LICENCE DE PHYSIQUE — RELATIVITÉ RESTREINTE

EXERCICES — CORRIGÉ

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2024–2025

Intervenants : L. Le Guillou & J. Bolmont (Sorbonne Université / LPNHE)

TD 7

Quadrivecteurs – Invariance du produit pseudo-scalaire et de la pseudo-norme – Quadrivecteur vitesse – Quadri-accélération – Quadrivecteur énergie-impulsion – Quadri-force.

1. Propriétés des quadrivecteurs

1.1 — Montrez que si deux grandeurs physiques sont représentées respectivement par les quadrivecteurs $\widetilde{\mathbf{A}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}$, et si k et ℓ sont des grandeurs invariantes de Lorentz, alors $k\widetilde{\mathbf{A}} + \ell\widetilde{\mathbf{B}}$ est aussi un quadrivecteur.

Les transformations de Lorentz étant linéaires, le résultat est immédiat.

1.2 — Soit un quadrivecteur $\widetilde{\mathbf{A}}$ représentant une grandeur physique. Montrez que le carré de sa pseudo-norme :

$$\widetilde{\mathbf{A}}^2 = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2$$

est invariant lorsqu'on passe d'un référentiel galiléen à un autre. Montrez, de même, que pour deux quadrivecteurs $\widetilde{\mathbf{A}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}$, le pseudo-produit scalaire :

$$\widetilde{\mathbf{A}} \cdot \widetilde{\mathbf{B}} = A^0B^0 - A^1B^1 - A^2B^2 - A^3B^3$$

est un invariant de Lorentz.

Il suffit de montrer que pour deux quadrivecteurs quelconques $\widetilde{\mathbf{A}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}$, le pseudo-produit scalaire $\widetilde{\mathbf{A}} \cdot \widetilde{\mathbf{B}}$ est invariant de Lorentz. La pseudo-norme carrée correspond au cas particulier $\widetilde{\mathbf{A}} = \widetilde{\mathbf{B}}$.

Lors d'un changement de référentiel galiléen, les composantes contravariantes A^μ de $\widetilde{\mathbf{A}}$ se transforment selon :

$$\begin{cases} A'^0 &= \gamma\left(A^0 - \beta A^1\right) \\ A'^1 &= \gamma\left(A^1 - \beta A^0\right) \\ A'^2 &= A^2 \\ A'^3 &= A^3 \end{cases}$$

où on pose en général :

$$\beta = \frac{v}{c} \qquad \text{ou vectoriellement} \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c} \qquad \text{et} \quad \gamma = \gamma(\mathbf{v}) = \left(1-\beta^2\right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}$$

où $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_x$ est la vitesse du référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$.

De même, les composantes contravariantes B^μ de $\widetilde{\mathbf{B}}$ se transforment par changement de référentiel inertiel selon :

$$\begin{cases} B'^0 &= \gamma\left(B^0 - \beta B^1\right) \\ B'^1 &= \gamma\left(B^1 - \beta B^0\right) \\ B'^2 &= B^2 \\ B'^3 &= B^3 \end{cases}$$

Considérons maintenant le produit $\widetilde{\mathbf{A}} \cdot \widetilde{\mathbf{B}}$. Dans le référentiel $\mathcal{R}'$, il s'écrit :

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{A}}' \cdot \widetilde{\mathbf{B}}' =& A'^0B'^0 - A'^1B'^1 - A'^2B'^2 - A'^3B'^3 \\ &= \gamma^2(A^0-\beta A^1)(B^0-\beta B^1) - \gamma^2(A^1-\beta A^0)(B^1-\beta B^0) - A^2B^2 - A^3B^3 \\ &= \gamma^2\left[A^0B^0 - \beta A^0B^1 - \beta A^1B^0 + \beta^2A^1B^1 - A^1B^1 + \beta A^1B^0 + \beta A^0B^1 - \beta^2A^0B^0\right] \\ &\quad - A^2B^2 - A^3B^3 \\ &= \gamma^2(1-\beta^2)\left(A^0B^0 - A^1B^1\right) - A^2B^2 - A^3B^3 = A^0B^0 - A^1B^1 - A^2B^2 - A^3B^3 = \widetilde{\mathbf{A}} \cdot \widetilde{\mathbf{B}} \end{aligned}$$

Le pseudo-produit scalaire $\widetilde{\mathbf{A}} \cdot \widetilde{\mathbf{B}}$ de deux quadrivecteurs quelconques $\widetilde{\mathbf{A}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}$ est bien invariant de Lorentz. Il s'ensuit que la pseudo-norme carrée $\widetilde{\mathbf{A}}^2 = \widetilde{\mathbf{A}} \cdot \widetilde{\mathbf{A}}$ de tout quadrivecteur $\widetilde{\mathbf{A}}$ l'est aussi.

1.3 — Montrez que l'intervalle de temps propre $\mathrm{d}\tau$ est un invariant de Lorentz.

