LICENCE DE PHYSIQUE — RELATIVITÉ RESTREINTE

EXAMEN — CORRIGÉ

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2021–2022

16 novembre 2021 – 16h-18h

1. Transformations de Lorentz, composition des vitesses

1.1 — Écrivez les transformations des coordonnées (ct, x, y, z) d'un événement lors du passage d'un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ à un autre référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ se déplacant à la vitesse $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_x$ par rapport à $\mathcal{R}$. Mettez cette relation sous forme matricielle.

La transformation de Lorentz s'écrit dans ce cas :

$$\begin{cases} t' &= \dfrac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\ x' &= \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{cases} \quad \textit{i.e.} \quad \begin{cases} ct' &= \gamma\,(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma\,(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{cases} \quad \text{et réciproquement} \quad \begin{cases} ct &= \gamma\,(ct' + \beta x') \\ x &= \gamma\,(x' + \beta ct') \\ y &= y' \\ z &= z' \end{cases}$$

$$\text{où on pose :}\quad \beta = \frac{v}{c} \qquad \text{ou} \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} = \frac{\mathbf{v}}{c} \qquad \text{et} \quad \gamma = \gamma(\mathbf{v}) = \left(1-\beta^2\right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}.$$

On peut mettre ces équations sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & +\beta\gamma & 0 & 0 \\ +\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

1.2 — Si la vitesse relative du référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ était selon l'axe Oz au lieu de Ox, *i.e.* $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_z$, comment s'écrirait la transformation de Lorentz pour passer de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$? Écrivez de même cette relation sous forme matricielle.

Les relations précédentes deviennent :

$$\begin{cases} t' &= \dfrac{t - vz/c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\ x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= \dfrac{z - vt}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \quad \textit{i.e.} \quad \begin{cases} ct' &= \gamma\,(ct - \beta z) \\ x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= \gamma\,(z - \beta ct) \end{cases} \quad \text{et réciproquement} \quad \begin{cases} ct &= \gamma\,(ct' + \beta z') \\ x &= x' \\ y &= y' \\ z &= \gamma\,(z' + \beta ct') \end{cases}$$

On peut mettre ces équations sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Pour toute la suite de cet exercice, on considèrera que le mouvement relatif entre les référentiels est selon l'axe $\mathrm{O}x$ ***:*** $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v\,\mathbf{e}_x$***.***

1.3 — Considérons deux événements très proches séparés par une distance infinitésimale $\mathrm{d}\mathbf{r}$ de composantes $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$ et par un intervalle de temps infinitésimal $\mathrm{d}t$ dans le référentiel $\mathcal{R}$, et par une distance $\mathrm{d}\mathbf{r'}$: $(\mathrm{d}x', \mathrm{d}y', \mathrm{d}z')$ et un intervalle de temps $\mathrm{d}t'$ dans $\mathcal{R}'$. Exprimez $\mathrm{d}t'$ et $\mathrm{d}x'$ en fonction de $\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}x$. Que devient cette relation si les deux événements considérés se produisent à la même abcisse x' dans $\mathcal{R}'$? Qu'est-ce que le temps propre τ ?

Pour deux événements se produisant au même point dans $\mathcal{R}'$, séparés par un petit intervalle de temps $\mathrm{d}t'$, on aura $\mathrm{d}x' = \gamma(\mathrm{d}x - \beta c\mathrm{d}t) = 0$, et donc $\mathrm{d}x = \beta c\mathrm{d}t = vt$. L'intervalle de temps $\mathrm{d}t'$ vaut ainsi :

$$c\mathrm{d}t' = \gamma(c\mathrm{d}t - \beta\mathrm{d}x) = \gamma(1-\beta^2)\mathrm{d}t = \frac{1}{\gamma}\mathrm{d}t \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{d}t = \gamma\mathrm{d}t' > \mathrm{d}t'$$

Le temps semble s'écouler plus lentement dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

Pour un observateur, le temps $\mathrm{d}\tau$ mesuré dans le référentiel qui lui est attaché semble toujours s'écouler plus lentement que dans tout autre référentiel : $\mathrm{d}t = \gamma\mathrm{d}\tau > \mathrm{d}\tau$. Le temps τ est le **temps propre** de l'observateur ; c'est un invariant car $\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}\tau^2$.

1.4 — Déduisez de la transformation de Lorentz la loi de transformation des composantes de la vitesse $\mathbf{u} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$ d'un point matériel M lors du passage du référentiel $\mathcal{R}$ au référentiel $\mathcal{R}'$.

À partir des transformations de Lorentz, on dérive la loi de composition des vitesses :

$$\begin{cases} u'_x &= \dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} &= \dfrac{u_x - v}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}} \\ u'_y &= \dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} &= \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{u_y}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}} \\ u'_z &= \dfrac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} &= \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{u_z}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}} \end{cases} \quad \text{et réciproquement} \quad \begin{cases} u_x &= \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \dfrac{u'_x + v}{1 + \dfrac{vu'_x}{c^2}} \\ u_y &= \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{u'_y}{1 + \dfrac{vu'_x}{c^2}} \\ u_z &= \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{u'_z}{1 + \dfrac{vu'_x}{c^2}} \end{cases}$$

1.5 — Précisez les cas limites intéressants, en particulier pour des vitesses faibles devant la célérité c de la lumière. Que retrouve-t-on ? D'autre part, que vaut u_x si $u'_x = c$?

D'une part, on montre facilement que pour des vitesses faibles devant la célérité c de la lumière, la loi de composition des vitesses tend vers la limite classique :

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \dfrac{vu'_x}{c^2}} \simeq u'_x + v \quad \text{quand} \quad u'_x \ll c \quad \text{et} \quad v \ll c$$

D'autre part, on constate immédiatement que la vitesse de la lumière est une vitesse limite : par exemple, quand $u'_x = c$, on obtient alors dans le référentiel $\mathcal{R}$:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \dfrac{vu'_x}{c^2}} = \frac{c + v}{1 + \dfrac{v}{c}} = c$$

De même, lorsque $v = c$, on aura alors $u_x = c$.

1.6 — En partant de la loi de composition des vitesses, montrez que la vitesse d'un objet ne peut dépasser c quel que soit le référentiel où on mesure cette vitesse.

