SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Licence de Physique

Relativité Restreinte : Résumé de Cours (7)

Parcours SPRINT & Double Majeure – Année Universitaire 2024–2025

Intervenants : L. Le Guillou & J. Bolmont (Sorbonne Université / LPNHE)

Transformation de Lorentz — Quadrivecteurs — Invariants relativistes — Quadrivecteur position — Quadrivecteur vitesse — Quadrivecteur énergie-impulsion — Quadriforce.

1. Formalisme quadrivectoriel

1.1. Transformation de Lorentz

Considérons un événement M, que l'on observe depuis deux référentiels galiléens (ou inertiels) $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Ses coordonnées sont $(ct, x, y, z) = (ct, \mathbf{r} = \mathbf{OM})$ dans le repère solidaire à $\mathcal{R}$, et $(ct', x', y', z') = (ct, \mathbf{r}' = \mathbf{O'M})$ dans celui de $\mathcal{R}'$.

Si on a muni les deux repères d'axes parallèles (même trièdre de base $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$), et qu'on a de plus choisi les axes (Ox) et $(O'x')$ parallèles à la vitesse relative $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$ des deux référentiels (On pourrait raisonner de même en choisissant plutôt les axes $(Oy)/(Oy')$ ou $(Oz)/(Oz')$), alors, lorsqu'on passe du référentiel inertiel $\mathcal{R}$ au référentiel inertiel $\mathcal{R}'$, les coordonnées d'un **événement** M se transforment selon :

$$\begin{cases} t' &= \dfrac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \\ x' &= \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{cases} \quad \textit{i.e.} \quad \begin{cases} ct' &= \gamma\,(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma\,(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{cases} \quad \text{et réciproquement} \quad \begin{cases} ct &= \gamma\,(ct' + \beta x') \\ x &= \gamma\,(x' + \beta ct') \\ y &= y' \\ z &= z' \end{cases}$$

où on pose en général :

$$\beta = \frac{v}{c} \qquad \text{ou vectoriellement} \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c} \qquad \text{et} \quad \gamma = \gamma(\mathbf{v}) = \left(1 - \beta^2\right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}.$$

Avec la convention suivante : les origines O et O' des repères des deux référentiels inertiels considérés se confondent à $t = t' = 0$.

On peut mettre ces équations sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{et réciproquement} \qquad \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & +\beta\gamma & 0 & 0 \\ +\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

La forme de la transformation de Lorentz conduit naturellement à regrouper les coordonnées d'un événement dans un unique objet mathématique, le **quadrivecteur position** $\widetilde{\mathbf{r}}$, de composantes (dites "contravariantes") r^μ dans le référentiel $\mathcal{R}$:

$$\widetilde{\mathbf{r}} : r^\mu = \begin{pmatrix} r^0 \\ r^1 \\ r^2 \\ r^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \qquad \mu = 0, 1, 2, 3$$

On construit ainsi un espace vectoriel à quatre dimensions : une dimension de temps, d'indice $\mu = 0$ correspondant à la coordonnée t, et trois dimensions d'espace, d'indices $\mu = 1, 2, 3$ correspondant aux coordonnées spatiales x, y, z. C'est l'*espace de Minkowski*. Traditionnellement, en Relativité Restreinte et Générale, les indices muets qui prennent les valeurs $0, 1, 2, 3$ sont des lettres grecques : $\mu, \nu, \xi, \ldots$; de plus, l'indice des composantes contravariantes est toujours placé en position d'exposant : r^μ (on place en bas les indices pour les composantes covariantes : r_μ). Il faudra veiller à ne pas les confondre avec des exposants.

Par construction, les composantes contravariantes $r^\mu = (r^0, r^1, r^2, r^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \mathbf{r})$ du quadrivecteur position $\widetilde{\mathbf{r}}$ se transforment selon la transformation de Lorentz lorsqu'on change de référentiel galiléen :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r'^0 \\ r'^1 \\ r'^2 \\ r'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^0 \\ r^1 \\ r^2 \\ r^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Et, réciproquement,

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^0 \\ r^1 \\ r^2 \\ r^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & +\beta\gamma & 0 & 0 \\ +\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r'^0 \\ r'^1 \\ r'^2 \\ r'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & +\beta\gamma & 0 & 0 \\ +\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

1. 2. Généralisation : les quadrivecteurs

Sur le modèle du quadrivecteur position, on peut construire des objets mathématiques similaires pour représenter des grandeurs physiques (vitesse, accélération, force, *etc*), dont les quatre composantes se transforment selon les équations de la transformation de Lorentz lorsqu'on passe d'un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ à un autre référentiel galiléen $\mathcal{R}'$. Ces objets, les **quadrivecteurs**, sont les objets naturels dans le cadre théorique de la relativité.

