LICENCE DE PHYSIQUE — RELATIVITÉ RESTREINTE

EXERCICES — CORRIGÉ

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2023–2024

Intervenants : L. Le Guillou & J. Bolmont (Sorbonne Université / LPNHE)

TD 8

Quadrivecteur énergie-impulsion – Lois de conservation – Collisions : traitement relativiste – Masse invariante, énergie dans le référentiel du centre de masse – Défaut de masse, énergie de liaison – Bilan de réaction – Propulsion.

1. Désintégration du pion

On considère le processus de désintégration d'un pion *au repos* :

$$\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

1.1 — La masse du neutrino (ici muonique) n'étant toujours pas connue, on attribue à celui-ci une masse m_ν, et l'on souhaite calculer l'énergie E_μ du muon émis. La procédure standard consiste, sur la base du principe de conservation de la quadri-impulsion totale, à exprimer la quadri-impulsion de la particule non-observée, le neutrino ici, en termes des quadri-impulsions des autres particules, et à élever au carré les deux membres de cette expression, éliminant ainsi l'énergie et l'impulsion du neutrino trop difficiles à mesurer.

Établissez ainsi l'expression de l'énergie du muon émis en fonction des masses des trois particules en jeu.

Les composantes contravariantes des quadri-impulsions dans le référentiel du laboratoire sont données par :

$$\widetilde{\mathbf{p}}_\pi : p_\pi^\alpha = (m_\pi c, \mathbf{0}) \qquad \widetilde{\mathbf{p}}_\mu : p_\mu^\alpha = (E_\mu/c, \mathbf{p}_\mu) \qquad \widetilde{\mathbf{p}}_\nu : p_\nu^\alpha = (E_\nu/c, \mathbf{p}_\nu).$$

où α est ici l'indice (de 0 à 3).

On écrit la conservation de la quadri-impulsion :

$$\widetilde{\mathbf{p}}_\pi = \widetilde{\mathbf{p}}_\mu + \widetilde{\mathbf{p}}_\nu \qquad \text{soit} \qquad \widetilde{\mathbf{p}}_\pi - \widetilde{\mathbf{p}}_\mu = \widetilde{\mathbf{p}}_\nu$$

La quadri-impulsion du neutrino ainsi isolée, on élève au carré :

$$\widetilde{\mathbf{p}}_\pi^2 + \widetilde{\mathbf{p}}_\mu^2 - 2\,\widetilde{\mathbf{p}}_\pi \cdot \widetilde{\mathbf{p}}_\mu = \widetilde{\mathbf{p}}_\nu^2 \qquad \text{soit} \qquad m_\pi^2 c^2 + m_\mu^2 c^2 - 2 m_\pi E_\mu = m_\nu^2 c^2.$$

D'où le résultat :

$$E_\mu = \frac{m_\pi^2 c^2 + m_\mu^2 c^2 - m_\nu^2 c^2}{2m_\pi} \simeq \frac{m_\pi^2 c^2 + m_\mu^2 c^2}{2m_\pi}.$$

1.2 — La masse du pion est $m_\pi = 139.57\,\mathrm{MeV}/c^2$; celle du muon $m_\mu = 105.66\,\mathrm{MeV}/c^2$. La masse du neutrino mu est inconnue ; les expériences de mesure des oscillations de neutrinos ont montré que leur masse est non nulle ; elle est cependant très faible (inférieure à l'électron-volt). On pourra donc ici négliger le terme en m_ν. Donnez la valeur numérique de l'énergie totale et de l'énergie cinétique du muon produit, dans le référentiel du pion au repos avant désintégration.

On obtient ainsi, pour l'énergie totale du muon produit par désintégration du pion (dans le référentiel du pion au repos avant désintégration),

$$\begin{aligned} E_\mu &= \frac{m_\pi^2 c^2 + m_\mu^2 c^2 - m_\nu^2 c^2}{2m_\pi} \simeq \frac{m_\pi^2 c^2 + m_\mu^2 c^2}{2m_\pi} \\ &\simeq \frac{(m_\pi c^2)^2 + (m_\mu c^2)^2}{2m_\pi c^2} = \frac{(139.57\,\mathrm{MeV})^2 + (105.66\,\mathrm{MeV})^2}{2 \times 139.57\,\mathrm{MeV}} \simeq 109.78\,\mathrm{MeV} \end{aligned}$$

On en déduit l'énergie cinétique du muon dans le référentiel du pion avant désintégration,

$$E_\mu = m_\mu c^2 + T_\mu \qquad T_\mu = E_\mu - m_\mu c^2 \simeq 109.78\,\mathrm{MeV} - 105.66\,\mathrm{MeV} = 4.12\,\mathrm{MeV}.$$

1.3 — Que vaut la quantité de mouvement relativiste $\mathbf{p}_\mu$ du muon ? Déduisez-en la quantité de mouvement emportée par le neutrino.

En utilisant la relation d'Einstein, on obtient la norme $\mathbf{p}_\mu$ du vecteur quantité de mouvement du muon :

$$E_\mu^2 = \mathbf{p}_\mu^2 c^2 + m_\mu^2 c^4 \qquad \text{d'où} \quad p_\mu = \sqrt{\frac{E_\mu^2}{c^2} - m_\mu^2 c^2} = \sqrt{\frac{E_\mu^2}{c^2} - \frac{m_\mu^2 c^4}{c^2}} = \frac{1}{c}\sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2 c^4}$$

Ce qui donne, numériquement,

$$p_\mu = \frac{1}{c}\sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2 c^4} \simeq \frac{1}{c}\sqrt{(109.78\,\mathrm{MeV})^2 - (105.66\,\mathrm{MeV})^2} \simeq 29.79\,\mathrm{MeV}/c.$$

De plus, comme la quantité de mouvement totale est conservée, on a nécessairement :

$$\mathbf{p}_\pi = \mathbf{p}_\mu + \mathbf{p}_\nu \qquad \text{avec} \quad \mathbf{p}_\pi = \mathbf{0} \qquad \text{d'où} \quad \mathbf{p}_\nu = -\mathbf{p}_\mu$$

Dans le référentiel où le pion était immobile, les quantités de mouvement du muon et du neutrino issus de la désintégration du pion sont de normes égales et de sens opposés. Par conséquent, on a, en norme, $p_\nu = p_\mu \simeq 29.79\,\mathrm{MeV}/c$.

1.4 — En négligeant la masse du neutrino (qui est très petite, et mal connue), estimez l'énergie emportée par le neutrino. Vérifiez que l'énergie totale est bien conservée.