Considérons un mobile se déplaçant à la vitesse $u' < c$ dans un référentiel $\mathcal{R}'$. Sa vitesse u mesurée dans un référentiel $\mathcal{R}$ tel que $v(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v < c$ est donc (en supposant les vitesses $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$ et $\mathbf{v}$ colinéaires) :

$$u = \frac{u' + v}{1 + \dfrac{u'v}{c^2}} \qquad \frac{u}{c} = \frac{\dfrac{u'}{c} + \dfrac{v}{c}}{1 + \dfrac{u'}{c}\dfrac{v}{c}}$$

Posons $a = u'/c$ et $\beta = v/c$. On a :

$$0 \leqslant a = \frac{u'}{c} < 1 \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant \beta = \frac{v}{c} < 1$$

Comme $0 \leqslant a < 1$, on en déduit que $0 < 1 - a \leqslant 1$; En multipliant l'inégalité $\beta < 1$ par $(1 - a) > 0$, on obtient ainsi :

$$(1 - a)\beta < 1 - a \qquad \text{d'où} \qquad \beta - a\beta < 1 - a \qquad \text{soit} \qquad a + \beta < 1 + a\beta$$

Et par conséquent,

$$\frac{u}{c} = \frac{\dfrac{u'}{c} + \dfrac{v}{c}}{1 + \dfrac{u'}{c}\dfrac{v}{c}} = \frac{a + \beta}{1 + a\beta} < 1 \qquad \textit{i.e.} \quad u < c$$

Pour un mobile se déplaçant à une vitesse $u' < c$ dans un référentiel $\mathcal{R}'$, sa vitesse u mesurée dans tout autre référentiel sera elle aussi inférieure à c.

2. Course-poursuite interstellaire

Vous traiterez cet exercice dans le cadre de la relativité restreinte.

Leia a été capturée et est retenue prisonnière à bord d'une frégate impériale (référentiel $\mathcal{R}'$) qui a quitté la planète Tatooine (référentiel R) à $t = t' = 0$, et qui s'éloigne à la vitesse constante $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_x$ avec $v < c$. Han, lui aussi sur Tatooine, se rend compte de sa disparition à $t = t_1 > 0$, saute aussitôt à bord du Faucon Millenium, *"le tas de ferraille le plus rapide de la galaxie"*, et se lance à sa poursuite, à la vitesse $\mathbf{u} = u\,\mathbf{e}_x$, avec $v < u < c$ (dans la précipitation, il n'a hélas pas eu le temps de réparer son propulseur superluminique). Son vaisseau se déplaçant plus vite que la frégate, il la rattrape à l'instant $t = t_2$. On notera $E_1 : (t_1, x_1)$ l'événement correspondant au départ de Han, et $E_2 : (t_2, x_2)$ l'événement associé à la rencontre du vaisseau de Han et de la frégate qui emporte Leia. On prendra l'astroport de départ sur Tatooine comme origine O du référentiel $\mathcal{R}$, et un point arbitraire de la frégate comme origine O' dans $\mathcal{R}'$.

2.1 — À quel instant t_2 Han rattrape-t-il la frégate ?

Lorsqu'il rattrape la frégate, Han a parcouru la distance $x_2 - x_1$ en un temps $t_2 - t_1$ à la vitesse u dans le référentiel $\mathcal{R}$. On a donc :

$$x_2 - x_1 = u\,(t_2 - t_1) \qquad \text{avec } x_1 = 0\text{, d'où} \qquad x_2 = u\,(t_2 - t_1)$$

Par ailleurs, à l'instant t_2 dans le référentiel $\mathcal{R}$, la frégate impériale a parcouru la distance x_2 en un temps t_2 à la vitesse v, et par conséquent $x_2 = vt_2$. On en déduit :

$$x_2 = u\,(t_2 - t_1) = vt_2 \qquad \text{d'où} \qquad t_2\,(u - v) = ut_1 \qquad \text{et} \qquad t_2 = \frac{u}{u - v}\,t_1.$$

2.2 — Établissez, dans les deux référentiels (supposés galiléens) $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ les coordonnées spatio-temporelles des événements E_1 et E_2. Exprimez toutes les coordonnées (x_1, t'_1, x'_1, t_2, x_2, t'_2 et x'_2) en fonction de t_1, u et v.

Dans le référentiel $\mathcal{R}$, les coordonnées de l'événement E_1 sont naturellement $(t_1, x_1 = 0)$. On obtient immédiatement les coordonnées de E_1 dans $\mathcal{R}'$ en utilisant la transformation de Lorentz,

$$ct'_1 = \gamma(ct_1 - \beta x_1) \qquad \textit{i.e.} \quad t'_1 = \gamma t_1$$

et,

$$x'_1 = \gamma(x_1 - \beta ct_1) = -\beta\gamma ct_1 = -\gamma v t_1 < 0.$$

Pour l'événement E_2, on a établi précédemment que $t_2 = ut_1/(u - v)$. De plus, l'événement E_2 a lieu à la position x_2 qui vérifie, d'après le raisonnement précédent :

$$x_2 = x_1 + u(t_2 - t_1) = u\left[\frac{u}{u - v}t_1 - t_1\right] = \frac{uv}{u - v}\,t_1.$$

De plus, l'événement E_2 a lieu par définition en $x'_2 = 0$ (position de la frégate dans son propre référentiel $\mathcal{R}'$). En utilisant la transformation de Lorentz, on obtient t'_2,

$$ct_2 = \gamma(ct'_2 + \beta x'_2) = \gamma ct'_2 \qquad \text{soit} \qquad t'_2 = \frac{1}{\gamma}\,t_2 = \frac{1}{\gamma}\frac{u}{u - v}\,t_1 = \gamma(1 - \beta^2)\frac{u}{u - v}\,t_1$$

car $\gamma^{-2} = (1 - \beta^2)$.

Les coordonnées des événements E_1 et E_2 sont donc :

	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}'$
E_1	$t_1 > 0$ $x_1 = 0$	$t'_1 = \gamma\, t_1$ $x'_1 = -\gamma v t_1 < 0$
E_2	$t_2 = \dfrac{u}{u-v}\, t_1$ $x_2 = \dfrac{uv}{u-v}\, t_1$	$t'_2 = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{u}{u-v}\, t_1 = \gamma(1-\beta^2)\dfrac{u}{u-v}\, t_1$ $x'_2 = 0$

2.3 — En utilisant les coordonnées des événements E_1 et E_2 dans le référentiel de la frégate impériale, exprimez la vitesse u' du vaisseau de Han dans le référentiel $\mathcal{R}'$. Montrez que vous retrouvez ainsi la loi relativiste de composition des vitesses.