Ainsi, une grandeur physique peut être représentée dans le cadre relativiste par un quadrivecteur $\widetilde{\mathbf{A}}$ de composantes contravariantes $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (A^0, \mathbf{A})$, où, par analogie avec le quadrivecteur position, on appellera A^0 la composante *temporelle* du quadrivecteur $\widetilde{\mathbf{A}}$, et $(A^1, A^2, A^3) = \mathbf{A}$ ses composantes *spatiales*. Lors d'un changement de référentiel galiléen, on a ainsi :

$$\begin{cases} A'^0 &= \gamma\left(A^0 - \beta A^1\right) \\ A'^1 &= \gamma\left(A^1 - \beta A^0\right) \\ A'^2 &= A^2 \\ A'^3 &= A^3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} A^0 &= \gamma\left(A'^0 + \beta A'^1\right) \\ A^1 &= \gamma\left(A'^1 + \beta A'^0\right) \\ A^2 &= A'^2 \\ A^3 &= A'^3 \end{cases}$$

avec les mêmes conventions que précédemment.

De même, on peut mettre ces équations sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} A'^0 \\ A'^1 \\ A'^2 \\ A'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & +\beta\gamma & 0 & 0 \\ +\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'^0 \\ A'^1 \\ A'^2 \\ A'^3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Outre les quadrivecteurs dont les composantes se transforment selon (1), certaines grandeurs physiques sont invariantes par changement de référentiel galiléen : c'est par exemple le cas de la vitesse de la lumière dans le vide, c. On appelle ces grandeurs physiques des **invariants relativistes** ou **invariants de Lorentz**, ou encore des **scalaires invariants de Lorentz**.

1.3. Algèbre des quadrivecteurs

Combinaison linéaire de quadrivecteurs. Comme la transformation de Lorentz est linéaire, la somme de deux quadrivecteurs sera aussi un quadrivecteur ; de même, le produit d'un quadrivecteur par un invariant de Lorentz sera aussi un quadrivecteur. De manière plus générale, si k et ℓ sont deux invariants de Lorentz, et $\widetilde{\mathbf{A}}$, $\widetilde{\mathbf{B}}$ deux quadrivecteurs, la combinaison linéaire $k\widetilde{\mathbf{A}} + \ell\widetilde{\mathbf{B}}$ sera aussi un quadrivecteur, et ses composantes $kA^\mu + \ell B^\mu$ se transformeront par changement de référentiel selon les équations de la transformation de Lorentz.

Différentielle d'un quadrivecteur. De la même manière, comme la transformation de Lorentz est linéaire, la différentielle d'un quadrivecteur est aussi un quadrivecteur. Ainsi, si $\widetilde{\mathbf{A}}$ de composantes A^μ est un quadrivecteur, alors sa différentielle $\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{A}}$ de composantes $\mathrm{d}A^\mu$ est aussi un quadrivecteur.

1.4. Pseudo-produit scalaire et pseudo-norme

On munit l'espace des quadrivecteurs d'un *pseudo-produit scalaire* (et d'une *pseudo-norme*) que l'on construit de telle sorte que le pseudo-produit scalaire et la pseudo-norme soient des scalaires invariants de Lorentz. Pour deux quadrivecteurs quelconques $\widetilde{\mathbf{A}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}$, on aura ainsi :

Le pseudo-produit scalaire :
$$\widetilde{\mathbf{A}} \cdot \widetilde{\mathbf{B}} = A^0B^0 - \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A^0B^0 - A^1B^1 - A^2B^2 - A^3B^3 = \sum_{\mu,\nu=0\ldots3} \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$$

La pseudo-norme (carrée) :
$$\widetilde{\mathbf{A}}^2 = \widetilde{\mathbf{A}} \cdot \widetilde{\mathbf{A}} = (A^0)^2 - \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 = \sum_{\mu,\nu=0\ldots3} \eta_{\mu\nu} A^\mu A^\nu$$

On désigne la matrice $\eta_{\mu\nu}$ comme étant la *métrique* de l'espace de Minkowski [1] :

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La métrique permet de décrire les propriétés de l'espace-temps.

