LICENCE DE PHYSIQUE — RELATIVITÉ RESTREINTE

EXERCICES

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2023–2024

Intervenants : L. Le Guillou & J. Bolmont (Sorbonne Université / LPNHE)

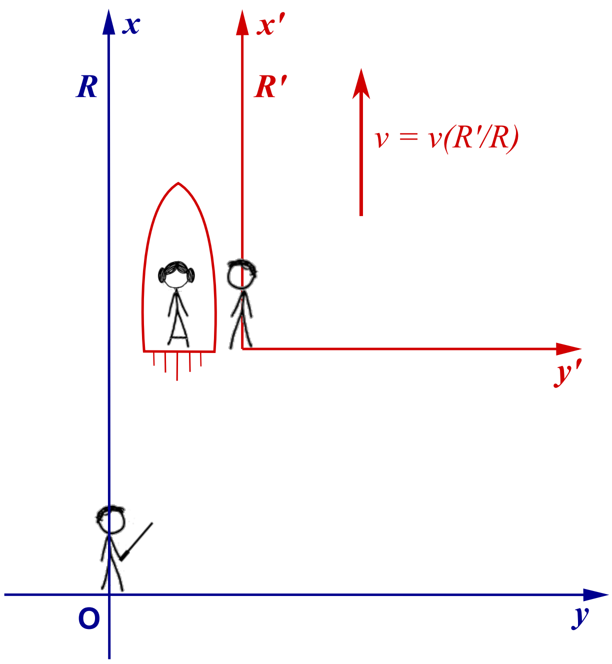
TD 6

Mouvements accélérés : mouvement à accélération propre constante, dit “mouvement hyperbolique” – “Paradoxe des jumeaux” de Paul Langevin – Voyages intersidéraux

1. Mouvement accéléré, référentiel tangent, mouvement hyperbolique

Leia effectue avec son vaisseau un mouvement rectiligne accéléré (donc non uniforme). À un instant donné (événement E_1), sa vitesse est v par rapport à Luke, inertiel (*i.e.* dépourvu d'accélération), et sa vitesse est nulle par rapport à Han, lui aussi inertiel. Un peu plus tard (événement E_2), après un temps $\mathrm{d}t'$ pour Han, la vitesse de Leia est passée à $v + \mathrm{d}v$ pour Luke, et à $\mathrm{d}v'$ pour Han.

1.1 — En utilisant la composition des vitesses, établissez l'expression de $\mathrm{d}v'$ en fonction de v et $\mathrm{d}v$.



1.2 — Quelle est l'expression de l'*accélération propre* a de Leia, en fonction de $\mathrm{d}v'$ et de $\mathrm{d}t'$? Quelle est l'expression de la durée $\mathrm{d}t'$ en fonction de v et de $\mathrm{d}t$? En déduire l'expression de la durée $\mathrm{d}t$ en fonction de a, v et $\mathrm{d}v$.

1.3 — En surveillant bien le poids (apparent) d'une masse test, Leia, pilote sa fusée en maintenant son accélération propre a constante. Sachant qu'elle a quitté Luke en douceur, avec une vitesse $v(0)$ nulle à l'instant $t = 0$, quelle est l'expression de sa vitesse $v(t)$ à l'instant t pour Luke toujours inertiel ?

1.4 — En déduire l'expression de la position $x(t)$ de Leia à l'instant t pour Luke.

1.5 — Quelles sont les expressions approchées de $x(t)$ et de $v(t)$ lorsque t est petit ? lorsque t est grand ? (par rapport à quoi d'ailleurs ?) Représenter sur un graphe d'espace-temps dans le repère (x, t) de Luke : *(i)* la ligne d'univers de Luke, *(ii)* la ligne d'univers de Leia, *(iii)* la ligne d'univers de Han, inertiel, qui à l'instant t_1 coïncide, en douceur, avec Leia. Pourquoi désigne-t-on ce type de mouvement comme "hyperbolique" ?

1.6 — Quelle est, en général, la durée $\mathrm{d}\tau$ écoulée pour Leia, entre E_1 et E_2, en fonction de $\mathrm{d}t'$? en fonction de $\mathrm{d}t$ et de v ? Lorsque Leia se dote d'un mouvement à accélération propre constante a, que devient cette durée $\mathrm{d}\tau$ en fonction de $\mathrm{d}t$, a et t ?

1.7 — En déduire le temps propre $\tau(t)$ à la montre de Leia, en fonction de a et de t pour Luke. Quelles sont les expressions approchées de $\tau(t)$ pour t petit ? pour t grand ?

1.8 — Leia se donne l'accélération "*de confort*" $a = g = 9.8\,\mathrm{m.s^{-2}}$. Exprimez a en $\mathrm{ly.y^{-2}}$ (année-lumière par année carrée). Calculez $\tau(t)$ après un mois, 3 mois, 1 an, 3 ans, 10 ans.