Le vaisseau de Han se déplace selon $\mathbf{e}_x$ à la vitesse constante u dans le référentiel $\mathcal{R}$, et à la vitesse constante u' dans le référentiel $\mathcal{R}'$. Les événements E_1 et E_2 appartenant tous deux à la *ligne d'univers* de Han, on peut déduire de leurs coordonnées respectives dans $\mathcal{R}'$ la vitesse u' de Han :

$$u' = \frac{x'_2 - x'_1}{t'_2 - t'_1}.$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} u' = \frac{x'_2 - x'_1}{t'_2 - t'_1} &= \frac{0 + \gamma v t_1}{\gamma(1-\beta^2)\dfrac{u}{u-v}\, t_1 - \gamma t_1} = \frac{v}{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)\left(\dfrac{u}{u-v}\right) - 1} \\ &= \frac{v(u-v)}{u - \dfrac{uv^2}{c^2} - u + v} = \frac{v(u-v)}{v\left[1 - \dfrac{uv}{c^2}\right]} = \frac{u-v}{1 - \dfrac{uv}{c^2}} \end{aligned}$$

On retrouve ainsi la loi relativiste de composition des vitesses (dans le cas de vitesses parallèles au mouvement relatif entre les référentiels) :

$$u' = \frac{u - v}{1 - \dfrac{uv}{c^2}}.$$

2.4 — Représentez toute cette aventure sur un diagramme d'espace-temps (Minkowski ou Loedel, selon votre préférence), en indiquant bien les coordonnées de chaque événement dans les deux référentiels (en traçant les projections correspondantes sur les axes). *Pour obtenir une figure lisible, consacrez une page entière à ce diagramme.*

Voir figure 1.

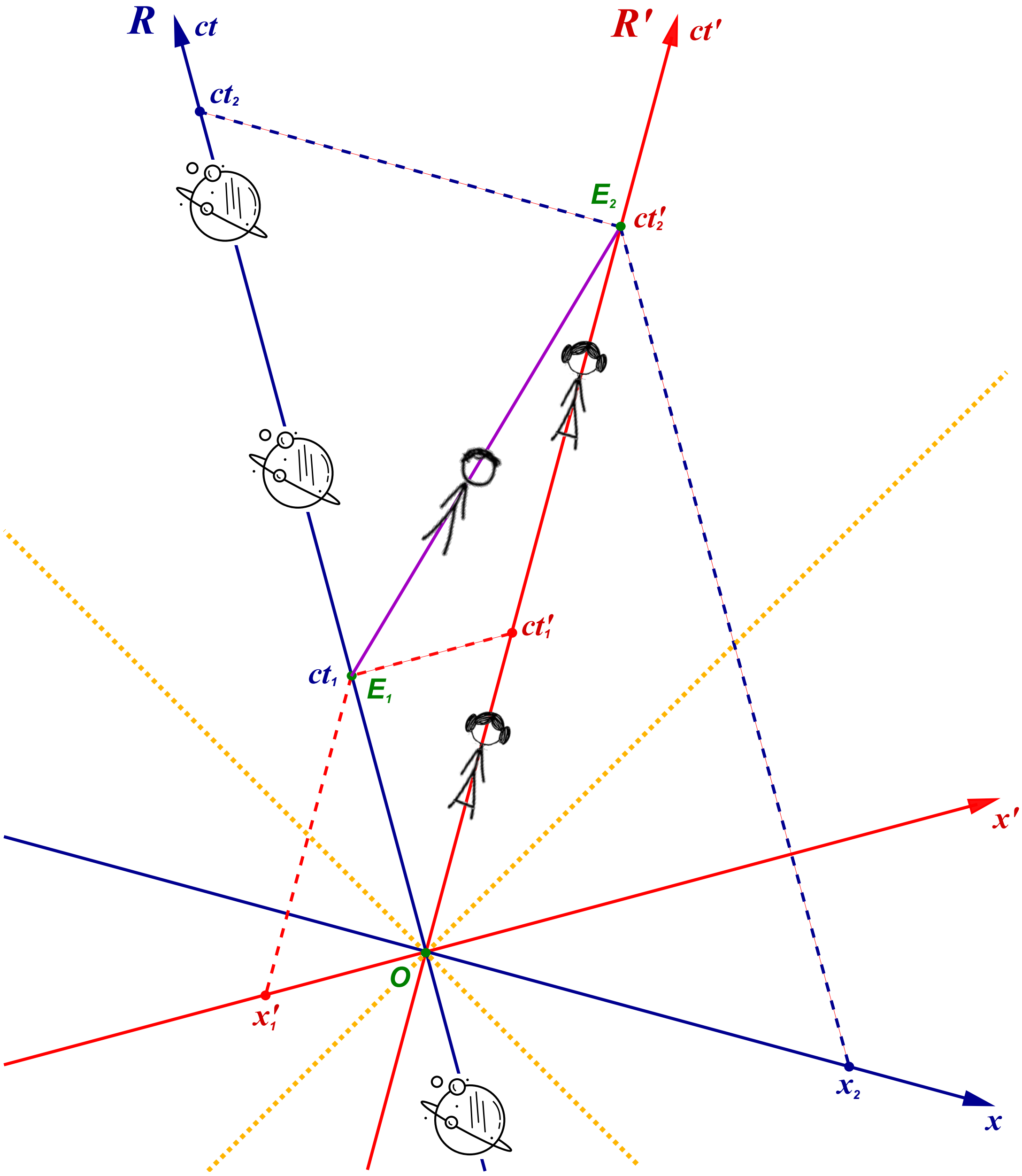


FIGURE 1 – *Diagramme d'espace-temps (diagramme de Loedel). Trajectoires de la frégate qui emporte Leia (en rouge, dans $\mathcal{R}'$) et de Han (en mauve) qui quitte Tatooine à $t = t_1 > 0$ (événement E_1) et rattrape Leia à $t = t_2$ (événement E_2).*

3. Jeu de ballon sur un tourniquet

Vous traiterez cet exercice dans le cadre de la mécanique classique.

Lorsque la lutte contre l'Empire leur laisse un peu de répit, Luke et Leia aiment s'adonner à des jeux simples et néanmoins intellectuellement stimulants. Aussi décident-ils un jour de se faire des passes avec un ballon, tous les deux debout sur le plateau d'un tourniquet en rotation. Han Solo observe la scène à quelque distance, jaloux que Leia préfère jouer avec son frère jumeau (le sien, pas celui de Han, il faut suivre).

La figure 2 montre la situation avec Leia et Luke sur le plateau, respectivement aux points A et B, et Han qui observe la scène au point C. Han est immobile dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au sol, supposé galiléen. Le repère d'espace utilisé est cartésien et son origine O est au centre du plateau. La base associée au référentiel lié au sol a pour vecteurs unitaires $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$. Le plateau tourne à la vitesse angulaire *constante* $\mathbf{\Omega} = \Omega\,\mathbf{e_z}$. On suppose que $OA = OB = R$. On munit le référentiel $\mathcal{R}'$ du plateau d'un trièdre orthonormé $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ solidaire du plateau tournant. Dans tout l'exercice, on négligera l'épaisseur du plateau.