On peut appliquer la relation d'Einstein au neutrino pour obtenir son énergie totale ; si on néglige l'énergie de masse $m_\nu c^2$ du neutrino, très petite devant les énergies considérées ici, on obtient :

$$E_\nu = \sqrt{\mathbf{p}_\nu^2 c^2 + m_\nu^2 c^4} \simeq \sqrt{\mathbf{p}_\nu^2 c^2} = p_\nu c$$

ce qui correspond à la relation entre énergie et quantité de mouvement pour une particule dépourvue de masse (ce n'est pas parfaitement exact pour un neutrino qui possède une masse ; ce sera exact pour le photon par exemple).

On estime ainsi l'énergie totale du neutrino :

$$E_\nu \simeq p_\nu c = p_\mu c \simeq (29.79\,\mathrm{MeV}/c) \times c = 29.79\,\mathrm{MeV}.$$

On peut vérifier que l'énergie totale est bien conservée :

$$E_\pi = m_\pi c^2 = 139.57\,\mathrm{MeV} \qquad E_\mu + E_\nu \simeq 109.78\,\mathrm{MeV} + 29.79\,\mathrm{MeV} = 139.57\,\mathrm{MeV}.$$

2. Expériences sur cible fixe et sur collisionneurs

On s'intéresse à la collision de deux particules identiques de masse m, dans deux configurations : collision d'une particule en mouvement sur une particule identique, immobile ("cible fixe"), et collision de deux particules identiques animées de vitesses égales en norme et opposées ("collisionneur symétrique").

Collision élastique sur cible fixe : traitement classique

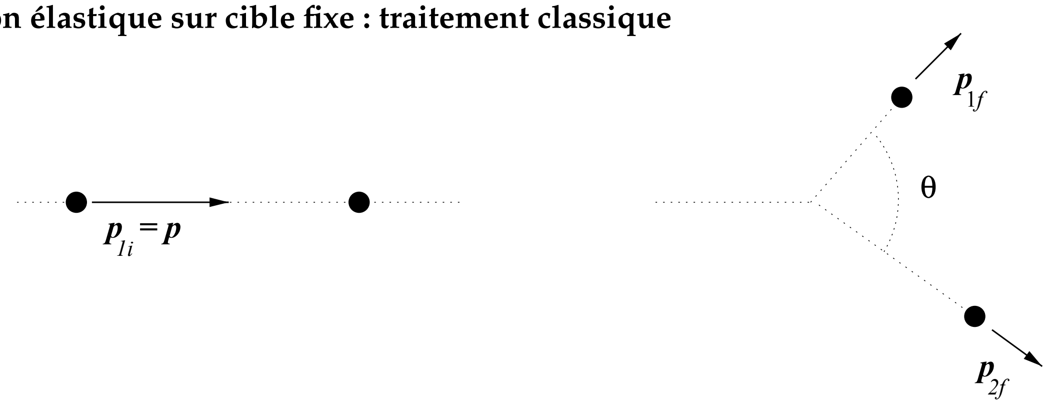


Fig. 1 – Collision élastique sur cible fixe.

On s'intéresse à la collision élastique d'une particule de masse m, d'impulsion $\mathbf{p}$ et d'énergie cinétique T sur une particule identique, immobile (la "cible", fig. 1).

2.1 — Dans le cadre de la mécanique classique, écrivez la conservation de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement (impulsion).

En mécanique classique, pour une collision élastique, il y a conservation de l'énergie cinétique totale :

$$T_{1i} + T_{2i} = T_{1f} + T_{2f} \quad \text{qu'on peut écrire} \quad \frac{p_{1i}^2}{2m} + \frac{p_{2i}^2}{2m} = \frac{p_{1f}^2}{2m} + \frac{p_{2f}^2}{2m} \tag{1}$$

Par ailleurs, il y a toujours conservation de la quantité de mouvement totale :

$$\mathbf{p}_{1i} + \mathbf{p}_{2i} = \mathbf{p}_{1f} + \mathbf{p}_{2f} \tag{2}$$

2.2 — Montrez que l'angle θ entre les impulsions $\mathbf{p}_{1f}$ et $\mathbf{p}_{2f}$ des particules après la collision est nécessairement égal à $\pi/2$ dans le cadre classique.

Comme les deux particules ont la même masse m avant et après la collision, l'équation (1) peut s'écrire :

$$p_{1i}^2 + p_{2i}^2 = p_{1f}^2 + p_{2f}^2 \tag{3}$$

Par ailleurs, en élevant au carré l'équation (2), on obtient :

$$p_{1i}^2 + p_{2i}^2 + 2\,\mathbf{p}_{1i}\cdot\mathbf{p}_{2i} = p_{1f}^2 + p_{2f}^2 + 2\,\mathbf{p}_{1f}\cdot\mathbf{p}_{2f} \tag{4}$$

En combinant ces deux équations et en utilisant le fait que, dans le cas qui nous intéresse ici, $\mathbf{p}_{1i} = \mathbf{p}$ et $\mathbf{p}_{2i} = \mathbf{0}$, on trouve :

$$\mathbf{p}_{1f}\cdot\mathbf{p}_{2f} = 0 \quad \textit{i.e.} \quad p_{1f}\,p_{2f}\cos\theta = 0 \quad \text{ce qui implique} \quad \cos\theta = 0. \tag{5}$$

L'angle θ entre les impulsions $\mathbf{p}_{1f}$ et $\mathbf{p}_{2f}$ des particules après la collision est nécessairement égal à $\pi/2$ (ou bien l'une des deux quantités de mouvement est nulle après la collision).

Collision élastique sur cible fixe : traitement relativiste

Dans le référentiel $\mathcal{R}$, on considère un dispositif expérimental où une particule de masse m de vitesse $\mathbf{u}$, de quantité de mouvement $\mathbf{p}$ d'énergie E entre en collision avec une particule identique, mais immobile ("collision sur cible fixe").

2.3 — Écrivez la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total lors de la collision.

Si on note $\tilde{\mathbf{p}}_{1i}$ et $\tilde{\mathbf{p}}_{2i}$ les quadrivecteurs énergie-impulsion des particules incidentes, et $\tilde{\mathbf{p}}_{1f}$ et $\tilde{\mathbf{p}}_{2f}$ les quadrivecteurs énergie-impulsion des particules après la collision, on a, par conservation :

$$\tilde{\mathbf{p}}_{1i} + \tilde{\mathbf{p}}_{2i} = \tilde{\mathbf{p}}_{1f} + \tilde{\mathbf{p}}_{2f} \tag{6}$$

2.4 — Exprimez l'angle θ entre $\mathbf{p}_{1f}$ et $\mathbf{p}_{2f}$ en fonction de E, m, E_{1f} et E_{2f}, où E_{1f} et E_{2f} sont les énergies des deux particules après la collision.

