Licence de Physique

Relativité Restreinte : Résumé de Cours (8 & 9)

Parcours SPRINT & Double Majeure – Année Universitaire 2024–2025

Intervenants : L. Le Guillou & J. Bolmont (Sorbonne Université / LPNHE)

Rappels : lois de conservation en mécanique classique — Quadrivecteur énergie-impulsion — Lois de conservation en relativité — Référentiel du centre de masse — Masse invariante — Traitement d'une collision ou d'une réaction en physique subatomique — Cas du photon : énergie, quantité de mouvement, quadrivecteur énergie-impulsion.

1. Rappels : lois de conservation en mécanique classique

En mécanique classique, on postule que l'énergie mécanique totale et la quantité de mouvement d'un système sont conservées, en l'absence de forces extérieures. Lors du traitement de collisions, on distingue deux situations :

— Les collisions dites *élastiques*, pour lesquelles on aura à la fois conservation de l'énergie cinétique totale et de la quantité de mouvement totale :

$$\left[\sum_i T_i\right]_{\text{avant}} = \left[\sum_i T_i\right]_{\text{après}}$$

$$\left[\sum_i \mathbf{p}_i\right]_{\text{avant}} = \left[\sum_i \mathbf{p}_i\right]_{\text{après}}$$

où T_i et $\mathbf{p}_i$ sont respectivement l'énergie cinétique et la quantité de mouvement de l'élément i, et où la sommation porte sur tous les éléments du système considéré.

— Les collisions dites *inélastiques*, pour lesquelles la quantité de mouvement totale est bien conservée, mais pas l'énergie cinétique totale : une partie de l'énergie cinétique est convertie en d'autres formes d'énergie : chaleur, vibration, énergie de déformation, *etc.*

La masse totale du système est conservée dans tous les cas.

2. Lois de conservation en relativité restreinte

2.1. Conservation de l'énergie totale et de la quantité de mouvement relativiste

En dynamique relativiste, pour un système de particules ne subissant aucune force extérieure, on aura à la fois :

— Conservation de l'énergie totale du système, c'est à dire la somme des énergies totale de chacune des particules du système étudié, quoi qu'il puisse advenir (collision entre les éléments, réaction avec changement de la nature même des particules en jeu) :

$$\Big[\sum_i E_i\Big]_{\text{avant}} = \Big[\sum_j E_j\Big]_{\text{après}}$$

où E_i est l'énergie totale (ce qui inclut l'énergie de masse mc^2) de la particule i ;

— Conservation de la quantité de mouvement totale, c'est à dire de la somme des quantités de mouvement relativiste des particules constitutives du système étudié :

$$\Big[\sum_i \mathbf{p}_i\Big]_{\text{avant}} = \Big[\sum_j \mathbf{p}_j\Big]_{\text{après}}$$

Ces lois sont valables à la fois pour des collisions élastiques comme pour des collisions dites "inélastiques", c'est à dire, dans le contexte de la dynamique relativiste, pour des collisions où le nombre et la nature même des particules peuvent changer.

Par contre, contrairement à la mécanique classique, il n'y a plus conservation de l'énergie cinétique totale, pas plus qu'il n'y a conservation de la masse totale des objets du système. En physique des particules, on cherche justement à provoquer des collisions fortement inélastiques, afin de convertir une partie de l'énergie cinétique des particules incidentes en masse, et ainsi de créer de nouvelles particules, éventuellement encore inconnues. On rencontre aussi la situation inverse, par exemple dans le cas de l'annihilation matière anti-matière, où la masse des particules et des anti-particules est transformée en énergie pure, sous forme de photons.

2. 2. Conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total

Les lois de conservation relativistes peuvent s'exprimer sous une forme plus compacte et très pratique, en utilisant les quadrivecteurs énergie-impulsion : en effet, leur composante temporelle correspond à l'énergie totale (à un facteur constant c près), tandis que leur composante spatiale correspond à la quantité de mouvement relativiste.

