

EXAMEN — CORRIGÉ

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2020–2021

12 janvier 2020 — 16h–18h

1. Quadri-vitesses et composition relativiste des vitesses

[12 pts]

Remarque : pour cet exercice, afin d'éviter toute confusion, soyez précis : exprimez les différents facteurs β et γ en jeu en indiquant à chaque fois la vitesse utilisée dans l'expression des facteurs β et γ : par exemple, $\gamma(v)$ ou bien $\gamma(u)$, etc.

On considère deux référentiels galiléens \mathcal{R} et \mathcal{R}' , avec $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$ la vitesse de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} . On munit ces deux référentiels de repères orthonormés parallèles et du même trièdre $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$, de telle sorte que $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$. On suppose ces deux référentiels munis d'horloges parfaites, et on choisit l'origine des temps $t = t' = 0$ lorsque l'origine O' se confond avec O .

On s'intéresse au mouvement d'un objet matériel M , dont la position est repérée par son vecteur position $\mathbf{r}(t) = \mathbf{OM}$ dans \mathcal{R} , et par son vecteur position $\mathbf{r}'(t') = \mathbf{O}'M$.

2 pts

1.1 — Rappelez comment se transforment les coordonnées $(ct, \mathbf{r}) = (ct, x, y, z)$ d'un point de la trajectoire de l'objet M lorsqu'on passe du référentiel \mathcal{R} au référentiel \mathcal{R}' . Montrez que ces relations peuvent se mettre sous forme matricielle.

Lorsqu'on passe d'un référentiel galiléen \mathcal{R} (ou inertiel) à un autre référentiel galiléen \mathcal{R}' , les coordonnées (ct, \mathbf{r}) d'un événement (ici, un point de la trajectoire du mobile étudié, autrement dit un point-événement de la *ligne d'univers* de cet objet) se transforment selon les équations de la *transformation de Lorentz*, qui ici s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} ct' = \gamma(v)(ct - \beta(v)x) \\ x' = \gamma(v)(x - \beta(v)ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{array} \right. \quad \text{et réciproquement} \quad \left\{ \begin{array}{l} ct = \gamma(v)(ct' + \beta(v)x') \\ x = \gamma(v)(x' + \beta(v)ct') \\ y = y' \\ z = z' \end{array} \right.$$

où (ct', \mathbf{r}') sont les coordonnées du même événement dans \mathcal{R}' , et où on a posé :

$$\beta(v) = \frac{v}{c} \quad \text{et} \quad \gamma(v) = (1 - \beta(v)^2)^{-1/2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

On peut mettre ces équations sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -\beta(v)\gamma(v) & 0 & 0 \\ -\beta(v)\gamma(v) & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v) & +\beta(v)\gamma(v) & 0 & 0 \\ +\beta(v)\gamma(v) & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

- 1 pt** 1.2 — Rappelez la définition de la vitesse ordinaire \mathbf{u} du mobile M mesurée dans le référentiel \mathcal{R} ; faites de même pour sa vitesse \mathbf{u}' mesurée cette fois dans \mathcal{R}' . On notera (u_x, u_y, u_z) les composantes de la vitesse \mathbf{u} dans \mathcal{R} , et (u'_x, u'_y, u'_z) les composantes de \mathbf{u}' dans \mathcal{R}' .

La vitesse $\mathbf{u} = u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y + u_z \mathbf{e}_z$ du mobile dans \mathcal{R} est simplement la dérivée du vecteur position \mathbf{r} par rapport au temps t dans le référentiel \mathcal{R} ,

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y + u_z \mathbf{e}_z \quad u_x = \frac{dx}{dt} \quad u_y = \frac{dy}{dt} \quad u_z = \frac{dz}{dt}.$$

De même, la vitesse $\mathbf{u}' = u'_x \mathbf{e}_x + u'_y \mathbf{e}_y + u'_z \mathbf{e}_z$ est la dérivée du vecteur position \mathbf{r}' par rapport au temps t' dans le référentiel \mathcal{R}' ,

$$\mathbf{u}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} = u'_x \mathbf{e}_x + u'_y \mathbf{e}_y + u'_z \mathbf{e}_z \quad u'_x = \frac{dx'}{dt'} \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'} \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'}.$$

- 2 pts** 1.3 — Donnez la définition du quadrivecteur vitesse $\tilde{\mathbf{U}}$ (*quadri-vitesse*), de composantes U^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) pour l'objet étudié; donnez l'expression de ses 4 composantes U^μ dans le référentiel \mathcal{R} . Faites de même pour les 4 composantes U'^μ de la quadri-vitesse $\tilde{\mathbf{U}}'$ dans le référentiel \mathcal{R}' .

