

## EXAMEN

Parcours SPRINT &amp; Double Majeure PM — Année Universitaire 2020–2021

12 janvier 2020 — 16h–18h

**Documents, ordinateurs et téléphones sont interdits. Les calculatrices (basiques) sont autorisées. Dans vos notations, pensez à distinguer les vecteurs des quantités scalaires : par exemple, avec une flèche, car vous ne pouvez pas les noter en gras comme ici dans l'énoncé.**

## 1. Quadri-vitesses et composition relativiste des vitesses

**Remarque : pour cet exercice, afin d'éviter toute confusion, soyez précis : exprimez les différents facteurs  $\beta$  et  $\gamma$  en jeu en indiquant à chaque fois la vitesse utilisée dans l'expression des facteurs  $\beta$  et  $\gamma$  : par exemple,  $\gamma(v)$  ou bien  $\gamma(u)$ , etc.**

On considère deux référentiels galiléens  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ , avec  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$  la vitesse de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . On munit ces deux référentiels de repères orthonormés parallèles et du même trièdre  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ , de telle sorte que  $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$ . On suppose ces deux référentiels munis d'horloges parfaites, et on choisit l'origine des temps  $t = t' = 0$  lorsque l'origine  $O'$  se confond avec  $O$ .

On s'intéresse au mouvement d'un objet matériel  $M$ , dont la position est repérée par son vecteur position  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{OM}$  dans  $\mathcal{R}$ , et par son vecteur position  $\mathbf{r}'(t') = \mathbf{O}'M$ .

**1.1** — Rappelez comment se transforment les coordonnées  $(ct, \mathbf{r}) = (ct, x, y, z)$  d'un point de la trajectoire de l'objet  $M$  lorsqu'on passe du référentiel  $\mathcal{R}$  au référentiel  $\mathcal{R}'$ . Montrez que ces relations peuvent se mettre sous forme matricielle.

**1.2** — Rappelez la définition de la vitesse ordinaire  $\mathbf{u}$  du mobile  $M$  mesurée dans le référentiel  $\mathcal{R}$ ; faites de même pour sa vitesse  $\mathbf{u}'$  mesurée cette fois dans  $\mathcal{R}'$ . On notera  $(u_x, u_y, u_z)$  les composantes de la vitesse  $\mathbf{u}$  dans  $\mathcal{R}$ , et  $(u'_x, u'_y, u'_z)$  les composantes de  $\mathbf{u}'$  dans  $\mathcal{R}'$ .

**1.3** — Donnez la définition du quadrivecteur vitesse  $\tilde{\mathbf{U}}$  (quadri-vitesse), de composantes  $U^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) pour l'objet étudié; donnez l'expression de ses 4 composantes  $U^\mu$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Faites de même pour les 4 composantes  $U'^\mu$  de la quadri-vitesse  $\tilde{\mathbf{U}}'$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ .

**1.4** — Que vaut  $\tilde{\mathbf{U}}^2$ ? Est-ce un invariant de Lorentz?

**1.5** — Rappelez la définition du quadrivecteur accélération  $\tilde{\mathbf{A}}$ . Montrez rapidement que le pseudo-produit scalaire  $\tilde{\mathbf{U}} \cdot \tilde{\mathbf{A}}$  est toujours nul; autrement dit, que les quadrivecteurs vitesse et accélération sont "orthogonaux" au sens des quadrivecteurs.

**1.6** — Comment les composantes  $U^\mu$  de la quadri-vitesse  $\tilde{\mathbf{U}}$  se transforment-elles lorsqu'on passe de  $\mathcal{R}$  à  $\mathcal{R}'$ ? Calculez explicitement les 4 composantes  $U'^\mu$  de la quadri-vitesse  $\tilde{\mathbf{U}}'$  du mobile dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ .

**1.7** — À partir des équations précédentes, redémontrez la loi relativiste de composition des vitesses qui fournit les expressions de  $u'_x, u'_y$  et  $u'_z$  en fonction de  $u_x, u_y, u_z$  et  $v$ .

