

**EXAMEN — CORRIGÉ**

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2022–2023

Lundi 9 janvier 2023 – 11h-13h

**[Total : 44 pts]**

**1. La découverte du neutron**

**[18 pts]**

*Vous traiterez cet exercice dans le cadre de la relativité restreinte. Pour cet exercice, on notera  $v$  (de norme  $v$ ) la vitesse d'une particule dans le référentiel du laboratoire, car on réservera la lettre  $u$  pour l'une des trois variables  $\{s, u, t\}$  de Mandelstam (voir ci-après).*

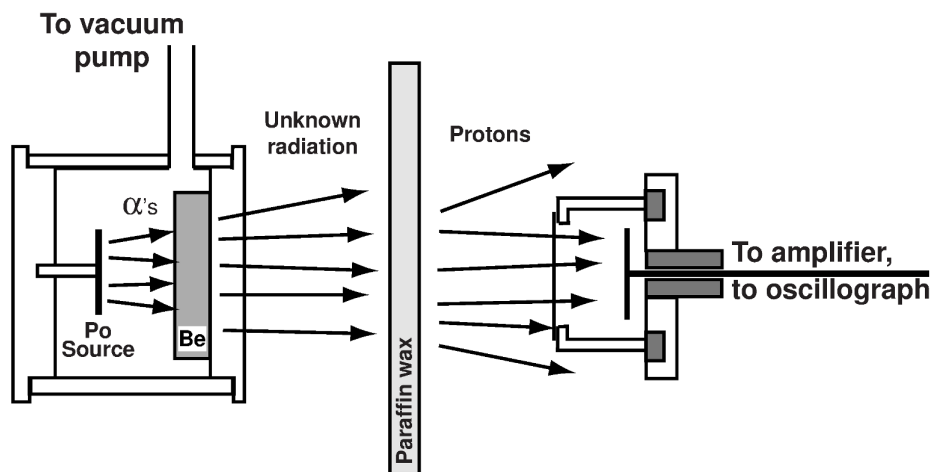


FIGURE 1 – Schéma de l'expérience réalisée par James Chadwick en 1932. Les alphas produits par un mélange de  $^{210}\text{Pb}$ ,  $^{210}\text{Bi}$  et  $^{210}\text{Po}$  interagissent dans une plaque de béryllium  $^9\text{Be}$  et produisent un rayonnement inconnu. Ce rayonnement produit des protons en interagissant sur un écran de cire de paraffine (matériau riche en hydrogène). Les protons sont détectés avec une chambre d'ionisation. Dans l'exercice, nous étudierons l'hypothèse où le rayonnement inconnu est constitué de photons (Source : Wikipedia).

En 1930, Walther Bothe (1891–1957) et Herbert Becker<sup>1</sup> découvrent qu'un rayonnement est émis lorsque les  $\alpha$  (noyaux d'hélium  $^4_2\text{He}$ ) émis par une source radioactive entrent en collision avec des matériaux légers comme le béryllium (Be), le bore (B) ou le lithium (Li) (fig. 1). Les expériences menées sont simples : les différents matériaux sont placés entre une source alpha et un détecteur à gaz.

1. W. Bothe & H. Becker, "Künstliche Erregung von Kern- $\gamma$ -Strahlen", *Zeitschrift für Physik*, volume 66, 289–306 (1930)

La fenêtre d'entrée du détecteur est choisie suffisamment épaisse pour stopper les alphas mais Bothe et Becker observent pourtant une augmentation<sup>2</sup> du taux de comptage lorsque les plaques de Be, B ou Li sont présentes. Ils montrent également que le rayonnement n'est pas sensiblement atténué par des plaques de plomb, et que le taux de comptage obtenu ne change pas en présence d'un champ électrique, ce qui semble indiquer que le rayonnement émis est constitué de particules dépourvues de charge électrique. **Compte tenu des connaissances de l'époque, Bothe et Becker émettent donc l'hypothèse que le rayonnement produit est constitué de photons.** Dans cet exercice, nous allons analyser cette hypothèse.

On considère dans un premier temps une collision quelconque d'une particule  $a$  sur une particule  $b$ , produisant deux particules éventuellement différentes  $c$  et  $d$  dans l'état final. On peut donc écrire cette collision sous la forme :  $a + b \rightarrow c + d$ . On note  $\tilde{\mathbf{P}}_a, \tilde{\mathbf{P}}_b, \tilde{\mathbf{P}}_c, \tilde{\mathbf{P}}_d$  les quadri-vecteurs énergie-impulsion des particules et  $m_a, m_b, m_c, m_d$  leurs masses respectives. On pose :

$$\begin{aligned} s &= (\tilde{\mathbf{P}}_a + \tilde{\mathbf{P}}_b)^2, \\ t &= (\tilde{\mathbf{P}}_a - \tilde{\mathbf{P}}_c)^2, \\ u &= (\tilde{\mathbf{P}}_a - \tilde{\mathbf{P}}_d)^2, \end{aligned}$$

appelées *variables de Mandelstam*, du nom du physicien Stanley Mandelstam (1928–2016) qui a proposé leur utilisation en 1958 pour décrire l'interaction de pions avec des noyaux atomiques. Ces variables sont très utilisées lors de l'analyse des réactions à deux corps en physique des particules.

2 pts

**1.1** — Rappelez la définition du quadri-vecteur énergie-impulsion  $\tilde{\mathbf{P}}$  d'une particule de masse  $m$  dont le quadri-vecteur vitesse est notée  $\tilde{\mathbf{U}}$ . Vous donnerez les composantes contravariantes  $P^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) de  $\tilde{\mathbf{P}}$ , la pseudo-norme carrée de  $\tilde{\mathbf{P}}$ , ainsi que les différentes relations remarquables vues en cours qui font intervenir le facteur de Lorentz  $\gamma(\mathbf{v})$ , l'énergie totale  $E$ , la masse  $m$ , la vitesse  $\mathbf{v}$  de la particule, le facteur  $\beta = \mathbf{v}/c$  et l'énergie cinétique relativiste de la particule, notée  $T$ .

Précisez aussi le *genre* du quadrivecteur énergie-impulsion, pour une particule massive.

On construit le quadrivecteur énergie-impulsion (ou quadri-impulsion)  $\tilde{\mathbf{P}}$  comme suit, par analogie avec la mécanique classique :

$$\tilde{\mathbf{P}} = m \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\tau} = m\tilde{\mathbf{U}}$$

Ses composantes contravariantes s'écrivent :

$$P^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(\mathbf{v})mc \\ \gamma(\mathbf{v})m\mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c = \gamma(\mathbf{v})mc \\ \mathbf{p} = \gamma(\mathbf{v})m\mathbf{v} \end{pmatrix} \quad \text{avec } E \text{ l'énergie totale de l'objet étudié.}$$

Dans ces relations,  $m$  est la masse propre de l'objet (c'est à dire sa masse au repos),  $\gamma(\mathbf{v})m > m$  est en quelque sorte sa "masse apparente", appelée aussi "masse relativiste", et  $E = \gamma(\mathbf{v})mc^2$  son énergie totale, somme de son énergie de masse ou énergie au repos  $E_0 = mc^2$  et de son énergie cinétique  $T = E - mc^2 = (\gamma(\mathbf{v}) - 1)mc^2$ .

La pseudo-norme carrée de  $\tilde{\mathbf{P}}$  vaut  $\tilde{\mathbf{P}}^2 = m^2 c^2 = (mc^2)^2/c^2$ .

Les composantes de  $\tilde{\mathbf{P}}$  vérifient les relations suivantes, très utiles :

$$\tilde{\mathbf{P}}^2 = m^2 c^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 \quad \text{i.e.} \quad E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

2. Cette augmentation est due aux neutrons qui interagissent avec le gaz du détecteur, mais Bothe et Becker ignorent alors leur existence.

$$\beta = \frac{\mathbf{P}}{p^0} = \frac{\mathbf{p}c}{E} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{E}{mc^2}$$

Pour une particule massive, on a  $\tilde{\mathbf{P}}^2 = m^2 c^2 > 0$  : le quadrivecteur énergie-impulsion est de *genre temps*.

- 2 pts** 1.2 — Rappelez l'expression des composantes contravariantes du quadrivecteur énergie-impulsion pour un photon, en fonction de sa fréquence  $\nu$  et de son vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . Que vaut la masse au repos d'un photon? Précisez aussi le *genre* du quadrivecteur énergie-impulsion pour un photon.

Un photon de fréquence  $\nu$  possède une énergie  $E_\gamma = h\nu$ , où  $h$  est la constante de Planck. Il possède aussi une quantité de mouvement  $\hbar \mathbf{k}$ , où  $\hbar = h/2\pi$  et où  $\mathbf{k}$  est son vecteur d'onde. La norme de  $\mathbf{k}$  vaut  $k = |\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$ , où  $\lambda = c/\nu$  est la longueur d'onde du photon.

Les composantes contravariantes du quadrivecteur énergie-impulsion  $\tilde{\mathbf{P}}$  d'un photon s'écrivent ainsi :

$$\tilde{\mathbf{P}} : P^\mu = \begin{pmatrix} \frac{h\nu}{c} \\ \hbar \mathbf{k} \end{pmatrix}.$$

La masse au repos d'un photon est nulle ; il est en fait impossible de considérer un photon au repos, et on ne peut définir le référentiel propre d'un photon.

Pour un photon, la pseudo norme  $\tilde{\mathbf{P}}^2 = (h\nu/c)^2 - (\hbar \mathbf{k})^2 = 0$  : le quadrivecteur énergie-impulsion d'un photon est donc assez logiquement de *genre lumière*.

- 1 pt** 1.3 — Exprimez la conservation du quadri-vecteur énergie-impulsion total au cours d'une collision de type  $a + b \rightarrow c + d$ .

La conservation du quadri-vecteur énergie-impulsion total au cours de la collision s'écrit

$$\tilde{\mathbf{P}}_a + \tilde{\mathbf{P}}_b = \tilde{\mathbf{P}}_c + \tilde{\mathbf{P}}_d.$$

- 1 pt** 1.4 — Quelle est la particularité des variables  $s$ ,  $t$  et  $u$ ? Comment se comportent ces grandeurs lors d'un changement de référentiel?