Soient deux événements E_1 et E_2, observés depuis deux référentiels inertiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ en translation uniforme l'un par rapport à l'autre. On suppose de plus que ces deux événements se produisent au même point dans $\mathcal{R}'$, où ils sont séparés par un petit intervalle de temps $\mathrm{d}t'$. on aura $\mathrm{d}x' = \gamma(\mathrm{d}x - \beta c\mathrm{d}t) = 0$, et donc $\mathrm{d}x = \beta c\mathrm{d}t = vt$. L'intervalle de temps $\mathrm{d}t'$ vaut ainsi :

$$c\,\mathrm{d}t' = \gamma(c\,\mathrm{d}t - \mathrm{d}x) = \gamma(1-\beta^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\gamma}\,\mathrm{d}t \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{d}t = \gamma\,\mathrm{d}t' > \mathrm{d}t'$$

Le temps semble s'écouler plus lentement dans le référentiel $\mathcal{R}'$ où les deux événements ont lieu au même point.

Ainsi, pour un observateur, le temps $\mathrm{d}\tau$ mesuré dans le référentiel qui lui est attaché semble toujours s'écouler plus lentement que dans tout autre référentiel : $\mathrm{d}t = \gamma(\mathbf{u})\mathrm{d}\tau > \mathrm{d}\tau$. Le temps τ est le **temps propre** de l'observateur ; l'intervalle élémentaire de temps propre $\mathrm{d}\tau$ est un invariant car $\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}\tau^2$. et $\mathrm{d}s^2$ est un invariant de Lorentz.

1.4 — À partir du quadrivecteur position $\widetilde{\mathbf{r}}$, construisez un quadrivecteur vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$ qui obéisse aux transformations de Lorentz lorsqu'on passe d'un référentiel galiléen à un autre. Que vaut $\widetilde{\mathbf{U}}^2$? Est-ce un invariant ?

Considérons un mobile se déplaçant à la vitesse $\mathbf{u} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ (en toute généralité, le mouvement du mobile est quelconque, non nécessairement en translation uniforme). À tout instant t, pendant un intervalle de temps $\mathrm{d}t$, on peut raisonner dans le référentiel galiléen tangent au référentiel propre du mobile et établir que :

$$\mathrm{d}t = \gamma(\mathbf{u})\mathrm{d}\tau > \mathrm{d}\tau$$

où $\mathbf{u}$ est la vitesse instantanée du mobile mesurée dans $\mathcal{R}$, et $\mathrm{d}\tau$ est l'intervalle de temps propre mesuré dans le référentiel propre du mobile. Comme $\mathrm{d}\tau$ est un invariant de Lorentz, on peut construire un quadrivecteur vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$ dans $\mathcal{R}$ en dérivant $\tilde{\mathbf{r}}$ par rapport à τ plutôt qu'à t :

$$\widetilde{\mathbf{U}} = \frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}\tau} \quad U^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(\mathbf{u})\, c \\ \gamma(\mathbf{u})\, \mathbf{u} \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad \mathbf{u} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}.$$

La pseudo-norme carrée du quadrivecteur vitesse est :

$$\widetilde{\mathbf{U}}^2 = c^2.$$

qui est évidemment un invariant de Lorentz (c est invariant).

2. Vitesse relative

Vus d'un référentiel $\mathcal{R}$, Luke et Han Solo se déplacent aux vitesses constantes $\mathbf{u}_L$ et $\mathbf{u}_H$ respectivement. On cherche à déterminer leur vitesse relative en fonction de $\mathbf{u}_L$ et $\mathbf{u}_H$ sans utiliser les transformations de Lorentz. En utilisant l'invariance du produit scalaire des quadri-vitesses $\widetilde{\mathbf{U}}_L$ et $\widetilde{\mathbf{U}}_H$ par changement de repère, déterminer le facteur $\gamma(\mathbf{u}_{L/H})$ de Luke par rapport à Han. En déduire la norme de la vitesse relative de Luke par rapport à Han.

Dans le référentiel $\mathcal{R}$, les quadrivecteurs vitesse respectifs de Han et Luke ont pour composantes contravariantes :

$$\widetilde{\mathbf{U}}_H : U_H^\mu = (\gamma(\mathbf{u}_H)c, \gamma(\mathbf{u}_H)\mathbf{u}_H)$$
$$\widetilde{\mathbf{U}}_L : U_L^\mu = (\gamma(\mathbf{u}_L)c, \gamma(\mathbf{u}_L)\mathbf{u}_L)$$

Dans le référentiel de Han $\mathcal{R}' = \mathcal{R}_H$, la vitesse de Han est nulle, et les quadrivecteurs vitesse s'écrivent par conséquent :

$$\widetilde{\mathbf{U}}'_H : {U'}_H^\mu = (c, \mathbf{0})$$
$$\widetilde{\mathbf{U}}'_L : {U'}_L^\mu = \left(\gamma(\mathbf{u}_{L/H})c, \gamma(\mathbf{u}_{L/H})\mathbf{u}_{L/H}\right)$$

où $\mathbf{u}_{L/H}$ est la vitesse de Luke par rapport à Han, mesurée dans $\mathcal{R}_H$.