2. Quadrivecteurs usuels

On peut construire un quadrivecteur à partir d'autres quadrivecteurs et de grandeurs scalaires invariantes de Lorentz (célérité c, temps propre τ, masse propre m, pseudo-norme, *etc.*). On construira ainsi les quadrivecteurs position $\widetilde{\mathbf{r}}$, la quadri-vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$, la quadri-accélération $\widetilde{\mathbf{A}}$, la quadri-impulsion $\widetilde{\mathbf{p}}$, la quadri-force $\widetilde{\mathbf{f}}$, *etc.*

2.1. Quadrivecteur position $\widetilde{\mathbf{r}}$: r^μ

Le quadrivecteur position $\widetilde{\mathbf{r}}$ permet de décrire la position dans l'espace-temps d'un événément (par exemple, les points événements successifs de la trajectoire d'un objet ponctuel dans l'espace-temps, sa *ligne d'univers*). Ses composantes sont :

$$\widetilde{\mathbf{r}} : r^\mu = (r^0, r^1, r^2, r^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \mathbf{r})$$

et c'est le premier quadrivecteur que nous avons construit. On le note aussi parfois $\widetilde{\mathbf{x}}$, et ses composantes $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \mathbf{r})$.

Sa différentielle $\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}$ de composantes $\mathrm{d}r^\mu = (c\,\mathrm{d}t, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$ est aussi un quadrivecteur ; c'est l'intervalle élémentaire entre deux événements, qui peuvent par exemple être deux points événements successifs de la trajectoire d'un objet dans l'espace-temps. La pseudo-norme carrée de $\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}$ s'écrit :

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}})^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\mathbf{r}^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2.$$

et il s'agit, par construction, d'un invariant de Lorentz.

Dans le référentiel propre de l'objet, cette expression se réduit à :

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}})^2 = c^2\mathrm{d}\tau^2$$

et comme $\mathrm{d}s^2$ est un invariant, on en déduit que l'intervalle de temps propre $\mathrm{d}\tau$ qui sépare deux événements infiniment proches de la ligne d'univers d'un objet de trajectoire $\widetilde{\mathbf{r}}(\tau)$ est aussi un invariant de Lorentz.

2.2. Quadrivecteur vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$: U^μ

Si on considère un objet en mouvement dont les positions successives sont repérées par le quadrivecteur position $\widetilde{\mathbf{r}} : r^\mu = (ct, \mathbf{r})$, il est tentant de construire un objet mathématique représentant la vitesse

1. On utilise dans ce cours la signature $(+, -, -, -)$: dans l'expression de la pseudo-norme, le temps est compté positivement et l'espace négativement. Selon les ouvrages, on peut aussi trouver la convention inverse $(-, +, +, +)$. Les deux conventions sont bien évidemment équivalentes.

de cet objet en dérivant les composantes r^μ de $\widetilde{\mathbf{r}}$ par rapport au temps t dans un référentiel $\mathcal{R}$ donné : mais l'objet obtenu ainsi ne sera pas un quadrivecteur, car le temps t n'est pas invariant de Lorentz.

Afin de construire le quadrivecteur vitesse pour l'objet considéré, on ne dérive pas par rapport au temps t du référentiel $\mathcal{R}$, mais par rapport au **temps propre** τ de l'objet, c'est à dire par rapport au temps que mesurerait une horloge parfaite solidaire de l'objet en question. Comme l'intervalle élémentaire $\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}$ est un quadrivecteur, et que $\mathrm{d}\tau$ est un invariant de Lorentz, on obtient ainsi un nouveau quadrivecteur, le **quadrivecteur vitesse** ou **quadri-vitesse** $\widetilde{\mathbf{U}}$,

$$\widetilde{\mathbf{U}} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}\tau} \qquad \text{soit} \qquad U^\mu = \frac{\mathrm{d}r^\mu}{\mathrm{d}\tau} \qquad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Il s'agit de la dérivation d'une fonction composée,

$$\widetilde{\mathbf{U}} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t} = \gamma(\mathbf{u})\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{avec} \qquad \gamma(\mathbf{u}) = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}}.$$

Où $\mathbf{u}$ est le vecteur vitesse usuel $\mathbf{u} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$ de composantes (u_x, u_y, u_z) et de norme u, mesuré dans le référentiel $\mathcal{R}$.

