LICENCE DE PHYSIQUE — RELATIVITÉ RESTREINTE

EXERCICES — CORRIGÉ

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2023–2024

Intervenants : L. Le Guillou & J. Bolmont (Sorbonne Université / LPNHE)

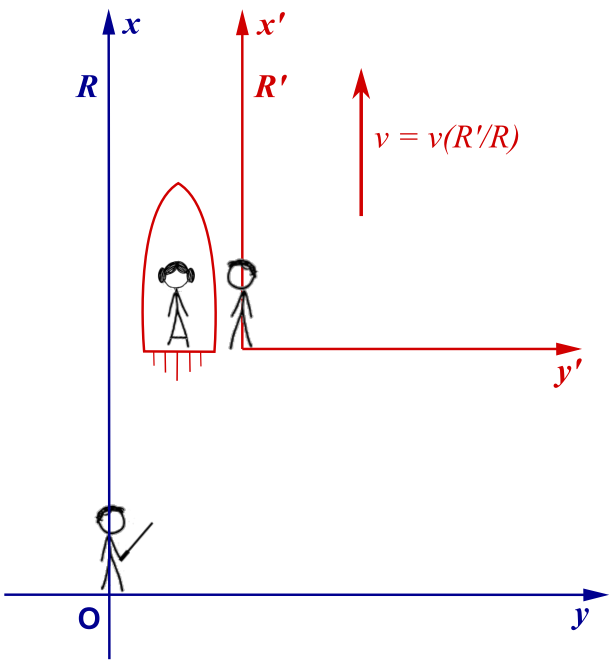
TD 6

Mouvements accélérés : mouvement à accélération propre constante, dit "mouvement hyperbolique" – "Paradoxe des jumeaux" de Paul Langevin – Voyages intersidéraux

1. Mouvement accéléré, référentiel tangent, mouvement hyperbolique

Leia effectue avec son vaisseau un mouvement rectiligne accéléré (donc non uniforme). À un instant donné (événement E_1), sa vitesse est v par rapport à Luke, inertiel (*i.e.* dépourvu d'accélération), et sa vitesse est nulle par rapport à Han, lui aussi inertiel. Un peu plus tard (événement E_2), après un temps $\mathrm{d}t'$ pour Han, la vitesse de Leia est passée à $v + \mathrm{d}v$ pour Luke, et à $\mathrm{d}v'$ pour Han.

1.1 — En utilisant la composition des vitesses, établissez l'expression de $\mathrm{d}v'$ en fonction de v et $\mathrm{d}v$.



Soit $\mathcal{R}$ le référentiel de Luke, resté à la base, qu'on supposera inertiel ; on appelle $\mathcal{R}'$ le référentiel de Han, c'est à dire le *référentiel inertiel qui se confond avec celui de Leia* à l'instant de l'événement E_1. On désigne en général ce référentiel comme le *référentiel inertiel tangent*. Comme le mouvement de Leia est quelconque, le référentiel de Leia ne se confond avec $\mathcal{R}'$ qu'à cet instant précis (événement E_1) ; mais rien n'empêche de procéder de même pour tous les événements qui constituent la trajectoire de Leia dans l'espace-temps, et de définir à chaque instant un référentiel galiléen tangent (différent à chaque instant).

Lors de l'événement E_1, qui se produit à l'instant t dans $\mathcal{R}$ et t' dans $\mathcal{R}'$, la vitesse u du vaisseau de Leia est v (vitesse relative de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$, par construction), tandis qu'elle est bien évidemment nulle dans $\mathcal{R}'$.

Un instant plus tard, à l'événement E_2, qui se produit à l'instant $t + \mathrm{d}t$ dans $\mathcal{R}$ et à l'instant $t' + \mathrm{d}t'$ dans $\mathcal{R}'$, la vitesse du vaisseau de Leia est désormais $u_x = v + \mathrm{d}v$ dans $\mathcal{R}$, et $u'_x = \mathrm{d}v'$ dans le même référentiel tangent $\mathcal{R}'$ défini en E_1 (avec τ le temps propre de Leia).

	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}'$
E_1	t	t'
	$u_x = v$	$u'_x = 0$
E_2	$t + \mathrm{d}t$	$t' + \mathrm{d}t'$
	$u_x = v + \mathrm{d}v$	$u'_x = \mathrm{d}v'$

Pour déterminer $\mathrm{d}v'$, on applique la loi de composition des vitesses lors de l'événement E_2, entre les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{v u_x}{c^2}}$$

à l'instant $t' + \mathrm{d}t'$, avec $u_x = v + dv$ la vitesse du vaisseau dans $\mathcal{R}$, $u'_x = \mathrm{d}v'$ la vitesse du vaisseau dans $\mathcal{R}'$. On obtient :

$$\mathrm{d}v' = \frac{\mathrm{d}v}{1 - \dfrac{v^2}{c^2} - \dfrac{v\,\mathrm{d}v}{c^2}} \quad \text{d'où} \quad \mathrm{d}v' \left[1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{v\,\mathrm{d}v}{c^2}\right] = \mathrm{d}v$$

On peut ici négliger le terme de second ordre $v\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v'/c^2$, ce qui donne

$$\mathrm{d}v' \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right] = \mathrm{d}v \quad \text{soit} \quad \mathrm{d}v' = \gamma^2(v)\,\mathrm{d}v$$

1.2 — Quelle est l'expression de l'*accélération propre* a de Leia, en fonction de $\mathrm{d}v'$ et de $\mathrm{d}t'$? Quelle est l'expression de la durée $\mathrm{d}t'$ en fonction de v et de $\mathrm{d}t$? En déduire l'expression de la durée $\mathrm{d}t$ en fonction de a, v et $\mathrm{d}v$.

L'*accélération propre* a de Leia s'écrit :

$$a = \frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}\tau}$$

où $\mathrm{d}\tau$ est l'intervalle de temps propre de Leia entre E_1 et E_2 ; on aura $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t'$ puisque les deux référentiels se confondent à l'instant de l'événement E_1. Cette *accélération propre* peut être ressentie par Leia, sous la forme d'un poids apparent des objets dans la fusée (classiquement, on parle de *force d'entraînement*).

Par ailleurs, en utilisant l'invariance de l'intervalle d'espace-temps, on peut relier $\mathrm{d}t' = \mathrm{d}\tau$ et $\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}\tau^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)c^2\mathrm{d}t^2 = \frac{1}{\gamma^2(v)}c^2\mathrm{d}t^2 \qquad \text{i.e.} \quad \mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t' = \frac{1}{\gamma(v)}\mathrm{d}t$$

On a ainsi :

$$\mathrm{d}v' = \gamma^2(v)\,\mathrm{d}v \qquad \mathrm{d}t' = \frac{1}{\gamma(v)}\mathrm{d}t \qquad \text{d'où} \quad a = \frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}t'} = \gamma^3(v)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

Ce qu'on peut ré-écrire sous la forme :

$$a\,\mathrm{d}t = \gamma^3(v)\,\mathrm{d}v \qquad \text{ou encore} \quad \mathrm{d}t = \frac{\gamma^3(v)}{a}\,\mathrm{d}v \tag{1}$$

Afin de pouvoir intégrer cette dernière relation, et obtenir l'évolution temporelle $v(t)$ dans le référentiel $\mathcal{R}$, il est nécessaire de connaître les variations temporelles de l'accélération propre a de Leia.

