24}{25}\,c \qquad |u(B/A)| < c.$$

1.2 — Supposons deux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, avec $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_x$ la vitesse relative de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$. Un rayon lumineux se propage à la vitesse $\mathbf{u} = c\,\mathbf{e}_x$ vers l'avant dans $\mathcal{R}$; quelle est sa vitesse de propagation dans $\mathcal{R}'$? Même question pour un rayon lumineux se propageant cette fois vers l'arrière.

Supposons que le rayon lumineux se propage vers l'avant dans $\mathcal{R}$; les composantes de son vecteur vitesse $\mathbf{u}$ y sont donc $(u_x = c, u_y = 0, u_z = 0)$. En appliquant la loi relativiste de composition des vitesses, on obtient immédiatement les composantes de son vecteur vitesse $\mathbf{u}'$ dans $\mathcal{R}'$:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{u_x\, v}{c^2}} = \frac{c - v}{1 - v/c} = +c\,\frac{1 - v/c}{1 - v/c} = +c \qquad u'_y = \frac{1}{\gamma}\frac{u_y}{1 - \dfrac{v u_x}{c^2}} = 0 \qquad u'_z = \frac{1}{\gamma}\frac{u_z}{1 - \dfrac{v u_x}{c^2}} = 0.$$

On vérifie ainsi que la vitesse de propagation est bien aussi $+c$ dans le référentiel $\mathcal{R}'$, ce qui était attendu puisqu'il s'agit d'une application directe du second postulat de la relativité restreinte (*la vitesse de la lumière dans le vide est c dans tous les référentiels galiléens*).

Si le rayon se propage vers l'arrière, *i.e.* si $u_x = -c, u_y = u_z = 0$, on trouve cette fois :

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{u_x\, v}{c^2}} = \frac{-c - v}{1 + v/c} = -c \qquad u'_y = \frac{1}{\gamma}\frac{u_y}{1 - \dfrac{v u_x}{c^2}} = 0 \qquad u'_z = \frac{1}{\gamma}\frac{u_z}{1 - \dfrac{v u_x}{c^2}} = 0.$$

Dans le référentiel $\mathcal{R}'$, le rayon lumineux se propage aussi à la vitesse c vers l'arrière.

1.3 — En partant de la loi de composition des vitesses, montrez algébriquement que la vitesse d'un objet ne peut dépasser c quel que soit le référentiel où on mesure cette vitesse.

Considérons un mobile se déplaçant à la vitesse $u' < c$ dans un référentiel $\mathcal{R}'$. Sa vitesse u mesurée dans un référentiel $\mathcal{R}$ tel que $v(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v < c$ est donc (en supposant les vitesses $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$ et $\mathbf{v}$ colinéaires) :

$$u = \frac{u' + v}{1 + \dfrac{u'v}{c^2}} \qquad \frac{u}{c} = \frac{\dfrac{u'}{c} + \dfrac{v}{c}}{1 + \dfrac{u'}{c}\dfrac{v}{c}}$$

Posons $\alpha' = u'/c$, $\alpha = u/c$ et $\beta = v/c$. On a :

$$0 \leqslant \alpha' = \frac{u'}{c} < 1 \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant \beta = \frac{v}{c} < 1$$

Comme $0 \leqslant \alpha' < 1$, on en déduit que $0 < 1 - \alpha' \leqslant 1$; En multipliant l'inégalité $\beta < 1$ par $(1 - \alpha') > 0$, on obtient ainsi :

$$(1 - \alpha')\beta < 1 - \alpha' \qquad \text{d'où} \qquad \beta - \alpha'\beta < 1 - \alpha' \qquad \text{soit} \qquad \alpha' + \beta < 1 + \alpha'\beta$$

Et par conséquent,

$$\alpha = \frac{u}{c} = \frac{\dfrac{u'}{c} + \dfrac{v}{c}}{1 + \dfrac{u'}{c}\dfrac{v}{c}} = \frac{\alpha' + \beta}{1 + \alpha'\beta} < 1 \qquad \textit{i.e.} \quad u < c$$

Pour un mobile se déplaçant à une vitesse $u' < c$ dans un référentiel $\mathcal{R}'$, sa vitesse u mesurée dans tout autre référentiel sera elle aussi inférieure à c. De même, on peut montrer qu'un objet se déplaçant à la vitesse c dans un référentiel galiléen aura aussi une vitesse c dans tout autre référentiel galiléen, ce qui est cohérent avec les postulats de départ de la relativité.

2. Rapidité

2.1 — Préambule. Soient a et b deux nombres réels. À partir de la définition de la fonction *tangente hyperbolique*, montrez que la tangente hyperbolique d'une somme de deux réels s'écrit :

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b} \tag{1}$$

et, de même, que,

$$\operatorname{th}(a-b) = \frac{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b}{1 - \operatorname{th} a \operatorname{th} b} \tag{2}$$

Les tangentes hyperboliques de a, b et $a+b$ sont définies par :

$$\operatorname{th}(a) = \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} a} = \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}} \qquad \operatorname{th}(b) = \frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{ch} b} = \frac{e^b - e^{-b}}{e^b + e^{-b}} \qquad \operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{sh}(a+b)}{\operatorname{ch}(a+b)} = \frac{e^{a+b} - e^{-a-b}}{e^{a+b} + e^{-a-b}}$$

En partant de la forme recherchée, on trouve :

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b} &= \frac{\dfrac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}} + \dfrac{e^b - e^{-b}}{e^b + e^{-b}}}{1 + \dfrac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}} \cdot \dfrac{e^b - e^{-b}}{e^b + e^{-b}}} = \frac{\left(e^a - e^{-a}\right)\left(e^b + e^{-b}\right) + \left(e^b - e^{-b}\right)\left(e^a + e^{-a}\right)}{\left(e^a + e^{-a}\right)\left(e^b + e^{-b}\right) + \left(e^a - e^{-a}\right)\left(e^b - e^{-b}\right)} \\
&= \frac{2\,e^{a+b} - 2\,e^{-a-b}}{2\,e^{a+b} + 2\,e^{-a-b}} = \frac{e^{a+b} - e^{-a-b}}{e^{a+b} + e^{-a-b}} = \operatorname{th}(a+b)
\end{aligned}$$

où on reconnaît l'expression de la tangente hyperbolique de $a+b$. Pour obtenir la seconde expression, il suffit de remplacer b par $-b$ et comme la fonction tangente hyperbolique est impaire, le résultat est immédiat.