Ce qui donne :

$$\widetilde{\mathbf{U}} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t} = \gamma(\mathbf{u})\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{avec} \qquad \gamma(\mathbf{u}) = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}}$$

Soit, en composantes,

$$U^\mu = \begin{pmatrix} U^0 \\ \mathbf{U} \end{pmatrix} \qquad U^\mu = \gamma(\mathbf{u})\frac{\mathrm{d}r^\mu}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \gamma(\mathbf{u})\dfrac{\mathrm{d}(ct)}{\mathrm{d}t} \\ \gamma(\mathbf{u})\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(\mathbf{u})\, c\mathrm{d}t/\mathrm{d}t \\ \gamma(\mathbf{u})\, \mathrm{d}x/\mathrm{d}t \\ \gamma(\mathbf{u})\, \mathrm{d}y/\mathrm{d}t \\ \gamma(\mathbf{u})\, \mathrm{d}z/\mathrm{d}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(\mathbf{u})\, c \\ \gamma(\mathbf{u})\, u_x \\ \gamma(\mathbf{u})\, u_y \\ \gamma(\mathbf{u})\, u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(\mathbf{u})\, c \\ \gamma(\mathbf{u})\, \mathbf{u} \end{pmatrix}.$$

Pour un objet immobile (ou encore, dans le référentiel propre $\mathcal{R}^*$ de l'objet), la quadri-vitesse se réduit à :

$$U^{*\mu} = \begin{pmatrix} U^{*0} \\ \mathbf{U}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

De manière générale, la pseudo-norme carrée du quadrivecteur vitesse s'écrit :

$$\widetilde{\mathbf{U}}^2 = \gamma^2(\mathbf{u})\, c^2 - \gamma^2(\mathbf{u})\, \mathbf{u}^2 = \gamma^2(\mathbf{u})\, c^2 \left[1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}\right] = c^2$$

car $\gamma^2(u) = \gamma^2(\mathbf{u}) = [1-\mathbf{u}^2/c^2]^{-1} = [1-u^2/c^2]^{-1}$. Par construction, $\widetilde{\mathbf{U}}^2$ est la pseudo-norme carrée d'un quadrivecteur : c'est donc un invariant de Lorentz. On le vérifie dans ce cas particulier, car la vitesse de la lumière dans le vide c, et donc c^2 sont justement des invariants relativistes (c'est l'un des deux postulats de la relativité restreinte).

De plus, $\widetilde{\mathbf{U}}^2 = c^2$ est non seulement un invariant, mais aussi une grandeur constante.

2.3. Quadrivecteur accélération $\widetilde{\mathbf{A}}$: A^μ

En procédant comme précédemment pour le quadrivecteur vitesse, on peut construire un quadrivecteur accélération $\widetilde{\mathbf{A}}$ comme étant la dérivée du quadrivecteur vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$ par rapport au temps propre τ de l'objet en mouvement. En dérivant par rapport à τ, on obtient :

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{U}}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{U}}}{\mathrm{d}t}$$

soit, en composantes,

$$A^\mu = \begin{pmatrix} A^0 \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} \qquad A^\mu = \frac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}t} = \gamma(\mathbf{u}) \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}\gamma(\mathbf{u})c}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}\gamma(\mathbf{u})\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^4(\mathbf{u})\,\dfrac{\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{u}}}{c} \\ \gamma^4(\mathbf{u})\,\dfrac{\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{u}}}{c^2}\,\mathbf{u} + \gamma^2(\mathbf{u})\,\dot{\mathbf{u}} \end{pmatrix}$$

$$\text{avec} \qquad \mathbf{u} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \qquad \dot{\mathbf{u}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}$$

Pour ce calcul, il est important de se souvenir qu'ici la vitesse $\mathbf{u}$ de l'objet n'est pas nécessairement constante, et que par conséquent le facteur relativiste $\gamma(\mathbf{u})$ ne l'est pas non plus. Sa dérivée par rapport au temps propre τ s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\gamma(\mathbf{u})}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\gamma(\mathbf{u})}{\mathrm{d}t} = \gamma(\mathbf{u})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \gamma^4(\mathbf{u})\,\frac{\mathbf{u}}{c^2}\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \gamma^4(\mathbf{u})\,\frac{\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{u}}}{c^2}.$$

Si on se place dans le référentiel $\mathcal{R}^*$ tangent à l'objet en mouvement à un instant donné, référentiel où, à l'instant considéré, la vitesse $\mathbf{u}$ est nulle (mais $\dot{\mathbf{u}}$ ne l'est pas), et où $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{a}$, les composantes de $\widetilde{\mathbf{A}}^*$ s'écrivent :

$$A^{*\mu} = \begin{pmatrix} A^{*0} \\ \mathbf{A}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{a} \end{pmatrix}$$

On trouve immédiatement que la pseudo-norme carrée de $\widetilde{\mathbf{A}}^*$ vaut $(\widetilde{\mathbf{A}^*})^2 = -a^2$, où $\mathbf{a}$ est l'accélération propre (*i.e.* mesurée dans le référentiel propre de l'objet). Comme il s'agit d'un invariant de Lorentz, dans tout référentiel inertiel on aura $\widetilde{\mathbf{A}}^2 = -a^2$.

