SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

LICENCE DE PHYSIQUE — RELATIVITÉ RESTREINTE

EXERCICES

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2024–2025

Intervenants : L. Le Guillou & J. Bolmont (Sorbonne Université / LPNHE)

TD 8

Quadrivecteur énergie-impulsion – Lois de conservation – Collisions : traitement relativiste – Masse invariante, énergie dans le référentiel du centre de masse – Défaut de masse, énergie de liaison – Bilan de réaction – Propulsion.

1. Désintégration du pion

On considère le processus de désintégration d'un pion *au repos* :

$$\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

1.1 — La masse du neutrino (ici muonique) n'étant toujours pas connue, on attribue à celui-ci une masse m_ν, et l'on souhaite calculer l'énergie E_μ du muon émis. La procédure standard consiste, sur la base du principe de conservation de la quadri-impulsion totale, à exprimer la quadri-impulsion de la particule non-observée, le neutrino ici, en termes des quadri-impulsions des autres particules, et à élever au carré les deux membres de cette expression, éliminant ainsi l'énergie et l'impulsion du neutrino trop difficiles à mesurer.

Établissez ainsi l'expression de l'énergie du muon émis en fonction des masses des trois particules en jeu.

1.2 — La masse du pion est $m_\pi = 139.57\,\mathrm{MeV}/c^2$; celle du muon $m_\mu = 105.66\,\mathrm{MeV}/c^2$. La masse du neutrino mu est inconnue ; les expériences de mesure des oscillations de neutrinos ont montré que leur masse est non nulle ; elle est cependant très faible (inférieure à l'électron-volt). On pourra donc ici négliger le terme en m_ν. Donnez la valeur numérique de l'énergie totale et de l'énergie cinétique du muon produit, dans le référentiel du pion au repos avant désintégration.

1.3 — Que vaut la quantité de mouvement relativiste $\mathbf{p}_\mu$ du muon ? Déduisez-en la quantité de mouvement emportée par le neutrino.

1.4 — En négligeant la masse du neutrino (qui est très petite, et mal connue), estimez l'énergie emportée par le neutrino. Vérifiez que l'énergie totale est bien conservée.

2. Expériences sur cible fixe et sur collisionneurs

On s'intéresse à la collision de deux particules identiques de masse m, dans deux configurations : collision d'une particule en mouvement sur une particule identique, immobile ("cible fixe"), et collision de deux particules identiques animées de vitesses égales en norme et opposées ("collisionneur symétrique").

Collision élastique sur cible fixe : traitement classique

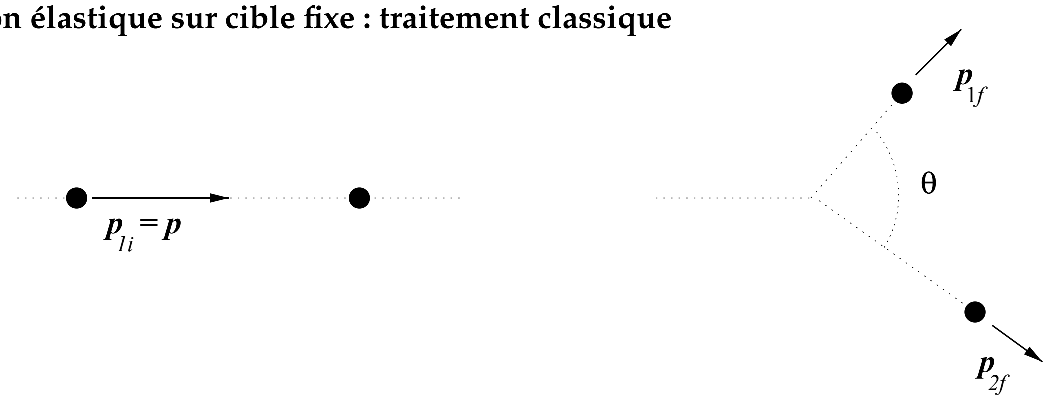

Fig. 1 – Collision élastique sur cible fixe.

On s'intéresse à la collision élastique d'une particule de masse m, d'impulsion $\mathbf{p}$ et d'énergie cinétique T sur une particule identique, immobile (la "cible", fig. 1).

2.1 — Dans le cadre de la mécanique classique, écrivez la conservation de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement (impulsion).

2.2 — Montrez que l'angle θ entre les impulsions $\mathbf{p}_{1f}$ et $\mathbf{p}_{2f}$ des particules après la collision est nécessairement égal à $\pi/2$ dans le cadre classique.

Collision élastique sur cible fixe : traitement relativiste

Dans le référentiel $\mathcal{R}$, on considère un dispositif expérimental où une particule de masse m de vitesse $\mathbf{u}$, de quantité de mouvement $\mathbf{p}$ d'énergie E entre en collision avec une particule identique, mais immobile ("collision sur cible fixe").