Comme  $\tilde{\mathbf{P}}_a, \tilde{\mathbf{P}}_b, \tilde{\mathbf{P}}_c, \tilde{\mathbf{P}}_d$  sont des quadri-vecteurs, les différentes sommes et différences  $\tilde{\mathbf{P}}_a + \tilde{\mathbf{P}}_b, \tilde{\mathbf{P}}_a - \tilde{\mathbf{P}}_c$  et  $\tilde{\mathbf{P}}_a - \tilde{\mathbf{P}}_d$  sont aussi des quadrivecteurs ;  $s$ ,  $t$  et  $u$  sont donc les pseudo-normes carrées de quadrivecteurs. Ce sont par conséquent des invariants relativistes.

- 1 pt** 1.5 — Indiquez la relation qui existe entre la variable de Mandelstam  $s$ , la masse invariante  $M^*$  du système formé par les particules  $a$  et  $b$ , et l'énergie totale  $E^*$  disponible dans le référentiel du centre de masse de ce système de deux particules.

Comme par définition  $s = (\tilde{\mathbf{P}}_a + \tilde{\mathbf{P}}_b)^2$ , l'identification est immédiate :

$$s = (\tilde{\mathbf{P}}_a + \tilde{\mathbf{P}}_b)^2 = (M^*)^2 c^2 = \frac{(E^*)^2}{c^2}.$$

- 2 pts** 1.6 — Montrez que  $s + t + u = (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2)c^2$ .

On exprime la somme et on développe les termes au carré :

$$s + t + u = \tilde{\mathbf{P}}_a^2 + \tilde{\mathbf{P}}_b^2 + 2\tilde{\mathbf{P}}_a \cdot \tilde{\mathbf{P}}_b + \tilde{\mathbf{P}}_a^2 + \tilde{\mathbf{P}}_c^2 - 2\tilde{\mathbf{P}}_a \cdot \tilde{\mathbf{P}}_c + \tilde{\mathbf{P}}_a^2 + \tilde{\mathbf{P}}_d^2 - 2\tilde{\mathbf{P}}_a \cdot \tilde{\mathbf{P}}_d.$$

On peut regrouper les termes pour obtenir :

$$s + t + u = \tilde{\mathbf{P}}_a^2 + \tilde{\mathbf{P}}_b^2 + \tilde{\mathbf{P}}_c^2 + \tilde{\mathbf{P}}_d^2 + 2\tilde{\mathbf{P}}_a \cdot \underbrace{\left( \tilde{\mathbf{P}}_a + \tilde{\mathbf{P}}_b - \tilde{\mathbf{P}}_c - \tilde{\mathbf{P}}_d \right)}_{=0}.$$

Du fait de la conservation du quadri-vecteur énergie-impulsion total (question 2), le terme entre parenthèses est nul, ce qui donne la relation attendue :

$$s + t + u = m_a^2 c^2 + m_b^2 c^2 + m_c^2 c^2 + m_d^2 c^2.$$

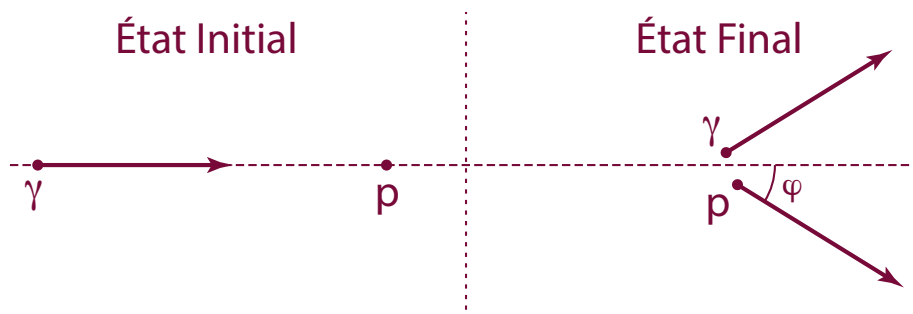
On souhaite déterminer l'énergie maximale qu'un photon (noté  $\gamma$ ) pourrait transférer à un proton (noté  $p$ ) dans le cadre d'une diffusion (ou choc) élastique d'équation bilan :

$$p + \gamma \rightarrow p + \gamma.$$

Les particules  $b$  et  $d$  seront ici un proton (noté  $p$ ), et les particules  $a$  et  $c$  seront des photons (notés  $\gamma$ ). On note  $E_\gamma$  l'énergie du photon incident,  $E'_\gamma$  l'énergie du photon diffusé (le photon après le choc),  $E'_p$  l'énergie totale du proton après la collision,  $T'_p$  son énergie cinétique et  $m_p$  sa masse au repos. On suppose en plus que dans l'état initial, le proton cible (particule  $b$ ) est au repos dans le référentiel du laboratoire.

Attention : ici les lettres non primées représentent les grandeurs avant la collision du photon sur le proton, dans le référentiel du laboratoire, et les lettres primées les mêmes grandeurs après la collision, dans le même référentiel.

- 1 pt** 1.7 — Représentez sur un schéma la situation avant le choc avec le photon incident et le proton au repos, puis la situation après le choc avec le photon et le proton diffusés. On notera  $\varphi$  l'angle entre la trajectoire du proton après la collision et celle du photon incident ( $\varphi$  est l'angle de diffusion du proton).



- 3 pts** 1.8 — Écrivez les composantes des quadri-vecteurs  $\tilde{\mathbf{P}}_a, \tilde{\mathbf{P}}_b, \tilde{\mathbf{P}}_c, \tilde{\mathbf{P}}_d$  dans le référentiel du laboratoire et montrez que

$$s + t + u = 4m_p^2 c^2 + 2m_p (E_\gamma - E'_\gamma) - 2(E_\gamma E'_\gamma / c^2 - \mathbf{p}_\gamma \cdot \mathbf{p}'_p).$$

Vous détaillerez les étapes de votre raisonnement et de votre calcul. On remarquera que l'énergie du photon diffusé ( $E'_\gamma$ ) n'intervient pas dans cette expression. C'est voulu dans la mesure où cette quantité n'est pas mesurée expérimentalement.

L'expression que l'on souhaite obtenir fait intervenir la masse du proton, les énergies et les vecteurs quantité de mouvement. Exprimons les composantes contravariantes des quadrivecteurs dans le référentiel du laboratoire :

$$\tilde{\mathbf{P}}_a : P_a^\mu = \begin{pmatrix} E_\gamma/c \\ \mathbf{p}_\gamma \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{P}}_b : P_b^\mu = \begin{pmatrix} m_p c \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{P}}_c : P_c^\mu = \begin{pmatrix} E'_\gamma/c \\ \mathbf{p}'_\gamma \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{P}}_d : P_d^\mu = \begin{pmatrix} E'_p/c \\ \mathbf{p}'_p \end{pmatrix}$$

À partir des expressions des variables de Mandelstam  $s, t$  et  $u$ , on obtient

$$s + t + u = (\tilde{\mathbf{P}}_a + \tilde{\mathbf{P}}_b)^2 + (\tilde{\mathbf{P}}_a - \tilde{\mathbf{P}}_c)^2 + (\tilde{\mathbf{P}}_a - \tilde{\mathbf{P}}_d)^2.$$

Or, il nous faut éliminer  $\tilde{\mathbf{P}}_c$  dans cette expression car c'est l'énergie du proton de recul qui nous intéresse. On utilise donc la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total en écrivant

$$\tilde{\mathbf{P}}_c = \tilde{\mathbf{P}}_a + \tilde{\mathbf{P}}_b - \tilde{\mathbf{P}}_d.$$

On obtient donc

$$s + t + u = (\tilde{\mathbf{P}}_a + \tilde{\mathbf{P}}_b)^2 + (\tilde{\mathbf{P}}_d - \tilde{\mathbf{P}}_b)^2 + (\tilde{\mathbf{P}}_a - \tilde{\mathbf{P}}_d)^2.$$

On développe l'expression obtenue :

$$s + t + u = \tilde{\mathbf{P}}_a^2 + \tilde{\mathbf{P}}_b^2 + 2\tilde{\mathbf{P}}_a \cdot \tilde{\mathbf{P}}_b + \tilde{\mathbf{P}}_d^2 + \tilde{\mathbf{P}}_b^2 - 2\tilde{\mathbf{P}}_d \cdot \tilde{\mathbf{P}}_b + \tilde{\mathbf{P}}_a^2 + \tilde{\mathbf{P}}_d^2 - 2\tilde{\mathbf{P}}_a \cdot \tilde{\mathbf{P}}_d.$$

Or,  $\tilde{\mathbf{P}}_a^2 = 0$  car il s'agit d'un photon;  $\tilde{\mathbf{P}}_b^2 = \tilde{\mathbf{P}}_d^2 = m_p^2 c^2$ ;  $\tilde{\mathbf{P}}_a \cdot \tilde{\mathbf{P}}_b = E_\gamma m_p$ ;  $\tilde{\mathbf{P}}_d \cdot \tilde{\mathbf{P}}_b = E'_p m_p$  et  $\tilde{\mathbf{P}}_a \cdot \tilde{\mathbf{P}}_d = E_\gamma E'_p/c^2 - \mathbf{p}_\gamma \cdot \mathbf{p}'_p$ . On obtient donc bien l'expression :

$$s + t + u = 4 m_p^2 c^2 + 2 m_p (E_\gamma - E'_p) - 2 (E_\gamma E'_p/c^2 - \mathbf{p}_\gamma \cdot \mathbf{p}'_p).$$

**1 pt** 1.9 — Exprimez le produit scalaire  $\mathbf{p}_\gamma \cdot \mathbf{p}'_p$  en fonction de  $T'_p, E_\gamma, m_p$  et  $\varphi$ .