Le pseudo-produit scalaire $\widetilde{\mathbf{U}}_H \cdot \widetilde{\mathbf{U}}_L$ étant invariant de Lorentz, on a par conséquent :

$$\widetilde{\mathbf{U}}_H \cdot \widetilde{\mathbf{U}}_L = \widetilde{\mathbf{U}}'_H \cdot \widetilde{\mathbf{U}}'_L$$

Soit :

$$\gamma(\mathbf{u}_H)\gamma(\mathbf{u}_L)\, c^2 - \gamma(\mathbf{u}_H)\gamma(\mathbf{u}_L)\mathbf{u}_H \cdot \mathbf{u}_L = \gamma(\mathbf{u}_{L/H})\, c^2$$

Ce qui permet d'en déduire $\gamma(\mathbf{u}_{L/H})$:

$$\gamma(\mathbf{u}_{L/H}) = \gamma(\mathbf{u}_H)\gamma(\mathbf{u}_L)\left[1 - \frac{\mathbf{u}_H \cdot \mathbf{u}_L}{c^2}\right]$$

Ainsi que la norme $u_{L/H}$ de la vitesse relative de Luke par rapport à Han Solo :

$$u_{L/H} = c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma(\mathbf{u}_{L/H})^2}}.$$

3. Quadri-vitesses et composition relativiste des vitesses

Remarque : pour cet exercice, afin d'éviter toute confusion, soyez précis : il est essentiel d'exprimer les différents facteurs β et γ en jeu en indiquant à chaque fois la vitesse utilisée dans l'expression des facteurs β et γ : par exemple, $\gamma(v)$ ou bien $\gamma(u)$, etc.

On considère deux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, avec $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$ la vitesse de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$. On munit ces deux référentiels de repères orthonormés parallèles et du même trièdre $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$, de telle sorte que $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_x$. On suppose ces deux référentiels munis d'horloges parfaites, et on choisit l'origine des temps $t = t' = 0$ lorsque l'origine O' se confond avec O.

On s'intéresse au mouvement d'un objet matériel M, dont la position est repérée par son vecteur position $\mathbf{r}(t) = \mathbf{OM}$ dans $\mathcal{R}$, et par son vecteur position $\mathbf{r}'(t') = \mathbf{O'M}$.

3.1 — Rappelez comment se transforment les coordonnées $(ct, \mathbf{r}) = (ct, x, y, z)$ d'un point de la trajectoire de l'objet M lorsqu'on passe du référentiel $\mathcal{R}$ au référentiel $\mathcal{R}'$. Montrez que ces relations peuvent se mettre sous forme matricielle.

Lorsqu'on passe d'un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ (ou inertiel) à un autre référentiel galiléen $\mathcal{R}'$, les coordonnées $(ct, \mathbf{r})$ d'un événement (ici, un point de la trajectoire du mobile étudié, autrement dit un point-événement de la *ligne d'univers* de cet objet) se transforment selon les équations de la *transformation de Lorentz*, qui ici s'écrit :

$$\begin{cases} ct' &= \gamma(v)\,(ct - \beta(v)x) \\ x' &= \gamma(v)\,(x - \beta(v)ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{cases} \qquad \text{et réciproquement} \qquad \begin{cases} ct &= \gamma(v)\,(ct' + \beta(v)x') \\ x &= \gamma(v)\,(x' + \beta(v)ct') \\ y &= y' \\ z &= z' \end{cases}$$

où $(ct', \mathbf{r}')$ sont les coordonnées du même événement dans $\mathcal{R}'$, et où on a posé :

$$\beta(v) = \frac{v}{c} \qquad \text{et} \qquad \gamma(v) = \left(1 - \beta(v)^2\right)^{-1/2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

On peut mettre ces équations sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -\beta(v)\gamma(v) & 0 & 0 \\ -\beta(v)\gamma(v) & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v) & +\beta(v)\gamma(v) & 0 & 0 \\ +\beta(v)\gamma(v) & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

3.2 — Rappelez la définition de la vitesse ordinaire $\mathbf{u}$ du mobile M mesurée dans le référentiel $\mathcal{R}$; faites de même pour sa vitesse $\mathbf{u}'$ mesurée cette fois dans $\mathcal{R}'$. On notera (u_x, u_y, u_z) les composantes de la vitesse $\mathbf{u}$ dans $\mathcal{R}$, et (u'_x, u'_y, u'_z) les composantes de $\mathbf{u}'$ dans $\mathcal{R}'$.

La vitesse $\mathbf{u} = u_x\,\mathbf{e}_x + u_y\,\mathbf{e}_y + u_z\,\mathbf{e}_z$ du mobile dans $\mathcal{R}$ est simplement la dérivée du vecteur position $\mathbf{r}$ par rapport au temps t dans le référentiel $\mathcal{R}$,

$$\mathbf{u} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = u_x\,\mathbf{e}_x + u_y\,\mathbf{e}_y + u_z\,\mathbf{e}_z \qquad u_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad u_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \qquad u_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}.$$

De même, la vitesse $\mathbf{u}' = u'_x\,\mathbf{e}_x + u'_y\,\mathbf{e}_y + u'_z\,\mathbf{e}_z$ est la dérivée du vecteur position $\mathbf{r}'$ par rapport au temps t' dans le référentiel $\mathcal{R}'$,

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t'} = u'_x\,\mathbf{e}_x + u'_y\,\mathbf{e}_y + u'_z\,\mathbf{e}_z \qquad u'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} \qquad u'_y = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} \qquad u'_z = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}.$$

3.3 — Donnez la définition du quadrivecteur vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$ (*quadri-vitesse*), de composantes U^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) pour l'objet étudié ; donnez l'expression de ses 4 composantes U^μ dans le référentiel $\mathcal{R}$. Faites de même pour les 4 composantes U'^μ de la quadri-vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}'$ dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