En élevant au carré l'équation (6), on trouve :

$$(\tilde{\mathbf{p}}_{1i})^2 + (\tilde{\mathbf{p}}_{2i})^2 + 2\tilde{\mathbf{p}}_{1i}\cdot\tilde{\mathbf{p}}_{2i} = (\tilde{\mathbf{p}}_{1f})^2 + (\tilde{\mathbf{p}}_{2f})^2 + 2\tilde{\mathbf{p}}_{1f}\cdot\tilde{\mathbf{p}}_{2f} \qquad \text{où} \quad (\tilde{\mathbf{p}}_{1i})^2 = (\tilde{\mathbf{p}}_{2i})^2 = (\tilde{\mathbf{p}}_{1f})^2 = (\tilde{\mathbf{p}}_{2f})^2 = m^2c^2$$

D'où on déduit :

$$\tilde{\mathbf{p}}_{1i}\cdot\tilde{\mathbf{p}}_{2i} = \tilde{\mathbf{p}}_{1f}\cdot\tilde{\mathbf{p}}_{2f} \tag{7}$$

Or, dans le référentiel du laboratoire, on a :

$$\tilde{\mathbf{p}}_{1i} : (p_{1i})^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{p}}_{2i} : (p_{2i})^\mu = \begin{pmatrix} mc \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{p}}_{1f} : (p_{1f})^\mu = \begin{pmatrix} E_{1f}/c \\ \mathbf{p}_{1f} \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{p}}_{2f} : (p_{2f})^\mu = \begin{pmatrix} E_{2f}/c \\ \mathbf{p}_{2f} \end{pmatrix}$$

En substituant, on trouve (en utilisant la relation $E^2 - m^2c^4 = p^2c^2$) :

$$Em = \frac{E_{1f}E_{2f}}{c^2} - \mathbf{p}_{1f}\cdot\mathbf{p}_{2f} = \frac{E_{1f}E_{2f}}{c^2} - \frac{1}{c^2}\sqrt{E_{1f}^2 - m^2c^4}\,\sqrt{E_{2f}^2 - m^2c^4}\,\cos\theta$$

Ce qui donne θ :

$$\cos\theta = \frac{E_{1f}E_{2f} - Emc^2}{\sqrt{E_{1f}^2 - m^2c^4}\sqrt{E_{2f}^2 - m^2c^4}}$$

2.5 — Dans le cas particulier où $E_{1f} = E_{2f}$, exprimez $\cos\theta$ en fonction de E et m. En exprimant $\cos\theta$ plutôt en fonction de l'énergie cinétique $T = E - mc^2$, on obtient une expression très simple ; à partir de cette dernière expression, montrez que θ est nécessairement inférieur à $\pi/2$. Comparez avec le résultat en mécanique classique.

Dans le cas particulier où $E_{1f} = E_{2f}$, on a aussi $p_{1f} = p_{2f}$ (en norme). L'expression de θ se simplifie alors :

$$\cos\theta = \frac{(E_{1f})^2 - Emc^2}{(E_{1f})^2 - m^2c^4}$$

De plus, en utilisant la conservation de l'énergie,

$$E + mc^2 = E_{1f} + E_{2f} = 2E_{1f} \qquad \text{d'où} \qquad E_{1f} = E_{2f} = \frac{E + mc^2}{2} = \frac{T + 2\,mc^2}{2} \tag{8}$$

en faisant apparaître l'énergie cinétique $T = E - mc^2$ de la particule incidente.

En substituant dans l'expression de $\cos\theta$, on trouve :

$$\cos\theta = \frac{E_{1f}^2 - Emc^2}{E_{1f}^2 - m^2c^4} = \frac{\left(\dfrac{E + mc^2}{2}\right)^2 - E\,mc^2}{\left(\dfrac{E + mc^2}{2}\right)^2 - m^2c^4} = \frac{T^2}{T^2 + 4mc^2T} = \frac{1}{1 + \dfrac{4mc^2}{T}} > 0.$$

Comme $\cos\theta > 0$, l'angle θ est inférieur à $\pi/2$ dans le cas relativiste (contrairement au cas classique ou l'angle vaut exactement $\pi/2$).

De plus, lorsque l'énergie cinétique T de la particule incidente est grande devant son énergie de masse, *i.e.* lorsque $T \gg mc^2$, on a

$$T \gg mc^2 \qquad T \gg 4mc^2 \qquad \text{d'où} \qquad \frac{4mc^2}{T} \ll 1 \qquad \text{et} \qquad \cos\theta = \frac{1}{1 + \dfrac{4mc^2}{T}} \longrightarrow 1$$

et l'angle θ tend alors vers 0 (*focalisation vers l'avant des particules diffusées*).

2.6 — Écrivez la masse invariante M^* du système constitué par les deux particules. Quelle est l'énergie totale E^* disponible dans le référentiel du centre de masse $\mathcal{R}^*$, en fonction de E et m ?

Par définition, la masse invariante M^* du système vérifie :

$$\begin{aligned}(M^*)^2\,c^2 &= [\tilde{\mathbf{p}}_{1i} + \tilde{\mathbf{p}}_{2i}]^2 = \left(\frac{E}{c} + mc\right)^2 - (\mathbf{p} + \mathbf{0})^2 \\ &= \frac{E^2}{c^2} + m^2c^2 + 2Em - \mathbf{p}^2 = 2\,m\left[E + mc^2\right] = 2\,m\left[T + 2\,mc^2\right]\end{aligned}$$

D'où,

$$M^* = \frac{1}{c}\sqrt{2\,m\left[T + 2\,mc^2\right]}$$

L'énergie totale E^* disponible dans le référentiel $\mathcal{R}^*$ du centre de masse et la masse invariante du système M^* sont liées par :

$$E^* = M^*\,c^2.$$

L'énergie totale E^* disponible dans le référentiel $\mathcal{R}^*$ du centre de masse du système considéré est donc :

$$E^* = \sqrt{2\,mc^2\left[E + mc^2\right]} = \sqrt{2\,mc^2\left[T + 2\,mc^2\right]}.$$

Collisionneur symétrique

On considère maintenant le cas d'un collisionneur symétrique : dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire, les deux particules possèdent la même énergie E et des impulsions (quantités de mouvement) opposées mais de même norme p (fig. 2).