Pour le photon incident, on a directement  $\|\mathbf{p}_\gamma\| = E_\gamma/c$ . Pour le proton après diffusion,

$$\|\mathbf{p}'_p\| = \frac{1}{c} \sqrt{E_p'^2 - m_p^2 c^4} = \frac{1}{c} \sqrt{(E'_p - m_p c^2)(E'_p + m_p c^2)} = \frac{1}{c} \sqrt{T'_p (T'_p + 2 m_p c^2)}.$$

On trouve donc

$$\mathbf{p}_\gamma \cdot \mathbf{p}'_p = \frac{E_\gamma}{c^2} \sqrt{T'_p (T'_p + 2 m_p c^2)} \cos \varphi.$$

**2 pts** 1.10 — En déduire que l'énergie cinétique maximale du proton après la collision, notée  $T'_{\max}$  vaut

$$T'_{\max} = \frac{2 E_\gamma^2}{m_p c^2 + 2 E_\gamma}. \tag{1}$$

Comme  $s + t + u = (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2) c^2$ , on obtient facilement que

$$s + t + u = 2 m_p^2 c^2.$$

D'autre part, on a  $E'_p = T'_p + m_p c^2$ , ce qui donne l'expression

$$(m_p c^2 + E_\gamma) T'_p = E_\gamma \cos \varphi \sqrt{T'_p (T'_p + 2 m_p c^2)}.$$

Cela permet d'obtenir l'expression générale suivante pour  $T'_p$  :

$$T'_p = \frac{2 E_\gamma^2 m_p c^2 \cos^2 \varphi}{(m_p c^2 + E_\gamma)^2 - E_\gamma^2 \cos^2 \varphi}.$$

Cette expression est maximale pour  $\varphi = 0$ , ce qui donne finalement

$$T'_{\max} = \frac{2 E_\gamma^2}{m_p c^2 + 2 E_\gamma}.$$

Dans l'article "*The Existence of a neutron*"<sup>3</sup> James Chadwick (1891–1974) décrit ses mesures de l'énergie cinétique des protons après la collision avec le rayonnement neutre du béryllium. Il trouve une valeur maximale de  $T'_{\max} = 5.7$  MeV.

**2 pts** 1.11 — Quelle énergie devraient avoir des photons incidents pour expliquer une telle valeur ? Vous ferez l'application numérique. Dans la nature, l'énergie des photons gamma issus de la désexcitation des noyaux n'excède pas une dizaine de MeV. Le rayonnement neutre inconnu peut-il être constitué de photons ?

A partir de l'équation (1), on peut obtenir l'énergie des photons. Il suffit de résoudre l'équation du second degré suivante :

$$2 E_\gamma^2 - 2 E_\gamma T'_{\max} - m_p c^2 T'_{\max} = 0.$$

Le discriminant est  $\Delta = 4 (T'_{\max}{}^2 + 2 m_p c^2 T'_{\max}) > 0$ , et la seule solution physiquement possible est :

$$E_\gamma = \frac{T'_{\max} + \sqrt{T'_{\max} (T'_{\max} + 2 m_p c^2)}}{2}.$$

En prenant  $m_p \approx 938$  MeV/ $c^2$ , l'application numérique donne  $E_\gamma \approx 54.63$  MeV.

Les photons gamma d'origine nucléaire ont une énergie maximale typique qui n'excède pas la dizaine de MeV. On n'a donc aucun argument réellement valable pour rendre compte de photons cinq ou six fois plus énergétiques créés par des interactions nucléaires de type  $\alpha + \text{Be}$ , à moins de renoncer à la conservation de l'énergie. Le rayonnement neutre inconnu n'est donc pas constitué de photons.

Dans le même article, Chadwick montre que tous les faits expérimentaux collectés jusque-là sont compatibles avec l'idée que le rayonnement inconnu est en fait composé de particules neutres massives ayant une masse très proche de celle des protons.<sup>4</sup> Chadwick mesure cette masse et l'estime entre 1.005 u et 1.008 u en 1932. La même année, il propose l'existence du neutron, particule neutre électriquement, qui est la seule manière d'expliquer tous les résultats expérimentaux obtenus jusque-là. Il confirmera sa découverte en 1935 et obtiendra le prix Nobel de physique la même année.<sup>5</sup>

**Données numériques :**  $m_p = 938.272$  MeV/ $c^2 \approx 938$  MeV/ $c^2$ .

3. James Chadwick, *The Existence of a neutron*, *Proceedings of the Royal Society*, A. 136 (830), 692–708, 1932

4. En particulier, Irène et Frédéric Joliot-Curie montrent en 1932 que le rayonnement neutre du béryllium est capable d'éjecter des protons avec une énergie importante lorsqu'ils bombardent un matériau riche en hydrogène comme la cire de paraffine. Dès lors, considérer que le rayonnement inconnu était constitué de photons était difficilement tenable (Mme Irène Curie et M. Frédéric Joliot, "*Emission de protons de grande vitesse par les substances hydrogénées sous l'influence de rayons  $\gamma$  très pénétrants*", *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 194 (1932), 273-275).

5. Prix Nobel de Physique 1935 : James Chadwick, "for the discovery of the neutron" <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1935/>

## 2. Effet Doppler transverse : l'expérience d'Ives-Stilwell

[26 pts]

### L'effet Doppler en mécanique classique

Vous traiterez cette première partie de l'exercice dans le cadre de la mécanique classique. Vous veillerez dans vos notations à distinguer lisiblement les fréquences, notées par la lettre grecque  $\nu$  ("nu"), et les vitesses, notées  $v$ .

L'effet Doppler, aussi appelé effet Doppler-Fizeau, est le décalage de fréquence que l'on observe lorsqu'il existe un mouvement relatif entre la source d'une onde et le récepteur de cette même onde. Le phénomène s'observe pour des ondes mécaniques, comme les ondes sonores, comme pour les ondes électromagnétiques.

En mécanique classique, on décrit en général l'effet Doppler en se plaçant dans le référentiel (supposé galiléen) du milieu de propagation de l'onde : l'air ou l'eau par exemple pour des ondes sonores, ou encore l'éther lumineux, l'hypothétique support matériel des ondes lumineuses, dans une description pré-relativiste, antérieure à la formulation de la relativité restreinte.

On notera  $c$  la vitesse de propagation des ondes considérées dans le milieu (mécaniques ou lumineuses), et  $\mathbf{c}$  le vecteur vitesse associé pour une direction donnée de propagation de l'onde ; on notera aussi  $\mathbf{v}_E$  le vecteur vitesse de l'émetteur (source) mesuré dans le référentiel du milieu de propagation, et  $\mathbf{v}_R$  le vecteur vitesse du récepteur, lui aussi mesuré dans le référentiel du milieu. Enfin,  $\nu_E$  sera la fréquence émise par la source,  $\lambda_E$  la longueur d'onde associée ;  $\nu_R$  la fréquence de l'onde reçue par le récepteur, et  $\lambda_R$  la longueur d'onde correspondante (fig. 2).

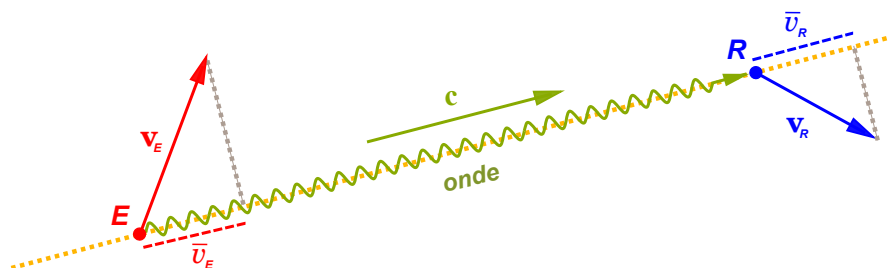


FIGURE 2 – Description classique de l'effet Doppler, pour une onde de nature quelconque.  $\mathbf{v}_E$  est le vecteur vitesse de l'émetteur et  $\mathbf{v}_R$  celui du récepteur, mesuré dans le référentiel du milieu de propagation.  $c$  est la vitesse de propagation de l'onde.  $\bar{v}_E$  et  $\bar{v}_R$  sont les projections algébriques des vitesses  $\mathbf{v}_E$  et  $\mathbf{v}_R$  sur la direction de propagation de l'onde.

En raisonnant en mécanique classique, dans le cadre galiléen, on obtient la relation suivante entre fréquence émise  $\nu_E$  et fréquence reçue  $\nu_R$  :

$$\nu_R = \frac{c - \bar{v}_R}{c - \bar{v}_E} \nu_E = \frac{1 - \bar{v}_R/c}{1 - \bar{v}_E/c} \nu_E \tag{2}$$

où  $\bar{v}_E$  et  $\bar{v}_R$  sont les projections algébriques (i.e. positives ou négatives) des vecteurs vitesses  $\mathbf{v}_E$  et  $\mathbf{v}_R$  sur la direction de propagation de l'onde (fig. 2) :

$$\bar{v}_E = \frac{\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{c}}{c} = \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{e}_c \quad \text{et} \quad \bar{v}_R = \frac{\mathbf{v}_R \cdot \mathbf{c}}{c} = \mathbf{v}_R \cdot \mathbf{e}_c \quad \text{avec} \quad \mathbf{e}_c = \frac{\mathbf{c}}{c}$$

Dans le référentiel du milieu de propagation, supposé galiléen, on considère une source  $E$  (par exemple, sonore) en mouvement à la vitesse  $\mathbf{v}_E = v \mathbf{e}_x$  avec  $v > 0$ .

- 1 pt** 2.1 — Supposons que cette source émette une onde de fréquence  $\nu_E$ , par exemple sonore, qui se propage vers l'avant (direction des  $x$  positifs), et que l'onde soit reçue par un récepteur immobile  $R$  situé sur l'axe des  $x$ , en avant de la source. Faites un schéma. Écrivez dans ce cas l'expression de la fréquence  $\nu_R$  de la même onde, du point de vue du récepteur ? Exprimez  $\lambda_R$  en fonction de  $\lambda_E$ ,  $v$  et  $c$ . Qu'observe-t-on ?

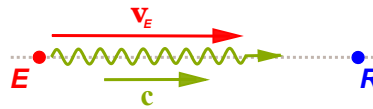


FIGURE 3 – Cas d'une onde émise vers l'avant par la source  $E$  en mouvement, et reçue par un récepteur  $R$  immobile placé à l'avant.

