LICENCE DE PHYSIQUE — RELATIVITÉ RESTREINTE

EXERCICES

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2024–2025

Intervenants : L. Le Guillou & J. Bolmont (Sorbonne Université / LPNHE)

TD 10

Force de Lorentz – Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme – Mouvement dans un champ magnétique uniforme.

1. Accélération d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme

Pour éviter toute confusion, on notera dans cet exercice $\mathcal{E}$ l'énergie totale, et E le champ électrique.

1.1 — Considérons une particule de masse m et de charge électrique q, que l'on observe dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ et dont on repère à chaque instant la position $\mathbf{r}(t)$. On notera $\mathbf{u}(t)$ sa vitesse. Rappelez l'expression de son quadrivecteur énergie-impulsion $\widetilde{\mathbf{p}}$ et celle de ses composantes p^μ.

1.2 — Par analogie avec la mécanique classique, on définit le quadrivecteur force $\widetilde{\mathbf{f}}$ par :

$$\widetilde{\mathbf{f}} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{p}}}{\mathrm{d}\tau}$$

Est-ce bien un quadrivecteur ? Justifiez. Ecrivez les composantes f^μ de $\widetilde{\mathbf{f}}$ en fonction des dérivées par rapport à t de l'énergie $\mathcal{E}$ de la particule et de sa quantité de mouvement $\mathbf{p}$.

Dans une région de l'espace où règnent un champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et un champ magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ quelconques, une particule de vitesse quelconque $\mathbf{u}(t)$ et de charge q subit une force dite **force de Lorentz**. Le quadrivecteur force associé prend la forme :

$$\widetilde{\mathbf{f}} : f^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(\mathbf{u})\, q\, \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}/c \\ \\ \gamma(\mathbf{u})\, q\, (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \end{pmatrix}$$

1.3 — Identifiez avec l'expression générale de la quadriforce. Déduisez-en les deux équations du mouvement, qui portent sur l'énergie totale relativiste $\mathcal{E}$ et la quantité de mouvement relativiste $\mathbf{p}$ pour la particule chargée qui subit le champ électromagnétique.

Dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire, on considère une région de l'espace où règne un champ électrique uniforme et constant $\mathbf{E} = E_x\, \mathbf{e}_x$. et un champ magnétique nul.

1.4 — Explicitez les équations du mouvement en utilisant les expressions établies précédemment.

1.5 — À $t = 0$ la particule est immobile ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$) dans le référentiel du laboratoire à la position $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Résolvez les équations du mouvement, et déduisez-en l'expression de la vitesse $\mathbf{u}(t)$ de la particule, en supposant qu'elle est immobile en $(x = 0, y = 0, z = 0)$ à $t = 0$. Quel type de mouvement reconnaît-on ?

1.6 — Déduisez-en la trajectoire de la particule et donnez l'expression de $r^\mu = (ct, x, y, z)$ en fonction de t. On aura avantage à faire apparaître la rapidité $\varphi = \operatorname{argtanh}\beta$. Montrez que pour $at \ll c$, on retrouve le résultat classique $x(t) = at^2/2$.

2. Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme

Dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire, on considère une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme et constant $\mathbf{B} = B_z\,\mathbf{e}_z$. et un champ électrique nul.

2.1 — Explicitez les équations du mouvement en utilisant les expressions établies précédemment. Décrivez la trajectoire de la particule dans le champ $\mathbf{B}$ uniforme.