Par ailleurs, on montre aisément (par exemple en le vérifiant dans le référentiel propre de l'objet) que la quadri-vitesse et la quadri-accélération sont toujours orthogonales (au sens des quadrivecteurs) : $\widetilde{\mathbf{A}} \cdot \widetilde{\mathbf{U}} = 0$.

2.4. Quadrivecteur énergie-impulsion $\widetilde{\mathbf{p}}$: p^μ

Quadrivecteur quantité de mouvement. À partir du quadrivecteur vitesse, par analogie avec la définition de la quantité de mouvement en mécanique classique, on peut construire un **quadrivecteur quantité de mouvement** $\widetilde{\mathbf{p}}$, aussi appelé **quadrivecteur énergie-impulsion** ou **quadri-impulsion**, de composantes p^μ, en multipliant le quadrivecteur vitesse par la masse au repos m de l'objet :

$$\widetilde{\mathbf{p}} = m\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}\tau} = m\widetilde{\mathbf{U}} \qquad p^\mu = mU^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(\mathbf{u})mc \\ \gamma(\mathbf{u})m\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{E}{c} = \gamma(\mathbf{u})mc \\ \mathbf{p} = \gamma(\mathbf{u})m\mathbf{u} \end{pmatrix}$$

Dans cette relation, m est la **masse propre** de l'objet (c'est à dire sa masse au repos, invariant relativiste), $\gamma(\mathbf{u})m > m$ est en quelque sorte sa "masse apparente".

Au facteur $1/c$ près, la composante temporelle $p^0 = E/c$ correspond à l'**énergie totale** $E = \gamma(\mathbf{u})mc^2$ de l'objet, tandis que la composante spatiale de $\widetilde{\mathbf{p}}$, qui s'écrit $\mathbf{p} = \gamma(\mathbf{u})m\mathbf{u}$, représente la **quantité de mouvement relativiste** de l'objet considéré.

La pseudo-norme carrée de $\widetilde{\mathbf{p}}$ vaut $\widetilde{\mathbf{p}}^2 = m^2c^2 = (mc^2)^2/c^2$, ce qui sert très souvent pour simplifier des expressions dans les calculs de dynamique relativiste.

Energie totale, énergie de masse, énergie cinétique. Les composantes de $\widetilde{\mathbf{p}}$ vérifient la relation suivante, très utile, qui relie l'énergie totale E d'un objet avec sa quantité de mouvement relativite $\mathbf{p}$ et sa masse au repos m :

$$\widetilde{\mathbf{p}}^2 = m^2c^2 = \frac{(mc^2)^2}{c^2} = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 \qquad \textit{i.e.} \quad E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \quad E(u) = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \tag{2}$$

La relation (2) est parfois désignée comme la *relation d'Einstein*.

Dans le cas d'un objet immobile (ou encore, dans le référentiel propre de l'objet), la relation (2) se réduit à :

$$E^2(u=0) = m^2c^4 \qquad \textit{i.e.} \qquad E(u=0) = mc^2$$

où mc^2 est l'**énergie de masse** de l'objet, c'est à dire l'énergie associée à sa masse au repos. Il s'agit là d'une différence fondamentale avec la mécanique classique.

On définira l'**énergie cinétique** T d'un objet comme la différence entre son énergie totale E et son énergie de masse [2],

$$T = E - mc^2 = (\gamma(\mathbf{u}) - 1)\, mc^2$$

Identités remarquables. Enfin, quelques relations utiles entre les composantes de $\widetilde{\mathbf{p}}$: p^μ : si pour un objet on connaît son énergie totale E et sa quantité de mouvement $\mathbf{p}$, on peut en déduire immédiatement $\beta = u/c$ et sa vitesse :

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\gamma(\mathbf{u})m\mathbf{u}}{\gamma(\mathbf{u})mc} = \frac{\mathbf{p}}{p^0} = \frac{\mathbf{p}c}{E}$$