1.3 — En surveillant bien le poids (apparent) d'une masse test, Leia, pilote sa fusée en maintenant son accélération propre a constante. Sachant qu'elle a quitté Luke en douceur, avec une vitesse $v(0)$ nulle à l'instant $t = 0$, quelle est l'expression de sa vitesse $v(t)$ à l'instant t pour Luke toujours inertiel ?

On se place ici dans le cas très particulier où l'accélération propre a de Leia est supposée constante pendant toute la trajectoire. On peut alors intégrer l'équation (1).

Il est tout à fait possible d'intégrer directement l'équation (1), et d'obtenir ainsi $v(t)$ et $x(t)$. Toutefois, un changement de variable naturel et pratique dans l'étude des mouvements accélérés en relativité restreinte consiste à introduire la *rapidité* φ, définie par :

$$\tanh\varphi = \beta = \frac{v}{c} \qquad \text{et par conséquent} \quad \mathrm{d}(\tanh\varphi) = \mathrm{d}\beta = \frac{\mathrm{d}v}{c}.$$

On a de plus :

$$\mathrm{d}\beta = \frac{\mathrm{d}v}{c} = \mathrm{d}(\tanh\varphi) = \frac{1}{\cosh^2\varphi}\mathrm{d}\varphi = \left(1 - \tanh^2\varphi\right)\,\mathrm{d}\varphi = \left(1 - \beta^2\right)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{\gamma^2(v)}\mathrm{d}\varphi$$

d'où,

$$\mathrm{d}v = \frac{c}{\cosh^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$$

On en déduit les relations suivantes, très pratiques :

$$\tanh\varphi = \beta = \frac{v}{c} \qquad \cosh\varphi = \gamma(v) \qquad \sinh\varphi = \beta\gamma(v)$$

L'équation (1) peut ainsi s'écrire :

$$a\mathrm{d}t = \gamma^3(v)\,\mathrm{d}v = \cosh^3\varphi \times \frac{c}{\cosh^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = c\cosh\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

Avec l'hypothèse supplémentaire que l'accélération propre a est maintenue constante pendant toute la trajectoire de la fusée de Leia, on peut intégrer l'équation entre $t = 0$ (départ de la fusée) et un instant t quelconque (attention, les notations sont abusives, le t de la borne de l'intégrale est différent de la variable d'intégration) :

$$\int_0^t a\,\mathrm{d}t = \int_{v(0)}^{v(t)} \gamma^3(v)\,\mathrm{d}v = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} \cosh\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

D'où,

$$at = c\,(\sinh\varphi(t) - \sinh\varphi(0)) = c\sinh\varphi(t)$$

en considérant de plus que la vitesse initiale de la fusée dans $\mathcal{R}$ est nulle à $t = 0$: $v(0) = 0$ et $\varphi(0) = 0$.

Cette dernière équation permet d'obtenir l'expression de la rapidité φ en fonction du temps dans $\mathcal{R}$, et donc de la vitesse $v(t)$:

$$\varphi(t) = \operatorname{argsinh}\left(\frac{at}{c}\right) = \ln\left[\frac{at}{c} + \sqrt{\left(\frac{at}{c}\right)^2 + 1}\,\right]$$

Pour obtenir l'expression de la vitesse, on peut partir de cette dernière expression. En utilisant l'identité remarquable $\cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi = 1$, on peut écrire les expressions de $\sinh\varphi$ et $\cosh\varphi$:

$$\sinh\varphi(t) = \frac{at}{c} \qquad \cosh\varphi(t) = \sqrt{1+\sinh^2\varphi(t)} = \sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}$$

Ce qui permet de calculer $\tanh\varphi$ et d'en déduire la vitesse de la fusée en fonction du temps :

$$\beta(t) = \frac{v(t)}{c} = \tanh\varphi = \frac{\sinh\varphi}{\cosh\varphi} = \frac{at/c}{\sqrt{1+\dfrac{a^2t^2}{c^2}}} \qquad \text{et} \quad v(t) = \frac{at}{\sqrt{1+\dfrac{a^2t^2}{c^2}}}$$

1.4 — En déduire l'expression de la position $x(t)$ de Leia à l'instant t pour Luke.

Connaissant la vitesse $v(t)$ de la fusée dans $\mathcal{R}$ (le référentiel de Luke), on peut intégrer directement l'expression :

$$\mathrm{d}x = v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{at\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1+\dfrac{a^2t^2}{c^2}}}$$

On peut aussi utiliser de nouveau la rapidité, en exprimant $\mathrm{d}x$ en fonction de φ, ce qui donne :

$$\mathrm{d}x = v(t)\,\mathrm{d}t = c\tanh\varphi(t) \times \frac{c}{a}\cosh\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{c^2}{a}\sinh\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

Puis, en intégrant comme précédemment entre $t = 0$ et un instant t quelconque (dans $\mathcal{R}$), on obtient directement :

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \mathrm{d}x = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} \frac{c^2}{a}\sinh\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

Et, comme l'accélération propre a est supposée constante,

$$x(t) - x(0) = \frac{c^2}{a}(\cosh\varphi(t) - \cosh\varphi(0)) = \frac{c^2}{a}(\cosh\varphi(t) - 1) = \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}} - 1\right).$$

Si la fusée de Leia est partie de l'origine à $t = 0$, *i.e.* $x(0) = 0$, sa position $x(t)$ dans $\mathcal{R}$ est :

$$x(t) = \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}} - 1\right).$$

1.5 — Quelles sont les expressions approchées de $x(t)$ et de $v(t)$ lorsque t est petit ? lorsque t est grand ? (par rapport à quoi d'ailleurs ?) Représenter sur un graphe d'espace-temps dans le repère (x, t) de Luke : *(i)* la ligne d'univers de Luke, *(ii)* la ligne d'univers de Leia, *(iii)* la ligne d'univers de Han, inertiel, qui à l'instant t_1 coïncide, en douceur, avec Leia. Pourquoi désigne-t-on ce type de mouvement comme "hyperbolique" ?

Lorsque $at \ll c$, les expressions de la vitesse $v(t)$ et de la position $x(t)$ deviennent, à la limite :

$$v(t) = \frac{at}{\sqrt{1+\dfrac{a^2t^2}{c^2}}} \xrightarrow{at \ll c} at$$

et,

$$x(t) = \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}} - 1\right) \xrightarrow{at \ll c} \frac{c^2}{a}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{a^2t^2}{c^2} - 1\right] = \frac{1}{2}at^2.$$

On retrouve ainsi les équations d'un mouvement rectiligne à accélération constante de la mécanique classique.

Lorsque l'accélération propre a est suffisamment grande, ou bien si le mouvement accéléré dure suffisamment longtemps, autrement dit, pour $at \gg c$, on obtient :

$$\frac{at}{c} \gg 1 \qquad \frac{a^2t^2}{c^2} \gg 1 \qquad v(t) = \frac{at}{\sqrt{1+\dfrac{a^2t^2}{c^2}}} \xrightarrow{at \gg c} \frac{at}{\sqrt{\dfrac{a^2t^2}{c^2}}} = c$$

et,

$$x(t) = \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}} - 1\right) \xrightarrow{at \gg c} \frac{c^2}{a}\left[\frac{at}{c} - 1\right] = ct - \frac{c^2}{a}.$$

Pour une accélération propre suffisamment grande, ou en attendant suffisamment longtemps, la vitesse de la fusée tend vers c (et la position $x(t)$ tend vers ct à une constante près).

