LICENCE DE PHYSIQUE — RELATIVITÉ RESTREINTE

EXERCICES

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2024–2025

Intervenants : L. Le Guillou & J. Bolmont (Sorbonne Université / LPNHE)

TD 7

Quadrivecteurs – Invariance du produit pseudo-scalaire et de la pseudo-norme – Quadrivecteur vitesse – Quadri-accélération – Quadrivecteur énergie-impulsion – Quadri-force.

1. Propriétés des quadrivecteurs

1.1 — Montrez que si deux grandeurs physiques sont représentées respectivement par les quadrivecteurs $\widetilde{\mathbf{A}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}$, et si k et ℓ sont des grandeurs invariantes de Lorentz, alors $k\widetilde{\mathbf{A}} + \ell\,\widetilde{\mathbf{B}}$ est aussi un quadrivecteur.

1.2 — Soit un quadrivecteur $\widetilde{\mathbf{A}}$ représentant une grandeur physique. Montrez que le carré de sa pseudo-norme :

$$\widetilde{\mathbf{A}}^2 = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2$$

est invariant lorsqu'on passe d'un référentiel galiléen à un autre. Montrez, de même, que pour deux quadrivecteurs $\widetilde{\mathbf{A}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}$, le pseudo-produit scalaire :

$$\widetilde{\mathbf{A}} \cdot \widetilde{\mathbf{B}} = A^0B^0 - A^1B^1 - A^2B^2 - A^3B^3$$

est un invariant de Lorentz.

1.3 — Montrez que l'intervalle de temps propre $\mathrm{d}\tau$ est un invariant de Lorentz.

1.4 — À partir du quadrivecteur position $\widetilde{\mathbf{r}}$, construisez un quadrivecteur vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$ qui obéisse aux transformations de Lorentz lorsqu'on passe d'un référentiel galiléen à un autre. Que vaut $\widetilde{\mathbf{U}}^2$? Est-ce un invariant ?

2. Vitesse relative

Vus d'un référentiel $\mathcal{R}$, Luke et Han Solo se déplacent aux vitesses constantes $\mathbf{u}_L$ et $\mathbf{u}_H$ respectivement. On cherche à déterminer leur vitesse relative en fonction de $\mathbf{u}_L$ et $\mathbf{u}_H$ sans utiliser les transformations de Lorentz. En utilisant l'invariance du produit scalaire des quadri-vitesses $\widetilde{\mathbf{U}}_L$ et $\widetilde{\mathbf{U}}_H$ par changement de repère, déterminer le facteur $\gamma(\mathbf{u}_{L/H})$ de Luke par rapport à Han. En déduire la norme de la vitesse relative de Luke par rapport à Han.

3. Quadri-vitesses et composition relativiste des vitesses

Remarque : pour cet exercice, afin d'éviter toute confusion, soyez précis : il est essentiel d'exprimer les différents facteurs β et γ en jeu en indiquant à chaque fois la vitesse utilisée dans l'expression des facteurs β et γ : par exemple, $\gamma(v)$ ou bien $\gamma(u)$, etc.

On considère deux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, avec $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$ la vitesse de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$. On munit ces deux référentiels de repères orthonormés parallèles et du même trièdre $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$, de telle sorte que $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_x$. On suppose ces deux référentiels munis d'horloges parfaites, et on choisit l'origine des temps $t = t' = 0$ lorsque l'origine O' se confond avec O.

On s'intéresse au mouvement d'un objet matériel M, dont la position est repérée par son vecteur position $\mathbf{r}(t) = \mathbf{OM}$ dans $\mathcal{R}$, et par son vecteur position $\mathbf{r}'(t') = \mathbf{O'M}$.

3.1 — Rappelez comment se transforment les coordonnées $(ct, \mathbf{r}) = (ct, x, y, z)$ d'un point de la trajectoire de l'objet M lorsqu'on passe du référentiel $\mathcal{R}$ au référentiel $\mathcal{R}'$. Montrez que ces relations peuvent se mettre sous forme matricielle.