Dans cette configuration (fig. 3), on aura :

$$\mathbf{c} = c \mathbf{e}_x \quad \mathbf{v}_E = v \mathbf{e}_x \quad \mathbf{v}_R = \mathbf{0}.$$

Par conséquent,

$$\bar{v}_E = \frac{\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{c}}{c} = v \quad \bar{v}_R = 0 \quad \text{d'où} \quad \nu_R = \frac{c - 0}{c - v} \nu_E = \frac{1}{1 - v/c} \nu_E \geq \nu_E.$$

Comme la fréquence  $\nu$  et la longueur d'onde  $\lambda$  se déduisent l'une de l'autre par  $\lambda = c/\nu$ , on obtient :

$$\lambda_R = \frac{c - v}{c} \lambda_E = \left(1 - \frac{v}{c}\right) \lambda_E \leq \lambda_E.$$

Comme la source  $E$  se rapproche du récepteur, la fréquence  $\nu_R$  du signal perçue par le récepteur est supérieure à la fréquence émise  $\nu_E$ , et la longueur d'onde  $\lambda_R$  reçue est inférieure à la longueur d'onde émise  $\lambda_E$ .

- 1 pt** 2.2 — Faites de même, pour la même source  $E$  se déplaçant à la même vitesse  $\mathbf{v}_E = v \mathbf{e}_x$ , mais cette fois pour une onde se propageant vers l'arrière vers un récepteur  $R$ , immobile, situé en arrière de la source (vers les  $x$  négatifs). Faites un second schéma. Exprimez de nouveau  $\nu_R$  en fonction de  $\nu_E$ ,  $v$  et  $c$ ; puis  $\lambda_R$  en fonction de  $\lambda_E$ ,  $v$  et  $c$ . Commentez.

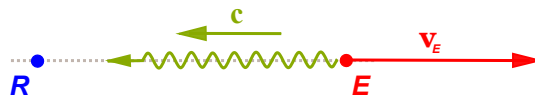


FIGURE 4 – Cas d'une onde émise vers l'arrière par la source  $E$  en mouvement, et reçue par un récepteur  $R$  immobile placé en arrière de la source.

Cette fois, on a (voir fig. 4) :

$$\mathbf{c} = -c \mathbf{e}_x \quad \mathbf{v}_E = v \mathbf{e}_x \quad \mathbf{v}_R = \mathbf{0}.$$

Par conséquent,

$$\bar{v}_E = \frac{\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{c}}{c} = -v \quad \bar{v}_R = 0 \quad \text{d'où} \quad \nu_R = \frac{c - 0}{c + v} \nu_E = \frac{1}{1 + v/c} \nu_E \leq \nu_E.$$



On en déduit la relation entre les longueurs d’ondes émise et reçue :

$$\lambda_R = \frac{c + v}{c} \lambda_E = \left(1 + \frac{v}{c}\right) \lambda_E \geq \lambda_E.$$

Comme la source  $E$  s’éloigne cette fois du récepteur, la fréquence  $\nu_R$  pour le récepteur est inférieure à la fréquence émise  $\nu_E$ , et la longueur d’onde  $\lambda_R$  reçue est supérieure à la longueur d’onde émise  $\lambda_E$ .

**1 pt** 2.3 — Supposons que le récepteur soit toujours immobile, mais situé sur une droite à angle droit avec la direction du mouvement de la source. Supposons de plus que l’onde soit émise exactement lorsque la direction émetteur-source est perpendiculaire à la direction du mouvement de la source (fig. 5).

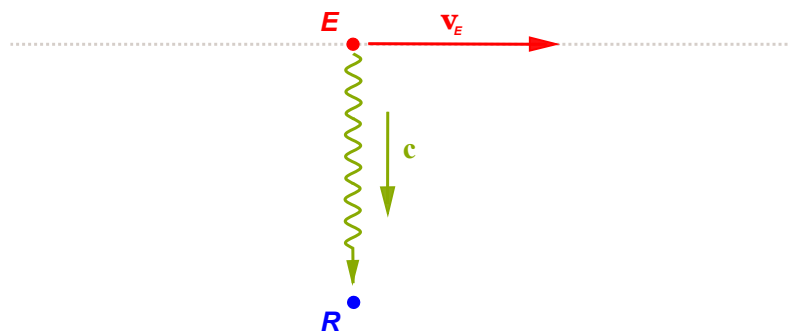


FIGURE 5 – Cas d’une onde émise par la source  $E$  en mouvement, lorsque l’onde se propage perpendiculairement à la direction du mouvement.

Que valent alors la fréquence  $\nu_R$  et la longueur d’onde  $\lambda_R$  de l’onde reçue par  $R$ ? Commentez.

Dans cette configuration dite “transverse”, comme l’onde se propage perpendiculairement à la direction du mouvement de la source  $E$ , et que d’autre part le récepteur  $R$  est immobile, on a (fig. 5) :

$$\bar{v}_E = \frac{\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{c}}{c} = 0 \quad \bar{v}_R = 0 \quad \text{d’où} \quad \nu_R = \frac{c - 0}{c - 0} \nu_E = \nu_E.$$

Comme  $\nu_R = \nu_E$ , on a aussi  $\lambda_R = \lambda_E$  : la fréquence et la longueur d’onde apparaissent inchangés pour le récepteur  $R$ .

**1 pt** 2.4 — Supposons maintenant que l’onde soit émise selon une direction formant un angle  $\theta$  avec  $\mathbf{v}_E$  (fig. 6) vers l’avant. Que valent alors  $\nu_R$  et  $\lambda_R$  (configuration 1 sur la figure 6)? Même question pour un angle  $\theta$ , mais vers l’arrière (configuration 2 sur la figure 6)?

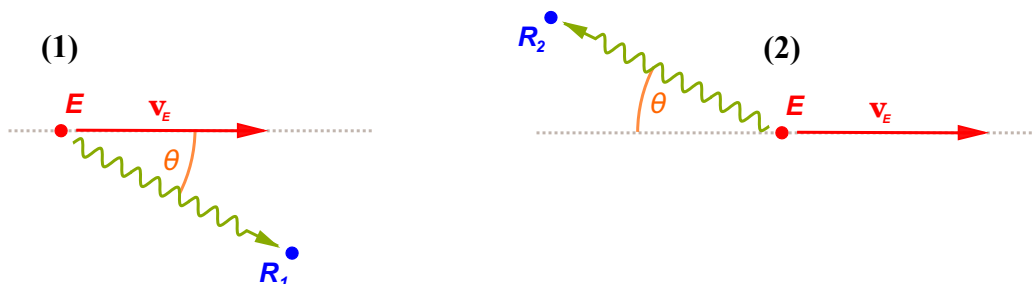


FIGURE 6 – Cas d’une onde émise selon un angle  $\theta$  vers l’avant (configuration 1, à gauche), et d’une onde émise selon un angle  $\theta$  mais vers l’arrière (configuration 2, à droite).

Dans la configuration 1 (fig. 6), on a :

$$\bar{v}_E = \frac{\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{c}}{c} = +v \cos \theta \quad \bar{v}_R = 0 \quad \text{d'où} \quad \nu_R = \frac{c}{c - v \cos \theta} \nu_E = \frac{1}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta} \nu_E \geq \nu_E.$$

On en déduit la relation entre les longueurs d'ondes émise et reçue :

$$\lambda_R = \frac{c - v \cos \theta}{c} \lambda_E = \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right) \lambda_E \leq \lambda_E.$$

Dans la seconde configuration (fig. 6), on a cette fois :

$$\bar{v}_E = \frac{\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{c}}{c} = -v \cos \theta \quad \bar{v}_R = 0 \quad \text{d'où} \quad \nu_R = \frac{c}{c + v \cos \theta} \nu_E = \frac{1}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta} \nu_E \leq \nu_E.$$

Et par conséquent,

$$\lambda_R = \frac{c + v \cos \theta}{c} \lambda_E = \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta\right) \lambda_E \geq \lambda_E.$$

- 1 pt** 2.5 — Si on note  $\lambda_{R_1}$  la longueur d'onde pour le récepteur dans la configuration 1, et  $\lambda_{R_2}$  la longueur d'onde pour le récepteur dans la configuration 2, que vaut la moyenne des deux longueurs d'ondes  $\lambda_{R_1}$  et  $\lambda_{R_2}$ ? Commentez.

D'après ce qui précède, on a :

$$\lambda_{R_1} = \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right) \lambda_E \quad \text{et} \quad \lambda_{R_2} = \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta\right) \lambda_E.$$

La moyenne des deux longueurs d'onde vaut par conséquent :

$$\lambda_{\text{moy}} = \frac{\lambda_{R_1} + \lambda_{R_2}}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta + 1 + \frac{v}{c} \cos \theta\right) \lambda_E = \lambda_E.$$

On remarque ainsi que quelle que soit la valeur de l'angle  $\theta$ , la moyenne des longueurs d'onde reçues par deux récepteurs immobiles diamétralement opposés est égale à la longueur d'onde d'émission  $\lambda_E$  de la source.

### Effet Doppler relativiste pour les ondes électromagnétiques

*Vous traiterez cette partie et tout le reste de l'exercice dans le cadre de la relativité restreinte.*

Les expériences de Michelson-Morley et de Trouton-Noble ayant échoué à mettre en évidence le vent d'éther, la description classique de l'effet Doppler ne fonctionne plus pour les ondes électromagnétiques, notamment parce qu'il devient impossible de considérer le référentiel du milieu de propagation<sup>6</sup>. Les ondes électromagnétiques, en particulier la lumière, se propagent dans le vide à la vitesse  $c = 299\,792\,458\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  dans tous les référentiels galiléens. La description classique de l'effet Doppler ne permet donc pas de rendre compte de ce qu'on observe pour les ondes électromagnétiques, notamment pour la lumière.

On souhaite établir ici la loi de l'effet Doppler relativiste, dans le cas le plus général, pour un photon se propageant selon une direction quelconque.