Soient deux référentiels inertiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, en translation l'un par rapport à l'autre, avec pour vitesse relative $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v\,\mathbf{e}_x$. On suppose que les axes des repères des deux référentiels sont parallèles, et on utilise la convention habituelle : on fixera $t = t' = 0$ à l'instant où les origines O et O' des repères des deux référentiels se confondent.

Soit un mobile matériel en mouvement dans le référentiel inertiel $\mathcal{R}'$ avec une vitesse $\mathbf{u'} = u'_x\,\mathbf{e}_x$ parallèle à l'axe des x' (et des x).

2.2 — Donnez l'expression de sa vitesse $\mathbf{u}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$.

En utilisant la loi relativiste de composition des vitesses, il vient :

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \dfrac{v u'_x}{c^2}} \qquad u_y = \frac{1}{\gamma}\frac{u'_y}{1 + \dfrac{v u'_x}{c^2}} \qquad u_z = \frac{1}{\gamma}\frac{u'_z}{1 + \dfrac{v u'_x}{c^2}}$$

Ce qui, dans le cas particulier considéré ici ($u'_y = 0$ et $u'_z = 0$), se réduit à :

$$\mathbf{u} = u_x\,\mathbf{e}_x \qquad \mathbf{u'} = u'_x\,\mathbf{e}_x \qquad u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \dfrac{v u'_x}{c^2}}.$$

2.3 — On appelle *rapidité* de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ la grandeur φ définie par :

$$\beta = \frac{v}{c} = \operatorname{th}\varphi \qquad \textit{i.e.} \quad \varphi = \operatorname{argth}\beta.$$

De même, on peut définir la rapidité ψ du mobile matériel dans $\mathcal{R}$ (et respectivement sa rapidité ψ' dans $\mathcal{R}'$) par :

$$\frac{u_x}{c} = \operatorname{th}\psi \qquad \text{et} \qquad \frac{u'_x}{c} = \operatorname{th}\psi'.$$

Exprimez la loi relativiste de composition des vitesses en terme de rapidités. Commentez.

En substituant dans l'expression de u_x, et en divisant par c, on obtient :

$$\operatorname{th}\psi = \frac{u_x}{c} = \frac{u'_x + v}{1 + \dfrac{v u'_x}{c^2}} \times \frac{1}{c} = \frac{\dfrac{u'_x}{c} + \dfrac{v}{c}}{1 + \dfrac{v}{c}\dfrac{u'_x}{c}} = \frac{\operatorname{th}\psi' + \operatorname{th}\varphi}{1 + \operatorname{th}\varphi \operatorname{th}\psi'} = \operatorname{th}(\psi' + \varphi)$$

où on reconnaît la tangente hyperbolique d'une somme. On en déduit que contrairement à la vitesse, la rapidité est une grandeur additive :

$$\operatorname{th}\psi = \operatorname{th}(\psi' + \varphi) \qquad \text{d'où} \quad \psi = \psi' + \varphi.$$

Bien sûr, ce résultat n'est valide que pour des vitesses colinéaires.

2.4 — Exprimez $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ en fonction de la rapidité φ du référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$. Écrivez la transformation de Lorentz sous forme matricielle, en faisant apparaître la rapidité φ. Commentez.

Par définition de la rapidité φ, on a :

$$\beta = \operatorname{th}\varphi \qquad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = \left(1 - \operatorname{th}^2\varphi\right)^{-1/2} = \left(\frac{1}{\operatorname{ch}^2\varphi}\right)^{-1/2} = \operatorname{ch}\varphi$$

car le cosinus hyperbolique est toujours positif. On en déduit aussi que le produit $\beta\gamma$ peut encore s'écrire :

$$\beta\gamma = \operatorname{th}\varphi \times \operatorname{ch}\varphi = \operatorname{sh}\varphi.$$

Avec les définitions des référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ et le choix de leurs repères respectifs, la transformation de Lorentz pour passer des coordonnées (ct, x, y, z) d'un événement dans $\mathcal{R}$ aux coordonnées (ct', x', y', z') du même événement dans $\mathcal{R}'$ s'écrit :

$$\begin{cases} ct' &= \gamma\,(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma\,(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{cases} \qquad \text{et réciproquement} \qquad \begin{cases} ct &= \gamma\,(ct' + \beta x') \\ x &= \gamma\,(x' + \beta ct') \\ y &= y' \\ z &= z' \end{cases}$$

On peut mettre ces équations sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & +\beta\gamma & 0 & 0 \\ +\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Si on fait apparaître la rapidité, l'expression de la transformation de Lorentz devient :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\varphi & -\operatorname{sh}\varphi & 0 & 0 \\ -\operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\varphi & \operatorname{sh}\varphi & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Il y a là une similitude formelle avec des matrices de rotation (mais ce n'en sont pas).

