

EXERCICES

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2023–2024

Intervenants : L. Le Guillou & J. Bolmont (Sorbonne Université / LPNHE)

TD 7

Quadrivecteurs – Invariance du produit pseudo-scalaire et de la pseudo-norme – Quadrivecteur vitesse – Quadri-accélération – Quadrivecteur énergie-impulsion – Quadri-force.

1. Propriétés des quadrivecteurs

1.1 — Montrez que si deux grandeurs physiques sont représentées respectivement par les quadrivecteurs $\tilde{\mathbf{A}}$ et $\tilde{\mathbf{B}}$, et si k et ℓ sont des grandeurs invariantes de Lorentz, alors $k\tilde{\mathbf{A}} + \ell\tilde{\mathbf{B}}$ est aussi un quadrivecteur.

1.2 — Soit un quadrivecteur $\tilde{\mathbf{A}}$ représentant une grandeur physique. Montrez que le carré de sa pseudo-norme :

$$\tilde{\mathbf{A}}^2 = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2$$

est invariant lorsqu'on passe d'un référentiel galiléen à un autre. Montrez, de même, que pour deux quadrivecteurs $\tilde{\mathbf{A}}$ et $\tilde{\mathbf{B}}$, le pseudo-produit scalaire :

$$\tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{B}} = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3$$

est un invariant de Lorentz.

1.3 — Montrez que l'intervalle de temps propre $d\tau$ est un invariant de Lorentz.

1.4 — À partir du quadrivecteur position $\tilde{\mathbf{r}}$, construisez un quadrivecteur vitesse $\tilde{\mathbf{U}}$ qui obéisse aux transformations de Lorentz lorsqu'on passe d'un référentiel galiléen à un autre. Que vaut $\tilde{\mathbf{U}}^2$? Est-ce un invariant?

2. Vitesse relative

Vus d'un référentiel \mathcal{R} , Luke et Han Solo se déplacent aux vitesses constantes \mathbf{u}_L et \mathbf{u}_H respectivement. On cherche à déterminer leur vitesse relative en fonction de \mathbf{u}_L et \mathbf{u}_H sans utiliser les transformations de Lorentz. En utilisant l'invariance du produit scalaire des quadri-vitesses $\tilde{\mathbf{U}}_L$ et $\tilde{\mathbf{U}}_H$ par changement de repère, déterminer le facteur $\gamma(\mathbf{u}_{L/H})$ de Luke par rapport à Han. En déduire la norme de la vitesse relative de Luke par rapport à Han.

3. Quadri-vitesses et composition relativiste des vitesses

Remarque : pour cet exercice, afin d'éviter toute confusion, soyez précis : il est essentiel d'exprimer les différents facteurs β et γ en jeu en indiquant à chaque fois la vitesse utilisée dans l'expression des facteurs β et γ : par exemple, $\gamma(v)$ ou bien $\gamma(u)$, etc.

On considère deux référentiels galiléens \mathcal{R} et \mathcal{R}' , avec $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$ la vitesse de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} . On munit ces deux référentiels de repères orthonormés parallèles et du même trièdre $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$, de telle sorte que $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$. On suppose ces deux référentiels munis d'horloges parfaites, et on choisit l'origine des temps $t = t' = 0$ lorsque l'origine O' se confond avec O .

On s'intéresse au mouvement d'un objet matériel M , dont la position est repérée par son vecteur position $\mathbf{r}(t) = \mathbf{OM}$ dans \mathcal{R} , et par son vecteur position $\mathbf{r}'(t') = \mathbf{O'M}$.

3.1 — Rappelez comment se transforment les coordonnées $(ct, \mathbf{r}) = (ct, x, y, z)$ d'un point de la trajectoire de l'objet M lorsqu'on passe du référentiel \mathcal{R} au référentiel \mathcal{R}' . Montrez que ces relations peuvent se mettre sous forme matricielle.

3.2 — Rappelez la définition de la vitesse ordinaire \mathbf{u} du mobile M mesurée dans le référentiel \mathcal{R} ; faites de même pour sa vitesse \mathbf{u}' mesurée cette fois dans \mathcal{R}' . On notera (u_x, u_y, u_z) les composantes de la vitesse \mathbf{u} dans \mathcal{R} , et (u'_x, u'_y, u'_z) les composantes de \mathbf{u}' dans \mathcal{R}' .