**1 pt** 2.6 — Rappelez l'expression du quadrivecteur énergie-impulsion  $\tilde{\mathbf{P}}$  pour un photon de fréquence  $\nu$  et de longueur d'onde  $\lambda$  : vous donnerez l'expression des composantes contravariantes  $P^\mu$  dans le cas le plus général (vous ne ferez pour l'instant aucune hypothèse sur la direction de propagation du photon). Que vaut  $\tilde{\mathbf{P}}^2$  pour un photon ?

Dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , le quadrivecteur énergie-impulsion  $\tilde{\mathbf{P}}$  d'un photon peut s'écrire :

$$\tilde{\mathbf{P}} = \hbar \tilde{\mathbf{k}} \quad P^\mu = \hbar k^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h\nu/c \\ \hbar \mathbf{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h\nu/c \\ \hbar k_x \\ \hbar k_y \\ \hbar k_z \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{P}}^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 - (\hbar \mathbf{k})^2 = 0.$$

où  $\mathbf{k}$  est le vecteur d'onde du photon, dont la norme vaut  $\|\mathbf{k}\| = 2\pi/\lambda = 2\pi\nu/c$ ;  $\tilde{\mathbf{k}} : k^\mu = (2\pi\nu/c, \mathbf{k})$  est son quadrivecteur d'onde ;  $h$  est la constante de Planck, et  $\hbar = h/2\pi$  la constante de Planck réduite.

Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire, supposé galiléen, on considère une source de lumière  $E$  en translation uniforme à la vitesse  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{E/\mathcal{R}} = v \mathbf{e}_x$ . On notera  $\mathcal{R}'$  le référentiel solidaire de la source  $E$ . Cette source peut émettre dans toutes les directions des photons de fréquence  $\nu_E = \nu'$  et de longueur d'onde  $\lambda_E = \lambda'$ . On suppose que l'émission se produit dans le vide.

On considère un photon émis par la source  $E$ , pour lequel la direction de propagation est contenue dans le plan  $(E, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$  et qui fait dans le référentiel  $\mathcal{R}$  un angle  $\theta$  avec la direction du mouvement de la source (direction de  $\mathbf{v}_E$ , selon  $\mathbf{e}_x$  ici). Cet angle sera noté  $\theta$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire et  $\theta'$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  de la source.

**2 pts** 2.7 — Donnez l'expression des composantes contravariantes  $P'^\mu$  du quadrivecteur énergie-impulsion d'un photon émis par cette source, dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  de la source  $E$ , en fonction de  $\nu_E = \nu'$ ,  $\lambda_E = \lambda'$  et  $\theta'$ . En utilisant la transformation de Lorentz, déduisez-en les expressions des composantes contravariantes  $P^\mu$  du quadrivecteur énergie-impulsion du même photon, mais vu dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire.

Vous donnerez les composantes  $P^\mu$  en fonction de  $\nu_E = \nu'$ ,  $\lambda_E = \lambda'$  et  $\theta$ .

Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  de la source  $E$ , le photon considéré se propage dans le plan  $(E, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$  selon un angle  $\theta'$  par rapport à la direction  $\mathbf{e}_x$ . Son vecteur d'onde  $\mathbf{k}'$  a donc pour composantes :

$$k'_x = k' \cos \theta' \quad k'_y = k' \sin \theta' \quad k'_z = 0.$$

6. Puisque le milieu de propagation hypothétique, l'éther luminifère, n'existe pas.

Les composantes contravariantes  $P'^{\mu}$  de son quadrivecteur énergie-impulsion s'écrivent par conséquent :

$$P'^{\mu} = \begin{pmatrix} E'/c \\ \hbar k'_x \\ \hbar k'_y \\ \hbar k'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h\nu'/c \\ \hbar k' \cos \theta' \\ \hbar k' \sin \theta' \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire, on peut se convaincre que la direction de propagation du photon est aussi dans le plan  $(E, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ , car la transformation de Lorentz n'affecte pas les composantes des quadrivecteurs orthogonales à la direction du mouvement relatif entre les référentiels. On peut ainsi paramétrer la direction de son vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  par l'angle  $\theta$  que fait le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  avec la direction  $\mathbf{e}_x$  (direction du mouvement de la source dans  $\mathcal{R}$ ). On aura alors :

$$k_x = k \cos \theta \quad k_y = k \sin \theta \quad k_z = 0.$$

Avec cette convention, les composantes contravariantes  $P^{\mu}$  du quadrivecteur énergie-impulsion du même photon s'écrivent :

$$P^{\mu} = \begin{pmatrix} E/c \\ \hbar k_x \\ \hbar k_y \\ \hbar k_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h\nu/c \\ \hbar k \cos \theta \\ \hbar k \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les composantes  $P'^{\mu}$  et  $P^{\mu}$  sont liées par la transformation de Lorentz entre les référentiels  $\mathcal{R}$  du laboratoire et  $\mathcal{R}'$  de la source :

$$\begin{pmatrix} P'^0 \\ P'^1 \\ P'^2 \\ P'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^0 \\ P^1 \\ P^2 \\ P^3 \end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \quad \begin{pmatrix} h\nu'/c \\ \hbar k' \cos \theta' \\ \hbar k' \sin \theta' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h\nu/c \\ \hbar k \cos \theta \\ \hbar k \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

et, réciproquement,

$$\begin{pmatrix} P^0 \\ P^1 \\ P^2 \\ P^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P'^0 \\ P'^1 \\ P'^2 \\ P'^3 \end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \quad \begin{pmatrix} h\nu/c \\ \hbar k \cos \theta \\ \hbar k \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h\nu'/c \\ \hbar k' \cos \theta' \\ \hbar k' \sin \theta' \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

avec  $\beta = v/c$  et  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ .

De (4), en utilisant  $k' = 2\pi/\lambda' = 2\pi\nu'/c$ , on déduit :

$$\begin{cases} P^0 = \frac{h\nu}{c} = \gamma \frac{h\nu'}{c} + \beta\gamma \hbar k' \cos \theta' = \gamma \frac{h\nu'}{c} (1 + \beta \cos \theta') \\ P^1 = \hbar k \cos \theta = \beta\gamma \frac{h\nu'}{c} + \gamma \hbar k' \cos \theta' = \gamma \frac{h\nu'}{c} (\beta + \cos \theta') \\ P^2 = \hbar k \sin \theta = \hbar k' \sin \theta' \\ P^3 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Réciproquement, de (3), en utilisant  $k = 2\pi/\lambda = 2\pi\nu/c$ , on obtient les relations :

$$\begin{cases} P'^0 &= \frac{h\nu'}{c} = \gamma \frac{h\nu}{c} - \beta\gamma\hbar k \cos\theta = \gamma \frac{h\nu}{c} (1 - \beta \cos\theta) \\ P'^1 &= \hbar k' \cos\theta' = -\beta\gamma \frac{h\nu}{c} + \gamma\hbar k \cos\theta = \gamma \frac{h\nu}{c} (\cos\theta - \beta) \\ P'^2 &= \hbar k' \sin\theta' = \hbar k \sin\theta \\ P'^3 &= 0 \end{cases} \quad (6)$$

**2 pts** 2.8 — Déduisez-en l'expression de la fréquence  $\nu = \nu_R$  du photon mesurée dans le référentiel du laboratoire, en fonction de sa fréquence  $\nu' = \nu_E$  mesurée dans le référentiel de la source, de  $v$ ,  $c$  et de l'angle  $\theta$ . Montrez qu'on obtient :

$$\nu_R = \frac{1}{\gamma(v)} \frac{1}{1 - \beta \cos\theta} \nu_E \quad \text{avec} \quad \nu_R = \nu \quad \nu_E = \nu' \quad \text{et} \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (7)$$

Vous détaillerez les étapes de votre raisonnement et de votre calcul.

À partir de la première équation de (6), on obtient la relation entre  $\nu$  et  $\nu'$  :

$$\frac{h\nu'}{c} = \gamma \frac{h\nu}{c} - \beta\gamma\hbar k \cos\theta = \gamma \frac{h\nu}{c} (1 - \beta \cos\theta) \quad \text{d'où} \quad \nu' = \nu\gamma (1 - \beta \cos\theta)$$

Ce qui donne, en identifiant  $\nu' = \nu_E$  (référentiel  $\mathcal{R}'$  de la source, ici l'ion en mouvement) et  $\nu = \nu_R$  (référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire) :

$$\nu = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 - \beta \cos\theta} \nu' \quad \text{i.e.} \quad \nu_R = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 - \beta \cos\theta} \nu_E \quad (8)$$

L'expression est similaire au résultat classique, mais avec un facteur relativiste  $1/\gamma$  supplémentaire.

**1 pt** 2.9 — Quelle relation lie les angles  $\theta$  et  $\theta'$  ?

D'après la seconde équation de (6), en utilisant  $\hbar k' = h\nu'/c$ ,

$$\begin{aligned} \hbar k' \cos\theta' &= -\beta\gamma \frac{h\nu}{c} + \gamma\hbar k \cos\theta = \gamma \frac{h\nu}{c} (\cos\theta - \beta) \\ \frac{h\nu'}{c} \cos\theta' &= \gamma \frac{h\nu}{c} (\cos\theta - \beta) \end{aligned}$$

On en déduit l'expression de l'angle  $\theta'$  que fait la direction de propagation du photon dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  de la source, en fonction du même angle  $\theta$  mesuré dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire :

$$\cos\theta' = \frac{\gamma\nu (\cos\theta - \beta)}{\nu'} = \frac{\gamma\nu (\cos\theta - \beta)}{\gamma\nu (1 - \beta \cos\theta)} = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta \cos\theta}.$$

**1 pt** 2.10 — De la relation (7), déduisez l'expression de la longueur d'onde reçue  $\lambda_R = \lambda$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire en fonction de la longueur d'onde émise  $\lambda_E = \lambda'$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  de la source, de  $v$ ,  $c$  et de l'angle  $\theta$ .

