LICENCE DE PHYSIQUE — RELATIVITÉ RESTREINTE

EXERCICES — CORRIGÉ

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2023–2024

Intervenants : L. Le Guillou & J. Bolmont (Sorbonne Université / LPNHE)

TD 10

Force de Lorentz – Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme – Mouvement dans un champ magnétique uniforme.

1. Accélération d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme

Pour éviter toute confusion, on notera dans cet exercice $\mathcal{E}$ l'énergie totale, et E le champ électrique.

1.1 — Considérons une particule de masse m et de charge électrique q, que l'on observe dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ et dont on repère à chaque instant la position $\mathbf{r}(t)$. On notera $\mathbf{u}(t)$ sa vitesse. Rappelez l'expression de son quadrivecteur énergie-impulsion $\tilde{\mathbf{p}}$ et celle de ses composantes p^μ.

On construit le quadrivecteur énergie-impulsion (ou quadri-impulsion) $\tilde{\mathbf{p}}$ de la particule comme suit :

$$\tilde{\mathbf{p}} = m\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}\tau} = m\tilde{\mathbf{U}}$$

Ses composantes contravariantes s'écrivent :

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(\mathbf{u})mc \\ \gamma(\mathbf{u})m\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}/c = \gamma(\mathbf{u})mc \\ \mathbf{p} = \gamma(\mathbf{u})m\mathbf{u} \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \mathcal{E} \text{ l'énergie totale de l'objet étudié.}$$

Dans ces relations, m est la masse propre de l'objet (c'est à dire sa masse au repos), $\gamma(\mathbf{u})m > m$ est en quelque sorte sa "masse apparente", et $\mathcal{E} = \gamma(\mathbf{u})mc^2$ son **énergie totale**, somme de son **énergie de masse** $\mathcal{E}_0 = mc^2$ et de son **énergie cinétique** $T = \mathcal{E} - mc^2 = (\gamma(\mathbf{u}) - 1)mc^2$.

La pseudo-norme carrée de $\tilde{\mathbf{p}}$ vaut $\tilde{\mathbf{p}}^2 = m^2c^2 = (mc^2)^2/c^2$.

Les composantes de $\tilde{\mathbf{p}}$ vérifient les relations suivantes, très utiles :

$$\tilde{\mathbf{p}}^2 = (mc^2)^2/c^2 = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 \qquad \textit{i.e.} \quad \mathcal{E}^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \quad \mathcal{E}(u) = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

$$\boldsymbol{\beta}(u) = \frac{\mathbf{p}}{p^0} = \frac{\mathbf{p}c}{\mathcal{E}} \qquad \text{et} \qquad \gamma(\mathbf{u}) = \frac{\mathcal{E}}{mc^2}$$

1.2 — Par analogie avec la mécanique classique, on définit le quadrivecteur force $\widetilde{\mathbf{f}}$ par :

$$\widetilde{\mathbf{f}} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{p}}}{\mathrm{d}\tau}$$

Est-ce bien un quadrivecteur ? Justifiez. Ecrivez les composantes f^μ de $\widetilde{\mathbf{f}}$ en fonction des dérivées par rapport à t de l'énergie $\mathcal{E}$ de la particule et de sa quantité de mouvement $\mathbf{p}$.

$\widetilde{\mathbf{f}}$ est la dérivée d'un quadrivecteur par rapport au temps propre τ, qui est un invariant de Lorentz : ses composantes se transforment donc bien selon Lorentz, et $\widetilde{\mathbf{f}}$ possède bien les propriétés d'un quadrivecteur.