Trajectoire du ballon dans le repère lié au référentiel $\mathcal{R}$

On étudie dans un premier temps la trajectoire du ballon dans le repère $\mathcal{R}$, c'est-à-dire telle qu'observée par Han. Le repère $(O, \{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\})$ est lié au sol. A l'instant $t = 0$, alors qu'elle est sur l'axe (Ox) au point A$(-R, 0, 0)$, Leia lance le ballon dans la direction de Luke avec une vitesse initiale

$$\mathbf{v}_{0/\mathcal{R}'} = \mathbf{v}_{/\mathcal{R}'}(t = 0) = v_{0,x}\,\mathbf{e}_x + v_{0,y}\,\mathbf{e}_y + v_{0,z}\,\mathbf{e}_z.$$

Pour l'instant, on ne fera pas d'hypothèses sur les composantes initiales $v_{0,x}, v_{0,y}, v_{0,z}$, et on traitera le cas le plus général.

Remarque : la norme de la vitesse tangentielle (donc perpendiculaire au rayon) d'un point situé à une distance r du centre du plateau est donnée par $r\Omega$.

3.1 — Exprimez les composantes du vecteur vitesse du ballon $\mathbf{v_{0/\mathcal{R}}} = \mathbf{v}_{/\mathcal{R}}(t = 0)$ mesuré par Han dans $\mathcal{R}$ à $t = 0$.

On applique la loi de composition des vitesses à l'instant $t = 0$:

$$\mathbf{v_{0/\mathcal{R}}} = \mathbf{v_{0/\mathcal{R}'}} + \mathbf{v}_{\boldsymbol{A/\mathcal{R}}}.$$

Or, $\mathbf{v_{0/\mathcal{R}'}} = v_{0,x}\,\mathbf{e}_x + v_{0,y}\,\mathbf{e}_y + v_{0,z}\,\mathbf{e}_z$. D'autre part, toujours à $t = 0$, $\mathbf{v}_{\boldsymbol{A/\mathcal{R}}} = -R\,\Omega\,\mathbf{e}_y$. On obtient donc les coordonnées suivantes pour le vecteur $\mathbf{v_0}$ mesuré dans $\mathcal{R}$:

$$\mathbf{v}_{0/\mathcal{R}} \;:\; (v_{0,x}, v_{0,y} - R\Omega, v_{0,z}).$$

3.2 — Déterminez l'équation paramétrique $\{x(t), y(t), z(t)\}$ de la trajectoire du ballon vue dans le référentiel $\mathcal{R}$. On négligera la force de frottement de l'air. Exprimez le temps t_{impact} que met le ballon pour arriver au niveau du sol.

On applique la relation fondamentale de la dynamique (RFD) dans le référentiel $\mathcal{R}$, galiléen. Le ballon n'est soumis qu'à une seule force, son poids $\mathbf{P} = m\,\mathbf{g} = -mg\,\mathbf{e}_z$. On obtient ainsi :

$$m\,\mathbf{a} = \mathbf{P} = m\,\mathbf{g} = -mg\,\mathbf{e}_z.$$

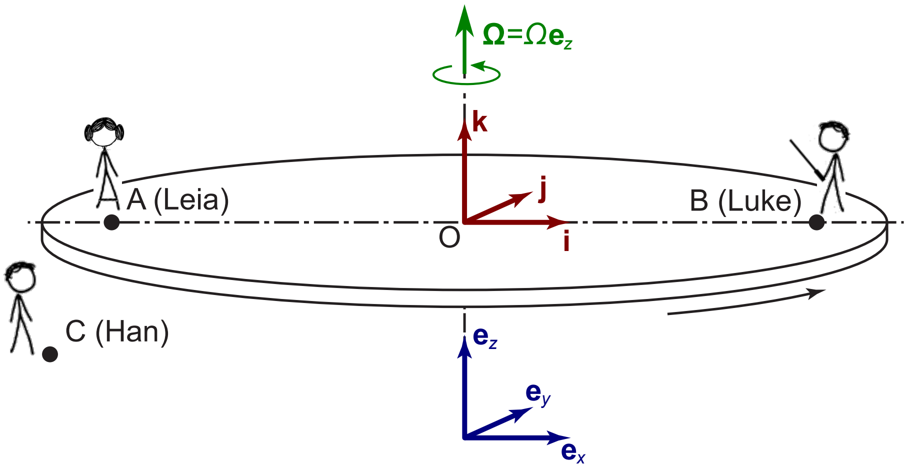


FIGURE 2 – *Schéma montrant la position des différents personnages à $t = 0$, ainsi que la base $(O, \{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\})$ solidaire du sol, et la base $(O' = O, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\})$ solidaire du plateau tournant, à l'instant initial $t = 0$. Leia et Luke sont sur le plateau tournant tandis que Han observe la situation à quelque distance. Leia s'apprête à lancer son ballon vers Luke.*

Ce qui donne :

$$\begin{cases} a_x = & 0 \\ a_y = & 0 \\ a_z = & -g \end{cases} .$$

Ce qui s'intègre immédiatement et donne les composantes de la vitesse en fonction du temps dans $\mathcal{R}$:

$$\begin{cases} v_x(t) = & v_{0,x} \\ v_y(t) = & v_{0,y} - R\Omega \\ v_z(t) = & v_{0,z} - gt. \end{cases}$$

En intégrant une seconde fois, on en déduit l'équation paramétrique de la trajectoire du ballon vue par Han :

$$\begin{cases} x(t) = & v_{0,x}t - R \\ y(t) = & (v_{0,y} - R\Omega)t \\ z(t) = & v_{0,z}t - \frac{1}{2}gt^2 = \left(v_{0,z} - \frac{1}{2}gt\right)t. \end{cases}$$