3. Distribution angulaire de la lumière émise par une source en mouvement (effet phare)

Une source de lumière O' émet des photons de manière isotrope dans son référentiel $\mathcal{R}'$. Cette source lumineuse est animée d'une vitesse $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_x$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$. Pour illustrer, on pourra prendre $v = c/2$.

3.1 — Exprimez les composantes u'_x, u'_y et u'_z de la vitesse $\mathbf{u'}$ d'un rayon lumineux dans le référentiel $\mathcal{R}'$ en fonction des angles θ' et ϕ', où θ' est l'angle zénithal entre la direction du mouvement relatif (par exemple l'axe $O'x'$) et la direction du rayon lumineux, et ϕ' est l'angle azimutal dans le plan $y'O'z'$ (coordonnées sphériques, mais avec $O'x'$ comme axe de référence).

Dans le référentiel $\mathcal{R}'$ de la source (c'est son *référentiel propre*), un rayon lumineux émis par la source se déplace (dans le vide) à la vitesse $\mathbf{u'}$: (u'_x, u'_y, u'_z) dont la norme est forcément : $|\mathbf{u'}| = c$. Les composantes du vecteur vitesse $\mathbf{u'}$ d'un photon émis selon la direction (θ', ϕ') sont ainsi :

$$u'_x = c\cos\theta' \qquad u'_y = c\sin\theta'\cos\phi' \qquad u'_z = c\sin\theta'\sin\phi'$$

où ϕ' est l'angle azimutal autour de l'axe $Ox' = Ox$ (*cf.* fig. 1).

3.2 — En utilisant la loi relativiste de composition des vitesses, établissez les composantes u_x, u_y et u_z du vecteur vitesse $\mathbf{u}$ du même rayon lumineux, mais cette fois dans le référentiel $\mathcal{R}$, où la source se déplace à la vitesse $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_x$.

Dans le référentiel $\mathcal{R}$, avec $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v\,\mathbf{e}_x$, les composantes de la vitesse deviennent :

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + \dfrac{vu'_x}{c^2}} = \frac{c\cos\theta' + v}{1 + \dfrac{vc\cos\theta'}{c^2}} = \frac{c\cos\theta' + v}{1 + \dfrac{v\cos\theta'}{c}} \\
u_y &= \frac{1}{\gamma}\frac{u'_y}{1 + \dfrac{vu'_x}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} \times \frac{c\sin\theta'\cos\phi'}{1 + \dfrac{vc\cos\theta'}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} \times \frac{c\sin\theta'\cos\phi'}{1 + \dfrac{v\cos\theta'}{c}} \\
u_z &= \frac{1}{\gamma}\frac{u'_z}{1 + \dfrac{vu'_x}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} \times \frac{c\sin\theta'\sin\phi'}{1 + \dfrac{vc\cos\theta'}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} \times \frac{c\sin\theta'\sin\phi'}{1 + \dfrac{v\cos\theta'}{c}}.
\end{aligned}$$

3.3 — Vérifiez que la norme du vecteur vitesse $\mathbf{u}$ dans $\mathcal{R}$ vaut également c, comme attendu d'après le second postulat de la relativité restreinte.

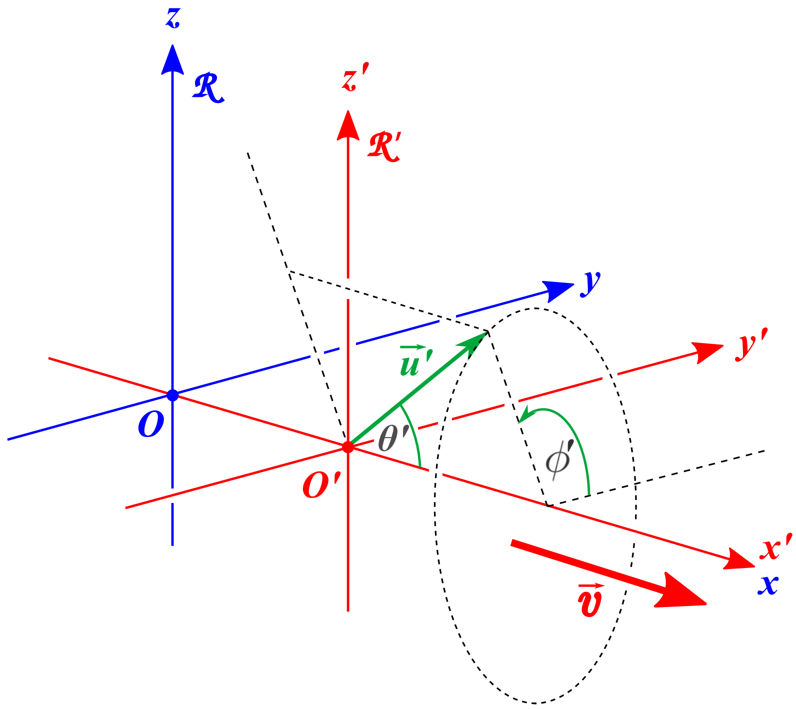

Fig. 1 – Effet "phare". La source, en O', se déplace à la vitesse $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_x$ dans le référentiel $\mathcal{R}$. $\mathbf{u}'$ est le vecteur vitesse d'un rayon lumineux émis par la source mesuré dans son propre référentiel $\mathcal{R}'$. On adopte ici la convention suivante pour les angles : θ' est l'angle entre l'axe $O'x'$ et $\mathbf{u}'$, tandis que ϕ' est l'angle azimutal dans le plan $y'O'z'$ par rapport à l'axe $O'y'$. On adopte des conventions équivalentes dans le référentiel $\mathcal{R}$ pour les angles (θ, ϕ) définissant la direction du vecteur vitesse $\mathbf{u}$ du même rayon lumineux mais cette fois dans $\mathcal{R}$.