Enfin, on peut remarquer que :

$$at = c \sinh \varphi(t) \qquad \text{i.e.} \qquad \sinh \varphi(t) = \frac{at}{c}$$

et,

$$x(t) = \frac{c^2}{a}\left(\cosh \varphi(t) - 1\right) \qquad \text{i.e.} \qquad \cosh \varphi(t) = \frac{a}{c^2}x(t) + 1.$$

D'où, en utilisant la même identité remarquable que précédemment,

$$\cosh^2 \varphi(t) - \sinh^2 \varphi(t) = 1 \qquad \left(\frac{a}{c^2}x + 1\right)^2 - \left(\frac{at}{c}\right)^2 = 1 \tag{2}$$

ce qui est l'équation d'une hyperbole dans le plan (x, ct). La trajectoire de la fusée de Leia dans l'espace-temps est ainsi la branche d'hyperbole positive décrite par (2). Cette hyperbole coupe l'axe Ox à l'origine ; ses asymptotes sont les droites $ct = x - c^2/a$ et $ct = -x + c^2/a$ (voir figure 1).

Le mouvement de la fusée est bien entendu rectiligne dans le référentiel $\mathcal{R}$ de Luke, mais dans l'espace-temps, la ligne d'univers de Leia suit une hyperbole : c'est pourquoi on désigne parfois ce mouvement rectiligne à accélération propre constante comme un *mouvement hyperbolique*.

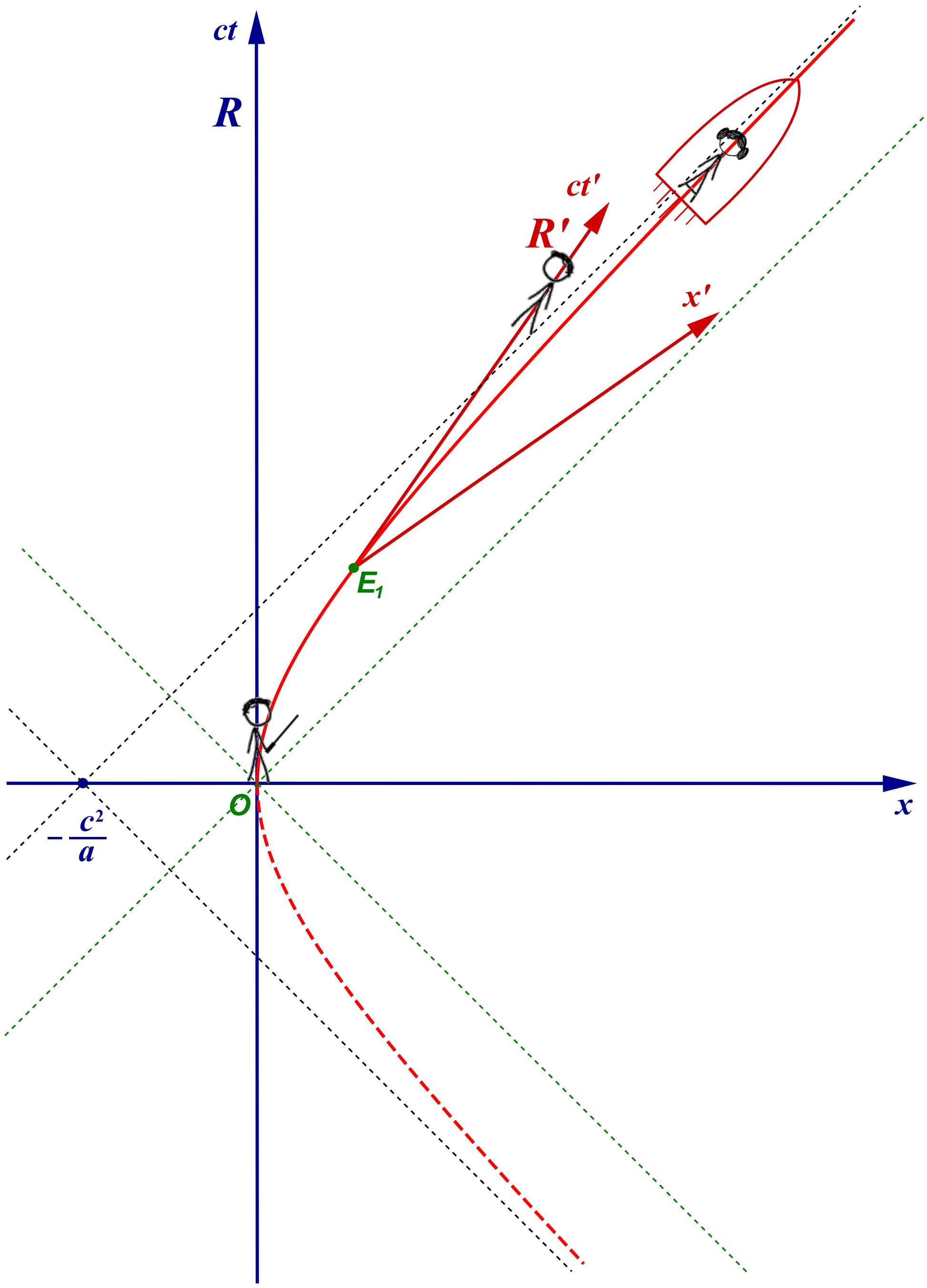


Fig. 1 – Diagramme d'espace-temps (diagramme de Minkowski). Lignes d'univers de Luke, resté en $x = 0$ (en bleu, axe Oct) et de Leia dans sa fusée (en rouge). La ligne d'univers de Leia est une hyperbole. Au point événement E_1, le référentiel tangent (Han) $\mathcal{R}'$ est tel qu'il se confond avec celui de Leia, à cet instant précis.

1.6 — Quelle est, en général, la durée $\mathrm{d}\tau$ écoulée pour Leia, entre E_1 et E_2, en fonction de $\mathrm{d}t'$? en fonction de $\mathrm{d}t$ et de v ? Lorsque Leia se dote d'un mouvement à accélération propre constante a, que devient cette durée $\mathrm{d}\tau$ en fonction de $\mathrm{d}t$, a et t ?

1.7 — En déduire le temps propre $\tau(t)$ à la montre de Leia, en fonction de a et de t pour Luke. Quelles sont les expressions approchées de $\tau(t)$ pour t petit ? pour t grand ?

D'après ce qui précède, on peut exprimer $\mathrm{d}\tau$ en fonction de la vitesse $v(t)$ ou mieux, de la rapidité $\varphi(t)$:

$$\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}t}{\gamma(v)} = \frac{\gamma^2(v)}{a}\mathrm{d}v = \frac{c}{a}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Ainsi, l'intervalle élémentaire de temps propre $\mathrm{d}\tau$ de Leia est bien directement proportionnel à l'incrément de rapidité $\mathrm{d}\varphi$ mesuré dans $\mathcal{R}$.

En faisant l'hypothèse que Leia a réglé sa montre à $\tau = 0$ au décollage de sa fusée, à $t = 0$ dans $\mathcal{R}$, on peut par conséquent relier t et τ :

$$\mathrm{d}t = \frac{c}{a}\cosh\varphi\,\mathrm{d}\varphi \qquad \mathrm{d}\tau = \frac{c}{a}\,\mathrm{d}\varphi \qquad \text{d'où} \quad t = \frac{c}{a}\sinh\varphi \qquad \tau = \frac{c}{a}\varphi$$

Ce qui donne :

$$t = \frac{c}{a}\sinh\left(\frac{a}{c}\tau\right) \quad \text{et} \quad \tau = \frac{c}{a}\operatorname{argsinh}\left(\frac{a}{c}t\right) = \frac{c}{a}\ln\left[\frac{at}{c} + \sqrt{\left(\frac{at}{c}\right)^2 + 1}\,\right].$$

Lorsque $at \ll c$, on retrouve la situation classique :

$$\tau = \frac{c}{a}\operatorname{argsinh}\left(\frac{a}{c}t\right) \xrightarrow{at\ll c} \frac{c}{a}\frac{a}{c}t = t$$

et le temps s'écoule de la même manière pour Luke et pour Leia.