On a donc :

$$\widetilde{\mathbf{f}} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{p}}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{p}}}{\mathrm{d}t} = \gamma(\mathbf{u})\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{p}}}{\mathrm{d}t}$$

Pour les composantes contravariantes de la quadriforce, cela donne :

$$f^\mu = \gamma(\mathbf{u})\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}t} \qquad \text{avec} \quad p^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p}\right)$$

D'où

$$f^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(\mathbf{u})\dfrac{1}{c}\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} \\ \gamma(\mathbf{u})\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}$$

Dans une région de l'espace où règnent un champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et un champ magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ quelconques, une particule de vitesse quelconque $\mathbf{u}(t)$ et de charge q subit une force dite **force de Lorentz**. Le quadrivecteur force associé prend la forme :

$$\widetilde{\mathbf{f}} : f^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(\mathbf{u})\, q\, \mathbf{E}\cdot\mathbf{u}/c \\ \gamma(\mathbf{u})\, q\,(\mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{B}) \end{pmatrix}$$

1.3 — Identifiez avec l'expression générale de la quadriforce. Déduisez-en les deux équations du mouvement, qui portent sur l'énergie totale relativiste $\mathcal{E}$ et la quantité de mouvement relativiste $\mathbf{p}$ pour la particule chargée qui subit le champ électromagnétique.

En identifiant les composantes temporelles et spatiales du quadrivecteur force pour la force de Lorentz, on trouve :

$$f^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(\mathbf{u})\dfrac{1}{c}\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} \\ \gamma(\mathbf{u})\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(\mathbf{u})\, q\, \mathbf{E}\cdot\mathbf{u}/c \\ \gamma(\mathbf{u})\, q\,(\mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{B}) \end{pmatrix}$$

D'où, en identifiant et en simplifiant les facteurs $\gamma(\mathbf{u})$,

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = q\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{u}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = q\,(\mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{B})\,.$$

On remarque que le champ magnétique n'a pas d'effet sur l'énergie totale $\mathcal{E}$ de la particule chargée : on retrouve le résultat classique : *"le champ magnétique* $\mathbf{B}$ *ne travaille pas"*. Le champ magnétique peut modifier la trajectoire de la particule chargée, mais pas son énergie ni la norme de sa vitesse. Seul le champ électrique peut modifier l'énergie et la norme de la vitesse de la particule.

Dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire, on considère une région de l'espace où règne un champ électrique uniforme et constant $\mathbf{E} = E_x\,\mathbf{e}_x$. et un champ magnétique nul.

1.4 — Explicitez les équations du mouvement en utilisant les expressions établies précédemment.

Dans le cas particulier considéré, les équations générales précédentes se réduisent à :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = qE_x\,\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{u}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = qE_x\,\mathbf{e}_x$$

En explicitant l'expression de l'énergie totale $\mathcal{E}$ et de la quantité de mouvement $\mathbf{p}$ de la particule chargée, on trouve :

$$\mathcal{E} = \gamma(\mathbf{u})mc^2 \qquad \mathbf{p} = \gamma(\mathbf{u})m\,\mathbf{u}$$

L'équation sur l'énergie donne :

$$\frac{\mathrm{d}\gamma(\mathbf{u})mc^2}{\mathrm{d}t} = qE_x\,\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{u} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}\gamma(\mathbf{u})}{\mathrm{d}t} = \frac{qE_x}{mc^2}\,\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{u}. \tag{1}$$

Tandis que celle sur la quantité de mouvement devient :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = m\,\frac{\mathrm{d}(\gamma(\mathbf{u})\mathbf{u})}{\mathrm{d}t} = qE_x\,\mathbf{e}_x \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}(\gamma(\mathbf{u})\mathbf{u})}{\mathrm{d}t} = \frac{qE_x}{m}\,\mathbf{e}_x. \tag{2}$$

1.5 — À $t = 0$ la particule est immobile ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$) dans le référentiel du laboratoire à la position $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Résolvez les équations du mouvement, et déduisez-en l'expression de la vitesse $\mathbf{u}(t)$ de la particule, en supposant qu'elle est immobile en $(x = 0, y = 0, z = 0)$ à $t = 0$. Quel type de mouvement reconnaît-on ?