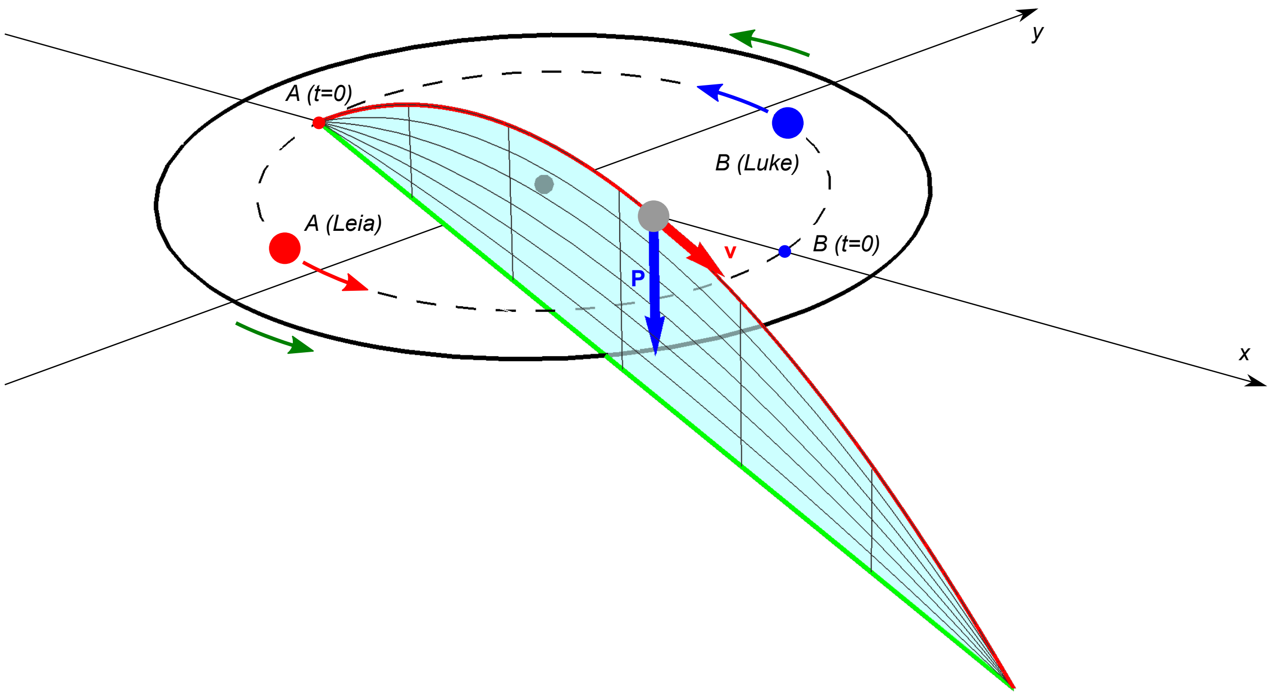
Lorsque le ballon arrive au niveau du sol, $z(t_{\text{impact}}) = 0$. Il vient immédiatement que $t_{\text{impact}} = 2v_{0,z}/g$.

3.3 — Représentez schématiquement la projection sur le plan (Ox, Oy) de la trajectoire du ballon telle que vue par Han dans $\mathcal{R}$. Vous indiquerez également la projection sur le plan (Ox, Oy) du vecteur vitesse initial. *Pour cette question, pour simplifier la représentation, vous pourrez prendre* $v_{0,x} = 2R\Omega$ *et* $v_{0,y} = 0$.

Voir figure 3.

Trajectoire du ballon dans le repère tournant (référentiel $\mathcal{R}'$)

Cette fois, on souhaite analyser la trajectoire du ballon telle qu'observée dans le référentiel tournant $\mathcal{R}'$ par Leia et Luke. On utilise le repère tournant $(O' = O, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\})$, *solidaire du plateau*, représenté



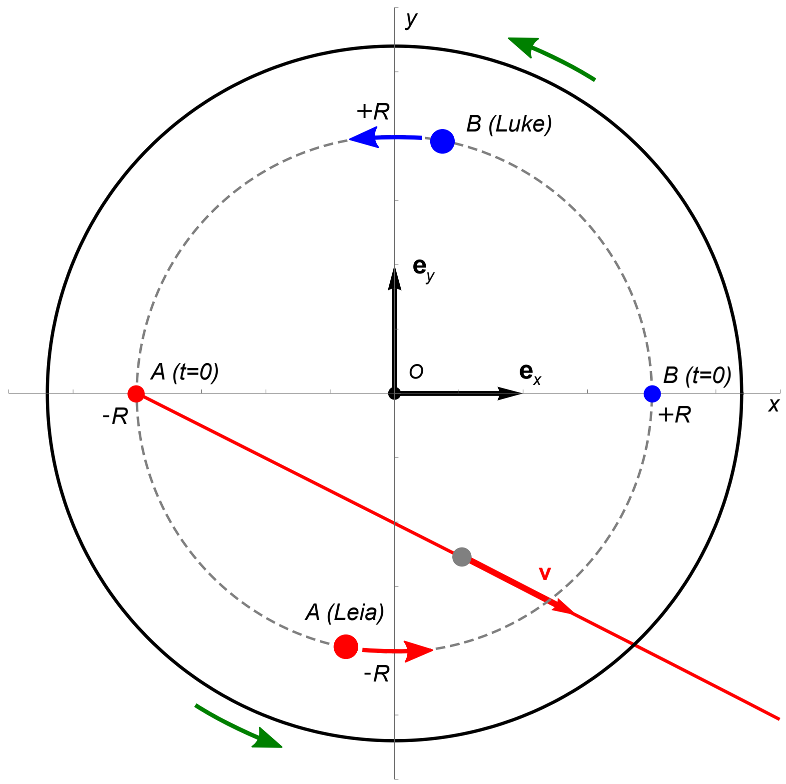


FIGURE 3 – *En haut : trajectoire du ballon vue par Han dans le référentiel $\mathcal{R}$. Les petits points indiquent la position de Leia (rouge) et Luke (bleu) au moment où Leia lance le ballon. Les gros points indiquent les positions de Leia (rouge), Luke (bleu) et du ballon (gris) à un instant t arbitraire. On a choisi de représenter une nappe qui permet de visualiser l'empreinte de la trajectoire au sol (la projection de la trajectoire sur le plan (Oxy)). On constate qu'avec les conditions initiales données, le ballon atterrit hors du plateau. En bas : projection de cette trajectoire dans le plan (Oxy).*

sur la figure 2. Ainsi, à $t = 0$, le repère tournant coïncide avec le repère fixe de la première partie (mais plus ensuite).

Comme précédemment, à l'instant $t = 0$, depuis le point $A : (-R, 0, 0)$, Leia lance le ballon dans la direction de Luke, donc le long de l'axe (Ox), avec une vitesse initiale $\mathbf{v}_{0/\mathcal{R}'}$. On notera M la position du ballon à un instant quelconque t, de sorte que son vecteur position est $\mathbf{O'M}(t)$. Les coordonnées du ballon dans $\mathcal{R}'$ seront notées (X, Y, Z) et sa vitesse $\mathbf{v}_{/\mathcal{R}'}$.