2. Le paradoxe des jumeaux

Le "paradoxe des jumeaux" est sans doute l'un des "paradoxes" les plus célèbres associés à la théorie de la relativité restreinte. Paul Langevin (1872–1946) l'a formulé en 1911 lors du congrès de Bologne, comme une expérience de pensée conduisant éventuellement à une incohérence logique de la théorie de la relativité. La question soulevée, fascinante, a fait couler beaucoup d'encre. Dans cet exercice, on traitera d'abord le "paradoxe des jumeaux" dans sa formulation traditionnelle, la plus simple mais physiquement irréaliste ; puis on l'étudiera dans une version à base de mouvements accélérés et décélérés qui permet de calculer exactement toute la trajectoire du jumeau voyageur, sans singularité, et de résoudre le paradoxe.

Présentation habituelle du "paradoxe des jumeaux"

Luke et Leia dérivent dans l'espace, libres. Leia décide de quitter Luke (événement initial O) en s'éloignant de lui avec une vitesse constante $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = v\,\mathbf{e}_x$ avec, par exemple, $v = 3c/5$. Au bout d'un temps $\Delta\tau$ mesuré à son horloge personnelle, Leia décide de faire demi-tour (événement C) ; elle repart à la vitesse $-\mathbf{v}$, et rejoint Luke au bout du même temps $\Delta\tau$ (événement E). Durant toute l'odyssée de Leia, Luke est resté au repos au point de départ (fig. 1).

2.1 — Appelons $\mathcal{R}'$ le référentiel de Leia pendant la première moitié de son voyage. Ce référentiel est-il inertiel ?

2.2 — Établissez le temps $\Delta t(O \to C) = t_C - t_O$ qui s'est écoulé à l'horloge de Luke entre le départ de Leia et l'événement C (demi-tour de Leia), en fonction de $\Delta\tau$.

2.3 — En raisonnant sur le référentiel $\mathcal{R}''$ de Leia pendant la seconde moitié du voyage, établissez de même $\Delta t(C \to E)$ entre le demi-tour de Leia (C) et son retour auprès de Luke (événement E).

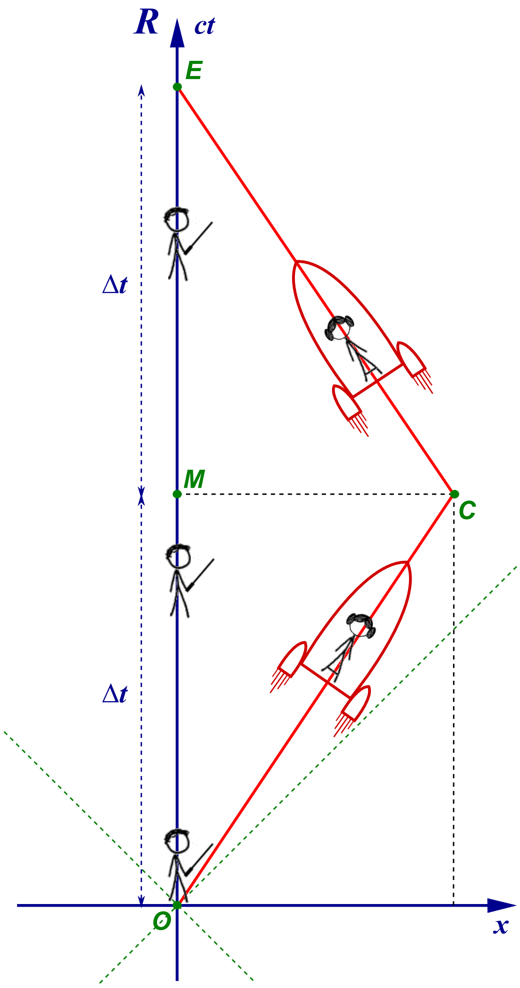


Fig. 1 – Diagramme d'espace-temps (Minkowski) représentant la trajectoire des deux jumeaux, du point de vue de celui (ici Luke) qui reste au repos.

2.4 — De son point de vue, Leia peut considérer qu'elle est immobile, et que c'est Luke qui s'éloigne d'elle à la vitesse $-\mathbf{v}$, puis qui revient vers elle à la vitesse $+\mathbf{v}$. Dans le référentiel inertiel $\mathcal{R}'$ qui se confond avec celui de Leia pendant la phase "aller" de son voyage, quelle durée $\Delta t'(O \to M)$ peut-on attribuer à l'intervalle de temps entre les événements O et M de la vie de Luke ? De même, dans le référentiel inertiel $\mathcal{R}''$ associé à Leia pendant la phase "retour", quelle durée $\Delta t''(M \to E)$ peut-on mesurer entre les événements M et E de la vie de son frère jumeau ?

2.5 — Décrivez à quoi s'attend Luke au retour de Leia concernant leurs âges relatifs. Faites de même pour Leia. Commentez.

2.6 — À votre avis, quelle peut-être l'origine du problème dans cette expérience de pensée (*Gedankenexperiment*) ? Les situations de Luke et de Leia sont elles véritablement symétriques ? Commentez.