Par définition, pour un objet mobile, son quadrivecteur vitesse est la dérivée de son quadrivecteur position $\widetilde{\mathbf{r}}$ par rapport à son temps propre τ :

$$\widetilde{\mathbf{U}} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t} = \gamma(\mathbf{u})\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{avec} \qquad \gamma(\mathbf{u}) = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\mathbf{u}^2}{c^2}}}$$

$$U^\mu = \gamma(\mathbf{u})\frac{\mathrm{d}r^\mu}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \gamma(\mathbf{u})\dfrac{\mathrm{d}(ct)}{\mathrm{d}t} \\ \gamma(\mathbf{u})\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(\mathbf{u})\, c\mathrm{d}t/\mathrm{d}t \\ \gamma(\mathbf{u})\, \mathrm{d}x/\mathrm{d}t \\ \gamma(\mathbf{u})\, \mathrm{d}y/\mathrm{d}t \\ \gamma(\mathbf{u})\, \mathrm{d}z/\mathrm{d}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(\mathbf{u})\, c \\ \gamma(\mathbf{u})\, u_x \\ \gamma(\mathbf{u})\, u_y \\ \gamma(\mathbf{u})\, u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(\mathbf{u})\, c \\ \gamma(\mathbf{u})\, \mathbf{u} \end{pmatrix}$$

Où $\mathbf{u}$ est le vecteur vitesse usuel $\mathbf{u} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$ de composantes $(u_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t, u_y = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t, u_z = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t)$ et de norme u, vu dans le référentiel $\mathcal{R}$.

De la même manière, on aura dans le référentiel $\mathcal{R}'$:

$$\widetilde{\mathbf{U}}' = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}'}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t'} = \gamma(\mathbf{u}')\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}'}{\mathrm{d}t'} \qquad \text{avec} \qquad \gamma(\mathbf{u}') = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\mathbf{u}'^2}{c^2}}}$$

$$U'^\mu = \gamma(\mathbf{u}')\frac{\mathrm{d}r'^\mu}{\mathrm{d}t'} = \begin{pmatrix} \gamma(\mathbf{u}')\dfrac{\mathrm{d}(ct')}{\mathrm{d}t'} \\ \gamma(\mathbf{u}')\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(\mathbf{u}')\, c\mathrm{d}t'/\mathrm{d}t' \\ \gamma(\mathbf{u}')\, \mathrm{d}x'/\mathrm{d}t' \\ \gamma(\mathbf{u}')\, \mathrm{d}y'/\mathrm{d}t' \\ \gamma(\mathbf{u}')\, \mathrm{d}z'/\mathrm{d}t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(\mathbf{u}')\, c \\ \gamma(\mathbf{u}')\, u'_x \\ \gamma(\mathbf{u}')\, u'_y \\ \gamma(\mathbf{u}')\, u'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(\mathbf{u}')\, c \\ \gamma(\mathbf{u}')\, \mathbf{u}' \end{pmatrix}$$

Où $\mathbf{u}'$ est le vecteur vitesse usuel $\mathbf{u}' = \mathrm{d}\mathbf{r}'/\mathrm{d}t'$ de composantes $(u'_x = \mathrm{d}x'/\mathrm{d}t', u'_y = \mathrm{d}y'/\mathrm{d}t', u'_z = \mathrm{d}z'/\mathrm{d}t')$ et de norme u', qui représente cette fois la vitesse du même mobile mais dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

3.4 — Que vaut $\widetilde{\mathbf{U}}^2$? Est-ce un invariant de Lorentz ?

La pseudo-norme carrée du quadrivecteur vitesse s'écrit :

$$\widetilde{\mathbf{U}}^2 = \gamma^2(\mathbf{u})c^2 - \gamma^2(\mathbf{u})\mathbf{u}^2 = \gamma^2(\mathbf{u})c^2\left[1-\frac{\mathbf{u}^2}{c^2}\right] = c^2$$

car $\gamma^2(\mathbf{u}) = [1-\mathbf{u}^2/c^2]^{-1}$. Par construction, $\widetilde{\mathbf{U}}^2$ est le pseudo-produit scalaire d'un quadrivecteur par lui-même : c'est donc un invariant de Lorentz. On le vérifie dans ce cas particulier, car la vitesse de la lumière dans le vide c, et donc c^2 sont justement des invariants relativistes (c'est l'un des deux postulats de la relativité restreinte).

De plus, $\widetilde{\mathbf{U}}^2 = c^2$ est non seulement un invariant, mais aussi une grandeur constante.