3.3 — Donnez la définition du quadrivecteur vitesse $\tilde{\mathbf{U}}$ (quadri-vitesse), de composantes U^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) pour l'objet étudié; donnez l'expression de ses 4 composantes U^μ dans le référentiel \mathcal{R} . Faites de même pour les 4 composantes U'^μ de la quadri-vitesse $\tilde{\mathbf{U}}'$ dans le référentiel \mathcal{R}' .

3.4 — Que vaut $\tilde{\mathbf{U}}^2$? Est-ce un invariant de Lorentz?

3.5 — Comment les composantes U^μ de la quadri-vitesse $\tilde{\mathbf{U}}$ se transforment-elles lorsqu'on passe de \mathcal{R} à \mathcal{R}' ? Calculez explicitement les 4 composantes U'^μ de la quadri-vitesse $\tilde{\mathbf{U}}'$ du mobile dans le référentiel \mathcal{R}' .

3.6 — À partir des équations précédentes, redémontrez la loi relativiste de composition des vitesses qui fournit les expressions de u'_x, u'_y et u'_z en fonction de u_x, u_y, u_z et v .

4. Quadri-accélération

4.1 — Pour un mobile, on construit son quadrivecteur accélération (ou "quadri-accélération") en dérivant son quadrivecteur vitesse par rapport à son temps propre. Retrouver les expressions des composantes temporelles A^0 et spatiales \mathbf{A} de la quadri-accélération d'une particule $\tilde{\mathbf{A}}$ en un événement où, dans un repère inertiel, sa vitesse et son accélération valent respectivement \mathbf{u} et $\dot{\mathbf{u}}$.

4.2 — En déduire les valeurs A'^0 et \mathbf{A}' des composantes de ce même quadrivecteur accélération dans un repère inertiel où la vitesse est nulle et l'accélération (dite alors propre) vaut \mathbf{a} .

4.3 — En déduire l'expression de \mathbf{a}^2 en fonction de \mathbf{u} et de $\dot{\mathbf{u}}$.

4.4 — Que devient cette expression dans le cas d'une accélération longitudinale, c'est à dire lorsque $\dot{\mathbf{u}}$ est parallèle à \mathbf{u} ?

4.5 — Montrez que le pseudo-produit scalaire $\tilde{\mathbf{U}} \cdot \tilde{\mathbf{A}}$ est toujours nul; autrement dit, que les quadrivecteurs vitesse et accélération sont "orthogonaux" au sens des quadrivecteurs.

5. Energie et impulsion

5.1 — Rappelez la définition de la quadri-impulsion d'une particule de masse m , de temps propre τ , de ligne d'univers $\tilde{\mathbf{r}}(\tau)$.

5.2 — En déduire les expressions de l'énergie et de l'impulsion de la particule de masse m , de vitesse \mathbf{u} .

5.3 — En déduire les diverses identités remarquables satisfaites par la quadri-impulsion, l'énergie, l'impulsion et la vitesse \mathbf{u} de la particule de masse m .

5.4 — On considère la collision inélastique, $m + m \rightarrow m'$, d'une particule de masse m , de vitesse $4/5c$, sur une particule de masse m , immobile. Calculez la masse m' de la particule finale, ainsi que sa vitesse.

6. Quadri-force

Considérons une particule de quadri-vitesse $\tilde{\mathbf{U}}$ qui subit une quadriforce $\tilde{\mathbf{f}} = d\tilde{\mathbf{p}}/d\tau$.

6.1 — Rappeler ce que vaut $\tilde{\mathbf{U}}^2$. Déduisez-en $\tilde{\mathbf{U}} \cdot (d\tilde{\mathbf{U}}/d\tau)$.

6.2 — Montrez que le produit $\tilde{\mathbf{f}} \cdot \tilde{\mathbf{U}}$ est nul. Déduisez-en une expression pour la variation de l'énergie E de la particule en fonction du temps $\dot{E} = dE/dt$. Quel résultat retrouve-t-on ?