D'après la relation (7) entre les fréquences  $\nu_R = \nu$  et  $\nu_E = \nu'$ , comme la longueur d'onde se déduit de la fréquence par  $\lambda = c/\nu$ , on obtient immédiatement :

$$\lambda_R = \frac{c}{\nu_R} = \gamma(1 - \beta \cos\theta) \frac{c}{\nu_E} \quad \text{i.e.} \quad \lambda_R = \gamma(1 - \beta \cos\theta) \lambda_E. \quad (9)$$

**2 pts** 2.11 — Dans le cas particulier où le photon est émis vers l'avant (selon  $+e_x$ ), que valent alors  $\nu_R = \nu$  et  $\lambda_R = \lambda$ ? Et lorsque le photon est émis vers l'arrière (selon  $-e_x$ )?

Pour un photon se propageant vers l'avant, on a  $\theta = 0$  et  $\cos \theta = 1$ . Sa fréquence  $\nu_R$  et sa longueur d'onde  $\lambda_R$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire valent alors :

$$\nu_R = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 - \beta} \nu_E = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta} \nu_E = \nu_E \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \geq \nu_E \quad \text{et} \quad \lambda_R = \lambda_E \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \leq \lambda_E.$$

Si maintenant le photon se propage vers l'arrière, on a  $\theta = \pi$  et  $\cos \theta = -1$ . La fréquence  $\nu_R$  et la longueur d'onde  $\lambda_R$  du photon dans  $\mathcal{R}$  deviennent :

$$\nu_R = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 + \beta} \nu_E = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta} \nu_E = \nu_E \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \leq \nu_E \quad \text{et} \quad \lambda_R = \lambda_E \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \geq \lambda_E.$$

**1 pt** 2.12 — Pour un photon émis par la source en mouvement, et qui se propage dans  $\mathcal{R}$  à angle droit avec la direction de déplacement de la source (autrement dit, pour  $\theta = \pi/2$ ), que valent respectivement sa fréquence  $\nu = \nu_R$  et sa longueur d'onde  $\lambda = \lambda_R$  dans le référentiel du laboratoire? Comparez avec le résultat obtenu en mécanique classique (première partie). Commentez.

Si le photon se propage à angle droit dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire par rapport au mouvement de la source dans  $\mathcal{R}$ , on a alors  $\theta = \pi/2$  et  $\cos \theta = 0$ . Dans ce cas,

$$\nu_R = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 - 0} \nu_E = \frac{\nu_E}{\gamma} \quad \text{et} \quad \lambda_R = \gamma \lambda_E.$$

Dans la description classique de l'effet Doppler, il n'y a pas de changement de fréquence et de longueur d'onde lorsqu'on observe la source dans la direction perpendiculaire à son mouvement. La relativité prédit que dans cette configuration, dite "transverse", la fréquence émise est modifiée par un facteur  $1/\gamma$  pour l'observateur dans le référentiel du laboratoire, et la longueur d'onde est augmentée d'un facteur  $\gamma$ . On interprète cet effet comme la conséquence du ralentissement de l'horloge de la source, qui mesure le *temps propre*  $\tau$  de la source, par rapport à l'horloge du laboratoire.

### Expérience de Ives et Stilwell

L'effet Doppler relativiste dit "transverse" est une prédiction de la théorie de la relativité restreinte : pour une source de lumière (ou plus généralement d'ondes électromagnétiques) en mouvement dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , la longueur d'onde perçue dans  $\mathcal{R}$  selon la direction orthogonale au mouvement est affectée d'un facteur  $\gamma(v)$ . On interprète cet effet comme la conséquence du ralentissement de l'horloge de la source<sup>7</sup> en mouvement par rapport à l'horloge du laboratoire (effet de dilatation du temps).

Expérimentalement, la mesure est très délicate : il faut disposer d'une source de lumière possédant une vitesse  $v$  suffisante pour que le facteur  $(\gamma(v) - 1)$  ne soit pas trop faible; de plus, le moindre écart angulaire avec la direction perpendiculaire au mouvement de la source introduit un facteur dû à l'effet Doppler longitudinal, qui domine rapidement et rend la mesure très difficile en pratique.

7. Horloge qui mesure le *temps propre* de la source  $E$ .

À la fin des années 1930, Herbert E. Ives (1882–1953) et G. R. Stilwell, travaillant tous deux aux *Bell Telephone Laboratories*<sup>8</sup> construisent une expérience dédiée à la mise en évidence de l'effet Doppler relativiste transverse.<sup>9</sup> Pour ce faire, ils conçoivent un dispositif (fig. 7) leur permettant de produire un faisceau d'ions hydrogène de vitesse bien définie : une fois accélérés, ces ions se déplacent en ligne droite et finissent par se recombiner avec un électron et se désexcitent en émettant de la lumière, selon des fréquences et des longueurs d'onde bien définies liées aux propriétés de l'atome d'hydrogène (raies atomiques de l'hydrogène). L'objectif premier du dispositif est de mesurer la longueur d'onde des photons émis par ces ions en mouvement, afin, *in fine*, de mettre en évidence l'effet Doppler transverse.

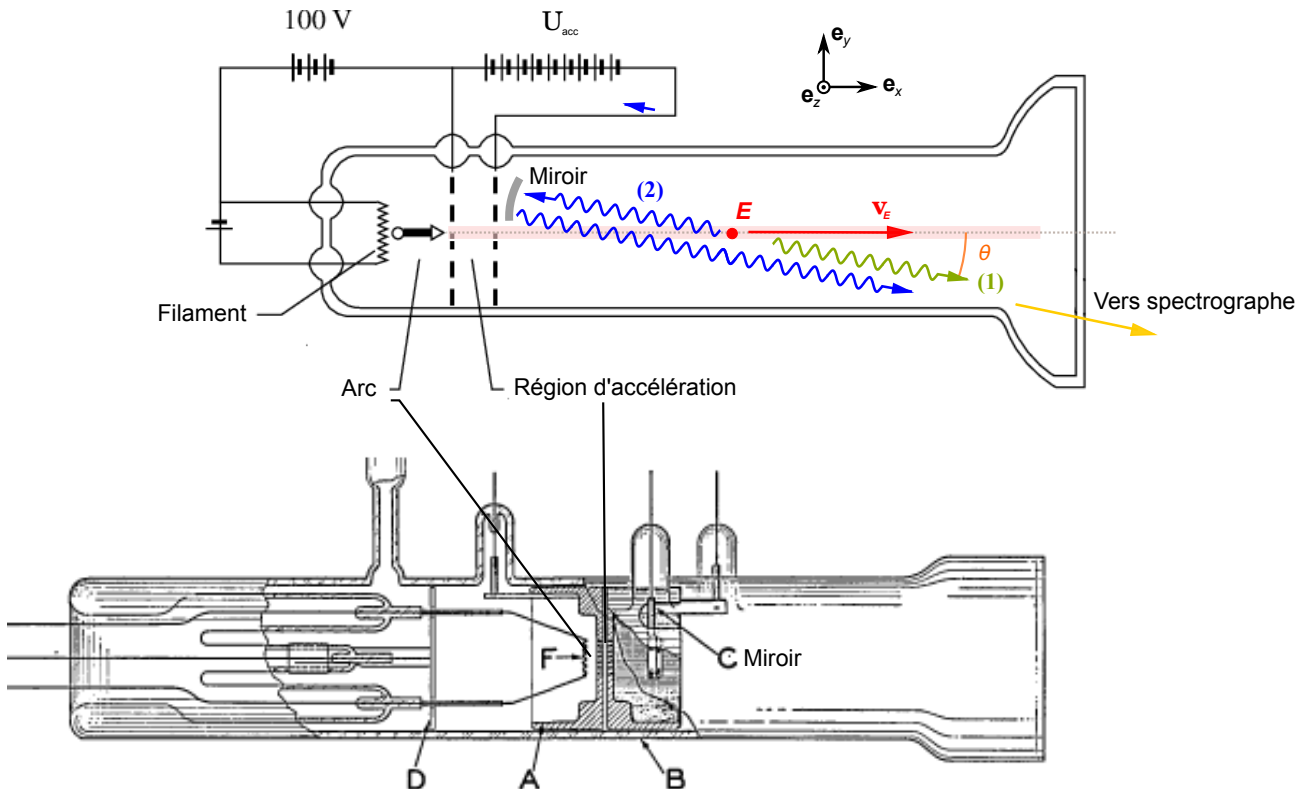


FIGURE 7 – (Haut) Schéma de principe de l'expérience de Ives et Stilwell : en vert (1), les photons émis dans la direction de la fente d'entrée du spectrographe; en bleu, les photons émis dans la direction opposée, qui se réfléchissent sur le miroir avant d'entrer dans le spectrographe. (Bas) Gravure représentant l'enceinte (en verre) construite pour l'expérience de Ives et Stilwell.

Dans une enceinte en verre contenant un peu d'hydrogène sous très faible pression, les ions hydrogène sont produits par un arc électrique; ils sont ensuite accélérés par l'application d'un champ électrique intense entre deux électrodes perforées, champ produit en appliquant une tension électrique importante  $U_{acc}$  entre les deux électrodes (fig. 7). La tension accélératrice  $U_{acc}$  est de l'ordre de plusieurs milliers à plusieurs dizaines de milliers de volts.

Une fois passée la seconde électrode, les ions (ici des ions dihydrogène  $H_2^+$  et des ions trihydrogène  $H_3^+$ ) se déplacent en ligne droite avec une vitesse  $v$  constante, fonction uniquement de la tension accélératrice  $U_{acc}$  appliquée et de la masse de l'ion. L'expérience est menée pour différentes valeurs

8. Les célèbres "Bell Labs", où seront notamment inventés le transistor et le laser.

9. H. E. Ives et G. R. Stilwell, *An experimental study of the rate of a moving atomic clock*, *The Journal of Optical Society of America*, vol. 28, no 7, 1938. et Herbert E. Ives et G. R. Stilwell, *An experimental study of the rate of a moving clock II*, *Journal of the Optical Society of America*, vol. 31, 1941, p. 369-374.

de tension.

