

## EXERCICES

Parcours SPRINT &amp; Double Majeure PM — Année Universitaire 2023–2024

Intervenants : L. Le Guillou &amp; J. Bolmont (Sorbonne Université / LPNHE)

## TD 10

Force de Lorentz – Mouvement d’une particule chargée dans un champ électrique uniforme – Mouvement dans un champ magnétique uniforme.

**1. Accélération d’une particule chargée dans un champ électrique uniforme**

*Pour éviter toute confusion, on notera dans cet exercice  $\mathcal{E}$  l’énergie totale, et  $\mathbf{E}$  le champ électrique.*

1.1 — Considérons une particule de masse  $m$  et de charge électrique  $q$ , que l’on observe dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  et dont on repère à chaque instant la position  $\mathbf{r}(t)$ . On notera  $\mathbf{u}(t)$  sa vitesse. Rappelez l’expression de son quadrivecteur énergie-impulsion  $\tilde{\mathbf{p}}$  et celle de ses composantes  $p^\mu$ .

1.2 — Par analogie avec la mécanique classique, on définit le quadrivecteur force  $\tilde{\mathbf{f}}$  par :

$$\tilde{\mathbf{f}} = \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{d\tau}$$

Est-ce bien un quadrivecteur ? Justifiez. Ecrivez les composantes  $f^\mu$  de  $\tilde{\mathbf{f}}$  en fonction des dérivées par rapport à  $t$  de l’énergie  $\mathcal{E}$  de la particule et de sa quantité de mouvement  $\mathbf{p}$ .

Dans une région de l’espace où règnent un champ électrique  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  et un champ magnétique  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  quelconques, une particule de vitesse quelconque  $\mathbf{u}(t)$  et de charge  $q$  subit une force dite **force de Lorentz**. Le quadrivecteur force associé prend la forme :

$$\tilde{\mathbf{f}} : f^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(\mathbf{u}) q \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}/c \\ \gamma(\mathbf{u}) q (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \end{pmatrix}$$

1.3 — Identifiez avec l’expression générale de la quadriforce. Déduisez-en les deux équations du mouvement, qui portent sur l’énergie totale relativiste  $\mathcal{E}$  et la quantité de mouvement relativiste  $\mathbf{p}$  pour la particule chargée qui subit le champ électromagnétique.

Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire, on considère une région de l’espace où règne un champ électrique uniforme et constant  $\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x$ . et un champ magnétique nul.

1.4 — Explicitiez les équations du mouvement en utilisant les expressions établies précédemment.

1.5 — À  $t = 0$  la particule est immobile ( $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ) dans le référentiel du laboratoire à la position  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ . Résolvez les équations du mouvement, et déduisez-en l'expression de la vitesse  $\mathbf{u}(t)$  de la particule, en supposant qu'elle est immobile en  $(x = 0, y = 0, z = 0)$  à  $t = 0$ . Quel type de mouvement reconnaît-on?

1.6 — Déduisez-en la trajectoire de la particule et donnez l'expression de  $r^\mu = (ct, x, y, z)$  en fonction de  $t$ . On aura avantage à faire apparaître la rapidité  $\varphi = \operatorname{argtanh} \beta$ . Montrez que pour  $at \ll c$ , on retrouve le résultat classique  $x(t) = at^2/2$ .

## 2. Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme

Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire, on considère une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme et constant  $\mathbf{B} = B_z \mathbf{e}_z$ , et un champ électrique nul.

2.1 — Explicitiez les équations du mouvement en utilisant les expressions établies précédemment. Décrivez la trajectoire de la particule dans le champ  $\mathbf{B}$  uniforme.