3.5 — Comment les composantes U^μ de la quadri-vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$ se transforment-elles lorsqu'on passe de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$? Calculez explicitement les 4 composantes U'^μ de la quadrivitesse $\widetilde{\mathbf{U}}'$ du mobile dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

La quadri-vitesse $\tilde{\mathbf{U}}$ est un quadrivecteur : ses composantes (contravariantes) U^μ se transforment donc selon la transformation de Lorentz, qui s'écrit ici :

$$\begin{pmatrix} U'^0 \\ U'^1 \\ U'^2 \\ U'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -\beta(v)\gamma(v) & 0 & 0 \\ -\beta(v)\gamma(v) & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^0 \\ U^1 \\ U^2 \\ U^3 \end{pmatrix}$$

Ce qui peut encore s'écrire, en remplaçant les composantes U^μ et U'^μ par leurs expressions,

$$\begin{pmatrix} \gamma(\mathbf{u'})\, c \\ \gamma(\mathbf{u'})\, u'_x \\ \gamma(\mathbf{u'})\, u'_y \\ \gamma(\mathbf{u'})\, u'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -\beta(v)\gamma(v) & 0 & 0 \\ -\beta(v)\gamma(v) & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma(\mathbf{u})\, c \\ \gamma(\mathbf{u})\, u_x \\ \gamma(\mathbf{u})\, u_y \\ \gamma(\mathbf{u})\, u_z \end{pmatrix}$$

Soit,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \gamma(\mathbf{u'})\, c & = & \gamma(v)\gamma(\mathbf{u})\, [c - \beta(v) u_x] \\ \gamma(\mathbf{u'})\, u'_x & = & \gamma(v)\gamma(\mathbf{u})\, [u_x - \beta(v) c] = \gamma(v)\gamma(u)\, [u_x - v] \\ \gamma(\mathbf{u'})\, u'_y & = & \gamma(\mathbf{u})\, u_y \\ \gamma(\mathbf{u'})\, u'_z & = & \gamma(\mathbf{u})\, u_z . \end{array} \right. \tag{1}$$

3.6 — À partir des équations précédentes, redémontrez la loi relativiste de composition des vitesses qui fournit les expressions de u'_x, u'_y et u'_z en fonction de u_x, u_y, u_z et v.

En utilisant la première ligne du système d'équations (1), on obtient immédiatement :

$$\gamma(v)\frac{\gamma(\mathbf{u})}{\gamma(\mathbf{u'})} = \frac{c}{c - \beta(v) u_x} = \frac{1}{1 - \dfrac{v u_x}{c^2}}.$$

En utilisant l'expression précédente, et en substituant dans les 3 dernières lignes de (1), on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u'_x & = & \gamma(v)\dfrac{\gamma(\mathbf{u})}{\gamma(\mathbf{u'})}\, [u_x - v] = \dfrac{u_x - v}{1 - \dfrac{v u_x}{c^2}} \\ \\ u'_y & = & \dfrac{\gamma(\mathbf{u})}{\gamma(\mathbf{u'})} u_y = \dfrac{1}{\gamma(v)} \dfrac{u_y}{1 - \dfrac{v u_x}{c^2}} \\ \\ u'_z & = & \dfrac{\gamma(\mathbf{u})}{\gamma(\mathbf{u'})} u_z = \dfrac{1}{\gamma(v)} \dfrac{u_z}{1 - \dfrac{v u_x}{c^2}} \end{array} \right.$$

On retrouve ainsi la loi relativiste de composition des vitesses.

4. Quadri-accélération

4.1 — Pour un mobile, on construit son quadrivecteur accélération (ou "quadri-accélération") en dérivant son quadrivecteur vitesse par rapport à son temps propre. Retrouver les expressions des composantes temporelles A^0 et spatiales $\mathbf{A}$ de la quadri-accélération d'une particule $\tilde{\mathbf{A}}$ en un événement où, dans un repère inertiel, sa vitesse et son accélération valent respectivement $\mathbf{u}$ et $\dot{\mathbf{u}}$.

Le quadrivecteur accélération $\widetilde{\mathbf{A}}$ est la dérivée du quadrivecteur vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$ par rapport au temps propre τ de l'objet en mouvement. En dérivant par rapport à τ, on obtient :

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{U}}}{\mathrm{d}\tau} \qquad A^\mu = \frac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \gamma^4(\mathbf{u})\,\dfrac{\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{u}}}{c} \\ \gamma^4(\mathbf{u})\,\dfrac{\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{u}}}{c^2}\,\mathbf{u} + \gamma^2(\mathbf{u})\,\dot{\mathbf{u}} \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad \mathbf{u} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \qquad \dot{\mathbf{u}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}$$

Pour ce calcul, il est important de se souvenir qu'ici la vitesse $\mathbf{u}$ n'est pas constante, et par conséquent le facteur relativiste $\gamma(\mathbf{u})$ ne l'est pas non plus. Sa dérivée par rapport au temps propre τ s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\gamma(\mathbf{u})}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\gamma(\mathbf{u})}{\mathrm{d}t} = \gamma(\mathbf{u})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \gamma^4(\mathbf{u})\,\frac{\mathbf{u}}{c^2}\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \gamma^4(\mathbf{u})\,\frac{\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{u}}}{c^2}.$$

4.2 — En déduire les valeurs A'^0 et $\mathbf{A}'$ des composantes de ce même quadrivecteur accélération dans un repère inertiel où la vitesse est nulle et l'accélération (dite alors propre) vaut $\mathbf{a}$.

Si on se place dans le référentiel $\mathcal{R}^*$ tangent à l'objet en mouvement à un instant donné, référentiel où, à l'instant considéré, la vitesse $\mathbf{u}$ est nulle (mais $\dot{\mathbf{u}}$ ne l'est pas), et où $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{a}$, les composantes de $\widetilde{\mathbf{A}}^*$ s'écrivent :

$$A^{*\mu} = \begin{pmatrix} A^{*0} \\ \mathbf{A}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{a} \end{pmatrix}$$

On trouve immédiatement que la pseudo-norme carrée de $\widetilde{\mathbf{A}}^*$ vaut $(\widetilde{\mathbf{A}^*})^2 = -a^2$, où $\mathbf{a}$ est l'accélération propre (*i.e.* mesurée dans le référentiel propre de l'objet). Comme il s'agit d'un invariant de Lorentz, dans tout référentiel inertiel on aura $\widetilde{\mathbf{A}}^2 = -a^2$.