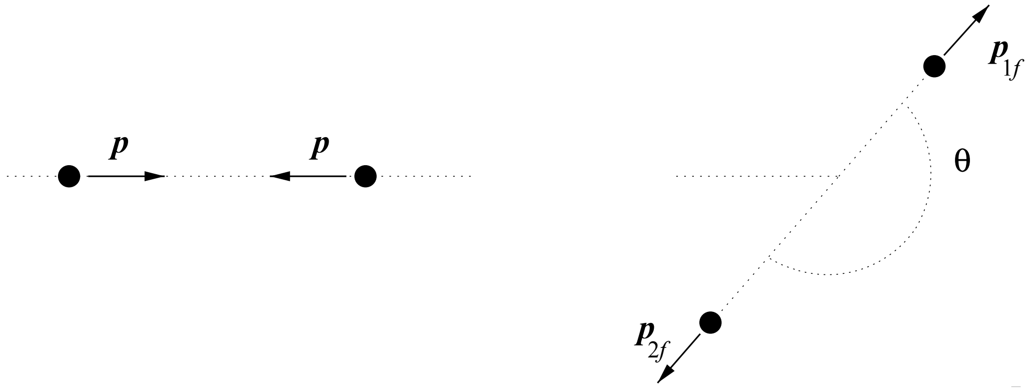


Fig. 2 – Collision symétrique (collisionneur).

2.7 — Écrivez la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion avant et après la collision, dans le référentiel du laboratoire.

Comme précédemment, on a :

$$\tilde{\mathbf{p}}_{1i} + \tilde{\mathbf{p}}_{2i} = \tilde{\mathbf{p}}_{1f} + \tilde{\mathbf{p}}_{2f} \tag{9}$$

Avec, dans le référentiel du laboratoire :

$$\tilde{\mathbf{p}}_{1i} : (p_{1i})^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{p}}_{2i} : (p_{2i})^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ -\mathbf{p} \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{p}}_{1f} : (p_{1f})^\mu = \begin{pmatrix} E_{1f}/c \\ \mathbf{p}_{1f} \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{p}}_{2f} : (p_{2f})^\mu = \begin{pmatrix} E_{2f}/c \\ \mathbf{p}_{2f} \end{pmatrix}$$

2.8 — Que pensez-vous du référentiel du centre de masse du système $\mathcal{R}^*$?

De manière immédiate, on constate dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire que l'impulsion totale est nulle avant la collision. Elle sera donc aussi nulle après la collision, et le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$ se confond avec celui du centre de masse du système $\mathcal{R}^*$.

2.9 — Écrivez la masse invariante du système constitué par les deux particules. Quelle est l'énergie totale E^* disponible dans le référentiel du centre de masse $\mathcal{R}^*$, en fonction de E et m ?

Par définition, la masse invariante du système vérifie :

$$(M^*)^2\, c^2 = [\tilde{\mathbf{p}}_{1i} + \tilde{\mathbf{p}}_{2i}]^2 = \left(\frac{E}{c} + \frac{E}{c}\right)^2 - (\mathbf{p} - \mathbf{p})^2 = \frac{4E^2}{c^2} = \frac{4\left[T + mc^2\right]^2}{c^2} \quad \text{d'où} \quad M^* = \frac{2\left[T + mc^2\right]}{c^2}$$

L'énergie totale E^* disponible dans le référentiel $\mathcal{R}^*$ du centre de masse vaut donc, très logiquement :

$$E^* = M^*\, c^2 = 2\left[T + mc^2\right] = 2E$$

Collision inélastique : production des anti-protons

En physique des particules on cherche à produire des collisions inélastiques : l'objectif est de concentrer pendant un bref instant une énergie considérable dans un petit volume afin de produire des particules inexistantes dans la matière ordinaire et pouvoir ainsi étudier leurs propriétés.

Considérons la réaction suivante, qui vise à produire des anti-protons $\bar{p}$ en faisant collisionner des protons p :

$$p + p \longrightarrow p + p + p + \bar{p}$$

2.10 — En utilisant la notion de masse invariante, déterminez l'énergie cinétique minimale T qu'il faut donner aux protons d'un faisceau qui frappe une cible d'hydrogène, pour produire effectivement des antiprotons (scénario "cible fixe"). Application numérique.

D'après les résultats obtenus précédemment, la masse invariante dans une collision sur cible fixe vérifie :

$$(M^*)^2\, c^2 = \frac{(E^*)^2}{c^2} = 2\, m \left[E + mc^2\right] = 2\, m \left[T + 2\, mc^2\right]$$

Et l'énergie totale E^* disponible dans le référentiel $\mathcal{R}^*$ du centre de masse s'écrit :

$$E^* = \sqrt{2\, mc^2 \left[E + mc^2\right]} = \sqrt{2\, mc^2 \left[T + 2\, mc^2\right]}$$

Pour pouvoir produire un proton et un antiproton supplémentaire, il faut que l'énergie disponible dans le référentiel du centre de masse soit au moins égale à 4 fois la masse d'un proton :

$$E^* > 4\, mc^2 \quad \textit{i.e.} \quad 2\, mc^2 \left[T + 2\, mc^2\right] > 16\, m^2 c^4 \quad \text{soit} \quad T > 6\, mc^2$$

Numériquement, il faut donc $T > 6 \times 938\,\mathrm{MeV} = 5.628\,\mathrm{GeV}$.

2.11 — En procédant de même, déterminez l'énergie cinétique minimale T qu'il faut fournir aux protons de deux faisceaux opposés pour produire des antiprotons (scénario "collisionneur symétrique"). Application numérique.

Dans une collision symétrique, l'énergie totale E^* disponible dans le référentiel $\mathcal{R}^*$ du centre de masse est :

$$E^* = 2E = 2\left[T + mc^2\right]$$

Comme précédemment, pour produire un proton et un antiproton, il faut $E^* > 4\, mc^2$, c'est à dire :

$$2E = 2\left[T + mc^2\right] > 4\, mc^2 \quad \textit{i.e.} \quad T > mc^2$$

Numériquement, il faut donc cette fois $T > 938\,\mathrm{MeV}$.

2.12 — Entre ces deux types d'expériences, quelle est la méthode qui semble la plus avantageuse ? Commentez. Données : masse du proton et de l'anti-proton : $m_p = m_{\bar{p}} = 938\,\mathrm{MeV}/c^2$.

D'après ce qui précède, il apparaît qu'un collisionneur symétrique est très avantageux comparé à un dispositif de collision sur cible fixe, puisque pour obtenir la même énergie disponible dans le centre de masse de la collision, il faut fournir une énergie $T > 6\, mc^2$ au faisceau dans le cas d'une cible fixe, contre seulement $T > mc^2$ à chacun des faisceaux dans un collisionneur symétrique. D'où le succès des collisionneurs symétriques en physique des particules (LEP, LHC, etc), en particulier pour d'évidentes raisons de consommation électrique des accélérateurs.