3.4 — Ecrivez la relation fondamentale de la dynamique régissant le mouvement du ballon dans le référentiel tournant, encore une fois en négligeant les forces de frottement dans l'air. *Attention, le référentiel tournant n'est pas galiléen !*

Dans le référentiel $\mathcal{R}'$, non galiléen, La relation fondamentale de la dynamique s'écrit sous une forme modifiée tenant compte des forces ou pseudo-forces inertielles :

$$m\,\mathbf{a} = \mathbf{P} + \mathbf{F}_\mathrm{e} + \mathbf{F}_\mathrm{c} = m\,\mathbf{g} + \mathbf{F}_\mathrm{e} + \mathbf{F}_\mathrm{c},$$

où $\mathbf{F}_\mathrm{e} = -m\,\mathbf{a}_\mathrm{e}$ est la force inertielle d'entraînement et $\mathbf{F}_\mathrm{c} = -m\,\mathbf{a}_c$ la force inertielle de Coriolis. En divisant par la masse, on obtient :

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} - \mathbf{a}_\mathrm{e} - \mathbf{a}_\mathrm{c},$$

où $\mathbf{a}_e$ et $\mathbf{a}_c$ sont respectivement l'accélération d'entraînement et l'accélération de Coriolis.

3.5 — Exprimez l'accélération d'entraînement $\mathbf{a}_\mathrm{e}$ et l'accélération de Coriolis $\mathbf{a}_\mathrm{c}$ en fonction des coordonnées X, Y et Z du ballon, de leurs dérivées par rapport au temps $\dot{X}$, $\dot{Y}$ et $\dot{Z}$, de Ω et des vecteurs de la base tournante $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

Dans sa forme la plus générale, l'accélération d'entraînement s'écrit

$$\mathbf{a}_e = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{OO'}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{\Omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{O'M} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{O'M}).$$

où on note le produit vectoriel par le symbole $\times$.

Or, dans la situation particulière considérée, les origines O et O' sont confondues, et par conséquent,

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{OO'}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}} = 0 \qquad \text{et, d'autre part} \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{\Omega}}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \text{car la vitesse de rotation } \mathbf{\Omega} \text{ est constante.}$$

D'autre part, les composantes de $\mathbf{O'M}$ sont (X, Y, Z) dans le repère du référentiel tournant, et celles de $\mathbf{\Omega}$ sont $(0, 0, \Omega)$. Calculons le double produit vectoriel $\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{O'M})$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Omega Y \\ +\Omega X \\ 0 \end{pmatrix},$$

puis,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\Omega Y \\ +\Omega X \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Omega^2 X \\ -\Omega^2 Y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on obtient :

$$\mathbf{a}_\mathrm{e} = -X\Omega^2\,\mathbf{i} - Y\Omega^2\,\mathbf{j}$$

et la force inertielle d'entraînement $\mathbf{F}_\mathrm{e} = -m\,\mathbf{a}_\mathrm{e}$ se réduit au terme de force centrifuge.

L'accélération de Coriolis s'exprime par :

$$\mathbf{a}_\mathrm{c} = 2\,\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_{/\mathcal{R}'}.$$

Or, les composantes du vecteur vitesse $\mathbf{v}_{/\mathcal{R}'}$ du ballon dans le repère tournant sont simplement $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$. Le calcul explicite du produit vectoriel donne :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Omega\dot{Y} \\ +\Omega\dot{X} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi l'expression de l'accélération de Coriolis :

$$\mathbf{a}_\mathrm{c} = -2\Omega\dot{Y}\,\mathbf{i} + 2\Omega\dot{X}\,\mathbf{j}.$$

3.6 — En appliquant la relation fondamentale de la dynamique dans le repère tournant, établissez les équations différentielles vérifiées par les coordonnées X, Y et Z. Vous vérifierez que l'équation sur $Z(t)$ est identique à celle obtenue dans le référentiel fixe, et qu'elle admet la même solution.

La relation fondamentale de la dynamique, en projetant sur les trois axes du repère $(O' = O, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\})$ nous permet d'obtenir les équations différentielles suivantes :

$$\ddot{X} = +\Omega^2 X + 2\Omega\dot{Y} \tag{1}$$

$$\ddot{Y} = +\Omega^2 Y - 2\Omega\dot{X} \tag{2}$$

$$\ddot{Z} = -g \tag{3}$$

On remarque que les deux premières équations différentielles sont couplées puisque les fonctions $X(t)$ et $Y(t)$ interviennent dans les deux équations. L'équation (3) sur Z est identique à celle déterminée dans la première partie de l'exercice, et admet donc la même solution : $Z(t) = z(t) = v_{0,z}t - \frac{1}{2}gt^2$.

Compléments. *Ce qui suit n'était pas demandé pour l'examen, mais nous indiquons la méthode de résolution de ce système d'équations pour les plus curieux.*

Si on pose $Q(t) = X(t) + iY(t)$, les deux équations différentielles sur $X(t)$ et $Y(t)$ peuvent être groupées en une seule équation :

$$\ddot{Q} + 2i\Omega\dot{Q} - \Omega^2 Q = 0 \tag{4}$$

Si on cherche une solution de la forme $Q(t) = A\,e^{rt}$, on montre que le coefficient r doit être solution de l'équation polynomiale (*polynôme caractéristique*) : $r^2 + 2i\Omega r - \Omega^2 = (r + i\Omega)^2 = 0$. Cette équation possède une racine double $r = -i\Omega$. On en déduit que l'équation différentielle (4) admet dans ce cas des solutions de la forme :

$$Q(t) = (A + Bt)\,e^{rt} \qquad \text{avec} \quad r = -i\Omega$$

et où A et B sont deux coefficients complexes à déterminer en fonction des conditions initiales. En posant :

$$A = C + iD \qquad \text{et} \qquad B = E + iF$$

et en substituant dans l'expression de $Q(t) = X(t) + iY(t)$, puis en séparant partie réelle et partie imaginaire, on obtient :

$$\begin{cases} X(t) = (C + Et)\cos\Omega t + (D + Ft)\sin\Omega t \\ Y(t) = (D + Ft)\cos\Omega t - (C + Et)\sin\Omega t. \end{cases}$$

3.7 — Vérifiez que le système d'équations différentielles en $X(t)$ et $Y(t)$ admet pour solution les fonctions de la forme :

$$\begin{cases} X(t) &= (C+Et)\cos\Omega t + (D+Ft)\sin\Omega t \\ Y(t) &= (D+Ft)\cos\Omega t - (C+Et)\sin\Omega t, \end{cases}$$

où C, D, E et F sont des constantes (que l'on déterminera à la question suivante).