Pour $at \gg c$, on obtient :

$$\tau = \frac{c}{a}\operatorname{argsinh}\left(\frac{a}{c}t\right) \xrightarrow{at\ll c} \frac{c}{a}\ln\left(\frac{2at}{c}\right)$$

1.8 — Leia se donne l'accélération "*de confort*" $a = g = 9.8\,\mathrm{m.s^{-2}}$. Exprimez a en $\mathrm{ly.y^{-2}}$ (année-lumière par année carrée). Calculez $\tau(t)$ après un mois, 3 mois, 1 an, 3 ans, 10 ans.

En utilisant l'expression qui donne τ en fonction de t,

$$\tau = \frac{c}{a}\operatorname{argsinh}\left(\frac{a}{c}t\right) = \frac{c}{a}\ln\left[\frac{at}{c} + \sqrt{\left(\frac{at}{c}\right)^2 + 1}\,\right].$$

on peut calculer le temps τ écoulé pour Leia dans la fusée en fonction du temps t qui s'est écoulé pour Luke, depuis le départ de Leia.

L'énoncé propose d'exprimer l'accélération propre a en année-lumière par année carrée, car dans ce cas, $a = 9.8\,\mathrm{m.s^{-2}} \approx 1\,\mathrm{ly.y^{-2}}$, et $a/c \approx 1\,\mathrm{y^{-1}}$, ce qui simplifie les calculs numériques.

Si on n'effectue pas pas cette approximation, on trouve les résultats suivants :

t	1 mois 2.6297×10^6 s	3 mois 7.8892×10^6 s	1 an 3.1557×10^7 s	3 ans 9.4671×10^7 s	10 ans 3.1557×10^8 s
φ	0.08585891	0.25511692	0.90352395	1.84798136	3.02915839
τ	2.6265×10^6 s	7.8043×10^6 s	2.7640×10^7 s $\approx$ 10.5 mois	5.65317×10^7 s $\approx$ 1.8 an	9.2665×10^7 s $\approx$ 3 ans
$t - \tau$	3228.19 s $\approx$ 1 heure	84932.6 s $\approx$ 1 jour	3.91716×10^6 s $\approx$ 1.5 mois	3.81391×10^7 s $\approx$ 1.2 an	2.22904×10^8 s $\approx$ 7 ans

On constate ainsi que le temps s'écoule plus lentement pour Leia que pour Luke, et que l'effet est d'autant plus important que la durée du voyage est longue et que Leia voyage longtemps à des vitesses proches de celle de la lumière. Ainsi, au bout d'un mois de voyage, l'écart n'est que d'environ 1 heure, tandis qu'au bout de 10 ans pour Luke depuis le départ de Leia, il ne s'est écoulé que 3 ans pour Leia dans sa fusée (soit 7 ans de différence).

2. Le paradoxe des jumeaux

Le "paradoxe des jumeaux" est sans doute l'un des "paradoxes" les plus célèbres associés à la théorie de la relativité restreinte. Paul Langevin (1872–1946) l'a formulé en 1911 lors du congrès de Bologne, comme une expérience de pensée conduisant éventuellement à une incohérence logique de la théorie de la relativité. La question soulevée, fascinante, a fait couler beaucoup d'encre. Dans cet exercice, on traitera d'abord le "paradoxe des jumeaux" dans sa formulation traditionnelle, la plus simple mais physiquement irréaliste ; puis on l'étudiera dans une version à base de mouvements accélérés et décélérés qui permet de calculer exactement toute la trajectoire du jumeau voyageur, sans singularité, et de résoudre le paradoxe.

Présentation habituelle du "paradoxe des jumeaux"

Luke et Leia dérivent dans l'espace, libres. Leia décide de quitter Luke (événement initial O) en s'éloignant de lui avec une vitesse constante $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = v\,\mathbf{e}_x$ avec, par exemple, $v = 3c/5$. Au bout d'un temps $\Delta\tau$ mesuré à son horloge personnelle, Leia décide de faire demi-tour (événement C) ; elle repart à la vitesse $-\mathbf{v}$, et rejoint Luke au bout du même temps $\Delta\tau$ (événement E). Durant toute l'odyssée de Leia, Luke est resté au repos au point de départ (fig. 2).

2.1 — Appelons $\mathcal{R}'$ le référentiel de Leia pendant la première moitié de son voyage. Ce référentiel est-il inertiel ?

Pendant la première phase de son voyage, Leia se déplace à la vitesse constante v vers les x positifs dans le référentiel $\mathcal{R}$. Si on admet que $\mathcal{R}$ est inertiel (où galiléen, ce qui est sous-entendu dans l'énoncé), alors le référentiel $\mathcal{R}'$, en translation uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ à la vitesse $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_x$ est aussi nécessairement inertiel.

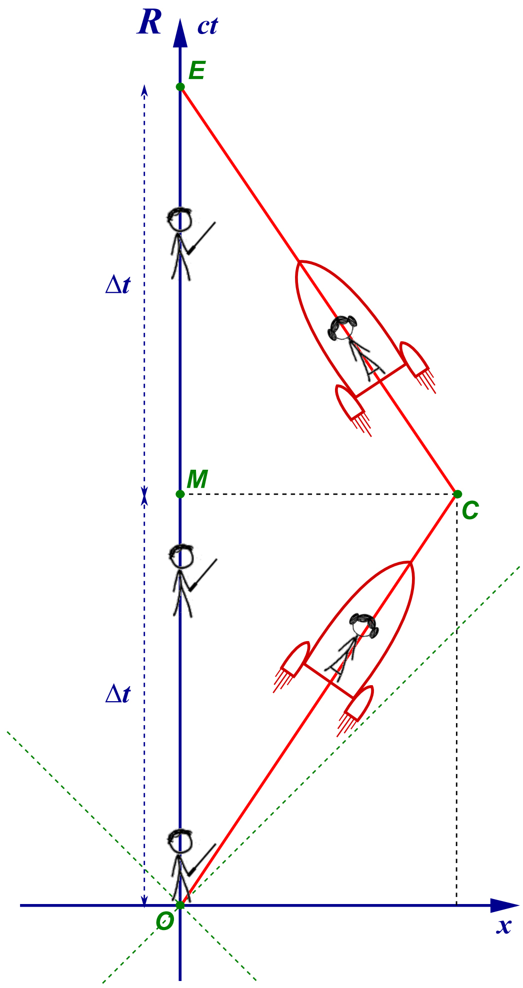


Fig. 2 – Diagramme d'espace-temps (Minkowski) représentant la trajectoire des deux jumeaux, du point de vue de celui (ici Luke) qui reste au repos.

2.2 — Établissez le temps $\Delta t(O \to C) = t_C - t_O$ qui s'est écoulé à l'horloge de Luke entre le départ de Leia et l'événement C (demi-tour de Leia), en fonction de $\Delta\tau$.