- 1 pt** 2.13 — Pour un objet de masse  $m$  au repos et de vitesse  $v$ , rappelez l'expression de son énergie totale  $E$ , de son énergie de masse (énergie au repos), et de son énergie cinétique relativiste  $T$ , en fonction de sa vitesse  $v$ .

Pour un objet de masse  $m$  (au repos) et de vitesse  $\mathbf{v}$  (norme  $v$ ) dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , son énergie totale s'écrit :

$$E = \gamma(\mathbf{v}) mc^2 \quad \text{avec} \quad \gamma(\mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

L'énergie totale  $E$  est la somme de son énergie de masse ou énergie au repos  $E_0 = mc^2$  et de son énergie cinétique  $T = E - mc^2 = (\gamma(\mathbf{v}) - 1)mc^2$ .

- 1 pt** 2.14 — En écrivant l'expression de la force de Lorentz, on montre que l'énergie cinétique relativiste  $T$  acquise pendant la phase d'accélération entre les deux électrodes s'écrit  $T = qU_{\text{acc}}$ , où  $q$  est la charge électrique de l'ion, et  $U_{\text{acc}}$  la haute tension appliquée entre les électrodes. Montrez que la vitesse  $v$  de l'ion ainsi accéléré vérifie :

$$\gamma(v) - 1 = \frac{qU_{\text{acc}}}{mc^2} \quad (10)$$

À la fin de la phase d'accélération entre les deux électrodes, l'ion possède une énergie cinétique relativiste  $T = qU_{\text{acc}}$ . En identifiant avec l'expression générale de  $T$ , on obtient immédiatement :

$$T = E - mc^2 = (\gamma(\mathbf{v}) - 1)mc^2 = qU_{\text{acc}} \quad \text{d'où} \quad \gamma(\mathbf{v}) - 1 = \gamma(v) - 1 = \frac{qU_{\text{acc}}}{mc^2}.$$

- 2 pts** 2.15 — Déduisez-en l'expression de la vitesse  $v$  et du rapport  $\beta = v/c$  de l'ion en fonction de sa masse  $m$  et de la tension  $U_{\text{acc}}$  choisie. Faites l'application numérique pour  $\gamma(v) - 1$ ,  $\beta = v/c$  et  $v$  pour un ion dihydrogène  $\text{H}_2^+$ , et pour un ion trihydrogène  $\text{H}_3^+$ .

De l'expression du facteur relativiste  $\gamma(v)$ , on déduit  $\beta = v/c$  et la vitesse  $v$  de l'ion à l'issue de la phase d'accélération :

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 1 + \frac{qU_{\text{acc}}}{mc^2} \quad 1 - \beta^2 = \left(1 + \frac{qU_{\text{acc}}}{mc^2}\right)^{-2} \quad \beta^2 = 1 - \left(1 + \frac{qU_{\text{acc}}}{mc^2}\right)^{-2}$$

d'où,

$$\beta = \sqrt{1 - \left(1 + \frac{qU_{\text{acc}}}{mc^2}\right)^{-2}} \quad v = c \sqrt{1 - \left(1 + \frac{qU_{\text{acc}}}{mc^2}\right)^{-2}}$$

Numériquement, pour  $U_{\text{acc}} = 13560 \text{ V}$  et pour les ions  $\text{H}_2^+$ , on obtient :

$$m(\text{H}_2^+) = 2.016 \text{ u} \approx 1877.9 \text{ MeV}/c^2 \quad \frac{qU_{\text{acc}}}{mc^2} \approx \frac{1 e \times 13560 \text{ V}}{1877.9 \text{ MeV}} \approx 7.221 \times 10^{-6}$$

$$\gamma(v) - 1 \approx 7.221 \times 10^{-6} \quad \beta \approx 0.00380 \quad v \approx 1.14 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Pour les ions  $\text{H}_3^+$ , plus lourds, on trouve :

$$m(\text{H}_3^+) = 3.02 \text{ u} \approx 2814 \text{ MeV}/c^2 \quad \frac{qU_{\text{acc}}}{mc^2} \approx \frac{1 e \times 13560 \text{ V}}{2814 \text{ MeV}} \approx 4.82 \times 10^{-6}$$

$$\gamma(v) - 1 \approx 4.82 \times 10^{-6} \quad \beta \approx 0.00310 \quad v \approx 9.31 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$



Pendant leur trajet, les ions finissent par capturer l'électron qui leur manque<sup>10</sup> et émettent de la lumière en se désexcitant, selon le spectre de raies atomiques caractéristiques de l'atome d'hydrogène. Ives et Stilwell choisissent d'observer l'émission associée à la raie H $\beta$  de l'hydrogène, de longueur d'onde  $\lambda_E = 486.074$  nm dans le référentiel propre de l'ion.

Afin de tester la prédiction de l'effet Doppler transverse, on serait tenté d'essayer de mesurer la longueur d'onde des photons émis perpendiculairement par rapport au faisceau d'ions. En pratique, il est très difficile de se placer exactement à angle droit avec la direction du faisceau d'ions, et même une très faible erreur angulaire fausserait complètement la mesure<sup>11</sup>.

Afin de contourner cette difficulté, Ives et Stilwell choisissent une stratégie différente : ils décident d'observer un point particulier du faisceau d'ions sous un angle  $\theta$  de 7 degrés par rapport au faisceau, et de mesurer la longueur d'onde des photons émis dans cette direction au moyen d'un spectrographe de très grandes dimensions, leur donnant ainsi une grande précision dans la mesure des longueurs d'onde (de l'ordre de 0.00025 nm en répétant les mesures). De plus, ils placent à l'intérieur de l'enceinte de verre un petit miroir qui leur permet d'observer simultanément les photons émis à 7 degrés du faisceau et les photons émis dans la direction opposée, qui se réfléchissent sur le miroir et parviennent aussi dans la fente d'entrée du spectrographe (figures 7 et 9).

**2 pts** 2.16 — Pour les photons émis vers l'avant à  $\theta = 7$  degrés du faisceau (fig. 7, configuration (1)), d'après l'expression générale de l'effet Doppler relativiste, que vaut la longueur d'onde mesurée dans le référentiel du laboratoire ? Vous donnerez l'expression littérale en fonction de  $\lambda_E$  et  $v$ . Application numérique pour un ion H $_2^+$  et pour un ion H $_3^+$ .

D'après l'expression obtenue précédemment pour l'effet Doppler relativiste, pour les photons émis vers l'avant avec un angle de  $\theta = 7$  degrés par rapport au faisceau des ions, la fréquence  $\nu_{R_1}$  et la longueur d'onde  $\lambda_{R_1}$  mesurées dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire sont :

$$\nu_{R_1} = \frac{1}{\gamma(v)} \frac{1}{1 - \beta \cos \theta} \nu_E \quad \text{et} \quad \lambda_{R_1} = \gamma (1 - \beta \cos \theta) \lambda_E.$$

Numériquement, pour une émission selon la raie H $\beta$  ( $\lambda_E = 486.074$  nm, ce qui correspond à une fréquence  $\nu_E = c/\lambda_E \approx 6.16763 \times 10^{14}$  Hz), pour un angle  $\theta = 7$  degrés et pour un ion H $_2^+$ , on obtient :

$$\gamma (1 - \beta \cos \theta) \approx 0.996235 \quad \nu_{R_1} = \frac{\nu_E}{\gamma(v) (1 - \beta \cos \theta)} \approx 6.19094 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

et, pour la longueur d'onde :

$$\lambda_{R_1} = \gamma(v) (1 - \beta \cos \theta) \lambda_E \approx 484.244 \text{ nm.}$$

Pour un ion H $_3^+$ , on a cette fois :

$$\gamma (1 - \beta \cos \theta) \approx 0.996923 \quad \nu_{R_1} \approx 6.18667 \times 10^{14} \text{ Hz} \quad \lambda_{R_1} \approx 484.578 \text{ nm.}$$

**2 pts** 2.17 — Pour les photons émis vers l'arrière à  $\theta = 7$  degrés du faisceau (fig. 7, configuration (2)), qui se réfléchissent dans le miroir puis parviennent au spectrographe, que vaut cette fois la longueur

10. En l'arrachant à l'une des rares molécules présentes dans l'enceinte, le vide y étant imparfait.

11. La contribution de l'effet Doppler longitudinal dominerait alors complètement la mesure.

d'onde mesurée dans le référentiel du laboratoire? Comme précédemment, vous donnerez l'expression littérale en fonction de  $\lambda_E$  et  $v$ . Application numérique pour un ion  $\text{H}_2^+$  et pour un ion  $\text{H}_3^+$ .

Dans ce cas, les expressions pour  $\nu_{R_2}$  et  $\lambda_{R_2}$  sont similaires, mais l'angle que fait la direction du photon avec le faisceau est l'angle *supplémentaire* de  $\theta = 7^\circ$ , ce qui donne :

$$\nu_{R_2} = \frac{1}{\gamma(v)} \frac{1}{1 - \beta \cos(\pi - \theta)} \nu_E = \frac{1}{\gamma(v)} \frac{1}{1 + \beta \cos \theta} \nu_E \quad \text{et} \quad \lambda_{R_2} = \gamma(1 + \beta \cos \theta) \lambda_E.$$

Pour un ion  $\text{H}_2^+$ , cela donne :

$$\gamma(1 + \beta \cos \theta) \approx 1.003779 \quad \nu_{R_2} = \frac{\nu_E}{\gamma(v)(1 + \beta \cos \theta)} \approx 6.14441 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

et, pour la longueur d'onde :

$$\lambda_{R_2} = \gamma(v)(1 + \beta \cos \theta) \lambda_E \approx 487.911 \text{ nm}.$$

Pour l'ion  $\text{H}_3^+$  :

$$\gamma(1 + \beta \cos \theta) \approx 1.003087 \quad \nu_{R_2} \approx 6.14865 \times 10^{14} \text{ Hz} \quad \lambda_{R_2} \approx 487.574 \text{ nm}.$$

Ives et Stilwell mesurent simultanément avec leur spectrographe la longueur d'onde des photons émis à  $\theta = 7^\circ$  vers l'avant et celle des photons émis dans la direction opposée et qui se reflètent dans le miroir. Ils calculent ensuite la moyenne de ces deux longueurs d'onde.