Les dérivées premières de $X(t)$ et $Y(t)$ par rapport au temps s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) &= \quad [F-\Omega(C+Et)]\sin\Omega t + [E+\Omega(D+Ft)]\cos\Omega t \\ \dot{Y}(t) &= -[E+\Omega(D+Ft)]\sin\Omega t + [F-\Omega(C+Et)]\cos\Omega t \end{cases}$$

En dérivant une seconde fois par rapport au temps, on obtient les expressions de $\ddot{X}(t)$ et $\ddot{Y}(t)$:

$$\begin{cases} \ddot{X}(t) &= \quad \left[2\Omega F - \Omega^2(C+Et)\right]\cos\Omega t - \left[2\Omega E + \Omega^2(D+Ft)\right]\sin\Omega t \\ \ddot{Y}(t) &= -\left[2\Omega E + \Omega^2(D+Ft)\right]\cos\Omega t - \left[2\Omega F - \Omega^2(C+Et)\right]\sin\Omega t \end{cases}$$

On vérifie ensuite de manière immédiate que :

$$\begin{aligned} \Omega^2 X + 2\Omega\dot{Y} &= +\left[2\Omega F - 2\Omega^2(C+Et) + \Omega^2(C+Et)\right]\cos\Omega t \\ &\quad - \left[2\Omega E + 2\Omega^2(D+Ft) - \Omega^2(D+Ft)\right]\sin\Omega t \\ &= +\left[2\Omega F - \Omega^2(C+Et)\right]\cos\Omega t - \left[2\Omega E + \Omega^2(D+Ft)\right]\sin\Omega t = \ddot{X}. \end{aligned}$$

Et, de même,

$$\begin{aligned} \Omega^2 Y - 2\Omega\dot{X} &= -\left[2\Omega E + 2\Omega^2(D+Ft) - \Omega^2(D+Ft)\right]\cos\Omega t \\ &\quad - \left[2\Omega F - 2\Omega^2(C+Et) + \Omega^2(C+Et)\right]\sin\Omega t \\ &= -\left[2\Omega E + \Omega^2(D+Ft)\right]\cos\Omega t - \left[2\Omega F - \Omega^2(C+Et)\right]\sin\Omega t = \ddot{Y}. \end{aligned}$$

3.8 — Déterminer les valeurs des constantes C, D, E et F en fonction des données de l'énoncé. On utilisera les mêmes notations que dans la première partie pour la vitesse initiale du ballon :

$$\mathbf{v_{0/\mathcal{R}'}} = \mathbf{v}_{/\mathcal{R}'}(t=0) = v_{0,x}\,\mathbf{e}_x + v_{0,y}\,\mathbf{e}_y + v_{0,z}\,\mathbf{e}_z.$$

Donnez les expressions des fonctions $X(t)$ et $Y(t)$.

Les valeurs des constantes C, D, E et F sont déterminées à partir des conditions initiales. On a :

$$X(0) = C = -R \qquad Y(0) = D = 0 \qquad \text{d'où} \quad C = -R \quad \text{et} \quad D = 0.$$

$$\text{De même,} \quad \dot{X}(0) = E = v_{0,x} \qquad \ddot{Y}(0) = F + R\Omega = v_{0,y} \qquad \text{d'où} \quad E = v_{0,x} \quad \text{et} \quad F = v_{0,y} - R\Omega.$$

On obtient ainsi l'équation paramétrique suivante pour la trajectoire du ballon vue par Luke et Leia, dans le référentiel tournant :

$$\begin{cases} X(t) &= (v_{0,x}t - R)\cos\Omega t + (v_{0,y} - R\Omega)t\sin\Omega t \\ Y(t) &= (v_{0,y} - R\Omega)t\cos\Omega t - (v_{0,x}t - R)\sin\Omega t \\ Z(t) &= v_{0,z}t - \dfrac{1}{2}gt^2. \end{cases}$$

3.9 — Représentez schématiquement sur un même graphique, dans le plan (OX, OY), solidaire du plateau tournant :

1. Le plateau, les positions de Luke et Leia ;
2. L'allure (approchée) de la projection de la trajectoire du ballon dans le plan (OX, OY) dans le référentiel tournant ;
3. La projection du vecteur vitesse initial au moment où Leia lance le ballon ;
4. Pour un point quelconque de la trajectoire noté M, les projections dans le plan (OX, OY) des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis, ainsi que de la vitesse du ballon.

Pour cette question, pour simplifier la représentation, vous pourrez prendre $v_{0,x} = 2R\Omega$ *et* $v_{0,y} = 0$. *Nous vous suggérons de calculer les positions du ballon à* $t = 0$, $t = \pi/4\Omega$, $t = \pi/2\Omega$ *et* $t = \pi/\Omega$.

Voir figure 4. Le code Mathematica utilisé pour la réalisation des figures 3 et 4 sera mis à disposition sur la page Moodle de l'UE.

Compléments. Comme le référentiel $\mathcal{R}'$ lié plateau tournant est en rotation à vitesse angulaire constante Ω par rapport au référentiel $\mathcal{R}$, on peut exprimer les vecteurs du trièdre $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ lié au plateau en fonction des vecteurs $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ de la base liée au référentiel $\mathcal{R}$:

$$\begin{cases} \mathbf{i} &= \cos\Omega t\,\mathbf{e}_x + \sin\Omega t\,\mathbf{e}_y \\ \mathbf{j} &= -\sin\Omega t\,\mathbf{e}_x + \cos\Omega t\,\mathbf{e}_y \\ \mathbf{k} &= \mathbf{e}_z \end{cases}$$

En exprimant le vecteur position $\mathbf{r}$ dans les deux repères : $\mathbf{r} = x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y + z\,\mathbf{e}_z = X\,\mathbf{i} + Y\,\mathbf{j} + Z\,\mathbf{k}$, et en substituant, on établit la transformation géométrique entre les deux systèmes de coordonnées,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Omega t & -\sin\Omega t & 0 \\ \sin\Omega t & \cos\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Omega t & \sin\Omega t & 0 \\ -\sin\Omega t & \cos\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

En appliquant cette transformation à la trajectoire $(x(t), y(t), z(t))$ du ballon calculée dans le référentiel $\mathcal{R}$, on obtient directement les coordonnées du ballon et sa trajectoire dans le référentiel $\mathcal{R}'$ du plateau tournant :

$$\begin{cases} x(t) = & v_{0,x}t - R \\ y(t) = & (v_{0,y} - R\Omega)t \\ z(t) = & v_{0,z}t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X(t) = & (v_{0,x}t - R)\cos\Omega t + (v_{0,y} - R\Omega)t\sin\Omega t \\ Y(t) = & (v_{0,y} - R\Omega)t\cos\Omega t - (v_{0,x}t - R)\sin\Omega t \\ Z(t) = & v_{0,z}t - \dfrac{1}{2}gt^2. \end{cases}$$

On remarque notamment que la projection de la trajectoire sur le plan Oxy est une droite, qui se transforme en une spirale dans le plan OXY lié au plateau tournant.