Si on utilise l'invariance du carré de l'intervalle d'espace-temps entre les événements O et C, et si on exprime cet intervalle dans les deux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, on obtient :

$$\Delta s^2 = c^2(t_C - t_O)^2 - (x_C - x_O)^2 = c^2(t'_C - t'_O)^2 - (x'_C - x'_O)^2 = c^2(t'_C - t'_O)^2 = c^2(\Delta\tau)^2$$

Car $x'_C = x'_O$. De plus, $x_C - x_O = v(t_C - t_O)$, ce qui donne

$$c^2(t_C - t_O)^2 - v^2(t_C - t_O)^2 = c^2(t'_C - t'_O)^2 \qquad \text{d'où} \quad (1-\beta^2)(t_C - t_O)^2 = (t'_C - t'_O)^2$$

Et par conséquent,

$$(t_C - t_O)^2 = \gamma^2(v)(t'_C - t'_O)^2 \qquad \textit{i.e.} \quad t_C - t_O = \gamma(v)(t'_C - t'_O) = \gamma(v)\Delta\tau > \Delta\tau.$$

Si pour Leia, il s'est écoulé une durée $\Delta\tau$ entre son départ (O) et son demi-tour (C), du point de vue de Luke, le temps entre les événements O et C de la vie de Leia est plus long que $\Delta\tau$. Avec par exemple $v = 3c/5$, on obtient $\gamma(v) = 5/4 = 1.25$; si $\Delta\tau = 20$ ans, alors $t_C - t_O = 25$ ans.

2.3 — En raisonnant sur le référentiel $\mathcal{R}''$ de Leia pendant la seconde moitié du voyage, établissez de même $\Delta t(C \to E)$ entre le demi-tour de Leia (C) et son retour auprès de Luke (événement E).

Le raisonnement est analogue au précédent. Le référentiel $\mathcal{R}''$ est galiléen car en translation uniforme à la vitesse $-\mathbf{v} = -v\,\mathbf{e}_x$ par rapport au référentiel inertiel $\mathcal{R}$. En écrivant l'invariance du carré de l'intervalle d'espace-temps entre les événements C (demi-tour de Leia) et E (retrouvailles), on obtient :

$$\Delta s^2 = c^2(t_E - t_C)^2 - (x_E - x_C)^2 = c^2(t''_E - t''_C)^2 - (x''_E - x''_C)^2 = c^2(t''_E - t''_C)^2 = c^2(\Delta\tau)^2$$

Car $x''_E = x''_C$. De plus, $x_E - x_C = -v(t_E - t_C)$, ce qui donne

$$c^2(t_E - t_C)^2 - v^2(t_E - t_C)^2 = c^2(t''_E - t''_C)^2 \qquad \text{d'où} \quad (1-\beta^2)(t_E - t_C)^2 = (t''_E - t''_C)^2$$

Et par conséquent,

$$(t_E - t_C)^2 = \gamma^2(v)(t''_E - t''_C)^2 \qquad \textit{i.e.} \quad t_E - t_C = \gamma(v)(t''_E - t''_C) = \gamma(v)\Delta\tau > \Delta\tau.$$

On obtient ainsi un résultat similaire pour le voyage retour : si pour Leia il s'est écoulé une durée $\Delta\tau$ entre son demi-tour (C) et son retour (E), du point de vue de Luke, le temps écoulé à son horloge entre les événements C et E de la vie de Leia est plus long que $\Delta\tau$. Si on suppose que $v = 3c/5$, on obtient $\gamma(v) = 5/4 = 1.25$; si $\Delta\tau = 20$ ans, alors, à nouveau, $t_E - t_C = 25$ ans.

2.4 — De son point de vue, Leia peut considérer qu'elle est immobile, et que c'est Luke qui s'éloigne d'elle à la vitesse $-\mathbf{v}$, puis qui revient vers elle à la vitesse $+\mathbf{v}$. Dans le référentiel inertiel $\mathcal{R}'$ qui se confond avec celui de Leia pendant la phase "aller" de son voyage, quelle durée $\Delta t'(O \to M)$ peut-on attribuer à l'intervalle de temps entre les événements O et M de la vie de Luke ? De même, dans le référentiel inertiel $\mathcal{R}''$ associé à Leia pendant la phase "retour", quelle durée $\Delta t''(M \to E)$ peut-on mesurer entre les événements M et E de la vie de son frère jumeau ?

Le raisonnement est analogue à ce qui précède. On aura ainsi, en utilisant l'invariance du carré de l'intervalle d'espace-temps entre les événements O et M,

$$\Delta s^2 = c^2(t_M - t_O)^2 - (x_M - x_O)^2 = c^2(t'_M - t'_O)^2 - (x'_M - x'_O)^2$$

Or, $x_M = x_O$; de plus, $x'_M - x'_O = -v(t'_M - t'_O)$, ce qui donne

$$c^2(t_M - t_O)^2 = c^2(t'_M - t'_O)^2 - v^2(t'_M - t'_O)^2 \qquad \text{d'où} \quad (t_M - t_O)^2 = (1-\beta^2)(t'_M - t'_O)^2$$

Et par conséquent,

$$(t'_M - t'_O)^2 = \gamma^2(v)(t_M - t_O)^2 \qquad \textit{i.e.} \quad t'_M - t'_O = \gamma(v)(t_M - t_O) > (t_M - t_O).$$

On peut montrer, en procédant de la même manière, que :

$$(t''_E - t''_M)^2 = \gamma^2(v)(t_E - t_M)^2 \qquad \textit{i.e.} \quad t''_E - t''_M = \gamma(v)(t_E - t_M) > (t_E - t_M).$$

2.5 — Décrivez à quoi s'attend Luke au retour de Leia concernant leurs âges relatifs. Faites de même pour Leia. Commentez.

Du point de vue de Luke, le voyage de Leia dure $2\Delta\tau$ à l'horloge de Leia, et $2\gamma(v)\Delta\tau > 2\Delta\tau$ pour lui-même : Luke en conclura donc qu'à son retour, Leia sera plus jeune que lui. Leia peut faire le même raisonnement : la période d'attente de Luke est $(t_E - t_O)$ à l'horloge de Luke, mais vaut

$$(t'_M - t'_O) + (t''_E - t''_M) = \gamma(v)(t_M - t_O) + \gamma(v)(t_E - t_M) = \gamma(v)(t_E - t_O) > (t_E - t_O)$$

pour elle-même. Elle peut donc s'attendre à ce que Luke soit plus jeune qu'elle à son retour. Leurs conclusions sont donc contradictoires.

2.6 — À votre avis, quelle peut-être l'origine du problème dans cette expérience de pensée (*Gedankenexperiment*) ? Les situations de Luke et de Leia sont elles véritablement symétriques ? Commentez.

Lors de son demi-tour, Leia subit une accélération (dont elle peut vérifier l'existence car elle subit dans sa fusée la force inertielle d'entraînement correspondante), ce qui n'est pas le cas pour Luke : le référentiel de Luke est galiléen, mais celui attaché à Leia tout au long de son voyage ne l'est pas. Les situations des deux jumeaux ne sont donc pas équivalentes : le fait que Leia saute d'un référentiel galiléen à un autre à mi-parcours est clairement à l'origine du problème ici. De plus, dans le modèle proposé, Leia passe instantanément d'une vitesse élevée v à une vitesse $-v$, ce qui implique une accélération infinie, et n'est par conséquent pas physiquement réaliste.

Jumeaux avec une trajectoire physiquement réaliste

Dans la présentation la plus simple du "paradoxe des jumeaux", la trajectoire du jumeau voyageur, ici Leia, est physiquement irréaliste, car son demi-tour (passage instantané de Leia du référentiel $\mathcal{R}'$ au référentiel $\mathcal{R}''$) impliquerait une accélération infinie. On se propose donc de lui faire effectuer cette fois une trajectoire physiquement réaliste, telle qu'à tout instant l'accélération qu'elle subit soit finie, et que sa vitesse soit dérivable en tout point de sa trajectoire.