Fig. 3 – Edward McMillan et Edward Lofgren, responsables du projet, photographiés sur le blindage de l'accélérateur dit "Bevatron" (Lawrence Berkeley National Laboratory, USA). Exploité à partir de 1954, le Bevatron permit en 1955 la découverte de l'antiproton en bombardant une cible fixe avec des protons d'énergie cinétique suffisante. Pour cette découverte, Emilio Gino Segrè et Owen Chamberlain se virent attribuer le prix Nobel de Physique en 1959.

3. Défaut de masse, énergie de liaison, bilan d'une réaction nucléaire

3.1 — Défaut de masse du deutérium. L'hydrogène possède un isotope dont le noyau comporte un proton et un neutron : le deutérium ${}^2_1\mathrm{H}$ aussi noté ${}^2_1\mathrm{D}$. Estimez précisément sa masse à partir de ses constituants ($m_\mathrm{p} = 1.007276\,\mathrm{u}$, $m_\mathrm{n} = 1.008665\,\mathrm{u}$, $m_\mathrm{e} = 511\,\mathrm{keV}/c^2$). La masse atomique du deutérium est en fait $2.014102\,\mathrm{u}$. Où est passée la différence ? Faites le calcul en unités atomiques et en MeV. Que représente cette différence d'énergie ?

Estimons la masse atomique du deutérium ${}^2_1\mathrm{H}$ à partir de ses constituants :

p	$1.007276\,\mathrm{u}$	$938.272\,\mathrm{MeV}/c^2$
n	$1.008665\,\mathrm{u}$	$939.565\,\mathrm{MeV}/c^2$
e	$0.000549\,\mathrm{u}$	$0.511\,\mathrm{MeV}/c^2$
total	$2.016490\,\mathrm{u}$	$1878.348\,\mathrm{MeV}/c^2$
${}^2_1\mathrm{H}$	$2.014102\,\mathrm{u}$	$1876.124\,\mathrm{MeV}/c^2$
défaut	$-0.002388\,\mathrm{u}$	$-2.224\,\mathrm{MeV}/c^2$

Le défaut de masse constaté correspond à l'énergie de liaison du noyau (on néglige ici l'énergie de liaison de l'électron). C'est l'énergie qu'il faut fournir pour séparer les constituants du noyau. Par convention, l'énergie de liaison est l'opposé de la masse manquante :

$$B({}^2_1\mathrm{H}) = +2.224\,\mathrm{MeV}$$

3.2 — Faites le même calcul pour l'hélium ${}^4_2\mathrm{He}$, le béryllium-8 ${}^8_4\mathrm{Be}$ et l'uranium ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$.

En procédant de même, on trouve un défault de masse de $-28.296\,\mathrm{MeV}/c^2$ pour l'hélium ${}^4_2\mathrm{He}$, de $-56.500\,\mathrm{MeV}/c^2$ pour le béryllium ${}^8_4\mathrm{Be}$, et de $-1801.70\,\mathrm{MeV}/c^2$ pour l'uranium $B({}^{238}_{92}\mathrm{U})$. Les énergies de liaison pour ces atomes sont donc :

$$B({}^4_2\mathrm{He}) = +28.296\,\mathrm{MeV} \qquad B({}^8_4\mathrm{Be}) = +56.500\,\mathrm{MeV} \qquad B({}^{238}_{92}\mathrm{U}) = +1801.70\,\mathrm{MeV}$$

3.3 — Déduisez-en l'énergie de liaison par nucléon de chacun de ces noyaux.

Les énergies de liaison par nucléon (Il y a A nucléons) se déduisent immédiatement :

$$\begin{aligned} B({}^2_1\mathrm{H})/A &= B({}^2_1\mathrm{H})/2 = 1.112\,\mathrm{MeV/nucléon} \\ B({}^4_2\mathrm{He})/A &= B({}^4_2\mathrm{He})/4 = 7.074\,\mathrm{MeV/nucléon} \\ B({}^8_4\mathrm{Be})/A &= B({}^8_4\mathrm{Be})/8 = 7.062\,\mathrm{MeV/nucléon} \\ B({}^{238}_{92}\mathrm{U})/A &= B({}^{238}_{92}\mathrm{U})/238 = 7.570\,\mathrm{MeV/nucléon}. \end{aligned}$$

3.4 — Désintégration du Béryllium-8. Le béryllium-8 est un isotope instable du Béryllium ; sa demi-vie est très brève, $T_{1/2}({}^8_4\mathrm{Be}) \approx 8.2 \times 10^{-17}$ s. Son noyau se désintègre spontanément en 2 noyaux d'hélium-4.

Écrivez le bilan de la réaction. En se plaçant dans le référentiel propre de l'atome de béryllium-8 avant désintégration, écrivez la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total. Déduisez-en l'énergie libérée, et l'énergie cinétique emportée par chacun des deux hélium-4 produits.

L'équation bilan de la réaction de désintégration du béryllium-8 s'écrit :

$${}^8_4\mathrm{Be} \xrightarrow{\text{fission spontanée}} {}^4_2\mathrm{He} + {}^4_2\mathrm{He}$$

Stricto sensu, il faudrait estimer la masse des noyaux à partir de celle des atomes (*masses atomiques*), en retirant la masse des cortèges électroniques et en tenant compte de l'énergie de liaison des électrons. En pratique, comme l'atome de béryllium-8 possède 4 électrons, et ses deux noyaux fils, les noyaux d'hélium-4, possèdent chacun 2 électrons, on ne fait pas une grande erreur en faisant le calcul du bilan de la réaction à partir des masses atomiques.

Si on note $\tilde{\mathbf{p}}_{\mathrm{Be}}$ le quadrivecteur énergie-impulsion du béryllium-8 avant sa désintégration, et $\tilde{\mathbf{p}}_1$, $\tilde{\mathbf{p}}_2$ les quadri-impulsions des deux hélium-4 produits, on a, par conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement totale,

$$\tilde{\mathbf{p}}_{\mathrm{Be}} = \tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2.$$

Si on se place dans le référentiel propre du béryllium-8 avant désintégration, les composantes contravariantes de ces 3 quadrivecteurs s'écrivent :

$$\tilde{\mathbf{p}}_{\mathrm{Be}} : p^\mu_{\mathrm{Be}} = \begin{pmatrix} m_{\mathrm{Be}}c \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad \tilde{\mathbf{p}}_1 : p^\mu_1 = \begin{pmatrix} E_1/c \\ \mathbf{p}_1 \end{pmatrix} \qquad \tilde{\mathbf{p}}_2 : p^\mu_2 = \begin{pmatrix} E_2/c \\ \mathbf{p}_2 \end{pmatrix}$$