À partir de l'équation (2), on trouve :

$$\mathrm{d}(\gamma(\mathbf{u})\mathbf{u}) = \frac{qE_x}{m}\,\mathbf{e}_x\,\mathrm{d}t$$

Ce qui donne directement, en intégrant,

$$\gamma(\mathbf{u})\mathbf{u} = \gamma(u(t=0))\mathbf{u}(t=0) + \int_0^t \frac{qE_x}{m}\,\mathbf{e}_x\,\mathrm{d}t = \frac{qE_x t}{m}\,\mathbf{e}_x$$

La vitesse $\mathbf{u}$ est par conséquent parallèle au champ électrique, *i.e.* selon $\mathbf{e}_x$: $\mathbf{u} = u\,\mathbf{e}_x$. En remplaçant $\gamma(\mathbf{u})$ par son expression, on obtient :

$$\frac{u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{qE_x t}{m} = at$$

en posant $a = qE_x/m$. Ce qui donne :

$$u(t) = \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2t^2}{c^2}}}$$

On reconnaît l'expression de la vitesse pour un *mouvement hyperbolique*, d'accélération $a = qE_x/m$.

Pour de grandes valeurs de t, autrement dit au bout d'un temps assez long, la vitesse de la particule accélérée tend vers c :

$$u = \frac{at}{\sqrt{1+\dfrac{a^2t^2}{c^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1+\dfrac{c^2}{a^2t^2}}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} c$$

Dans le traitement classique de ce phénomène, l'accélération de la particule serait $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t = qE_x/m = a$, et on obtiendrait une trajectoire rectiligne uniformément accélérée :

$$u = at = \frac{qE_x}{m}\,t \qquad \text{et} \qquad x = \frac{1}{2}\,at^2$$

La description classique n'interdit donc pas à la particule d'atteindre au bout d'un temps $t = c/a$ la vitesse de la lumière, puis de la dépasser. Le traitement relativiste du même problème physique interdit cela, en accord avec les observations (expérience de Bertozzi (1964), et vérifié quotidiennement dans les accélérateurs modernes de particules).

1.6 — Déduisez-en la trajectoire de la particule et donnez l'expression de $r^\mu = (ct, x, y, z)$ en fonction de t. On aura avantage à faire apparaître la rapidité $\varphi = \operatorname{argtanh}\beta$. Montrez que pour $at \ll c$, on retrouve le résultat classique $x(t) = at^2/2$.

Le calcul de la position de la particule en fonction du temps peut s'effectuer en intégrant directement l'expression de la vitesse ; on peut aussi faire apparaître la rapidité φ.

D'après ce qui précède, la vitesse $u(t)$ s'écrit :

$$u(t) = \frac{at}{\sqrt{1+\dfrac{a^2t^2}{c^2}}} = c\tanh\varphi$$

En se souvenant que $\gamma(\mathbf{u}) = \cosh\varphi$ et que $\beta\gamma = \sinh\varphi$, on trouve :

$$\cosh\varphi = \gamma(\mathbf{u}) = \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}} \qquad \text{et} \qquad \sinh\varphi = \sqrt{\cosh^2\varphi - 1} = \frac{at}{c}$$

De l'équation différentielle précédente,

$$\mathrm{d}(\gamma(\mathbf{u})\mathbf{u}) = \frac{qE_x}{m}\,\mathbf{e}_x\,\mathrm{d}t = a, \mathbf{e}_x\,\mathrm{d}t$$

on tire aussi une relation entre φ et t :

$$\mathrm{d}(\gamma(\mathbf{u})u) = c\,\mathrm{d}\left(\cosh\varphi\tanh\varphi\right) = a\,\mathrm{d}t \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{d}t = \frac{c}{a}\,\mathrm{d}\left(\sinh\varphi\right) = \frac{c}{a}\,\cosh\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