4.3 — En déduire l'expression de $\mathbf{a}^2$ en fonction de $\mathbf{u}$ et de $\dot{\mathbf{u}}$.

En utilisant l'invariance de la pseudo-norme carrée de $\widetilde{\mathbf{A}}$, on obtient :

$$\widetilde{\mathbf{A}}'^2 = \widetilde{\mathbf{A}}^2 \qquad \text{soit} \quad -a^2 = (A^0)^2 - \mathbf{A}^2$$

Ce qui donne, en développant,

$$\begin{aligned} -a^2 &= \gamma^8(\mathbf{u})\frac{(\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{u}})^2}{c^2} - \gamma^8(\mathbf{u})\frac{(\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{u}})^2\,\mathbf{u}^2}{c^4} - \gamma^4(\mathbf{u})\dot{\mathbf{u}}^2 - 2\gamma^6(\mathbf{u})\frac{(\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{u}})^2}{c^2} \\ &= \gamma^8(\mathbf{u})\frac{(\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{u}})^2}{c^2}\left[1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}\right] - \gamma^4(\mathbf{u})\dot{\mathbf{u}}^2 - 2\gamma^6(\mathbf{u})\frac{(\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{u}})^2}{c^2} \\ &= -\gamma^6(\mathbf{u})\frac{(\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{u}})^2}{c^2} - \gamma^4(\mathbf{u})\dot{\mathbf{u}}^2. \end{aligned}$$

Soit,

$$a^2 = \gamma^6(\mathbf{u})\frac{(\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{u}})^2}{c^2} + \gamma^4(\mathbf{u})\dot{\mathbf{u}}^2.$$

4.4 — Que devient cette expression dans le cas d'une accélération longitudinale, c'est à dire lorsque $\dot{\mathbf{u}}$ est parallèle à $\mathbf{u}$?

On peut ré-écrire l'expression précédente en multipliant le second terme par $\gamma^2(\mathbf{u})\,(1 - \mathbf{u}^2/c^2) = 1$, ce qui donne :

$$a^2 = \gamma^6(\mathbf{u})\frac{(\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{u}})^2}{c^2} + \gamma^6(\mathbf{u})\left(1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}\right)\dot{\mathbf{u}}^2 = \gamma^6(\mathbf{u})\left[\dot{\mathbf{u}}^2 + \frac{(\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{u}})^2}{c^2} - \frac{\mathbf{u}^2\,\dot{\mathbf{u}}^2}{c^2}\right] = \gamma^6(\mathbf{u})\dot{\mathbf{u}}^2 - \gamma^6(\mathbf{u})\frac{(\mathbf{u}\times\dot{\mathbf{u}})^2}{c^2}$$

où on a utilisé l'égalité suivante pour deux vecteurs quelconques $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$:

$$P^2 Q^2 = \mathbf{P}^2 \mathbf{Q}^2 = (\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q})^2 + (\mathbf{P}\times\mathbf{Q})^2\,.$$

Dans le cas particulier d'une accélération longitudinale, on a $\dot{\mathbf{u}}//\mathbf{u}$ et par conséquent le produit vectoriel $\mathbf{u}\times\dot{\mathbf{u}}$ s'annule. Il reste alors :

$$a^2 = \gamma^6(\mathbf{u})\dot{\mathbf{u}}^2 \qquad \text{soit} \quad a = \gamma^3(\mathbf{u})\dot{u} = \gamma^3(\mathbf{u})\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}.$$

On retrouve ainsi le résultat obtenu lors de l'étude des mouvements accélérés (exercices de la fusée, des jumeaux, etc).

4.5 — Montrez que le pseudo-produit scalaire $\widetilde{\mathbf{U}}\cdot\widetilde{\mathbf{A}}$ est toujours nul ; autrement dit, que les quadrivecteurs vitesse et accélération sont "orthogonaux" au sens des quadrivecteurs.

On a construit le quadrivecteur accélération (*quadri-accélération*) en dérivant le quadrivecteur vitesse par rapport au temps propre du mobile ($\mathrm{d}\tau$ est un invariant de Lorentz) :

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{U}}}{\mathrm{d}\tau} \qquad \text{soit} \quad A^\mu = \frac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}\tau} \quad \mu = 0,1,2,3.$$

D'autre part, comme la pseudo-norme carrée $\widetilde{\mathbf{U}}^2$ de la quadri-vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$ est une constante, sa dérivée par rapport au temps propre est nulle :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\widetilde{\mathbf{U}}^2\right) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad 2\,\widetilde{\mathbf{U}}\cdot\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{U}}}{\mathrm{d}\tau} = 0$$

On en déduit :

$$\widetilde{\mathbf{U}}\cdot\widetilde{\mathbf{A}} = \widetilde{\mathbf{U}}\cdot\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{U}}}{\mathrm{d}\tau} = 0.$$