Par ailleurs, si on connaît l'énergie totale E et la masse au repos d'un objet, on peut obtenir rapidement le facteur $\gamma(\mathbf{u})$ en utilisant la relation :

$$\gamma(\mathbf{u}) = \frac{\gamma(\mathbf{u})mc^2}{mc^2} = \frac{E}{mc^2}.$$

2.5. Quadriforce $\widetilde{\mathbf{f}}$: f^μ

On peut construire un équivalent relativiste à la deuxième loi de Newton, exprimé avec des quadrivecteurs, en construisant un quadrivecteur force $\widetilde{\mathbf{f}}$, de composantes f^μ, représentant la somme des forces extérieures qui s'exercent sur l'objet considéré, et défini par :

$$\widetilde{\mathbf{f}} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{p}}}{\mathrm{d}\tau} = m\,\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{U}}}{\mathrm{d}\tau} = m\widetilde{\mathbf{A}} \quad \text{avec} \quad \widetilde{\mathbf{f}} : f^\mu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right) = \gamma(\mathbf{u})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right) = \left(\gamma(\mathbf{u})\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}, \gamma(\mathbf{u})\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}\right)$$

2. Attention, en relativité la formule classique de l'énergie cinétique $T = \frac{1}{2}mu^2$ n'est plus valable.

Comme $\widetilde{\mathbf{U}}^2 = c^2$ est constant, on montre facilement que

$$\widetilde{\mathbf{f}} \cdot \widetilde{\mathbf{U}} = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{u}$$

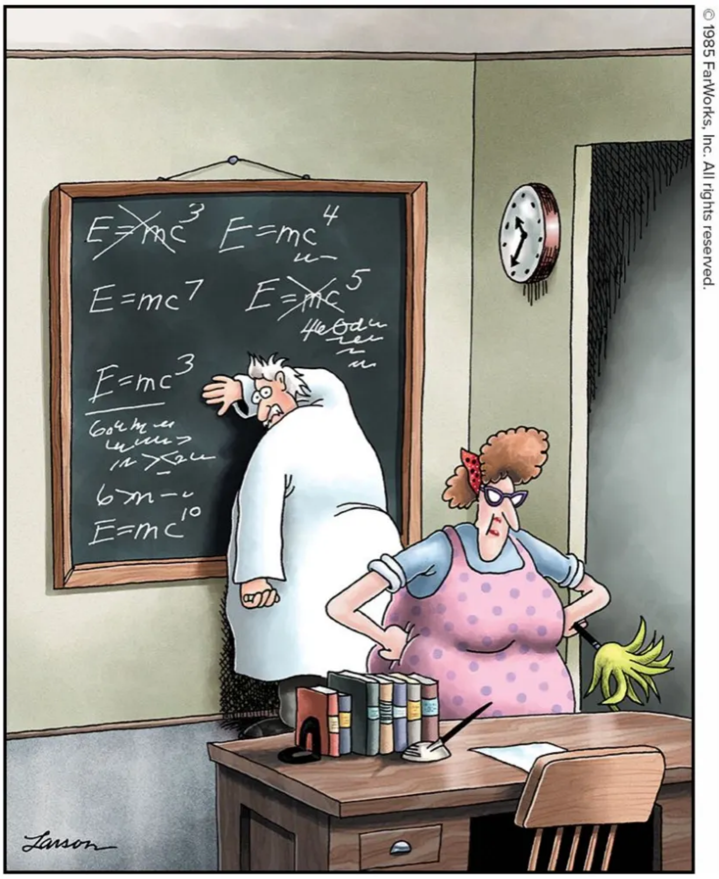
où $\mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t$ a la dimension d'une force, et où on reconnaît une relation analogue au théorème de l'énergie cinétique en mécanique classique : la variation de l'énergie totale est égale à la puissance des forces exercées sur l'objet considéré.

Bibliographie

Les conventions concernant les quadrivecteurs varient légèrement d'un ouvrage à l'autre : la notation des quadrivecteurs change d'un auteur à l'autre ; la composante temporelle est parfois numérotée 4 au lieu de 0 ; la signature de la métrique peut être $(+,-,-,-)$ *ou* $(-,+,+,+)$*, etc. Cela ne change rien aux résultats essentiels de la théorie de la relativité, mais peut paraître déstabilisant à la première lecture d'un ouvrage de relativité.*

D. Langlois, *Introduction à la relativité*, Vuibert (2011) : chapitre 4.

M. Boratav & R. Kerner, *Relativité*, Ellipses (1991) : chapitre 5.



"*Now* that desk looks better. Everything's squared away, yessir, squaaaaaared away."

FIGURE 1 – *Gary Larson, "The Far Side"*