Pour un système de particules qui ne subissent aucune force extérieure, on aura ainsi conservation du quadrivecteur énergie impulsion total, quoi qu'il se produise : ainsi, dans une réaction nucléaire ou un processus de physique des particules (désintégration, collision, *etc.*), le quadrivecteur énergie-impulsion total du système sera conservé :

$$\Big[\sum_i \widetilde{\mathbf{p}}_i\Big]_{\text{avant}} = \Big[\sum_j \widetilde{\mathbf{p}}_j\Big]_{\text{après}}$$

ce qui correspond à la conservation de l'énergie totale d'une part, et de la quantité de mouvement totale d'autre part. Le nombre et la nature des particules peuvent changer, mais cette loi restera valable.

En pratique, pour analyser une réaction, on fera un usage intense du fait que, d'une part, le quadrivecteur énergie-impulsion total est conservé, et que, d'autre part, les pseudo-produits scalaires de quadrivecteurs sont invariants par changement de référentiels : par exemple, $\widetilde{\mathbf{p}}^2$, $(\widetilde{\mathbf{p}}_1 + \widetilde{\mathbf{p}}_2)^2$, $\widetilde{\mathbf{p}}_1 \cdot \widetilde{\mathbf{p}}_2$, *etc.*

2. 3. Référentiel du centre de masse, masse invariante

Pour tout objet ou système, il existe un référentiel particulier $\mathcal{R}^*$ où la quantité de mouvement totale (c'est à dire la composante vectorielle $\mathbf{p}$ de $\widetilde{\mathbf{p}}_{\text{total}}$, la quantité de mouvement relativiste) du système s'annule : c'est le référentiel du "*centre de masse*" du système étudié (souvent noté avec une étoile, $\mathcal{R}^*$), et dans ce référentiel,

$$\mathbf{p}_{\text{total}} = \sum_i \mathbf{p}_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\mathbf{p}}^2_{\text{total}} = \left[\sum_i \widetilde{\mathbf{p}}_i\right]^2 = (E^*/c)^2 = M^2c^2$$

où E^* est l'énergie totale du système dans le référentiel $\mathcal{R}^*$, et M la ***masse invariante*** (*invariant mass*) du système considéré. La masse invariante M est un invariant de Lorentz : pour un système donné, sa valeur est indépendante du référentiel.

D'un point de vue pratique, se placer dans le référentiel du centre de masse pour analyser une réaction est souvent très efficace en terme de calculs : l'énergie totale calculée dans le centre de masse correspond à l'énergie totale disponible, par exemple pour produire de nouvelles particules ; on peut ainsi estimer si la création de certaines particules sera énergétiquement possible ou non.

3. Le cas du photon

3.1. Nature ondulatoire ou corpusculaire de la lumière

Au fil des siècles, la nature exacte de la lumière a été longuement débattue. Isaac Newton (1642–1727) pense que les rayons lumineux se comportent comme des corpuscules, au contraire de Christiaan Huygens (1629–1695) qui, l'un des premiers, propose une théorie ondulatoire de la lumière, comprise comme la vibration d'un milieu omniprésent qu'il baptise "éther". La mise en évidence des phénomènes d'interférences notamment par Thomas Young (1773–1829) et Augustin Fresnel (1788–1827), et leur interprétation en terme d'ondes transverses par Fresnel vont conforter l'interprétation de la lumière comme un phénomène ondulatoire. La synthèse théorique de l'électromagnétisme par James Clerk Maxwell (1831–1879), qui prédit l'existence et la propagation d'ondes électromagnétiques, et leur mise en évidence par Heinrich Hertz (1857–1894) marquent le triomphe de l'interprétation ondulatoire des phénomènes lumineux.