**2 pts** 2.18 — Écrivez l'expression littérale de la moyenne  $\lambda_{\text{moy}}$  de ces deux longueurs d'onde. Commentez. Donnez l'expression de l'écart  $\Delta'\lambda = \lambda_{\text{moy}} - \lambda_E$  entre la position nominale de la raie et la position  $\lambda_{\text{moy}}$  du barycentre des raies décalées vers le rouge et vers le bleu.

Application numérique pour  $\theta = 7^\circ$ , la raie  $\text{H}\beta$ , pour un ion  $\text{H}_2^+$  et pour un ion  $\text{H}_3^+$ .

La moyenne  $\lambda_{\text{moy}}$  des longueurs d'onde mesurées pour le photon émis vers le spectrographe d'une part, et pour le photon émis dans la direction opposée, qui se réfléchit dans le miroir et parvient au spectrographe d'autre part, s'écrit :

$$\lambda_{\text{moy}} = \frac{\lambda_{R_1} + \lambda_{R_2}}{2} = \frac{1}{2} \gamma(v) \left( 1 - \frac{v}{c} \cos \theta + 1 + \frac{v}{c} \cos \theta \right) \lambda_E = \gamma(v) \lambda_E.$$

Contrairement au traitement classique, cette longueur d'onde moyenne est aussi affectée d'un facteur relativiste  $\gamma(v)$ . On note que comme dans le cas classique, l'expression de  $\lambda_{\text{moy}}$  ne dépend pas de l'angle  $\theta$ .

Expérimentalement, Ives et Stilwell mesurent l'écart  $\Delta'\lambda = \lambda_{\text{moy}} - \lambda_E$ , qui s'écrit :

$$\Delta'\lambda = \lambda_{\text{moy}} - \lambda_E = (\gamma(v) - 1) \lambda_E.$$

Numériquement, on trouve :

$$\text{pour l'ion } \text{H}_2^+ : \Delta'\lambda \approx 0.0035 \text{ nm} \quad \text{pour l'ion } \text{H}_3^+ : \Delta'\lambda \approx 0.0023 \text{ nm}.$$

TABLE III.

PLATE	VOLT-AGE	LINE	$\lambda_0(\frac{1}{2}V^2/c^2)$ COM-PUTED FROM VOLTAGE	$\lambda_0(\frac{1}{2}V^2/c^2)$ COM-PUTED FROM OBSERVED $\Delta\lambda$	$\Delta\lambda$ OBSERVED
169	6,788	H <sub>3</sub>	0.0116	0.0109	0.011A
160	7,780	H <sub>2</sub>	.0203	.0202	.0185
163	9,187	H <sub>2</sub>	.0238	.0243	.0225
170	10,574	H <sub>2</sub>	.0275	.0280	.027
165	11,566	H <sub>3</sub>	.0198	.0203	.0205
172	13,560	H <sub>2</sub>	.0352	.0360	.0345
172	13,560	H <sub>3</sub>	.0233	.0237	.0215
177	18,350	H <sub>2</sub>	.0478	.0469	.047

FIGURE 8 – Résultats obtenus pour l'écart  $\Delta'\lambda$ . Attention, les écarts en longueur d'onde sont indiqués en Angströms : 1 Angström = 0.1 nm =  $10^{-10}$  m. D'après H. E. Ives et G. R. Stilwell, *An experimental study of the rate of a moving atomic clock*, *The Journal of Optical Society of America*, vol. 28, no 7, 1938.

**1 pt** 2.19 — Comparez votre calcul théorique avec les mesures effectuées par Ives et Stilwell (colonne  $\Delta'\lambda$ ), pour le spectrogramme enregistré sur la plaque photo (*plate*) n°172. Concluez.

D'après les mesures effectuées à la tension  $U_{acc} = 13560$  V sur le spectrogramme enregistré sur la plaque photographique n°172, Ives et Stilwell obtiennent :

$$\text{pour l'ion H}_2^+ : \Delta'\lambda \approx 0.00345 \text{ nm} \quad \text{pour l'ion H}_3^+ : \Delta'\lambda \approx 0.00215 \text{ nm}$$

ce qui est tout à fait compatible avec la prédiction relativiste, au vu des incertitudes de mesures (de l'ordre de 0.00025 nm).

En comparant la moyenne  $\lambda_{moy}$  et la longueur d'onde nominale  $\lambda_E$  de la raie atomique, pour les différents ions et pour plusieurs valeurs de tension accélératrice, Ives et Stilwell vérifient bien la prédiction de la relativité restreinte concernant l'effet Doppler transverse. Il s'agit de l'une des premières mises en évidence expérimentale du ralentissement des horloges pour les objets en mouvement (la dilatation du temps), conformément aux prédictions relativistes.

**Données :**

Raie H $\beta$  de l'hydrogène :  $\lambda_E = 486.074$  nm

Angle d'observation de l'émission :  $\theta = 7^\circ$       Tension accélératrice :  $U_{acc} = 13560$  V

Ion dihydrogène H<sub>2</sub><sup>+</sup> : charge électrique  $q = +e$       masse  $m(\text{H}_2^+) = 2.016$  u

Ion trihydrogène H<sub>3</sub><sup>+</sup> : charge électrique  $q = +e$       masse  $m(\text{H}_3^+) = 3.02$  u

$c = 299\,792\,458$  m · s<sup>-1</sup>       $e = 1.602 \times 10^{-19}$  C

1 u =  $1.660538 \times 10^{-27}$  kg = 931.494 MeV/c<sup>2</sup>

Paradoxalement, Herbert E. Ives n'a jamais cru en la théorie de la relativité ; son objectif en construisant cette expérience était d'apporter la preuve de l'existence de l'éther dans le cadre d'une théorie alternative dite "théorie de Lorentz-Larmor", et de mettre en défaut la théorie de la relativité restreinte. Dépité par l'interprétation de l'expérience menée avec Stilwell comme une preuve expérimentale en faveur de la relativité, il tentera dans une série d'articles de convaincre la communauté scientifique de son point de vue, sans succès.

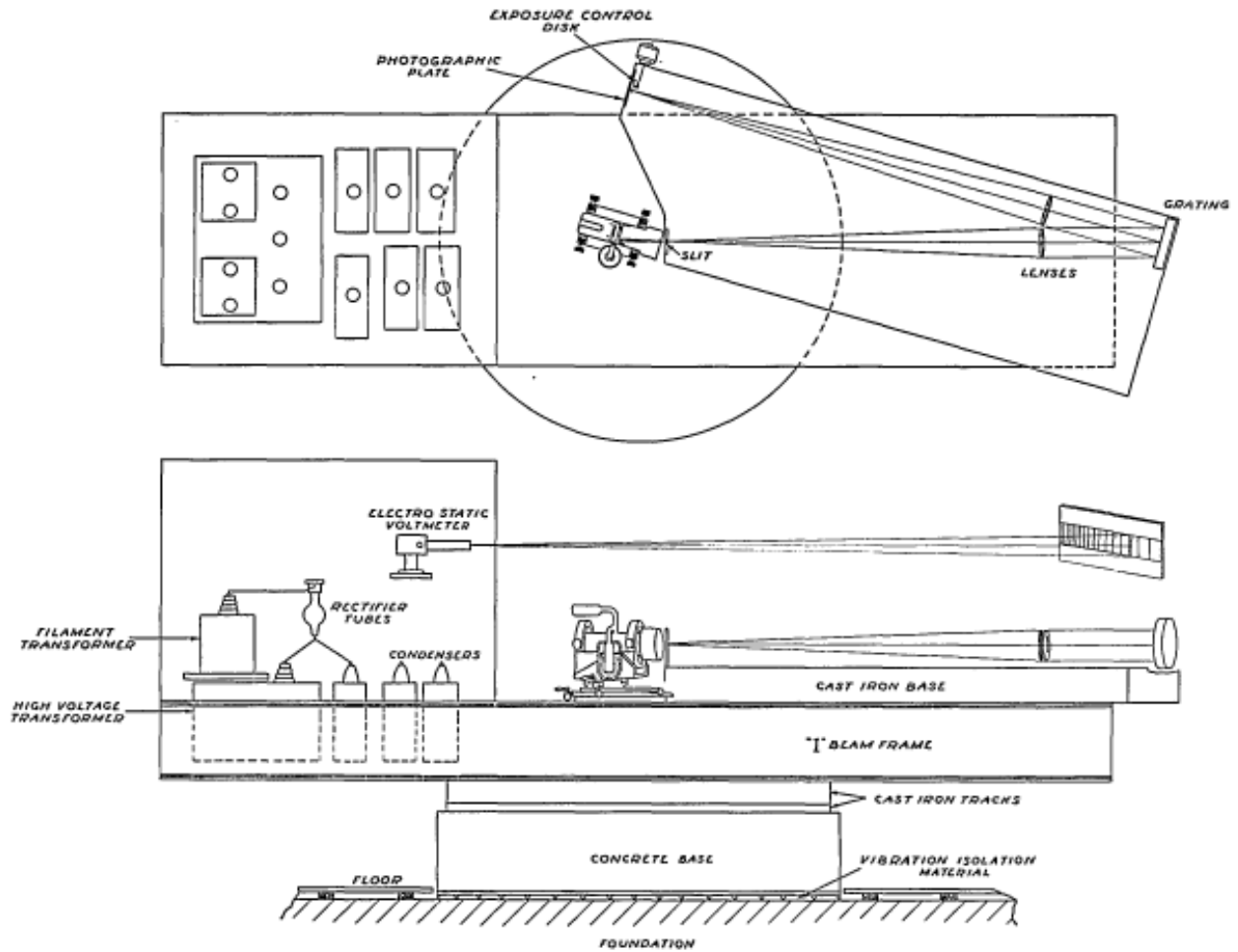


FIGURE 9 – Schéma de l'expérience de Ives et Stilwell, avec au centre l'enceinte de verre, et sur la droite, le spectrographe. L'ensemble du dispositif est posée sur un support en acier qui peut pivoter sur lui-même.