La conservation de l'énergie totale et de la quantité de mouvement donnent ainsi :

$$\begin{aligned} m_{\mathrm{Be}}c^2 &= E_1 + E_2 \\ \mathbf{0} &= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que les deux héliums produits ont des quantités de mouvement égales et opposées : $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$; de plus, comme les deux héliums ont la même masse, on a aussi nécessairement

$$E_2 = E_1 = m_{\mathrm{Be}}c^2/2.$$

Si on fait apparaître l'énergie cinétique et l'énergie au repos, on trouve :

$$E_1 = m_{\mathrm{He}}c^2 + T_1 = m_{\mathrm{Be}}c^2/2 \qquad \text{et} \qquad E_2 = m_{\mathrm{He}}c^2 + T_2 = m_{\mathrm{Be}}c^2/2.$$

L'énergie cinétique emportée par chaque hélium vaut ainsi :

$$T_1 = T_2 = \frac{m_{\mathrm{Be}}c^2 - 2m_{\mathrm{He}}c^2}{2}$$

et l'énergie Q libérée (sous forme d'énergie cinétique) par la réaction s'écrit :

$$Q = T_1 + T_2 = m_{\mathrm{Be}}c^2 - 2m_{\mathrm{He}}c^2$$

Ce qui donne, numériquement,

$$Q \approx 91.84\,\mathrm{keV} \qquad T_1 = T_2 = \frac{Q}{2} \approx 45.92\,\mathrm{keV}.$$

Données :

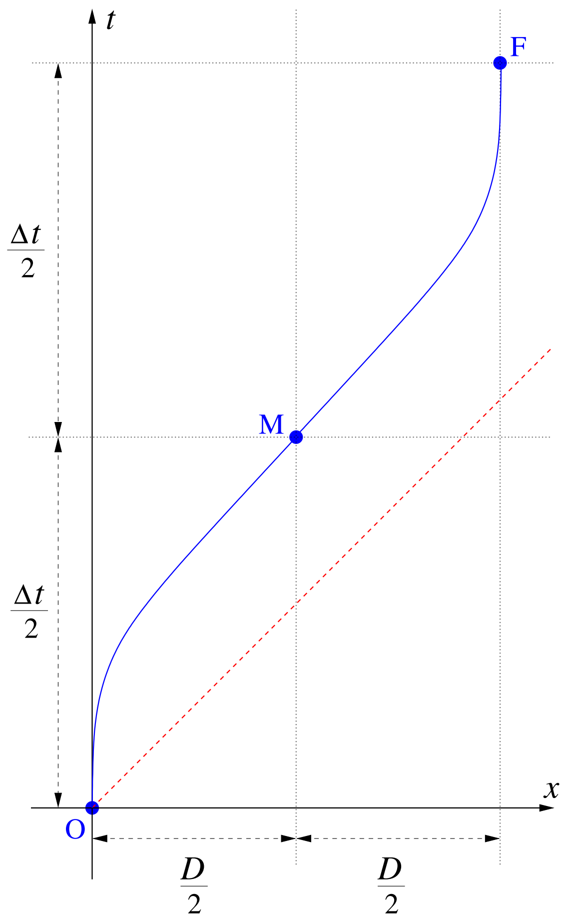
$$\begin{aligned}
m_{\mathrm{n}} &= 1.008665\,\mathrm{u} &&= 939.565\,\mathrm{MeV}/c^2\\
m_{\mathrm{p}} &= 1.007276\,\mathrm{u} &&= 938.272\,\mathrm{MeV}/c^2\\
m_{\mathrm{e}} &= 0.000549\,\mathrm{u} &&= 511\,\mathrm{keV}/c^2\\
m({}^{2}_{1}\mathrm{H}) &= 2.014102\,\mathrm{u} &&\\
m({}^{4}_{2}\mathrm{He}) &= 4.0026033\,\mathrm{u} &&\\
m({}^{8}_{4}\mathrm{Be}) &= 8.0053051\,\mathrm{u} &&\\
m({}^{238}_{92}\mathrm{U}) &= 238.05078\,\mathrm{u} &&\\
1\,\mathrm{u} &= 1.660538\times 10^{-27}\,\mathrm{kg} &&= 931.494\,\mathrm{MeV}/c^2.
\end{aligned}$$

4. Voyage au centre de la galaxie : conditions mécaniques du voyage

Le Faucon Millenium se rend en ligne droite de la Terre jusqu'au centre de la galaxie (distance $D \simeq 30.000$ années-lumière) en accélérant (dans le repère propre) à 9.8 m.s^{-2} pendant la moitié du voyage puis en décélérant, à la même valeur, pendant la seconde moitié. On suppose que l'itinéraire direct passe suffisamment loin de tout corps céleste pour que les effets gravitationnels puissent être négligés.

4.1 — Représenter l'allure de cette histoire sur un diagramme d'espace-temps dans le repère terrestre.

4.2 — Quelle est la durée terrestre Δt nécessaire à ce voyage ? Quelle est la durée $\Delta\tau$ de ce voyage pour Han et ses amis ?



Pour les deux premières questions, le traitement est analogue à celui des exercices concernant le mouvement hyperbolique et le paradoxe des jumeaux en version "réaliste" ; le voyage aller du jumeau correspondrait ici au parcours Système solaire – Centre Galactique.

Le voyage se décompose en deux parties : une phase à accélération propre constante a (mouvement dit *hyperbolique*) pendant la moitié du voyage (trajet OM), jusqu'à atteindre une vitesse maximale $v(M)$, suivie d'une phase décélérée à accélération propre $-a$ de manière à ce que le vaisseau ait une vitesse nulle à destination (point F, à la distance D de l'origine O).

Par symétrie, les deux parties de la trajectoire ont la même durée $\Delta t/2$ dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$, et $\Delta\tau/2$ dans le référentiel propre du vaisseau.

Comme pour les exercices précédents basés sur un mouvement à accélération propre constante (*mouvement "hyperbolique"*), on considère le référentiel inertiel $\mathcal{R}'$ tangent à la trajectoire du vaisseau à l'instant t, et on raisonne dans ce référentiel galiléen qui se confond avec le vaisseau à cet instant t.

Dans le référentiel tangent $\mathcal{R}'$, la vitesse du vaisseau est nulle à l'instant t' et vaut $\mathrm{d}v' = a(\tau)\mathrm{d}\tau$ à l'instant $t' + \mathrm{d}t'$. À l'instant $t' + \mathrm{d}t' = \tau + \mathrm{d}\tau$, la vitesse du vaisseau dans $\mathcal{R}$ vaut $u = v + dv$, et elle vaut $u' = \mathrm{d}v' = a(\tau)\mathrm{d}\tau$ dans $\mathcal{R}'$ (tableau ci-après).