## 2. Voiles solaires, propulsion laser et voyage intersidéral

*La plupart des questions concernant la trajectoire de la sonde (partie 2.2) peuvent être traitées indépendamment de la première partie de l'exercice.*

En 2016, plusieurs milliardaires (dont Yuri Milner et Mark Zuckerberg) et Stephen Hawking ont lancé le projet “Breakthrough Starshot”<sup>1</sup> dont l’objectif est de concevoir, construire et lancer plusieurs milliers de sondes spatiales miniaturisées équipées de voiles solaires vers le système stellaire le plus proche de nous, Alpha Centauri<sup>2</sup>, situé à  $D = 4.37$  années-lumière du Soleil. Chaque sonde serait constituée d’une voile légère et réfléchissante d’environ  $4\text{ m} \times 4\text{ m}$ , à la manière d’un cerf-volant, et d’un petit module intégré comportant notamment un système de communication et une ou plusieurs caméras miniaturisées, le tout d’une masse d’environ 1 gramme. La propulsion serait assurée par le tir de très puissants lasers basés sur Terre : l’impact des photons se réfléchissant sur la voile (“pression de radiation”) fournirait l’accélération nécessaire, permettant à ces sondes miniatures d’obtenir des vitesses entre  $0.2c$  et  $0.5c$ , et d’atteindre les étoiles les plus proches comme Alpha Centauri en quelques décennies.

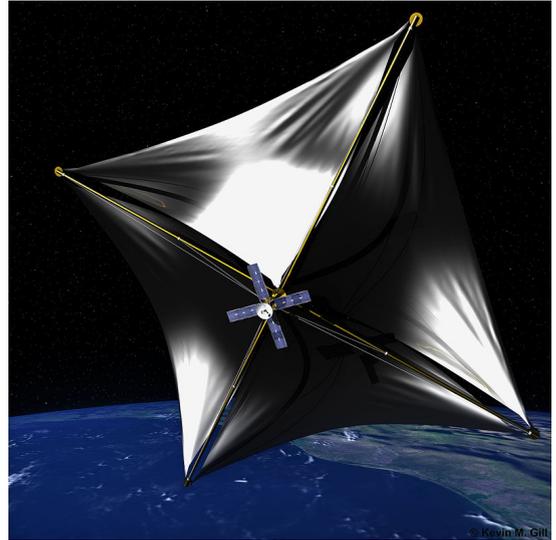


FIGURE 1 – Sonde spatiale munie d’une voile solaire (vue d’artiste).

### 2.1. Propulsion par laser

Afin de comprendre le fonctionnement de ces sondes, on se propose d’analyser le principe de la propulsion d’une voile sur laquelle on envoie un faisceau intense de lumière monochromatique.

On rappelle qu’un photon de fréquence  $\nu$  et de longueur d’onde  $\lambda$  transporte une énergie  $E = h\nu$  et une quantité de mouvement  $\hbar \mathbf{k}$ , avec  $\mathbf{k}$  le vecteur d’onde du photon de norme  $k = 2\pi/\lambda = 2\pi\nu/c$ .

**2.1** — Écrivez le quadrivecteur énergie-impulsion  $\tilde{q}$  d’un tel photon, ainsi que ses composantes  $q^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ). On suppose que ce photon se propage selon  $\mathbf{e}_x$  dans le référentiel considéré.

**2.2** — De même, écrivez le quadrivecteur énergie-impulsion  $\tilde{p}$  de la sonde de masse  $m$ , ainsi que ses composantes  $p^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ). On suppose que la sonde voyage selon  $\mathbf{e}_x$  dans le référentiel considéré, avec une vitesse  $v(t)$ .

Considérons un photon de fréquence  $\nu_i$  en provenance de la Terre qui se propage selon  $\mathbf{e}_x$  et qui se réfléchit en incidence normale sur la surface parfaitement réfléchissante de la voile solaire de la sonde. Le photon repart avec une fréquence  $\nu_f$  en sens opposé. On notera  $E_i$  et  $\mathbf{p}_i$  respectivement l’énergie totale et la quantité de mouvement de la sonde avant l’impact du photon, et  $E_f$  et  $\mathbf{p}_f$  son énergie totale et sa quantité de mouvement après le rebond du photon.

1. “Reaching for the Stars, Across 4.37 Light-Years”, New York Times, 13 avril 2016, [https://www.nytimes.com/2016/04/13/science/alpha-centauri-breakthrough-starshot-yuri-milner-stephen-hawking.html?\\_r=0](https://www.nytimes.com/2016/04/13/science/alpha-centauri-breakthrough-starshot-yuri-milner-stephen-hawking.html?_r=0)

2. Alpha Centauri est un système de trois étoiles liées gravitationnellement, deux étoiles similaires au Soleil baptisées Alpha Centauri A (“Rigil Kentaurus”), Alpha Centauri B (“Toliman”), et une naine rouge nommée “Proxima Centauri”. L’existence d’une planète de type terrestre (“Proxima b”) orbitant dans la zone habitable autour de Proxima Centauri a été confirmée; on soupçonne l’existence d’autres planètes dans ce système stellaire.