Cependant, au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle, la difficulté à comprendre le spectre du corps noir amène Max Planck (1858–1947) à réintroduire l'idée que la lumière est constituée de "*quanta*" finis d'énergie ; Albert Einstein (1879–1955) interprète avec succès l'effet photo-électrique en développant cette idée, et Arthur H. Compton (1892–1962) démontre expérimentalement que la lumière se comporte aussi comme des corpuscules, les photons, qui transportent chacun une énergie $h\nu = \hbar\omega$ et une quantité de mouvement $\hbar\,\mathbf{k}$, où $h = 6.626070 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s} = 4.13567 \times 10^{-15}\,\mathrm{eV\cdot s}$ est la constante de Planck, $\hbar = h/2\pi$ la constante de Planck "réduite" ; ν est la fréquence du photon, $\omega = 2\pi\nu$ sa pulsation, $\mathbf{k}$ son vecteur d'onde avec $k = 2\pi/\lambda = 2\pi\nu/c$, et $\lambda = c/\nu$ sa longueur d'onde dans le vide.

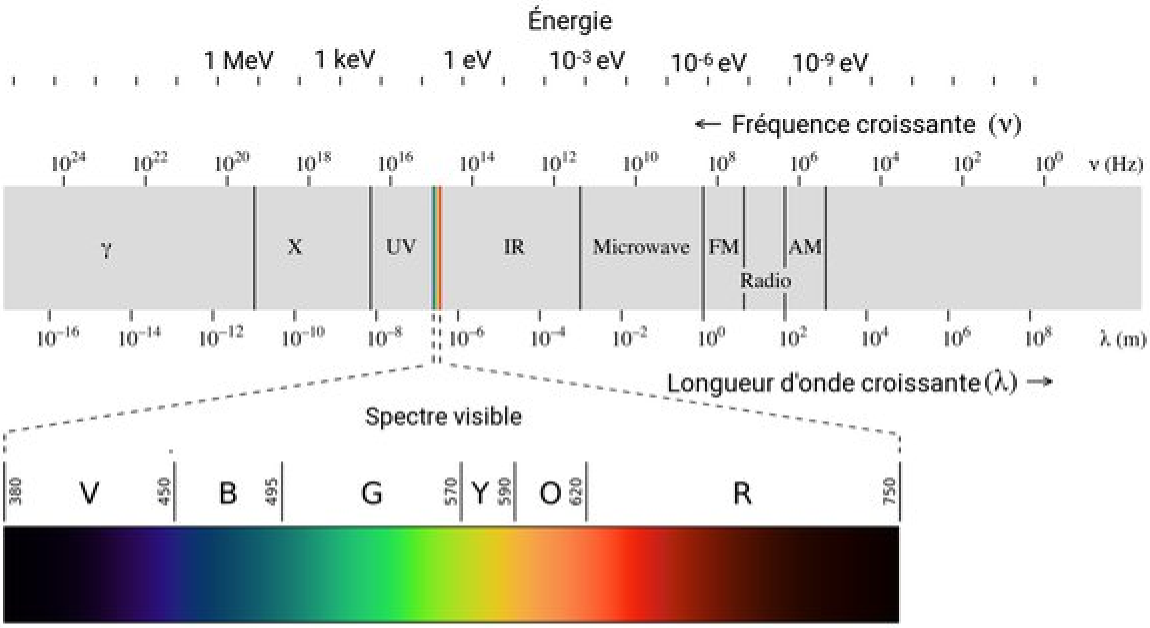

FIGURE 1 – *Domaines du spectre des ondes électromagnétiques.*

3.2. Quadrivecteur énergie-impulsion d'un photon

Dans le cadre de la dynamique relativiste, on ne peut directement appliquer les expressions obtenues pour les particules massives, car, l'énergie de masse d'un photon est nulle[1], tandis que sa vitesse dans le vide est c dans tous les référentiels inertiels, et par conséquent son facteur $\gamma(c)$ est infini.

Pour un photon de fréquence ν et de longueur d'onde $\lambda = c/\nu$ (dans le vide), son énergie s'écrit :

$$E = h\nu = \hbar\omega$$

où $\omega = 2\pi\nu$ est la pulsation du photon.