Luke et Leia sont toujours à la dérive dans l'espace, libres. Leia décide de quitter Luke en se donnant une accélération propre constante $a = g$ pendant une durée finie $\Delta\tau$ (temps propre de Leia). Puis elle stoppe les turbopropulseurs à l'arrière de son vaisseau, allume ceux à l'avant qui lui fournissent désormais une accélération $a = -g$, et continue son voyage avec cette accélération propre pendant la durée $2\Delta\tau$. Enfin, elle arrête les propulseurs à l'avant et rallume les propulseurs à l'arrière, se donnant ainsi une accélération propre $a = g$ pendant $\Delta\tau$ pour finir par couper ses turbopropulseurs. Pendant tout ce temps, occupé à autre chose, Luke est resté au repos.

2.7 — Représentez toute cette épopée sur un graphe d'espace-temps dans le repère de Luke.

Pendant chaque intervalle de temps $\Delta\tau$, la trajectoire de Leia est à accélération propre constante, et son mouvement est décrit par les résultats obtenus à l'exercice précédent (éventuellement, en inversant le sens du temps ou de x). Sa trajectoire dans l'espace-temps est donc constituée de quatre segments d'hyperbole identiques, comme représentée sur la figure 3.

2.8 — Calculez le temps $4\Delta\tau$ qui s'est écoulé pour Leia si toute cette histoire a duré $4\Delta t = 12$ mois pour Luke. Faites de même pour $4\Delta t = 12$ ans et pour $4\Delta t = 40$ ans. Concluez.

La vitesse v de Leia est nulle au départ (A), maximale (v_{max}) en B lorsqu'elle éteint ses propulseurs arrière et allume les propulseurs avant, nulle au point C. Sa vitesse augmente ensuite en norme (mais est négative) de C à D, pour atteindre $v = -v_{\text{max}}$ en D, avant de décroître jusqu'à zéro en E, fin de son épopée. On obtient ainsi une trajectoire physiquement réaliste, sans aucune discontinuité de la vitesse ou accélération infinie comme dans la présentation la plus simple du paradoxe des jumeaux.

Le temps propre de Leia qui s'est écoulé pendant toute cette aventure s'écrit :

$$\begin{aligned}\underset{A\to E}{\Delta}\tau &= \int_A^E \mathrm{d}\tau = \int_A^E \frac{c}{a}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{c}{g}\int_A^B \mathrm{d}\varphi - \frac{c}{g}\int_B^C \mathrm{d}\varphi - \frac{c}{g}\int_C^D \mathrm{d}\varphi + \frac{c}{g}\int_D^E \mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{c}{g}\Big[\,(\varphi(B)-\varphi(A)) - (\varphi(C)-\varphi(B)) - (\varphi(D)-\varphi(C)) + (\varphi(E)-\varphi(D))\,\Big] = 4\frac{c}{g}\,\varphi_{\text{max}} = 4\Delta\tau\end{aligned}$$

car $\varphi(A) = \varphi(C) = \varphi(E) = 0$, $\varphi(B) = \varphi_{\text{max}}$ et $\varphi(D) = -\varphi_{\text{max}}$.

On peut d'autre part calculer la rapidité maximale atteinte φ_{max}, par exemple pendant le premier segment du voyage (où $a = g$) :

$$\mathrm{d}t = \frac{c}{a}\cosh\varphi\,\mathrm{d}\varphi \qquad \text{d'où} \quad \Delta t = \frac{c}{g}\int_A^B \cosh\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{c}{g}\left(\sinh\varphi(B) - \sinh\varphi(A)\right) = \frac{c}{g}\sinh\varphi_{\text{max}}$$

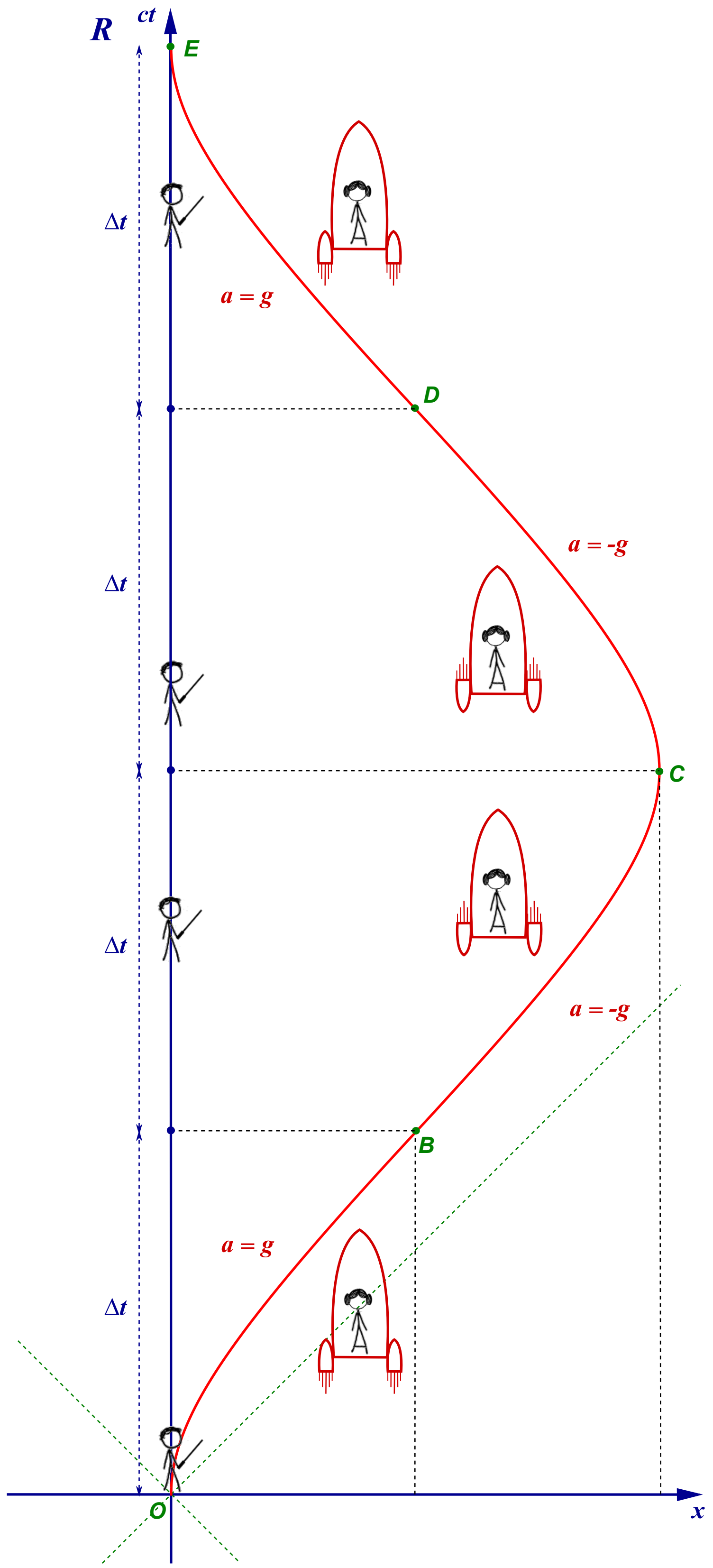


Fig. 3 – *Diagramme d'espace-temps (diagramme de Minkowski). Lignes d'univers de Luke, resté en $x = 0$ (en bleu, axe Oct) et de Leia dans sa fusée (en rouge). Entre A et B, l'accélération propre a de Leia vaut g, et sa fusée accélère, et sa vitesse est maximale en B ; entre B et C, $a = -g$ et Leia décélère jusqu'à atteindre $v = 0$ en C. De C à D, toujours avec $a = -g$, Leia voit sa vitesse devenir de plus en plus négative (elle accélère sur le chemin du retour), jusqu'à atteindre sa vitesse maximale (mais négative) en D. De D à E, $a = g$ ce qui permet à Leia d'arriver au point de départ avec une vitesse nulle.*