Jumeaux avec une trajectoire physiquement réaliste

Dans la présentation la plus simple du "paradoxe des jumeaux", la trajectoire du jumeau voyageur, ici Leia, est physiquement irréaliste, car son demi-tour (passage instantané de Leia du référentiel $\mathcal{R}'$

au référentiel $\mathcal{R}''$) impliquerait une accélération infinie. On se propose donc de lui faire effectuer cette fois une trajectoire physiquement réaliste, telle qu'à tout instant l'accélération qu'elle subit soit finie, et que sa vitesse soit dérivable en tout point de sa trajectoire.

Luke et Leia sont toujours à la dérive dans l'espace, libres. Leia décide de quitter Luke en se donnant une accélération propre constante $a = g$ pendant une durée finie $\Delta\tau$ (temps propre de Leia). Puis elle stoppe les turbopropulseurs à l'arrière de son vaisseau, allume ceux à l'avant qui lui fournissent désormais une accélération $a = -g$, et continue son voyage avec cette accélération propre pendant la durée $2\Delta\tau$. Enfin, elle arrête les propulseurs à l'avant et rallume les propulseurs à l'arrière, se donnant ainsi une accélération propre $a = g$ pendant $\Delta\tau$ pour finir par couper ses turbopropulseurs. Pendant tout ce temps, occupé à autre chose, Luke est resté au repos.

2.7 — Représentez toute cette épopée sur un graphe d'espace-temps dans le repère de Luke.

2.8 — Calculez le temps $4\Delta\tau$ qui s'est écoulé pour Leia si toute cette histoire a duré $4\Delta t = 12$ mois pour Luke. Faites de même pour $4\Delta t = 12$ ans et pour $4\Delta t = 40$ ans. Concluez.

3. Voyages intersidéraux

3.1 — Partant du système solaire, un vaisseau se rend à vitesse constante v sur une étoile située à $D = 8$ années-lumière de la terre. Pour l'équipage de ce vaisseau, le voyage dure $\Delta\tau = 8$ années. Quelle est la vitesse v du vaisseau dans le référentiel du système solaire ?

Dans la question précédente, on a négligé les phases d'accélération et de décélération du vaisseau ce qui rend le voyage irréaliste. On se propose plutôt d'effectuer le même voyage en deux phases : une phase d'accélération à accélération propre constante a jusqu'à mi-parcours, et une phase symétrique de décélération à accélération propre constante $-a$, de telle sorte que le vaisseau parte sans vitesse initiale et s'arrête à destination.

3.2 — Dessinez cette trajectoire sur un diagramme d'espace-temps dans le référentiel du système solaire.

On souhaite, comme précédemment, que le voyage dure $\Delta\tau = 8$ années pour les occupants du vaisseau.

3.3 — Soit $\mathcal{R}$ le référentiel du système solaire (considéré comme galiléen) et $\mathcal{R}'$ le référentiel tangent à la trajectoire du vaisseau à un instant t donné. Dans le référentiel tangent $\mathcal{R}'$, la vitesse du vaisseau est nulle à l'instant t (ou t'), et vaut $\mathrm{d}v'$ à l'instant $t + \mathrm{d}t$ (ou $t' + \mathrm{d}t'$). En utilisant la loi de composition des vitesses, montrer que

$$\mathrm{d}v' = \gamma^2(v)\mathrm{d}v$$

3.4 — Exprimez l'intervalle de temps propre $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t'$ en fonction de de $\mathrm{d}t$ et $\gamma(v)$. Déduisez-en une expression de $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ en fonction de a et $\gamma(v)$.

3.5 — En utilisant les relations précédentes, montrez que $\mathrm{d}\tau$ est proportionnel à $\mathrm{d}\varphi$ où φ est la rapidité ($\beta = \tanh\varphi$). En intégrant sur la première moitié du parcours du vaisseau, exprimez $\Delta\tau$ en fonction de la rapidité à mi-parcours $\varphi_{1/2}$.

3.6 — En se souvenant que $\mathrm{d}x = v\mathrm{d}t$, exprimez $\mathrm{d}x$ en fonction de $\mathrm{d}\varphi$. Déduisez-en une expression de $\varphi_{1/2}$ en fonction de la distance totale à parcourir D.

3.7 — On souhaite déterminer l'accélération a qui permettra à l'équipage d'effectuer ce voyage à la distance $D = 8$ années-lumière en un temps propre de $\Delta\tau = 8$ ans. Montrez que l'équation à résoudre est de la forme :

$$8\xi = \cosh(8\xi) - 1$$

La solution de cette équation est $8\xi \simeq 1.616$ soit $\xi \simeq 0.202$. Sachant que $c \times 1\,\mathrm{an}^{-1} \simeq 9.5\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$, Exprimez a en unités $c \times 1\,\mathrm{an}^{-1}$ et en unités SI.

3.8 — Combien de temps dure le voyage pour les observateurs restés sur Terre ? Exprimez Δt en fonction de c, a et $\varphi_{1/2}$. Application numérique.

On donne : $c \times 1\,\mathrm{an}^{-1} \simeq 9.5\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$, et $\sinh(1.616) \simeq 2.417$.