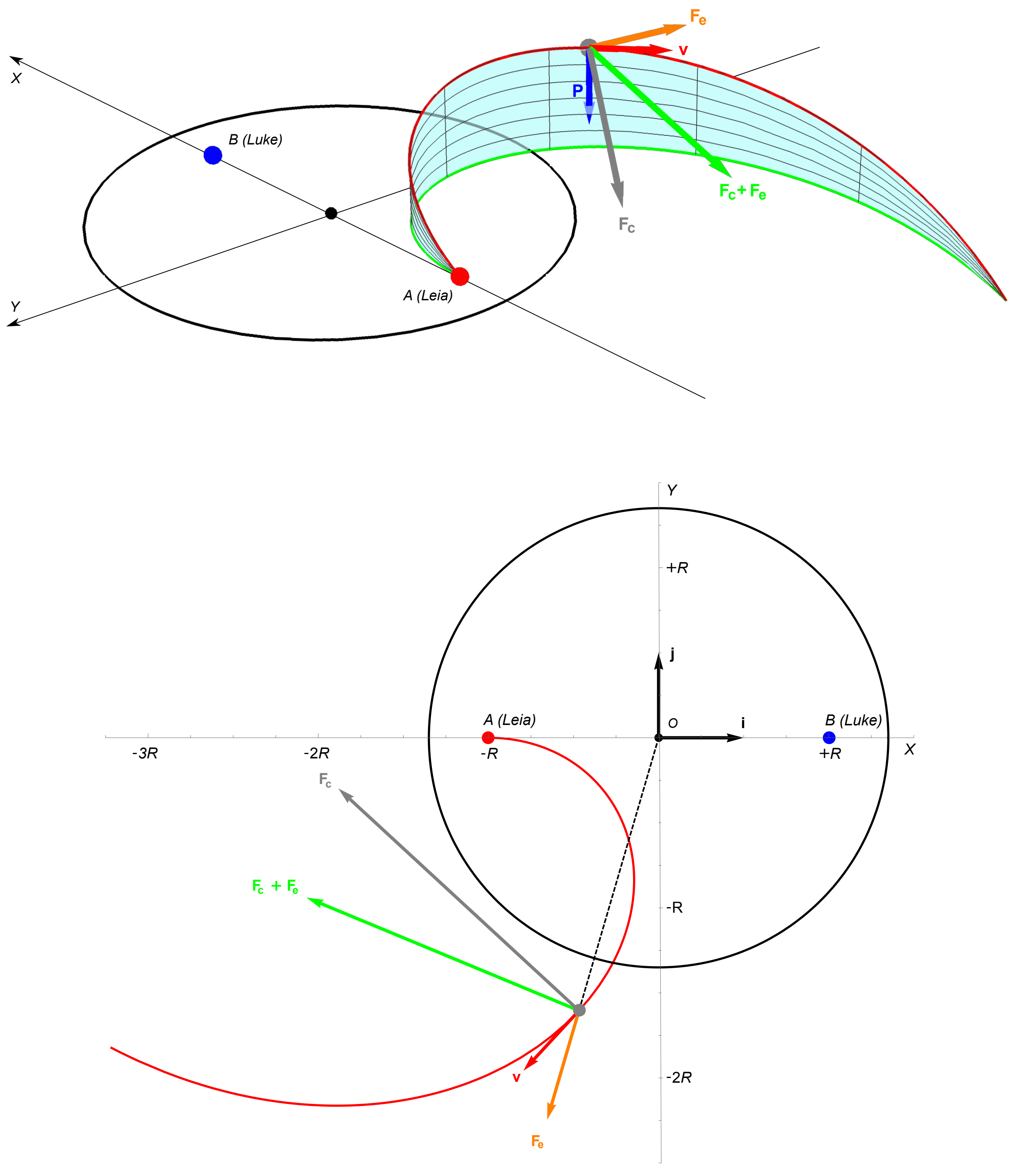


FIGURE 4 – *En haut : trajectoire du ballon vue dans le référentiel tournant. Le point rouge indique la position de Leia, et le point bleu celle de Luke, à un instant donné. Le centre du plateau est marqué par le point noir. Les coordonnées indiquées sur le graphique sont celles du repère cartésien lié au référentiel tournant $\mathcal{R}'$. On constate qu'avec les conditions initiales données, le ballon atterrit hors du plateau. Cette observation est cohérente par rapport à celle observée par Han dans le référentiel $\mathcal{R}$. On a représenté également les différentes forces qui s'appliquent au ballon ainsi que son vecteur vitesse (en rouge) à un instant t arbitraire : force d'inertie d'entraînement (orange), force d'inertie de Coriolis (en gris), somme des forces d'inertie (en vert) et poids (en bleu). En bas : projection de cette trajectoire dans le plan (OXY).*

Rappels : transformation de la vitesse et de l'accélération entre un référentiel galiléen et un référentiel non-galiléen. Soient deux référentiels : un premier référentiel $\mathcal{R}$, galiléen (ou inertiel), et un second référentiel $\mathcal{R}'$, animé d'un mouvement quelconque par rapport à $\mathcal{R}$ et par conséquent non galiléen. On appelle O et O' les origines choisies dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, respectivement. De plus, on note $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ le vecteur vitesse angulaire instantané de rotation du référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$.

Considérons un point matériel M en mouvement quelconque, dont la position à chaque instant dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ est repérée par les vecteurs positions $\mathbf{r}(t) = \mathbf{OM}(t)$ et $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{O'M}(t)$ respectivement.

Si on note $\mathbf{u}(t)$ la vitesse instantanée de M mesurée dans le référentiel $\mathcal{R}$, et $\mathbf{u}'(t)$ sa vitesse instantanée mesurée cette fois dans $\mathcal{R}'$, ces deux vitesses se déduisent l'une de l'autre par la relation :

$$\mathbf{u}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} \qquad \mathbf{u}'(t) = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{O'M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'}$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}_{O'/\mathcal{R}} + \mathbf{u}'(t) + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{O'M}.$$

Si on note $\mathbf{a}(t)$ l'accélération de M dans le référentiel $\mathcal{R}$, et $\mathbf{a}'(t)$ son accélération dans $\mathcal{R}'$, on aura, en dérivant la relation précédente (et en utilisant la relation de Varignon),

$$\mathbf{a}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}} \qquad \mathbf{a}'(t) = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{O'M}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}'} \qquad \mathbf{a}(t) = \mathbf{a}'(t) + \mathbf{a}_\mathrm{e} + \mathbf{a}_\mathrm{c}$$

où les termes d'accélération supplémentaires sont ***l'accélération d'entraînement*** $\mathbf{a}_\mathrm{e}$ et ***l'accélération de Coriolis*** $\mathbf{a}_\mathrm{c}$ qui s'écrivent respectivement :

$$\mathbf{a}_\mathrm{e} = \mathbf{a}_{\mathrm{e}/\mathcal{R}} = \mathbf{a}(O'/\mathcal{R}) + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \left(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{O'M}\right) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{O'M} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{a}_\mathrm{c} = 2\,\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{u}'$$