Les quadrivecteurs vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$ et accélération $\widetilde{\mathbf{A}}$ d'un objet sont donc toujours "orthogonaux" au sens des quadrivecteurs. On peut vérifier de manière immédiate que c'est notamment le cas dans le référentiel inertiel tangent au mobile étudié. En effet, dans le référentiel inertiel tangent $\mathcal{R}^*$, les composantes de $\widetilde{\mathbf{U}}^*$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^*$ se réduisent à :

$$U^{*\mu} = \begin{pmatrix} U^{*0} \\ \mathbf{U}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad A^{*\mu} = \begin{pmatrix} A^{*0} \\ \mathbf{A}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{a} \end{pmatrix}$$

D'où il vient immédiatement que le produit pseudo-scalaire de $\widetilde{\mathbf{U}}^*$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^*$ est nul :

$$\widetilde{\mathbf{U}}^*\cdot\widetilde{\mathbf{A}}^* = U^{*0}U^{*0} - \mathbf{U}^*\cdot\mathbf{A}^* = c\times 0 - \mathbf{0}\cdot\mathbf{a} = 0$$

Comme c'est un invariant de Lorentz, ce résultat est vrai dans tous les référentiels inertiel, et on a toujours $\widetilde{\mathbf{U}}\cdot\widetilde{\mathbf{A}} = 0$: les quadrivecteurs vitesse et accélération sont "orthogonaux" au sens des quadrivecteurs.

5. Energie et impulsion

5.1 — Rappelez la définition de la quadri-impulsion d'une particule de masse m, de temps propre τ, de ligne d'univers $\widetilde{\mathbf{r}}(\tau)$.

5.2 — En déduire les expressions de l'énergie et de l'impulsion de la particule de masse m, de vitesse $\mathbf{u}$.

5.3 — En déduire les diverses identités remarquables satisfaites par la quadri-impulsion, l'énergie, l'impulsion et la vitesse $\mathbf{u}$ de la particule de masse m.

On construit le quadrivecteur énergie-impulsion (ou quadri-impulsion) $\tilde{\mathbf{p}}$ comme suit, par analogie avec la mécanique classique :

$$\tilde{\mathbf{p}} = m\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}\tau} = m\tilde{\mathbf{U}}$$

Ses composantes contravariantes s'écrivent :

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(\mathbf{u})mc \\ \gamma(\mathbf{u})m\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c = \gamma(\mathbf{u})mc \\ \mathbf{p} = \gamma(\mathbf{u})m\mathbf{u} \end{pmatrix} \qquad \text{avec } E \text{ l'énergie totale de l'objet étudié.}$$

Dans ces relations, m est la masse propre de l'objet (c'est à dire sa masse au repos), $\gamma(\mathbf{u})m > m$ est en quelque sorte sa "masse apparente", et $E = \gamma(\mathbf{u})mc^2$ son énergie totale, somme de son *énergie de masse* $E_0 = mc^2$ et de son énergie cinétique $T = E - mc^2 = (\gamma(\mathbf{u}) - 1)mc^2$.

La pseudo-norme carrée de $\tilde{\mathbf{p}}$ vaut $\tilde{\mathbf{p}}^2 = m^2c^2 = (mc^2)^2/c^2$.

Les composantes de $\tilde{\mathbf{p}}$ vérifient les relations suivantes, très utiles :

$$\tilde{\mathbf{p}}^2 = (mc^2)^2/c^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 \qquad \textit{i.e.} \quad E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{p}}{p^0} = \frac{\mathbf{p}c}{E} \qquad \text{et} \qquad \gamma = \frac{E}{mc^2}$$

5.4 — On considère la collision inélastique, $m + m \to m'$, d'une particule de masse m, de vitesse $4/5c$, sur une particule de masse m, immobile. Calculez la masse m' de la particule finale, ainsi que sa vitesse.

Avant la collision, les quadri-impulsions $\tilde{\mathbf{p}}_1$ et $\tilde{\mathbf{p}}_2$ ont pour composantes :

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 : p_1^\mu = \begin{pmatrix} \dfrac{E_1}{c} = \gamma(\mathbf{u}_1)mc \\ \mathbf{p}_1 = \gamma(\mathbf{u}_1)m\mathbf{u}_1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \tilde{\mathbf{p}}_2 : p_2^\mu = \begin{pmatrix} mc \\ \mathbf{p}_2 = \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

où la particule 1 possède une vitesse $u_1 = 4c/5$, et par conséquent,

$$\gamma(\mathbf{u}_1) = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{16}{25}}} = \frac{5}{3}$$

Après la collision, il n'y a plus qu'une seule particule de masse inconnue m', de quadri-impulsion $\tilde{\mathbf{p}}_f$ avec :

$$\tilde{\mathbf{p}}_f : p_f^\mu = \begin{pmatrix} \dfrac{E_f}{c} = \gamma(\mathbf{u}_f)m'c \\ \mathbf{p}_f = \gamma(\mathbf{u}_f)m'\mathbf{u}_f . \end{pmatrix}$$

La conservation de la quadri-impulsion implique :