D'autre part, le photon transporte une quantité de mouvement relativiste qui vaut :

$$\mathbf{p} = \hbar\,\mathbf{k}$$

où $\mathbf{k}$ est le *vecteur d'onde* du photon : c'est un vecteur dont la direction et le sens correspondent à la direction de propagation du photon, et dont la norme $k = |\mathbf{k}|$ vaut :

$$k = |\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c}$$

et par conséquent, la quantité de mouvement relativiste du photon peut encore s'écrire :

$$\mathbf{p} = \hbar\,\mathbf{k} \qquad \text{avec} \qquad p = |\mathbf{p}| = \hbar \times \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c}$$

On peut ainsi construire pour un photon son quadrivecteur d'onde $\widetilde{\mathbf{k}}$ selon :

$$\widetilde{\mathbf{k}} : k^{\mu} = \begin{pmatrix} \dfrac{\omega}{c} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2\pi\nu}{c} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}.$$

1. Stricto sensu, le concept de *masse au repos* n'a pas de sens pour un photon : le photon se propageant à la vitesse c dans tous les référentiels inertiels, il n'existe pas de référentiel inertiel où on peut le considérer comme "au repos". En particulier, on ne peut pas définir le référentiel propre d'un photon.

Et, de la même manière, son quadrivecteur énergie-impulsion,

$$\widetilde{\mathbf{p}} = \hbar\,\widetilde{\mathbf{k}} : p^\mu = \begin{pmatrix} \dfrac{h\nu}{c} \\ \hbar\,\mathbf{k} \end{pmatrix}.$$

Pour un photon, la pseudo-norme carrée de son quadrivecteur énergie-impulsion est toujours nulle :

$$\widetilde{\mathbf{p}}^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 - \hbar^2\,\mathbf{k}^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 - \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 = 0$$

Ce qui est logique : pour une particule massive de masse m, la pseudo-norme carrée de son quadrivecteur énergie-impulsion vaut $\widetilde{\mathbf{p}}^2 = m^2c^2$; comme la masse au repos du photon est nulle, on trouve naturellement ici que $\widetilde{\mathbf{p}}^2 = 0$.

Pour distinguer le quadrivecteur énergie-impulsion du photon de celui des particules massives, on le note parfois $\widetilde{\mathbf{q}} : q^\mu$ plutôt que $\widetilde{\mathbf{p}} : p^\mu$,

$$\widetilde{\mathbf{q}} = \hbar\,\widetilde{\mathbf{k}} : q^\mu = \begin{pmatrix} \dfrac{E}{c} = \dfrac{h\nu}{c} \\ \mathbf{q} = \hbar\,\mathbf{k} \end{pmatrix}.$$

avec $\widetilde{\mathbf{q}}^2 = 0$.

Le fait que le photon transporte à la fois un quantum d'énergie $h\nu$ et une quantité de mouvement $\hbar\,\mathbf{k}$ permet d'interpréter certaines phénomènes incompréhensibles dans le strict cadre de l'électromagnétisme de Maxwell : l'effet Compton (diffusion d'un photon sur un électron), l'effet photo-électrique, la pression de radiation, *etc.*

Bibliographie

Les conventions concernant les quadrivecteurs varient légèrement d'un ouvrage à l'autre : la notation des quadrivecteurs change aussi d'un auteur à l'autre ; la composante temporelle est parfois numérotée 4 au lieu de 0 ; la signature de la métrique peut être $(+,-,-,-)$ ou $(-,+,+,+)$, etc. Cela ne change rien aux résultats essentiels de la théorie de la relativité, mais peut paraître déstabilisant à la première lecture d'un ouvrage de relativité.

D. Langlois, *Introduction à la relativité*, Vuibert (2011) : chapitres 4 et 5.

M. Boratav & R. Kerner, *Relativité*, Ellipses (1991) : chapitres 5 et 6.