Ayant établi les composantes u_x, u_y et u_z de la vitesse d'un rayon dans le référentiel $\mathcal{R}$, on peut vérifier que la norme du vecteur vitesse $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ vaut bien c :

$$\mathbf{u}^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = \frac{(c\cos\theta' + v)^2 + \dfrac{c^2}{\gamma^2}\sin^2\theta'\cos^2\phi' + \dfrac{c^2}{\gamma^2}\sin^2\theta'\sin^2\phi'}{\left[1 + \dfrac{v}{c}\cos\theta'\right]^2}$$

$$\mathbf{u}^2 = \frac{c^2\cos^2\theta' + v^2 + 2vc\cos\theta' + \dfrac{c^2}{\gamma^2}\sin^2\theta'}{\left[1 + \dfrac{v}{c}\cos\theta'\right]^2} = \frac{c^2\cos^2\theta' + v^2 + 2vc\cos\theta' + c^2(1-\beta^2)\sin^2\theta'}{\left[1 + \dfrac{v}{c}\cos\theta'\right]^2}$$

$$\mathbf{u}^2 = \frac{c^2\cos^2\theta' + c^2\sin^2\theta' + v^2 + 2vc\cos\theta' - v^2\sin^2\theta'}{\left[1 + \dfrac{v}{c}\cos\theta'\right]^2} = \frac{c^2 + v^2 - v^2\sin^2\theta' + 2vc\cos\theta'}{\left[1 + \dfrac{v}{c}\cos\theta'\right]^2}$$

$$\mathbf{u}^2 = \frac{c^2 + v^2\cos^2\theta' + 2vc\cos\theta'}{\left[1 + \dfrac{v}{c}\cos\theta'\right]^2} = c^2 \times \frac{1 + 2\dfrac{v}{c}\cos\theta' + \dfrac{v^2}{c^2}\cos^2\theta'}{\left[1 + \dfrac{v}{c}\cos\theta'\right]^2} = c^2 \qquad \text{d'où} \quad |\mathbf{u}| = c$$

où on a utilisé les relations $1/\gamma^2 = 1 - \beta^2$ et $\beta^2 c^2 = v^2$.

3.4 — Exprimez les coordonnées du vecteur vitesse $\mathbf{u}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$, en fonction des angles θ et ϕ, où θ est l'angle zénithal par rapport à la direction de la vitesse relative, et ϕ l'angle azimutal dans le plan orthogonal, définis de la même manière que précédemment (coordonnées sphériques avec l'axe Ox comme axe de référence).

Comme nous avons vérifié que la norme de la vitesse du rayon lumineux vaut aussi $|\mathbf{u}| = c$ dans le référentiel $\mathcal{R}$, on peut écrire les composantes (u_x, u_y, u_z) en fonction des angles θ et ϕ selon la même convention que précédemment (*cf.* fig. 1) :

$$u_x = c\cos\theta \qquad u_y = c\sin\theta\cos\phi \qquad u_z = c\sin\theta\sin\phi.$$

3.5 — Exprimez les angles θ et ϕ qui définissent dans $\mathcal{R}$ la direction du rayon lumineux en fonction de θ' et ϕ'.

De manière immédiate, $u_z/u_y = u'_z/u'_y$ et par conséquent $\phi = \phi'$: la direction azimutale autour de Ox est inchangée. Du fait de la symétrie de rotation autour de Ox, on pouvait s'attendre à un tel résultat.

Pour l'angle zénithal θ, on a $u_x = c\cos\theta$, et par conséquent,

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta' + \beta}{1 + \beta\cos\theta'}.$$

On peut établir la relation réciproque entre $\cos\theta$ et $\cos\theta'$ en inversant cette expression, ou encore en utilisant l'astuce habituelle de l'échange des référentiels : il suffit d'échanger les symboles primés et non-primés, et de changer β en $-\beta$,

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta}.$$

3.6 — Montrez que pour $0 \leqslant \beta < 1$ (source se déplaçant vers l'avant), on a nécessairement $\theta < \theta'$. Calculez explicitement θ pour $\beta = 1/2$ et $\theta' = \pi/2$. Commentez.

Pour juger de l'effet du changement de référentiel sur la distribution angulaire des rayons émis par la source en mouvement, on peut utiliser le fait que $\cos^2\theta' \leqslant 1$, et comme $0 \leqslant \beta < 1$, on a nécessairement :

$$\beta\cos^2\theta' \leqslant \beta \qquad \text{soit} \qquad \beta\cos^2\theta' + \cos\theta' \leqslant \beta + \cos\theta' \qquad \textit{i.e.} \qquad \cos\theta'(1 + \beta\cos\theta') \leqslant \beta + \cos\theta'$$

D'où on déduit :

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta' + \beta}{1 + \beta\cos\theta'} \geqslant \cos\theta' \qquad \text{et par conséquent} \qquad \theta \leqslant \theta'.$$

Et l'inégalité est stricte, sauf si $\beta = 0$ ou si $\theta' \in \{0, \pi\}$. Dans le référentiel $\mathcal{R}$ où la source est en mouvement, les rayons sont davantage concentrés vers l'avant.

En particulier, si $\beta = 1/2$,

$$\cos\theta = \frac{1 + 2\cos\theta'}{2 + \cos\theta'} > \cos\theta'$$

Par exemple, pour $\theta' = \pi/2$, $\theta = \pi/3$: l'ensemble des photons émis dans le demi-espace avant dans le référentiel $\mathcal{R}'$ de la source est émis dans un cône de 120^o vers l'avant dans $\mathcal{R}$ (fig. 2).