2.3 — Écrivez la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total lors de la collision.

2.4 — Exprimez l'angle θ entre $\mathbf{p}_{1f}$ et $\mathbf{p}_{2f}$ en fonction de E, m, E_{1f} et E_{2f}, où E_{1f} et E_{2f} sont les énergies des deux particules après la collision.

2.5 — Dans le cas particulier où $E_{1f} = E_{2f}$, exprimez $\cos\theta$ en fonction de E et m. En exprimant $\cos\theta$ plutôt en fonction de l'énergie cinétique $T = E - mc^2$, on obtient une expression très simple ; à partir de cette dernière expression, montrez que θ est nécessairement inférieur à $\pi/2$. Comparez avec le résultat en mécanique classique.

2.6 — Écrivez la masse invariante M^* du système constitué par les deux particules. Quelle est l'énergie totale E^* disponible dans le référentiel du centre de masse $\mathcal{R}^*$, en fonction de E et m ?

Collisionneur symétrique

On considère maintenant le cas d'un collisionneur symétrique : dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire, les deux particules possèdent la même énergie E et des impulsions (quantités de mouvement) opposées mais de même norme p (fig. 2).

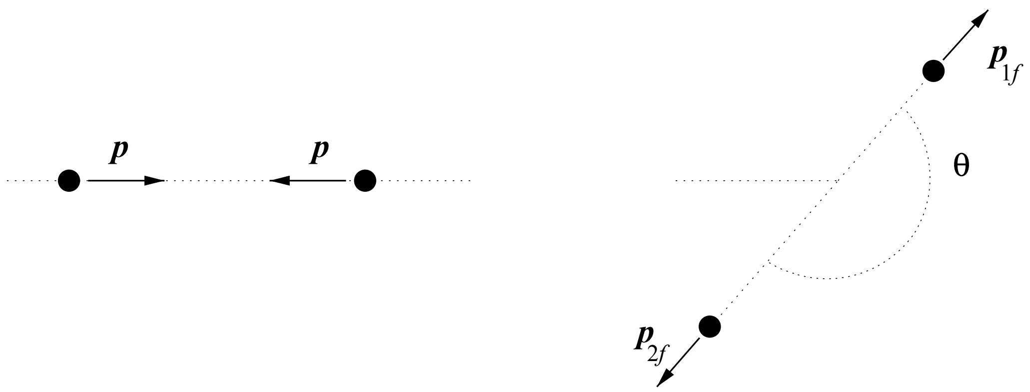

Fig. 2 – Collision symétrique (collisionneur).

2.7 — Écrivez la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion avant et après la collision, dans le référentiel du laboratoire.

2.8 — Que pensez-vous du référentiel du centre de masse du système $\mathcal{R}^*$?

2.9 — Écrivez la masse invariante du système constitué par les deux particules. Quelle est l'énergie totale E^* disponible dans le référentiel du centre de masse $\mathcal{R}^*$, en fonction de E et m ?

Collision inélastique : production des anti-protons

En physique des particules on cherche à produire des collisions inélastiques : l'objectif est de concentrer pendant un bref instant une énergie considérable dans un petit volume afin de produire des particules inexistantes dans la matière ordinaire et pouvoir ainsi étudier leurs propriétés.

Considérons la réaction suivante, qui vise à produire des anti-protons $\bar{p}$ en faisant collisionner des protons p :

$$p + p \longrightarrow p + p + p + \bar{p}$$

2.10 — En utilisant la notion de masse invariante, déterminez l'énergie cinétique minimale T qu'il faut donner aux protons d'un faisceau qui frappe une cible d'hydrogène, pour produire effectivement des antiprotons (scénario "cible fixe"). Application numérique.

2.11 — En procédant de même, déterminez l'énergie cinétique minimale T qu'il faut fournir aux protons de deux faisceaux opposés pour produire des antiprotons (scénario "collisionneur symétrique"). Application numérique.

2.12 — Entre ces deux types d'expériences, quelle est la méthode qui semble la plus avantageuse ? Commentez. Données : masse du proton et de l'anti-proton : $m_p = m_{\bar{p}} = 938\,\mathrm{MeV}/c^2$.

Fig. 3 – Edward McMillan et Edward Lofgren, responsables du projet, photographiés sur le blindage de l'accélérateur dit "Bevatron" (Lawrence Berkeley National Laboratory, USA). Exploité à partir de 1954, le Bevatron permit en 1955 la découverte de l'anti-proton en bombardant une cible fixe avec des protons d'énergie cinétique suffisante. Pour cette découverte, Emilio Gino Segrè et Owen Chamberlain se virent attribuer le prix Nobel de Physique en 1959.