2.3 — Écrivez la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement pour le système constitué du photon et de la sonde. Même si cela n'est pas indispensable (on peut effectuer ce calcul sans), on aura avantage à utiliser le formalisme des quadrivecteurs : on notera  $\tilde{\mathbf{q}}_i$  et  $\tilde{\mathbf{q}}_f$  les quadrivecteurs énergie-impulsion du photon avant et après le rebond du photon sur la sonde respectivement. De même, on notera  $\tilde{\mathbf{p}}_i$  et  $\tilde{\mathbf{p}}_f$  les quadrivecteurs énergie-impulsion de la sonde avant et après l'interaction avec le photon incident.

2.4 — En utilisant le résultat précédent, et en raisonnant dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}'$  tangent à la sonde (autrement dit, le référentiel galiléen ou inertiel qui se confond avec le référentiel de la sonde à l'instant considéré), établissez dans le référentiel inertiel tangent  $\mathcal{R}$  l'expression de la variation  $\Delta\lambda' = \lambda'_f - \lambda'_i$  de la longueur d'onde du photon après qu'il se soit réfléchi sur la voile de la sonde. Application numérique : Exprimez  $\Delta\lambda'$  en nanomètres. On supposera que la masse totale de la sonde (voile comprise) est  $m = 1$  gramme. Commentez.

Pour la suite de l'exercice, on négligera la variation de longueur d'onde du photon avant et après réflexion, et on prendra :

$$\lambda_f \approx \lambda_i = \lambda \quad \text{et} \quad \nu_f \approx \nu_i = \nu$$

2.5 — En raisonnant dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du système solaire, supposé galiléen, dans l'approximation  $\nu_f \approx \nu_i = \nu$  (qu'on supposera aussi valide dans  $\mathcal{R}$ ), et en utilisant la conservation de la quantité de mouvement, montrez que l'impact du photon de fréquence  $\nu_i = \nu$  provoque une augmentation de la quantité de mouvement de la sonde d'une quantité :

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i \approx \frac{2h\nu}{c} \mathbf{e}_x$$

2.6 — Pour le projet "Breakthrough Starshot", la puissance lumineuse cumulée des lasers nécessaire pour propulser la sonde est estimée à  $\mathcal{P} = 100$  GigaWatts (Rappel : 1 Watt = 1 Joule / seconde). En supposant que la totalité du faisceau de lumière émis sur Terre soit capté par la voile réfléchissante de la sonde, exprimez le nombre de photons  $dN$  qui frappent la voile pendant un temps élémentaire  $dt$ , et déduisez-en le nombre  $dN/dt$  d'impacts de photons par unité de temps. Application numérique.

2.7 — Exprimez la variation  $d\mathbf{p}$  de la quantité de mouvement de la sonde pendant un intervalle de temps  $dt$  en fonction de la masse de la sonde et de la puissance laser  $\mathcal{P}$  reçue. Montrez que la quantité de mouvement  $\mathbf{p}$  de la sonde vérifie l'équation :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{2\mathcal{P}}{c} \mathbf{e}_x \quad \text{avec} \quad \mathbf{p} = \gamma(v)m \mathbf{v}. \tag{1}$$

où  $\mathbf{v}(t) = v(t) \mathbf{e}_x$  est la vitesse de la sonde mesurée dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du système solaire.

2.8 — En supposant constantes la fréquence  $\nu$  des photons reçus par la sonde et la puissance laser reçue  $\mathcal{P}$ , résolvez l'équation (1) et donnez l'expression de la vitesse  $v(t)$  de la sonde en fonction du temps dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Pour la résolution de (1), on supposera que la vitesse de la sonde est nulle à  $t = 0$ . On posera  $a = 2\mathcal{P}/mc$  : donnez sa valeur numérique. Quel type de mouvement reconnaît-on ?

On suppose qu'il est possible de maintenir en fonctionnement le faisceau laser de telle sorte que la puissance laser reçue  $\mathcal{P}$  par la sonde soit constante, aussi longtemps que possible.