L'effet observé dans $\mathcal{R}$ est une focalisation des rayons émis par la source dans la direction de son mouvement : on appelle cet effet relativiste l'**effet projecteur** ou encore **l'effet phare**.

Si par exemple, la source lumineuse est une étoile, en mouvement par rapport à un observateur solidaire du référentiel $\mathcal{R}$, l'observateur mesurera l'étoile comme apparemment plus brillante si elle se rapproche de lui (dans les conventions de l'exercice, pour des temps $t < 0$, si on suppose que la source O' est en O à $t = 0$), et il la mesurera comme moins brillante lorsqu'elle s'éloigne de lui (ici, pour des $t > 0$).

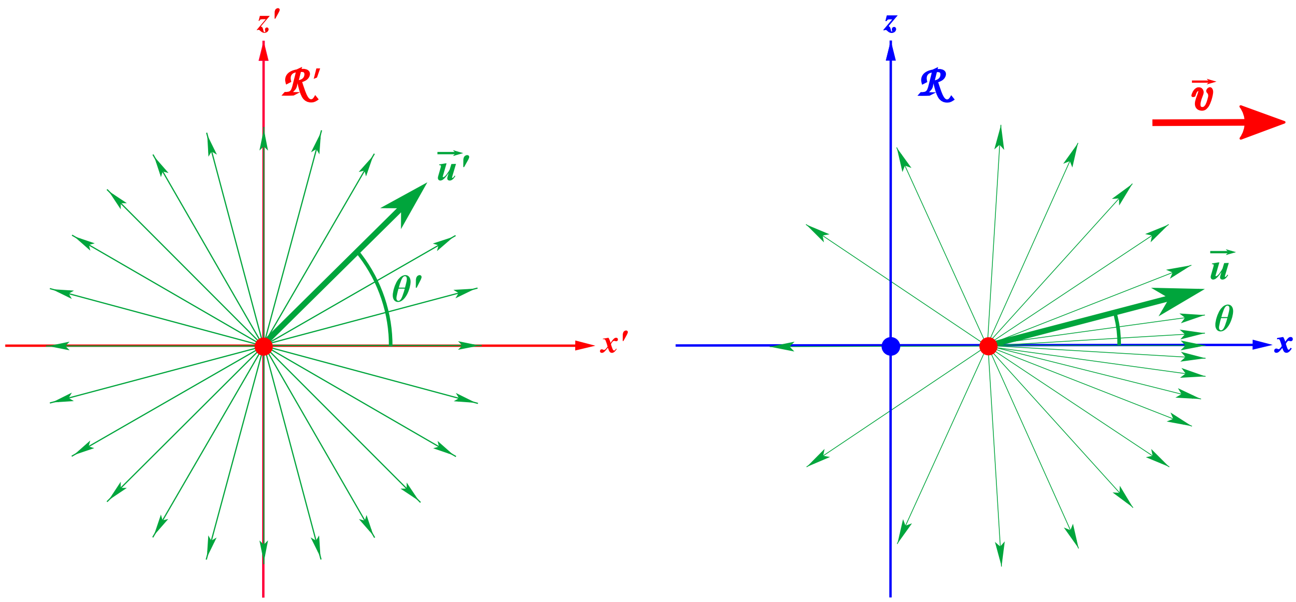

Fig. 2 – Effet "phare". Dans le référentiel $\mathcal{R}'$ de la source, les photons sont émis selon une distribution angulaire isotrope. Dans le référentiel $\mathcal{R}$, les rayons sont concentrés vers l'avant (effet projecteur ou effet phare) et le flux de photons émis par la source en mouvement est plus intense vers l'avant que vers l'arrière.

3.7 — Bonus : étudiez la distribution angulaire des photons dans $\mathcal{R}$ autour de la direction Ox (direction du mouvement relatif).

On peut établir explicitement la distribution angulaire des rayons lumineux émis par la source dans les deux référentiels. Supposons que la source émette chaque seconde N photons sur l'angle solide total de 4π. Si on suppose que l'émission est isotrope dans le référentiel $\mathcal{R}'$, cela signifie que le nombre de photons émis chaque seconde dans un angle solide élémentaire $\mathrm{d}^2\Omega'$ s'écrit :

$$\mathrm{d}^2N = \rho'(\theta',\phi')\mathrm{d}^2\Omega' = \rho'(\theta',\phi')\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi'$$

où $\mathrm{d}^2\Omega' = \sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi'$ est l'angle solide élémentaire exprimé dans les coordonnées angulaires choisies (fig. 1), et $\rho'(\theta',\phi')$ la *fonction de densité* des rayons émis. Comme la source est isotrope, cette fonction densité est constante dans $\mathcal{R}'$, et vaut :

$$\rho'(\theta',\phi') = \frac{N}{4\pi}$$

de telle sorte que l'intégrale sur toutes les directions fasse bien N :

$$\iint \mathrm{d}^2N = \int_{\Omega'=4\pi} \rho'(\theta',\phi')\mathrm{d}^2\Omega' = \int_{\theta'=0}^{\theta'=\pi}\int_{\phi'=0}^{\phi'=2\pi} \rho'(\theta',\phi')\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi' = \frac{N}{4\pi}\times 2\pi\left[-\cos\theta'\right]_{\theta'=0}^{\theta'=\pi} = N$$

On peut exprimer la *fonction de densité* des rayons $\rho(\theta,\phi)$, cette fois dans le référentiel $\mathcal{R}$,

$$\mathrm{d}^2N = \rho(\theta,\phi)\mathrm{d}^2\Omega = \rho(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