3. Défaut de masse, énergie de liaison, bilan d'une réaction nucléaire

3.1 — Défaut de masse du deutérium. L'hydrogène possède un isotope dont le noyau comporte un proton et un neutron : le deutérium ${}^2_1$H aussi noté ${}^2_1$D. Estimez précisément sa masse à partir de ses constituants ($m_\mathrm{p} = 1.007276\,\mathrm{u}$, $m_\mathrm{n} = 1.008665\,\mathrm{u}$, $m_\mathrm{e} = 511\,\mathrm{keV}/c^2$). La masse atomique du deutérium est en fait $2.014102\,\mathrm{u}$. Où est passée la différence ? Faites le calcul en unités atomiques et en MeV. Que représente cette différence d'énergie ?

3.2 — Faites le même calcul pour l'hélium ${}^4_2$He, le béryllium-8 ${}^8_4$Be et l'uranium ${}^{238}_{92}$U.

3.3 — Déduisez-en l'énergie de liaison par nucléon de chacun de ces noyaux.

3.4 — Désintégration du Béryllium-8. Le béryllium-8 est un isotope instable du Béryllium ; sa demi-vie est très brève, $T_{1/2}({}^8_4\mathrm{Be}) \approx 8.2 \times 10^{-17}$ s. Son noyau se désintègre spontanément en 2 noyaux d'hélium-4.

Écrivez le bilan de la réaction. En se plaçant dans le référentiel propre de l'atome de béryllium-8 avant désintégration, écrivez la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total. Déduisez-en l'énergie libérée, et l'énergie cinétique emportée par chacun des deux hélium-4 produits.

Données :

$$
\begin{aligned}
m_\mathrm{n} &= 1.008665\,\mathrm{u} &&= 939.565\,\mathrm{MeV}/c^2\\
m_\mathrm{p} &= 1.007276\,\mathrm{u} &&= 938.272\,\mathrm{MeV}/c^2\\
m_\mathrm{e} &= 0.000549\,\mathrm{u} &&= 511\,\mathrm{keV}/c^2\\
m({}^2_1\mathrm{H}) &= 2.014102\,\mathrm{u}\\
m({}^4_2\mathrm{He}) &= 4.0026033\,\mathrm{u}\\
m({}^8_4\mathrm{Be}) &= 8.0053051\,\mathrm{u}\\
m({}^{238}_{92}\mathrm{U}) &= 238.05078\,\mathrm{u}\\
1\,\mathrm{u} &= 1.660538 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} &&= 931.494\,\mathrm{MeV}/c^2.
\end{aligned}
$$

4. Voyage au centre de la galaxie : conditions mécaniques du voyage

Le Faucon Millenium se rend en ligne droite de la Terre jusqu'au centre de la galaxie (distance $D \simeq 30.000$ années-lumière) en accélérant (dans le repère propre) à 9.8 m.s^{-2} pendant la moitié du voyage puis en décélérant, à la même valeur, pendant la seconde moitié. On suppose que l'itinéraire direct passe suffisamment loin de tout corps céleste pour que les effets gravitationnels puissent être négligés.

4.1 — Représenter l'allure de cette histoire sur un diagramme d'espace-temps dans le repère terrestre.

4.2 — Quelle est la durée terrestre Δt nécessaire à ce voyage ? Quelle est la durée $\Delta\tau$ de ce voyage pour Han et ses amis ?

4.3 — On étudie maintenant les conditions mécaniques de réalisation de ce voyage.

(i) Pour cela on se place dans un repère inertiel où, en un événement donné quelconque de la trajectoire du Faucon, celui-ci a une masse m et une vitesse nulle. Après avoir éjecté une quantité de matière $\mathrm{d}M$ sous une vitesse de module w, le Faucon a une masse $m + dm$ et une vitesse dv'. Quelle relation le principe de conservation de la quadri-impulsion totale permet-il de trouver entre dv', dm, w et m ?

(ii) Quelle valeur de l'accroissement dv en déduit-on pour la vitesse v du Faucon, dans le repère inertiel terrestre, en fonction de w, m, dm et c ?

(iii) En déduire l'expression du rapport des masses finales et initiales m_F/m_O en fonction des vitesses v_O et v_F du Faucon qui fonctionne à vitesse d'éjection w constante.

4.4 — Pour le voyage prévu :

(i) En déduire la masse finale $m(\Delta\tau)$ au terme du voyage, en fonction de la masse $m(0)$ au départ, de la vitesse à mi-chemin $v_M = v(\Delta\tau/2)$ et de la vitesse d'éjection w.

(ii) Estimer numériquement la vitesse à mi-chemin $v_M = v(\Delta\tau/2)$ en fonction de g, D et c.

(iii) En déduire l'expression de $m(\Delta\tau)$.

(iv) Quelle est la vitesse d'éjection w optimale ?

(v) En supposant cette vitesse techniquement réalisable, quelle masse $m(0)$ le Faucon doit-il avoir au départ pour acheminer $m(\Delta\tau) = 1$ tonne au centre de la galaxie ?