3.2 — Rappelez la définition de la vitesse ordinaire $\mathbf{u}$ du mobile M mesurée dans le référentiel $\mathcal{R}$; faites de même pour sa vitesse $\mathbf{u}'$ mesurée cette fois dans $\mathcal{R}'$. On notera (u_x, u_y, u_z) les composantes de la vitesse $\mathbf{u}$ dans $\mathcal{R}$, et (u'_x, u'_y, u'_z) les composantes de $\mathbf{u}'$ dans $\mathcal{R}'$.

3.3 — Donnez la définition du quadrivecteur vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$ (*quadri-vitesse*), de composantes U^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) pour l'objet étudié ; donnez l'expression de ses 4 composantes U^μ dans le référentiel $\mathcal{R}$. Faites de même pour les 4 composantes U'^μ de la quadri-vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}'$ dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

3.4 — Que vaut $\widetilde{\mathbf{U}}^2$? Est-ce un invariant de Lorentz ?

3.5 — Comment les composantes U^μ de la quadri-vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$ se transforment-elles lorsqu'on passe de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$? Calculez explicitement les 4 composantes U'^μ de la quadrivitesse $\widetilde{\mathbf{U}}'$ du mobile dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

3.6 — À partir des équations précédentes, redémontrez la loi relativiste de composition des vitesses qui fournit les expressions de u'_x, u'_y et u'_z en fonction de u_x, u_y, u_z et v.

4. Quadri-accélération

4.1 — Pour un mobile, on construit son quadrivecteur accélération (ou "quadri-accélération") en dérivant son quadrivecteur vitesse par rapport à son temps propre. Retrouver les expressions des composantes temporelles A^0 et spatiales $\mathbf{A}$ de la quadri-accélération d'une particule $\widetilde{\mathbf{A}}$ en un événement où, dans un repère inertiel, sa vitesse et son accélération valent respectivement $\mathbf{u}$ et $\dot{\mathbf{u}}$.

4.2 — En déduire les valeurs A'^0 et $\mathbf{A}'$ des composantes de ce même quadrivecteur accélération dans un repère inertiel où la vitesse est nulle et l'accélération (dite alors propre) vaut $\mathbf{a}$.

4.3 — En déduire l'expression de $\mathbf{a}^2$ en fonction de $\mathbf{u}$ et de $\dot{\mathbf{u}}$.

4.4 — Que devient cette expression dans le cas d'une accélération longitudinale, c'est à dire lorsque $\dot{\mathbf{u}}$ est parallèle à $\mathbf{u}$?

4.5 — Montrez que le pseudo-produit scalaire $\widetilde{\mathbf{U}} \cdot \widetilde{\mathbf{A}}$ est toujours nul ; autrement dit, que les quadrivecteurs vitesse et accélération sont "orthogonaux" au sens des quadrivecteurs.

5. Energie et impulsion

5.1 — Rappelez la définition de la quadri-impulsion d'une particule de masse m, de temps propre τ, de ligne d'univers $\tilde{\mathbf{r}}(\tau)$.

5.2 — En déduire les expressions de l'énergie et de l'impulsion de la particule de masse m, de vitesse $\mathbf{u}$.

5.3 — En déduire les diverses identités remarquables satisfaites par la quadri-impulsion, l'énergie, l'impulsion et la vitesse $\mathbf{u}$ de la particule de masse m.

5.4 — On considère la collision inélastique, $m + m \to m'$, d'une particule de masse m, de vitesse $4/5c$, sur une particule de masse m, immobile. Calculez la masse m' de la particule finale, ainsi que sa vitesse.

6. Quadri-force

Considérons une particule de quadri-vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$ qui subit une quadriforce $\widetilde{\mathbf{f}} = \mathrm{d}\widetilde{\mathbf{p}}/\mathrm{d}\tau$.

6.1 — Rappeler ce que vaut $\widetilde{\mathbf{U}}^2$. Déduisez-en $\widetilde{\mathbf{U}} \cdot (\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{U}}/\mathrm{d}\tau)$.

6.2 — Montrez que le produit $\widetilde{\mathbf{f}} \cdot \widetilde{\mathbf{U}}$ est nul. Déduisez-en une expression pour la variation de l'énergie E de la particule en fonction du temps $\dot{E} = \mathrm{d}E/\mathrm{d}t$. Quel résultat retrouve-t-on ?