Les d^2N photons émis dans l'angle solide élémentaire $\mathrm{d}^2\Omega'$ dans le référentiel $\mathcal{R}'$, sont émis dans l'angle solide correspondant $\mathrm{d}^2\Omega$ dans $\mathcal{R}$, et on aura :

$$\mathrm{d}^2N = \rho(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = \rho'(\theta',\phi')\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi'$$

En différenciant l'équation qui donne $\cos\theta'$ en fonction de $\cos\theta$, on trouve de plus :

$$\mathrm{d}\left[\cos\theta'\right] = \mathrm{d}\left[\frac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta}\right] \qquad \text{soit} \qquad -\sin\theta'\mathrm{d}\theta' = -\left[\frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\theta)^2}\right]\sin\theta\mathrm{d}\theta.$$

Ce qui, en substituant dans l'équation donnant $\mathrm{d}^2 N$, et en simplifiant, permet d'obtenir la fonction densité des rayons dans le référentiel $\mathcal{R}$:

$$\rho(\theta, \phi) = \frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\theta)^2}\rho'(\theta', \phi') = \frac{1}{\gamma^2}\frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^2} \times \frac{N}{4\pi}.$$

Cette fonction de θ est manifestement décroissante, ce qui signifie que les rayons sont concentrés vers l'avant (petites valeurs de θ). En traçant cette fonction pour $\beta = 1/2$, on obtient le graphe de la figure 3.

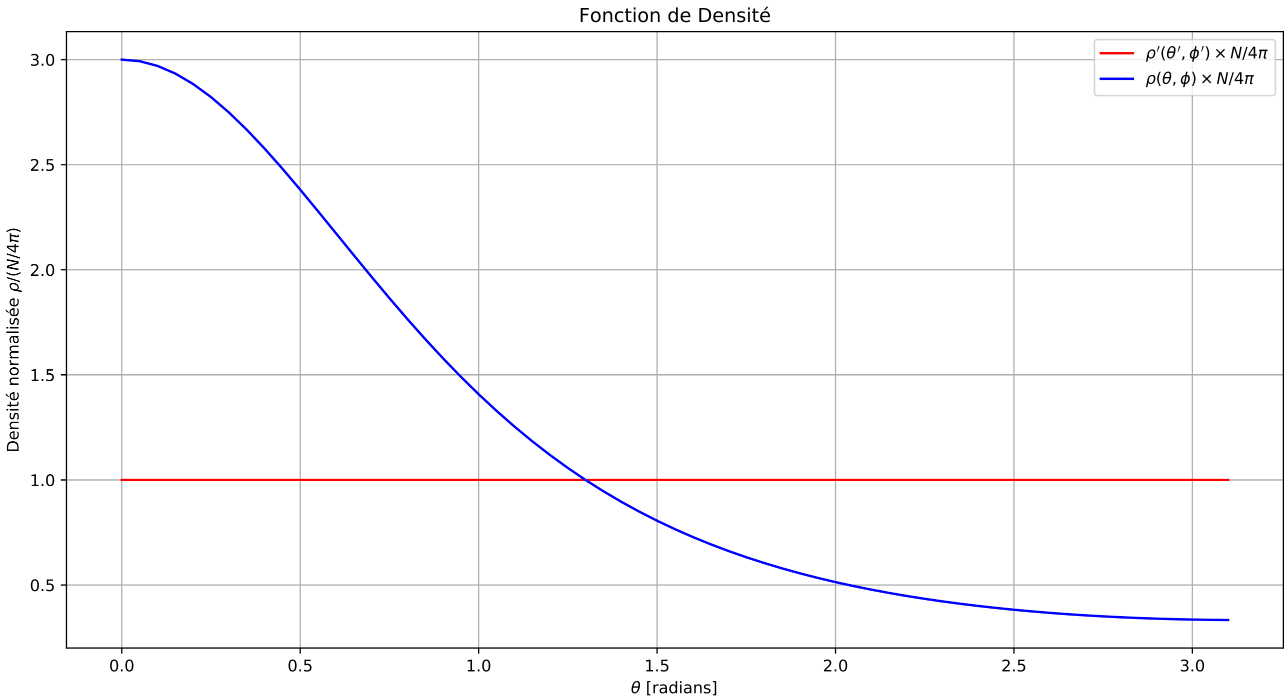

Fig. 3 – Effet "phare". Fonction densité angulaire des rayons, dans le référentiel $\mathcal{R}'$ de la source (rouge), et dans le référentiel $\mathcal{R}$ où la source est animée d'une vitesse $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_x$ (bleu). Dans le référentiel $\mathcal{R}$, la densité des rayons est plus grande pour les petites valeurs de l'angle θ et décroît quand θ croît, ce qui correspond bien à une concentration des rayons vers l'avant dans le référentiel $\mathcal{R}$.

4. Aberration des étoiles

L'aberration des étoiles est un phénomène découvert par l'astronome James Bradley (1693–1762) en 1725 en étudiant l'évolution de la position de l'étoile γ Draconis : lorsqu'on observe une même étoile tout au long de l'année, celle-ci semble parcourir une petite ellipse plus ou moins aplatie selon la latitude de l'étoile, et ce, en une année. Toutes les étoiles sont affectées par ce phénomène : l'angle d'où provient la lumière semble varier avec la vitesse relative de l'observateur, à la manière de la pluie pour un piéton en mouvement. James Bradley tentait de mesurer la parallaxe [1] des étoiles proches, en

1. La parallaxe annuelle de γ Draconis est en fait de 22×10^{-3} arcsec, soit environ 1000 fois plus faible que l'effet de l'aberration.

particulier de γ Draconis (*Eltamin*, la 3$^{\text{ème}}$ étoile la plus brillante de la constellation du Dragon) : au lieu de cela, il découvrit l'aberration des étoiles et la nutation (petit mouvement de l'axe de rotation terrestre qui se superpose à la précession des équinoxes, de 18.6 années de période).