On peut désormais exprimer $\mathrm{d}x$ en fonction de φ :

$$\mathrm{d}x = u\,\mathrm{d}t = \frac{at\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1+\dfrac{a^2t^2}{c^2}}} = \frac{c^2}{a}\,\frac{\sinh\varphi\cosh\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{\cosh\varphi} = \frac{c^2}{a}\,\sinh\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

D'où on déduit, en intégrant le long de la trajectoire :

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \mathrm{d}x = \frac{c^2}{a}\int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} \sinh\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{c^2}{a}\left[\cosh\varphi(t) - 1\right] = \frac{c^2}{a}\left[\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}} - 1\right].$$

Ce qui donne :

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) : r^\mu(t) = \left(ct, \frac{c^2}{a}\left[\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}} - 1\right], 0, 0\right)$$

Lorsque $at \ll c$, on retrouve le résultat classique :

$$x(t) = \frac{c^2}{a}\left[\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}} - 1\right] \simeq \frac{c^2}{a}\left[1+\frac{1}{2}\frac{a^2t^2}{c^2} - 1\right] = \frac{1}{2}at^2.$$

2. Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme

Dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire, on considère une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme et constant $\mathbf{B} = B_z\,\mathbf{e}_z$. et un champ électrique nul.

2.1 — Explicitez les équations du mouvement en utilisant les expressions établies précédemment. Décrivez la trajectoire de la particule dans le champ $\mathbf{B}$ uniforme.

Dans le cas particulier considéré, les équations générales précédentes se réduisent à :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = q\,\mathbf{u}\times B_z\,\mathbf{e}_z$$

En explicitant l'expression de l'énergie totale $\mathcal{E}$ et de la quantité de mouvement $\mathbf{p}$ de la particule chargée, on trouve :

$$\mathcal{E} = \gamma(\mathbf{u})mc^2 \qquad \mathbf{p} = \gamma(\mathbf{u})m\,\mathbf{u}$$

L'équation sur l'énergie donne :

$$\frac{\mathrm{d}\gamma(\mathbf{u})mc^2}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}\gamma(\mathbf{u})}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{3}$$

Autrement dit, le facteur $\gamma(\mathbf{u})$ est constant, et par conséquent la norme u de la vitesse aussi, ainsi que l'énergie totale $\mathcal{E}$: le champ magnétique $\mathbf{B}$ "*ne travaille pas*".

En utilisant ce qui précède, l'équation sur la quantité de mouvement devient :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}(\gamma(\mathbf{u})\,\mathbf{u})}{\mathrm{d}t} = qB_z\,\mathbf{u}\times\,\mathbf{e}_z \qquad \text{soit} \qquad \gamma(\mathbf{u})m\frac{\mathrm{d}(\mathbf{u})}{\mathrm{d}t} = qB_z\,\mathbf{u}\times\mathbf{e}_z. \tag{4}$$

Si on définit $\mathbf{e}_u(t) = \mathbf{u}/u$ le vecteur unitaire (non constant) de la vitesse de la particule à l'instant t, l'équation précédente peut encore s'écrire :

$$\gamma(\mathbf{u})mu\,\frac{\mathrm{d}(\mathbf{e}_u)}{\mathrm{d}t} = quB_z\,\mathbf{e}_u\times\mathbf{e}_z \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}(\mathbf{e}_u)}{\mathrm{d}t} = \frac{qB_z}{\gamma(\mathbf{u})m}\,\mathbf{e}_u\times\mathbf{e}_z \tag{5}$$

car le facteur $\gamma(\mathbf{u})$ et la norme u de la vitesse sont constants.