Ce qui permet d'exprimer φ_{max} :

$$\varphi_{\text{max}} = \text{argsinh}\left(\frac{g}{c}\Delta t\right)$$

On en déduit le temps $4\Delta\tau$ écoulé dans la fusée pour Leia :

$$\underset{A\to E}{\Delta}\tau = 4\Delta\tau = 4\frac{c}{g}\,\text{argsinh}\left(\frac{g}{c}\Delta t\right)$$

Numériquement, on obtient les résultats suivants :

$4\Delta t$	12 mois	12 ans	40 ans
Δt	3 mois 7.8892×10^6 s	3 ans 9.4671×10^7 s	10 ans 3.1557×10^8 s
φ_{max}	0.25511692	1.84798136	3.02915839
$4\Delta\tau$	3.12172×10^7 s	2.26127×10^8 s ≈ 7.2 ans	3.70661×10^8 s ≈ 12 ans
$4\Delta t - 4\Delta\tau$	339730 s ≈ 4 jours	1.5256×10^8 s ≈ 4.8 ans	8.9162×10^8 s ≈ 28 ans

Ainsi, si le voyage de Leia dure 40 ans pour Luke, il n'aura duré que 12 ans pour Leia lorsqu'ils se rejoindront au point de départ où Luke est demeuré pendant toute cette aventure.

Il est important de noter que les référentiels respectifs de Luke et Leia ne sont pas équivalents : celui de Leia n'est pas galiléen, et Leia en a la preuve car elle ressent dans sa fusée un poids apparent lié à son accélération propre (dont le sens change avec le signe de a), et ce tout au long du voyage ; ceci explique l'asymétrie entre les deux référentiels, et la différence d'âge à la fin du voyage.

3. Voyages intersidéraux

3.1 — Partant du système solaire, un vaisseau se rend à vitesse constante v sur une étoile située à $D = 8$ années-lumière de la terre. Pour l'équipage de ce vaisseau, le voyage dure $\Delta\tau = 8$ années. Quelle est la vitesse v du vaisseau dans le référentiel du système solaire ?

La durée du voyage vue depuis le référentiel du système solaire est :

$$\Delta t = \gamma(v)\Delta\tau.$$

Avec $\gamma(v)$ constant puisque la vitesse est considérée comme constante pendant toute la durée du voyage, et $\Delta t = D/v$. On en déduit :

$$v = \frac{D}{\Delta t} = \frac{D}{\gamma\Delta\tau} = \frac{D}{\Delta\tau}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Ainsi,

$$v^2\left(1+\frac{D^2}{c^2\Delta\tau^2}\right)=\frac{D^2}{\Delta\tau^2}$$

et

$$v=\frac{D}{\sqrt{\Delta\tau^2+D^2/c^2}} \quad \text{soit} \quad \frac{v}{c}=\frac{D/c}{\sqrt{\Delta\tau^2+D^2/c^2}}$$

Si on exprime D en années-lumière, et $\Delta\tau$ en années, on obtient numériquement :

$$\frac{v}{c}=\frac{8\,\text{ans}}{\sqrt{(8\,\text{ans})^2+(8\,\text{ans})^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\simeq 0.707 \quad \text{donc} \quad v\simeq 0.707c$$

Dans la question précédente, on a négligé les phases d'accélération et de décélération du vaisseau ce qui rend le voyage irréaliste. On se propose plutôt d'effectuer le même voyage en deux phases : une phase d'accélération à accélération propre constante a jusqu'à mi-parcours, et une phase symétrique de décélération à accélération propre constante $-a$, de telle sorte que le vaisseau parte sans vitesse initiale et s'arrête à destination.

3.2 — Dessinez cette trajectoire sur un diagramme d'espace-temps dans le référentiel du système solaire.

Voir la figure 4.

On souhaite, comme précédemment, que le voyage dure $\Delta\tau = 8$ années pour les occupants du vaisseau.

3.3 — Soit $\mathcal{R}$ le référentiel du système solaire (considéré comme galiléen) et $\mathcal{R}'$ le référentiel tangent à la trajectoire du vaisseau à un instant t donné. Dans le référentiel tangent $\mathcal{R}'$, la vitesse du vaisseau est nulle à l'instant t (ou t'), et vaut $\mathrm{d}v'$ à l'instant $t+\mathrm{d}t$ (ou $t'+\mathrm{d}t'$). En utilisant la loi de composition des vitesses, montrer que

$$\mathrm{d}v'=\gamma^2(v)\mathrm{d}v$$

Dans le référentiel tangent, la vitesse du vaisseau est nulle à l'instant t' (événement E_1) et vaut $\mathrm{d}v' = a(\tau)\mathrm{d}\tau$ à l'instant $t'+\mathrm{d}t'$ (événement E_2), avec a l'*accélération propre* du vaisseau (*i.e.* l'accélération du vaisseau mesurée dans le référentiel inertiel tangent $\mathcal{R}'$) :

	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}'$
E_1	t $u_x = v$	$t' = \tau$ $u'_x = 0$
E_2	$t+\mathrm{d}t$ $u_x = v+\mathrm{d}v$	$t'+\mathrm{d}t' = \tau+\mathrm{d}\tau$ $u'_x = \mathrm{d}v' = a(\tau)\mathrm{d}\tau$

Pour déterminer $\mathrm{d}v'$, on applique la loi relativiste de composition des vitesses,

$$u'_x=\frac{u_x-v}{1-\dfrac{vu_x}{c^2}}$$

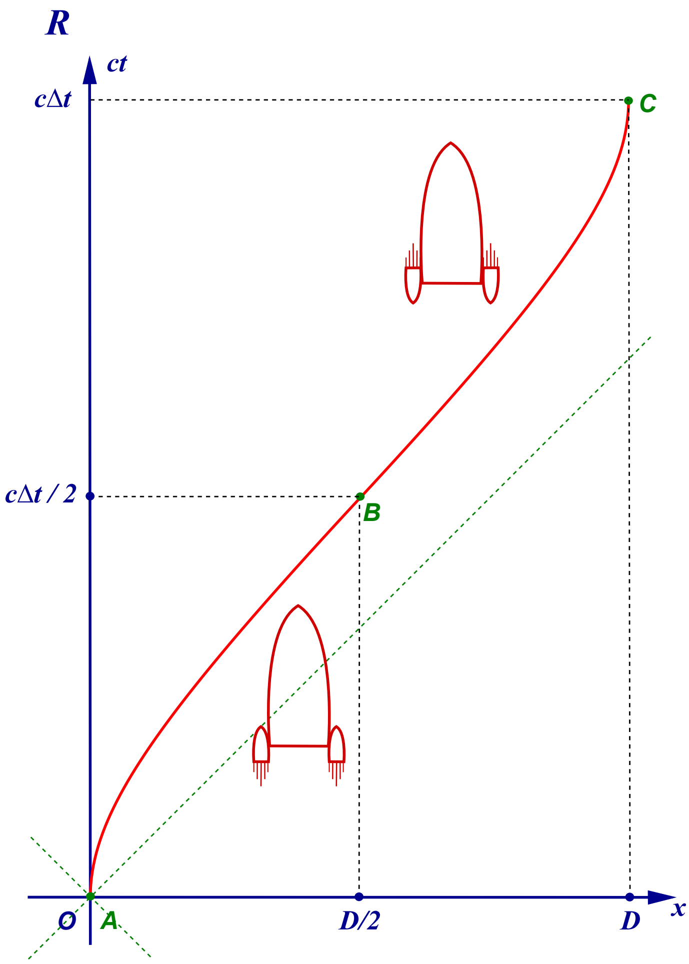


Fig. 4 – Diagramme d'espace temps montrant la trajectoire du vaisseau dans le référentiel du système solaire. (A) départ à vitesse nulle, début de la phase d'accélération propre constante. (B) fin de la phase d'accélération, début de la décélération. (C) fin de la décélération, arrivée à vitesse nulle.