4.1 — Considérons une étoile lointaine située dans la direction du pôle de l'écliptique (axe Oz de l'orbite terrestre autour du Soleil). Un astronome sur Terre observe régulièrement cette étoile. On appelle v la vitesse de l'astronome par rapport au référentiel de Copernic. Calculez l'angle apparent θ' que fait la direction de l'étoile avec le pôle de l'écliptique[2] pour l'astronome. Faites l'application numérique ($v \simeq 30\,\text{km.s}^{-1}$).

4.2 — Généralisez le résultat précédent pour une étoile inclinée avec un angle θ par rapport au pôle de l'écliptique (angle zénithal). Décrivez la trajectoire apparente des étoiles en fonction de θ.

Traitons directement le cas général d'un rayon lumineux incliné d'un angle θ par rapport à la direction Oz, axe de l'écliptique, dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ du système solaire (le référentiel de Copernic, supposé galiléen).

Considérons le cas simple d'un observateur en mouvement à la vitesse $\mathbf{v}$ parallèle à Ox. Dans le référentiel $\mathcal{R}_0$, les composantes de $\mathbf{u}$ sont :

$$u_x = -c\sin\theta \qquad u_y = 0 \qquad u_z = -c\cos\theta$$

Dans le référentiel $\mathcal{R}'$ la composition des vitesses donne :

$$\begin{aligned}
u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}} = \frac{-c\sin\theta - v}{1 + \dfrac{vc\sin\theta}{c^2}} = -\frac{c\sin\theta + v}{1 + \dfrac{v\sin\theta}{c}} \\
u'_y &= 0 \\
u'_z &= \frac{u_z}{\gamma(v)\left(1 - \dfrac{vu_x}{c^2}\right)} = \frac{-c\cos\theta}{\gamma(v)\left(1 + \dfrac{vc\sin\theta}{c^2}\right)} = -\frac{c\cos\theta}{\gamma(v)\left(1 + \dfrac{v\sin\theta}{c}\right)}
\end{aligned}$$

On en déduit l'angle apparent θ' (ou plutôt sa tangente) sous lequel l'étoile apparaît dans le référentiel $\mathcal{R}'$:

$$\tan\theta' = \frac{u'_x}{u'_z} = \gamma(v)\frac{\sin\theta + v/c}{\cos\theta}$$

Dans le cas particulier où $\theta = 0$ (étoile au zénith écliptique),

$$\theta' \simeq \tan\theta' = \gamma(v)\frac{v}{c}$$

Pour une vitesse relative de 30 km/s (Terre), on trouve $\theta' \simeq 10^{-4} \simeq 20$ arcsec pour une étoile au pôle de l'écliptique. Au cours d'une année, une étoile au pôle écliptique décrira un cercle apparent de 20 arcsec de rayon. Pour une étoile plus proche de l'écliptique, l'effet sera plus faible selon la direction Oz mais de même amplitude dans la direction orthogonale (faites un dessin pour vous en convaincre), et décrira donc des ellipses, d'autant plus aplaties que l'étoile est proche de l'écliptique. Pour une étoile située sur l'écliptique, On aura (avec $\mathbf{v}$ selon Ox) :

$$\theta = \pi/2 \qquad u'_x = c \qquad u'_y = 0 \qquad u'_z = 0$$

L'effet selon Oz sera nul, et l'étoile oscillera au cours de l'année sur un segment de droite de 40 arcsec de longueur, parallèle à l'écliptique.

2. L'écliptique est la trajectoire apparente du Soleil sur la sphère céleste ; le plan de l'écliptique est le plan de l'orbite terrestre autour du Soleil.

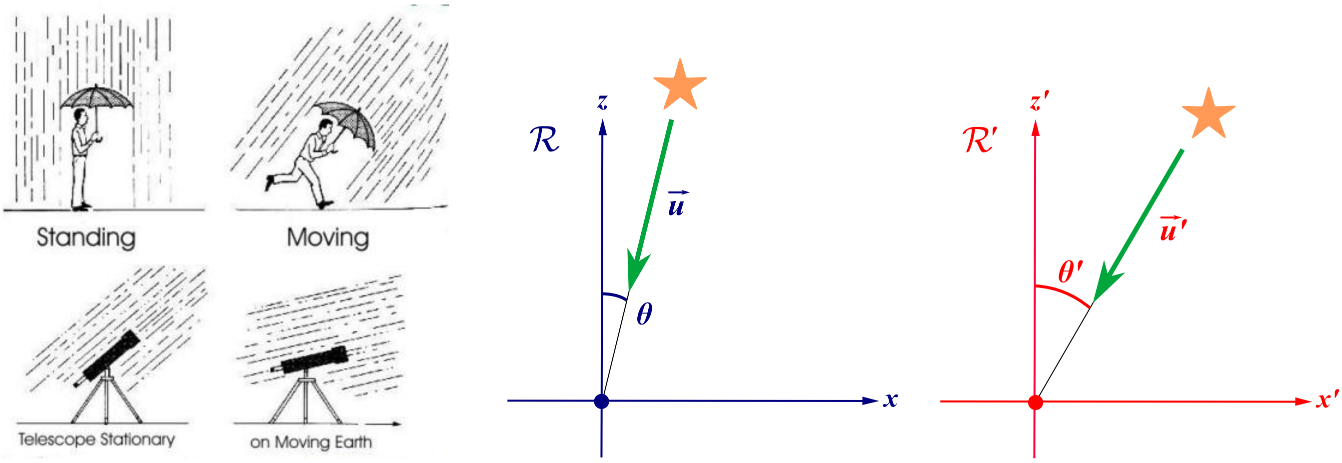

Fig. 4 – Aberration des étoiles. À gauche, étoile vue dans le référentiel du système solaire; l'angle θ est compté à partir du pôle de l'orbite de la Terre autour du soleil (pôle de l'écliptique). À droite, même situation vue par un observateur à la surface de la Terre.