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2 = \tilde{\mathbf{p}}_f$$

En élevant au carré (pseudo-norme carrée), on obtient :

$$\widetilde{\mathbf{p}}_1^2 + \widetilde{\mathbf{p}}_2^2 + 2\widetilde{\mathbf{p}}_1 \cdot \widetilde{\mathbf{p}}_2 = \widetilde{\mathbf{p}}_f^2 \qquad \text{soit} \quad 2m^2c^2 + 2\gamma(\mathbf{u}_1)m^2c^2 = m'^2c^2$$

On en déduit la masse m' de la particule obtenue :

$$m' = m\sqrt{2 + 2\gamma(\mathbf{u}_1)} = \frac{4}{\sqrt{3}}m \simeq 2.31m > 2m$$

Pour obtenir la vitesse de la particule après la collision, on peut utiliser la conservation de l'énergie (composante zéro de la quadri-impulsion) :

$$\gamma(\mathbf{u}_1)mc^2 + mc^2 = \gamma(\mathbf{u}_f)m'c^2 \qquad \textit{i.e.} \quad \gamma(\mathbf{u}_f) = \frac{1 + \gamma(\mathbf{u}_1)}{\sqrt{2 + 2\gamma(\mathbf{u}_1)}} = \sqrt{\frac{1 + \gamma(\mathbf{u}_1)}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

On en déduit la vitesse u_f de la particule produite après la collision,

$$u_f = c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2(\mathbf{u}_f)}} = \frac{c}{2}.$$

6. Quadri-force

Considérons une particule de quadri-vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$ qui subit une quadriforce $\widetilde{\mathbf{f}} = \mathrm{d}\widetilde{\mathbf{p}}/\mathrm{d}\tau$.

6.1 — Rappeler ce que vaut $\widetilde{\mathbf{U}}^2$. Déduisez-en $\widetilde{\mathbf{U}} \cdot (\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{U}}/\mathrm{d}\tau)$.

Le quadrivecteur vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$: U^μ d'un mobile de vitesse instantanée $\mathbf{u}$ dans un référentiel inertiel $\mathcal{R}$ s'écrit :

$$\widetilde{\mathbf{U}} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}\tau} \quad U^\mu = \Big(\gamma(\mathbf{u})c, \gamma(\mathbf{u})\mathbf{u}\Big) \qquad \text{avec} \quad \mathbf{u} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}.$$

Sa pseudo-norme carrée vaut :

$$\widetilde{\mathbf{U}}^2 = \gamma(\mathbf{u})^2c^2 - \gamma(\mathbf{u})^2u^2 = \gamma(\mathbf{u})^2c^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = c^2.$$

Par conséquent, $\widetilde{\mathbf{U}}^2 = c^2$ est non seulement un invariant de Lorentz, mais aussi une constante. On en déduit que sa dérivée par rapport au temps propre du mobile est nulle :

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{U}}^2}{\mathrm{d}\tau} = 2\widetilde{\mathbf{U}} \cdot \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{U}}}{\mathrm{d}\tau} = 0$$

Et par conséquent,

$$\widetilde{\mathbf{U}} \cdot \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{U}}}{\mathrm{d}\tau} = 0 \qquad \textit{i.e.} \quad \widetilde{\mathbf{U}} \cdot \widetilde{\mathbf{A}} = 0$$

où $\widetilde{\mathbf{A}}$: A^μ est la quadri-accélération.

Autrement dit, les quadrivecteurs vitesse et accélération sont toujours "orthogonaux" au sens des quadrivecteurs.

6.2 — Montrez que le produit $\widetilde{\mathbf{f}} \cdot \widetilde{\mathbf{U}}$ est nul. Déduisez-en une expression pour la variation de l'énergie E de la particule en fonction du temps $\dot{E} = \mathrm{d}E/\mathrm{d}t$. Quel résultat retrouve-t-on ?

Pour un mobile de masse propre m constante, on peut écrire la quadri-force comme :

$$\widetilde{\mathbf{f}} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{p}}}{\mathrm{d}\tau} = m\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{U}}}{\mathrm{d}\tau} \qquad \textit{i.e.} \quad f^\mu = m\frac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}\tau}$$

D'après ce qui précède, on en déduit immédiatement que le pseudo-produit scalaire $\widetilde{\mathbf{f}} \cdot \widetilde{\mathbf{U}}$ est nul :

$$\widetilde{\mathbf{f}} \cdot \widetilde{\mathbf{U}} = m\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{U}}}{\mathrm{d}\tau} \cdot \widetilde{\mathbf{U}} = 0.$$

D'autre part, les composantes contravariantes de la quadri-force $\widetilde{\mathbf{f}}$ peuvent s'écrire :

$$\widetilde{\mathbf{f}} : f^\mu = \frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \left(\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}\tau}\right) = \left(\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}\right) = \left(\frac{1}{c}\gamma(\mathbf{u})\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}, \gamma(\mathbf{u})\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}\right)$$

Comme $\widetilde{\mathbf{f}} \cdot \widetilde{\mathbf{U}} = 0$, on en déduit :

$$\widetilde{\mathbf{f}} \cdot \widetilde{\mathbf{U}} = \gamma(\mathbf{u})^2\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} - \gamma(\mathbf{u})^2\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{u} = 0$$

Soit :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{u}.$$

En notant que $\mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t$ a la dimension d'une force, on retrouve ici un résultat analogue (d'un point de vue formel) à la mécanique classique : la variation de l'énergie d'un mobile par unité de temps est égale à la puissance des forces appliquées sur cette particule.