à l'instant $t' + \mathrm{d}t' = \tau + \mathrm{d}\tau$, avec $u_x = v + dv$ la vitesse du vaisseau dans $\mathcal{R}$, $u'_x = \mathrm{d}v' = a(\tau)\mathrm{d}\tau$ la vitesse du vaisseau dans $\mathcal{R}'$. On obtient ainsi :

$$\mathrm{d}v' = \frac{\mathrm{d}v}{1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{v\mathrm{d}v}{c^2}} \quad \text{d'où} \quad \mathrm{d}v' \left[1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{v\mathrm{d}v}{c^2}\right] = \mathrm{d}v$$

On peut ici négliger le terme différentiel de second ordre $v\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v'/c^2$, ce qui donne

$$\mathrm{d}v'\left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right] = \mathrm{d}v \quad \text{soit} \quad \mathrm{d}v' = \gamma^2(v)\,\mathrm{d}v$$

3.4 — Exprimez l'intervalle de temps propre $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t'$ en fonction de de $\mathrm{d}t$ et $\gamma(v)$. Déduisez-en une expression de $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ en fonction de a et $\gamma(v)$.

De manière immédiate, $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t' = \mathrm{d}t/\gamma(v)$. En substituant $\mathrm{d}t'$, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}t'} = \gamma^3(v)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \text{soit} \quad a = \gamma^3(v)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

3.5 — En utilisant les relations précédentes, montrez que $\mathrm{d}\tau$ est proportionnel à $\mathrm{d}\varphi$ où φ est la rapidité ($\beta = \tanh\varphi$). En intégrant sur la première moitié du parcours du vaisseau, exprimez $\Delta\tau$ en fonction de la rapidité à mi-parcours $\varphi_{1/2}$.

Pour ce calcul, on fait intervenir la rapidité φ :

$$\tanh\varphi = \beta = \frac{v}{c} \qquad \text{et par conséquent} \quad \frac{\mathrm{d}(\tanh\varphi)}{\mathrm{d}v} = \frac{1}{c}.$$

Or

$$d(\tanh\varphi) = \frac{1}{\cosh^2\varphi}\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{\gamma^2(v)}\mathrm{d}\varphi.$$

D'où

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{c}{\gamma^2(v)}.$$

On reprend maintenant l'expression de $\mathrm{d}\tau$:

$$\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}t}{\gamma(v)} = \frac{\gamma^2(v)}{a}\mathrm{d}v$$

Ce qui donne

$$\mathrm{d}\tau = \frac{c}{a}\,\mathrm{d}\varphi,$$

$\mathrm{d}\tau$ est donc bien proportionnel à $\mathrm{d}\varphi$.

En intégrant sur la première moitié du parcours,

$$\frac{\Delta\tau}{2} = \int_0^{\Delta\tau/2} \mathrm{d}\tau = \frac{c}{a}\int_0^{\varphi_{1/2}} \mathrm{d}\varphi = \frac{c}{a}\,\varphi_{1/2}.$$

Et, par symétrie, la durée totale du voyage (pour l'équipage du vaisseau) est :

$$\Delta\tau = \frac{2c}{a}\,\varphi_{1/2}$$

3.6 — En se souvenant que $\mathrm{d}x = v\mathrm{d}t$, exprimez $\mathrm{d}x$ en fonction de $\mathrm{d}\varphi$. Déduisez-en une expression de $\varphi_{1/2}$ en fonction de la distance totale à parcourir D.

On reprend les expressions trouvées aux questions précédentes :

$$a\,\mathrm{d}t = \gamma^3(v)\mathrm{d}v \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{c}{\gamma^2(v)} = \frac{c}{\cosh^2\varphi}.$$

On a donc

$$\gamma^3(v)\mathrm{d}v = \gamma(v)c\mathrm{d}\varphi = a\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{d}t = \frac{c}{a}\cosh\varphi\,\mathrm{d}\varphi.$$

Ainsi,

$$dx = v\,\mathrm{d}t = c\tanh\varphi\,\mathrm{d}t = \frac{c^2}{a}\sinh\varphi\,\mathrm{d}\varphi,$$

d'où,

$$\frac{D}{2} = \int_0^{D/2} dx = \frac{c^2}{a}\int_0^{\varphi_{1/2}}\sinh\varphi\,\mathrm{d}\varphi \quad \text{et} \quad D = \frac{2c^2}{a}\left[\cosh\varphi_{1/2} - 1\right].$$

Ainsi,

$$\varphi_{1/2} = \mathrm{argcosh}\left[\frac{Da}{2c^2} + 1\right].$$

3.7 — On souhaite déterminer l'accélération a qui permettra à l'équipage d'effectuer ce voyage à la distance $D = 8$ années-lumière en un temps propre de $\Delta\tau = 8$ ans. Montrez que l'équation à résoudre est de la forme :

$$8\xi = \cosh(8\xi) - 1$$

La solution de cette équation est $8\xi \simeq 1.616$ soit $\xi \simeq 0.202$. Sachant que $c \times 1\,\text{an}^{-1} \simeq 9.5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, Exprimez a en unités $c \times 1\,\text{an}^{-1}$ et en unités SI.

À l'aide des résultats des deux questions précédentes, on a

$$\Delta\tau = \frac{2c}{a}\,\mathrm{argcosh}\left(\frac{Da}{2c^2} + 1\right),$$

ce qui donne

$$\frac{Da}{2c^2} = \cosh\left(\frac{a\Delta\tau}{2c}\right) - 1.$$

Dans notre cas, $D = 8$ a.l., $\Delta\tau = 8$ ans et $c = 1$ a.l./an. En posant

$$\xi = \frac{a}{2c},$$

on trouve bien l'équation :

$$8\xi = \cosh(8\xi) - 1.$$

Et on en déduit :

$$a = 2c\xi = 0.404\ \mathrm{c/an} \approx 3.84\ \mathrm{m\,s^{-2}}.$$

3.8 — Combien de temps dure le voyage pour les observateurs restés sur Terre ? Exprimez Δt en fonction de c, a et $\varphi_{1/2}$. Application numérique.

On donne : $c \times 1\,\text{an}^{-1} \simeq 9.5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, et $\sinh(1.616) \simeq 2.417$.

On repart de l'expression trouvée pour $\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}t = \frac{c}{a}\cosh\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

On intègre :

$$\Delta t = \frac{2c}{a}\int_0^{\varphi_{1/2}}\cosh\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{2c}{a}\sinh\varphi_{1/2}.$$

Ce qui donne numériquement :

$$\Delta t \approx 12 \text{ ans.}$$