	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}'$
$t' = \tau$	v	0
$t' + \mathrm{d}t' = \tau + \mathrm{d}\tau$	$v + \mathrm{d}v$	$\mathrm{d}v' = a(\tau)\mathrm{d}\tau$

Pour déterminer $\mathrm{d}v'$, on applique la loi de composition des vitesses

$$u' = \frac{u - v}{1 - \dfrac{vu}{c^2}}$$

On en déduit :

$$\mathrm{d}v' = a\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}v}{1 - \dfrac{v^2}{c^2} - \dfrac{v\mathrm{d}v}{c^2}} \quad \text{d'où} \quad \mathrm{d}v'\left[1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{v\mathrm{d}v}{c^2}\right] = \mathrm{d}v$$

On peut ici négliger le terme de second ordre $v\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v'/c^2$, ce qui donne

$$\mathrm{d}v'\left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right] = \mathrm{d}v \quad \text{soit} \quad \mathrm{d}v' = \gamma^2(v)\,\mathrm{d}v$$

D'autre part, on peut exprimer l'intervalle de temps propre $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t'$ en fonction de $\mathrm{d}t$ et $\gamma(v)$: de manière immédiate, $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t' = \mathrm{d}t/\gamma(v)$. En substituant $\mathrm{d}t'$, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}t'} = \gamma^3(v)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \text{soit} \quad a = \gamma^3(v)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

Pour ce voyage, on fixe l'accélération propre (a pendant la première phase, $-a$ pendant la seconde), et on cherche à connaître la durée du voyage pour l'observateur resté sur Terre (Δt) et pour les passagers du vaisseau ($\Delta\tau$). On raisonnera sur la première partie du voyage, la seconde partie étant symétrique (a devient $-a$). Le calcul est simplifié par l'introduction de la rapidité $\varphi(\tau)$ du vaisseau.

Établissons tout d'abord que $\mathrm{d}\tau$ est proportionnel à $\mathrm{d}\varphi$:

$$\tanh\varphi = \beta = \frac{v}{c} \qquad \text{et par conséquent} \quad \frac{\mathrm{d}(\tanh\varphi)}{\mathrm{d}v} = \frac{1}{c}.$$

Or

$$d(\tanh\varphi) = \frac{1}{\cosh^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{\gamma^2(v)}\,\mathrm{d}\varphi.$$

D'où

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{c}{\gamma^2(v)}.$$

On reprend maintenant l'expression de $\mathrm{d}\tau$:

$$\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}t}{\gamma(v)} = \frac{\gamma^2(v)}{a}\,\mathrm{d}v$$

Ce qui donne

$$\mathrm{d}\tau = \frac{c}{a}\,\mathrm{d}\varphi.$$

En intégrant sur la première moitié du parcours, et en se servant du fait que l'accélération propre est constante,

$$\frac{\Delta\tau}{2} = \int_O^M \mathrm{d}\tau = \int_0^{\Delta\tau/2} \mathrm{d}\tau = \frac{c}{a}\int_0^{\varphi(M)} \mathrm{d}\varphi = \frac{c}{a}\,\varphi(M).$$

Et, par symétrie, la durée totale du voyage (pour l'équipage du vaisseau) est :

$$\Delta\tau = \frac{2c}{a}\,\varphi(M)$$

Afin d'obtenir la rapidité à mi-parcours $\varphi(M)$ (qui est la rapidité maximale au cours de cette trajectoire), on peut calculer la distance parcourue par le vaisseau dans le référentiel $\mathcal{R}$ pendant la première moitié de cette trajectoire. En se souvenant que $\mathrm{d}x = v\mathrm{d}t$, on peut exprimer $\mathrm{d}x$ en fonction de $\mathrm{d}\varphi$ et intégrer sur le parcours :

$$a\,\mathrm{d}t = \gamma^3(v)\mathrm{d}v \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{c}{\gamma^2(v)} = \frac{c}{\cosh^2\varphi}.$$

Par conséquent, en utilisant de nouveau le fait que l'accélération propre est constante,

$$\gamma^3(v)\mathrm{d}v = \gamma(v)c\mathrm{d}\varphi = a\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{d}t = \frac{c}{a}\cosh\varphi\,\mathrm{d}\varphi.$$

Ainsi,

$$dx = v\,\mathrm{d}t = c\tanh\varphi\,\mathrm{d}t = \frac{c^2}{a}\sinh\varphi\,\mathrm{d}\varphi,$$

d'où,

$$\frac{D}{2} = \int_O^M dx = \int_0^{D/2} dx = \frac{c^2}{a}\int_0^{\varphi(M)} \sinh\varphi\,\mathrm{d}\varphi \quad \text{et} \quad D = \frac{2c^2}{a}\left[\cosh\varphi(M) - 1\right].$$

Ainsi,

$$\varphi(M) = \mathrm{argcosh}\left[\frac{Da}{2c^2} + 1\right].$$

On en déduit la durée du voyage pour les passagers du vaisseau :

$$\Delta\tau = \frac{2c}{a}\,\varphi(M) = \frac{2c}{a}\,\mathrm{argcosh}\left[\frac{Da}{2c^2} + 1\right].$$

Enfin, on souhaite aussi connaître la durée Δt du voyage pour l'observateur resté sur Terre (référentiel $\mathcal{R}$). On repart de l'expression trouvée pour $\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}t = \frac{c}{a}\cosh\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

On intègre sur la moitié du parcours :

$$\frac{\Delta t}{2} = \int_O^M \mathrm{d}t = \frac{c}{a}\int_0^{\varphi(M)} \cosh\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{c}{a}\sinh\varphi(M) \qquad \Delta t = \frac{2c}{a}\sinh\varphi(M).$$

Numériquement, on trouve $\varphi(M) = 10.34$; on en déduit $\Delta\tau = 20.02$ années et $\Delta t = 30000$ ans.

4.3 — On étudie maintenant les conditions mécaniques de réalisation de ce voyage.

(i) Pour cela on se place dans un repère inertiel où, en un événement donné quelconque de la trajectoire du Faucon, celui-ci a une masse m et une vitesse nulle. Après avoir éjecté une quantité de matière $\mathrm{d}M$ sous une vitesse de module w, le Faucon a une masse $m + dm$ et une vitesse dv'. Quelle relation le principe de conservation de la quadri-impulsion totale permet-il de trouver entre dv', dm, w et m ?

À un instant donné t, en un événement donné du voyage du Faucon Millenium, on construit comme précédemment le référentiel tangent $\mathcal{R}'$: dans ce référentiel, à cet instant, la masse du vaisseau est m et sa vitesse est nulle.