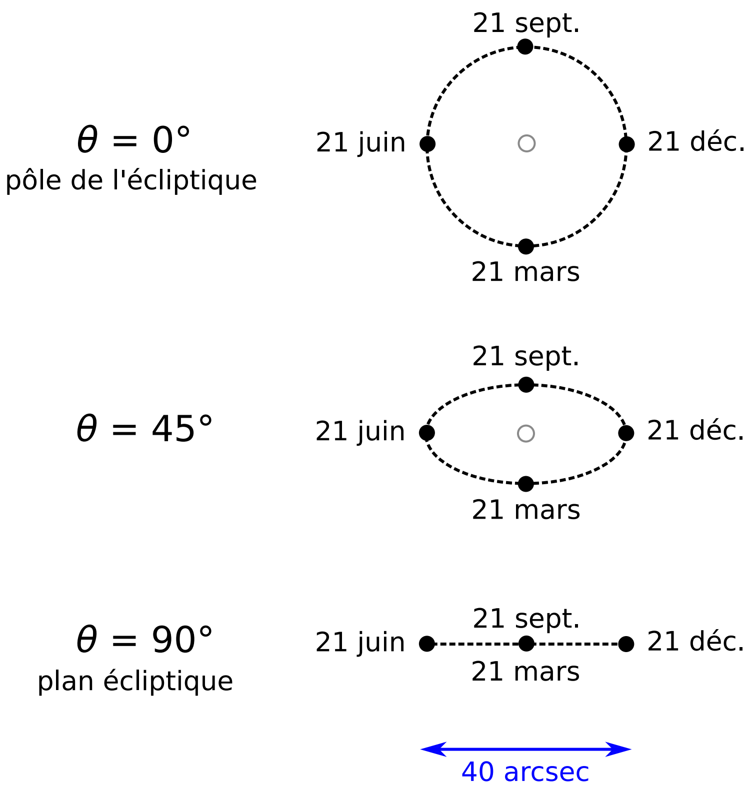

Fig. 5 – Effet de l'aberration : du fait de la rotation de la Terre autour du Soleil, la position apparente d'une étoile parcourt une petite ellipse au cours de l'année. Au pôle de l'écliptique, la trajectoire est circulaire, tandis que pour une étoile dans le plan écliptique, la trajectoire se réduit à un segment de droite.

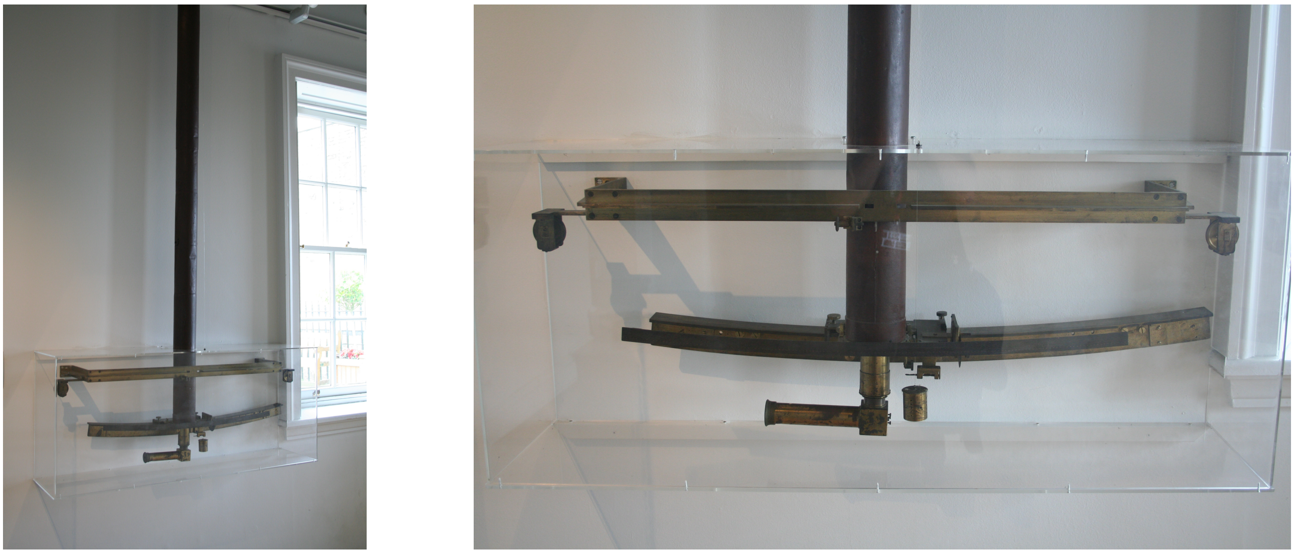

Fig. 6 – Secteur zénithal (télescope pointant au zénith, permettant la mesure de la distance zénithale des étoiles). Conçu pour James Bradley, il est installé à l'observatoire de Greenwich. C'est avec cet instrument que J. Bradley découvrit l'aberration de la lumière et la nutation de l'axe terrestre (photos L. Le Guillou).