2.9 — Vers quelle vitesse limite tend la vitesse de la sonde ?

## 2.2. Trajectoire de la sonde

2.10 — On prendra comme origine du référentiel  $\mathcal{R}$  la position initiale de la sonde :  $x(t = 0) = 0$ . En intégrant l'expression de la vitesse  $v(t)$ , montrez que la position  $x(t)$  de la sonde en fonction du

temps vérifie :

$$x(t) = \frac{c^2}{a} \left[ \sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right] \quad (2)$$

**2.11** — Montrez que dans l'espace-temps, la trajectoire de la sonde est une hyperbole d'équation :

$$(Ax + B)^2 - (Dct)^2 = 1$$

Donnez l'expression des coefficients  $A$ ,  $B$  et  $D$ .

**2.12** — Représentez la trajectoire de la sonde du point de vue du référentiel du système solaire dans un diagramme d'espace-temps (diagramme de Minkowski). **Par souci de lisibilité, vous consacrerez une page entière à ce diagramme d'espace-temps.** Montrez que l'hyperbole présente deux asymptotes obliques, d'équations :

$$ct = \frac{A}{D}x + \frac{B}{D} \quad (\text{branche positive}) \quad ct = -\frac{A}{D}x - \frac{B}{D} \quad (\text{branche négative})$$

Explicitez ces deux équations, et dessinez l'asymptote à la branche positive de l'hyperbole sur votre diagramme. Quelle est la pente de cette asymptote ?

**2.13** — À quelle coordonnée  $t_{\text{limite}}$  l'asymptote de la branche positive coupe-t-elle l'axe des temps ?

**2.14** — Dessinez sur votre diagramme la ligne d'univers d'un photon émis depuis la Terre en direction de la sonde, dans les trois cas suivants :

1. Le photon est émis sur Terre à un instant  $t \in [0, t_{\text{limite}}[$ .
2. Le photon est émis sur Terre à un instant  $t > t_{\text{limite}}$ .
3. Le photon est émis à  $t = t_{\text{limite}}$ .

Concluez : d'après votre diagramme, est-il possible à un photon émis sur Terre à  $t \geq t_{\text{limite}}$  d'atteindre la sonde ? Commentez quant à la possibilité d'envoyer à la sonde des messages émis depuis la Terre après  $t_{\text{limite}}$ . Est-il utile de maintenir le laser de propulsion allumé sur Terre au-delà de  $t = t_{\text{limite}}$  ?

**2.15** — En pratique, on souhaite atteindre une vitesse de croisière de  $v_c = 0.2c$ . Exprimez le temps nécessaire  $\Delta t_{\text{laser}}$  pendant lequel il faut illuminer la voile à l'aide du faisceau laser pour atteindre cette vitesse. Application numérique.

**2.16** — Avec une telle vitesse de croisière, en négligeant la phase d'accélération, en combien de temps la sonde attendra-t-elle Alpha Centauri ? Application numérique.

**Données :**

Distance Soleil - Alpha Centauri :  $D = 4.37$  années-lumière = 1.34 parsec

Masse de la sonde (voile comprise) :  $m = 1$  gramme

Puissance et longueur d'onde du laser :  $\mathcal{P} = 100$  GW      $\lambda = 632.8$  nm

$h = 6.626070 \times 10^{-34}$  kg · m<sup>2</sup> · s<sup>-1</sup>      $\hbar = h/2\pi$       $c = 299792458$  m · s<sup>-1</sup>.

---

Remarque : Le calcul que nous venons d'effectuer n'est pas tout à fait correct, car nous avons négligé deux effets importants : d'une part, si le laser émet ses photons avec une fréquence  $\nu$  constante sur Terre, ces photons sont reçus avec une fréquence inférieure  $\nu' < \nu$  par la sonde dans son référentiel propre, du fait de l'effet Doppler ; cette fréquence  $\nu'$  décroît au fur et à mesure que la sonde accélère, et tend vers zéro quand  $v$  tend vers  $c$ . D'autre part, si la puissance laser émise sur Terre est constante (nombre constant de photons émis par unité de temps sur Terre), le nombre de photons reçus par unité de temps par la sonde diminue progressivement, du fait de l'augmentation de la vitesse de la sonde et des effets de dilatation du temps. Par ailleurs, on néglige ici la divergence du faisceau laser utilisé.