En projetant le vecteur $\mathbf{e}_u$ sur la base des coordonnées sphériques, avec $\theta = (\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_u)$ et ϕ l'angle entre la projection de $\mathbf{e}_u$ dans le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ et le vecteur $\mathbf{e}_x$, on obtient la décomposition suivante :

$$\mathbf{e}_u = \sin\theta\cos\phi\,\mathbf{e}_x + \sin\theta\sin\phi\,\mathbf{e}_y + \cos\theta\,\mathbf{e}_z.$$

Et par conséquent, le produit vectoriel $\mathbf{e}_u \times \mathbf{e}_z$ s'écrit :

$$\mathbf{e}_u \times \mathbf{e}_z = (\sin\theta\cos\phi\,\mathbf{e}_x + \sin\theta\sin\phi\,\mathbf{e}_y + \cos\theta\,\mathbf{e}_z) \times \mathbf{e}_z = \sin\theta\sin\phi\,\mathbf{e}_x - \sin\theta\cos\phi\,\mathbf{e}_y.$$

En remplaçant dans (5), on obtient,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sin\theta\cos\phi\,\mathbf{e}_x + \sin\theta\sin\phi\,\mathbf{e}_y + \cos\theta\,\mathbf{e}_z\right] = \frac{qB_z}{\gamma(\mathbf{u})m}\left[\sin\theta\sin\phi\,\mathbf{e}_x - \sin\theta\cos\phi\,\mathbf{e}_y\right]$$

soit, en composantes,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sin\theta\cos\phi\right] &= \frac{qB_z}{\gamma(\mathbf{u})m}\sin\theta\sin\phi \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sin\theta\sin\phi\right] &= -\frac{qB_z}{\gamma(\mathbf{u})m}\sin\theta\cos\phi \\
\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}t} &= 0.
\end{aligned}$$

La dernière équation indique que θ est une constante, autrement dit que la composante $u_z = u\cos\theta$ de la vitesse est constante. En en tenant compte, les deux autres équations se réduisent toutes les deux à :

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{qB_z}{\gamma(\mathbf{u})m} = -\omega_c$$

où $\omega_c = qB_z/\gamma(\mathbf{u})m$ est la *pulsation cyclotron relativiste*, et $f_c = \omega_c/2\pi = qB_z/2\pi\gamma(\mathbf{u})m$ est la *fréquence cyclotron relativiste*.

Si on intègre cette dernière équation, on obtient :

$$\phi(t) = -\frac{qB_z}{\gamma(\mathbf{u})m}t + \phi(0) = -\omega_c t + \phi(0)$$

Ainsi, la direction $\mathbf{e}_u$ de la projection de la vitesse $\mathbf{u}(t)$ dans le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ orthogonal au champ magnétique tourne à vitesse angulaire constante. On en déduit immédiatement que la projection de la trajectoire de la particule dans le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ est un cercle, parcouru à vitesse constante (car la norme u de la vitesse est constante), dans le sens trigonométrique négatif (sens des aiguilles d'une montre). La période T_c de rotation vaut ainsi :

$$T_c = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi\gamma(\mathbf{u})m}{qB_z}$$

Et le rayon R_c du cercle vérifie :

$$T_c = \frac{2\pi R_c}{u_{xy}} = \frac{2\pi\gamma(\mathbf{u})m}{qB_z} \qquad \text{soit} \qquad R_c = \frac{\gamma(\mathbf{u})mu_{xy}}{qB_z} = \frac{\gamma(u(0))mu_{xy}(0)}{qB_z}.$$

où u_{xy} est la projection de la vitesse dans le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$,

$$u_{xy} = |\mathbf{u} - u_z\,\mathbf{e}_z| = |u_x\,\mathbf{e}_x + u_y\,\mathbf{e}_y| = u\sin\theta.$$

Si la composante $u_z(0)$ de la vitesse initiale selon $\mathbf{e}_z$ est nulle, la trajectoire est simplement un cercle de rayon $R_c = \gamma(\mathbf{u})mu/qB_z$; sinon, la trajectoire est hélicoïdale, combinant le mouvement circulaire de rayon R_c et de période T_c dans le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ et un mouvement de translation uniforme selon $\mathbf{e}_z$ à la vitesse constante $u_z = u_z(0)$.