À l'instant suivant $t + \mathrm{d}t$, le vaisseau a éjecté une certaine quantité de matière $\mathrm{d}M$ sous forme de matière expulsée à la vitesse $\mathbf{w}$ (dans $\mathcal{R}'$) par son système de propulsion. Dans $\mathcal{R}'$ le vaisseau possède désormais une vitesse $\mathrm{d}v'$ et une masse $m + \mathrm{d}m$ ($\mathrm{d}m < 0$).

La conservation du quadrivecteur énergie-impulsion de l'ensemble du système (vaisseau à l'instant t, vaisseau plus éjectas à l'instant $t + \mathrm{d}t$) s'écrit :

$$\begin{aligned} E' = mc^2 &= \gamma(w)\mathrm{d}Mc^2 + \gamma(\mathrm{d}v')(m + \mathrm{d}m)c^2 \\ \mathbf{p'} = \mathbf{0} &= \gamma(w)\mathrm{d}M\mathbf{w} + \gamma(\mathrm{d}v')(m + \mathrm{d}m)\mathbf{dv'} \end{aligned}$$

En développant $\gamma(\mathrm{d}v')$ et en négligeant les termes de second ordre, on obtient :

$$\begin{aligned} mc^2 &= mc^2 + \mathrm{d}mc^2 + \mathrm{d}M\gamma(w)c^2 \\ 0 &= -\gamma(w)\mathrm{d}M\,w + m\mathrm{d}v' \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\mathrm{d}m = -\gamma(w)\mathrm{d}M \qquad \text{et} \qquad m\mathrm{d}v' = \gamma(w)\mathrm{d}M\,u \qquad \text{soit} \qquad m\mathrm{d}v' + \mathrm{d}m\,w = 0$$

(ii) Quelle valeur de l'accroissement dv en déduit-on pour la vitesse v du Faucon, dans le repère inertiel terrestre, en fonction de w, m, dm et c ?

(iii) En déduire l'expression du rapport des masses finales et initiales m_F/m_O en fonction des vitesses v_O et v_F du Faucon qui fonctionne à vitesse d'éjection w constante.

Le résultat précédent peut s'écrire sous la forme :

$$\mathrm{d}v' = -w\,\frac{\mathrm{d}m}{m}$$

Par ailleurs, on a établi précédemment la relation entre $\mathrm{d}v'$ et $\mathrm{d}v$:

$$\mathrm{d}v' = \gamma^2(v)\,\mathrm{d}v.$$

on en déduit :

$$\gamma^2(v)\,\mathrm{d}v = -w\,\frac{\mathrm{d}m}{m} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}m}{m} = -\frac{1}{w}\,\gamma^2(v)\,\mathrm{d}v = -\frac{1}{w}\times\cosh^2\varphi\times\frac{c}{\cosh^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = -\frac{c}{w}\,\mathrm{d}\varphi$$

en faisant apparaître la rapidité φ et en utilisant $\mathrm{d}v = c\,\mathrm{d}\varphi/\cosh^2\varphi$.

En intégrant cette dernière équation sur la première moitié du parcours, on trouve :

$$\int_O^M \frac{\mathrm{d}m}{m} = -\frac{c}{w}\int_O^M \mathrm{d}\varphi \qquad \text{soit} \qquad \ln\frac{m_M}{m_O} = -\frac{c}{w}\,(\varphi(O)-\varphi(M)) \qquad \frac{m_M}{m_O} = e^{-\frac{c}{w}(\varphi(O)-\varphi(M))}$$

On peut faire le même raisonnement sur la seconde partie de la trajectoire, et on obtient de même (en changeant w en $-w$),

$$\frac{m_M}{m_F} = e^{+\frac{c}{w}(\varphi(M)-\varphi(F))} \qquad \frac{m_F}{m_M} = e^{-\frac{c}{w}(\varphi(M)-\varphi(F))}$$

D'où on déduit (sachant que $\varphi(O) = \varphi(F) = 0$) :

$$\frac{m_F}{m_O} = \frac{m_F}{m_M}\,\frac{m_M}{m_O} = e^{-\frac{2c}{w}\varphi(M)}.$$

4.4 — Pour le voyage prévu :

(i) En déduire la masse finale $m(\Delta\tau)$ au terme du voyage, en fonction de la masse $m(0)$ au départ, de la vitesse à mi-chemin $v_M = v(\Delta\tau/2)$ et de la vitesse d'éjection w.

(ii) Estimer numériquement la vitesse à mi-chemin $v_M = v(\Delta\tau/2)$ en fonction de g, D et c.

(iii) En déduire l'expression de $m(\Delta\tau)$.

(iv) Quelle est la vitesse d'éjection w optimale ?

(v) En supposant cette vitesse techniquement réalisable, quelle masse $m(0)$ le Faucon doit-il avoir au départ pour acheminer $m(\Delta\tau) = 1$ tonne au centre de la galaxie ?

D'après ce qui précède, la masse finale du vaisseau s'écrit :

$$m(\Delta\tau) = m_F = m_O\times e^{-\frac{2c}{w}\varphi(M)} \qquad \text{où} \qquad \varphi(M) = \operatorname{argtanh}\frac{v_M}{c} = \operatorname{argcosh}\left[\frac{Da}{2c^2}+1\right].$$

Numériquement, on trouve : $\varphi(M) = 10.34$ et $v_M = 299792457.38\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \simeq c - 0.62\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

On minimise le ratio m_F/m_O en augmentant la vitesse d'éjection w ; l'optimum est atteint pour $w = c$, c'est à dire en imaginant un système de propulsion photonique, où le vaisseau accélère en émettant de la lumière vers l'arrière. À strictement parler, notre raisonnement n'est pas valide si les éjectas sont constitués de lumière, c'est à dire d'énergie pure car on aurait $\mathrm{d}M = 0$ et $\gamma(w) = +\infty$. On aboutit cependant au même résultat, en raisonnant cette fois avec l'énergie $\mathrm{d}\varepsilon = \gamma(w)\mathrm{d}Mc^2$ éjectée sous forme de lumière :

$$\frac{m_F}{m_O} = e^{-2\varphi(M)}.$$

Dans le cas d'une hypothétique propulsion photonique, l'application numérique donne :

$$\frac{m_F}{m_O} = e^{-2\varphi(M)} \simeq e^{-20.68} \simeq 10^{-9}.$$

Pour emporter une tonne de charge utile au centre de la galaxie, le vaisseau doit peser 10^9 tonnes au départ de la Terre : la quasi-totalité de la charge du vaisseau étant constitué du “carburant”...