Par définition, pour un objet mobile, son quadrivecteur vitesse est la dérivée de son quadrivecteur position $\tilde{\mathbf{r}}$ par rapport à son temps propre τ :

$$\tilde{\mathbf{U}} = \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{dt} = \gamma(u) \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{dt} \quad \text{avec} \quad \gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$U^\mu = \gamma(u) \frac{dr^\mu}{dt} = \begin{pmatrix} \gamma(u) \frac{d(ct)}{dt} \\ \gamma(u) \frac{d\mathbf{r}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(u) c dt/dt \\ \gamma(u) dx/dt \\ \gamma(u) dy/dt \\ \gamma(u) dz/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(u) c \\ \gamma(u) u_x \\ \gamma(u) u_y \\ \gamma(u) u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(u) c \\ \gamma(u) \mathbf{u} \end{pmatrix}$$

Où \mathbf{u} est le vecteur vitesse usuel $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$ de composantes (u_x, u_y, u_z) et de norme u , vu dans le référentiel \mathcal{R} .

De la même manière, on aura dans le référentiel \mathcal{R}' :

$$\tilde{\mathbf{U}}' = \frac{d\tilde{\mathbf{r}}'}{d\tau} = \frac{dt'}{d\tau} \frac{d\tilde{\mathbf{r}}'}{dt'} = \gamma(u') \frac{d\tilde{\mathbf{r}}'}{dt'} \quad \text{avec} \quad \gamma(u') = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}}$$

$$U'^\mu = \gamma(u') \frac{dr'^\mu}{dt'} = \begin{pmatrix} \gamma(u') \frac{d(ct')}{dt'} \\ \gamma(u') \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(u') c dt'/dt' \\ \gamma(u') dx'/dt' \\ \gamma(u') dy'/dt' \\ \gamma(u') dz'/dt' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(u') c \\ \gamma(u') u'_x \\ \gamma(u') u'_y \\ \gamma(u') u'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(u') c \\ \gamma(u') \mathbf{u}' \end{pmatrix}$$

Où \mathbf{u}' est le vecteur vitesse usuel $\mathbf{u}' = d\mathbf{r}'/dt'$ de composantes (u'_x, u'_y, u'_z) et de norme u' , qui représente cette fois la vitesse du mobile dans le référentiel \mathcal{R}' .

- 1 pt** 1.4 — Que vaut $\tilde{\mathbf{U}}^2$? Est-ce un invariant de Lorentz?

La pseudo-norme carrée du quadrivecteur vitesse s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{U}}^2 = \gamma^2(u) c^2 - \gamma^2(u) u^2 = \gamma^2(u) c^2 \left[1 - \frac{u^2}{c^2} \right] = c^2$$

car $\gamma^2(u) = [1 - u^2/c^2]^{-1}$. Par construction, \tilde{U}^2 est le pseudo-produit scalaire d'un quadrivecteur par lui-même : c'est donc un invariant de Lorentz. On le vérifie dans ce cas particulier, car la vitesse de la lumière dans le vide c , et donc c^2 sont justement des invariants relativistes (c'est l'un des deux postulats de la relativité restreinte).

De plus, $\tilde{U}^2 = c^2$ est non seulement un invariant, mais aussi une grandeur constante.

2 pts 1.5 — Rappelez la définition du quadrivecteur accélération $\tilde{\mathbf{A}}$. Montrez rapidement que le pseudo-produit scalaire $\tilde{\mathbf{U}} \cdot \tilde{\mathbf{A}}$ est toujours nul ; autrement dit, que les quadrivecteurs vitesse et accélération sont "orthogonaux" au sens des quadrivecteurs.

On construit le quadrivecteur accélération (*quadri-accélération*) en dérivant le quadrivecteur vitesse par rapport au temps propre du mobile ($d\tau$ est un invariant de Lorentz) :

$$\tilde{\mathbf{A}} = \frac{d\tilde{\mathbf{U}}}{d\tau} \quad \text{soit} \quad A^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau} \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

D'autre part, comme la pseudo-norme carrée \tilde{U}^2 de la quadri-vitesse $\tilde{\mathbf{U}}$ est une constante, sa dérivée par rapport au temps propre est nulle :

$$\frac{d}{d\tau} (\tilde{U}^2) = 0 \quad \text{d'où} \quad 2 \tilde{\mathbf{U}} \cdot \frac{d\tilde{\mathbf{U}}}{d\tau} = 0$$

On en déduit :

$$\tilde{\mathbf{U}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{U}} \cdot \frac{d\tilde{\mathbf{U}}}{d\tau} = 0.$$

Les quadrivecteurs vitesse $\tilde{\mathbf{U}}$ et accélération $\tilde{\mathbf{A}}$ d'un objet sont donc toujours "orthogonaux" au sens des quadrivecteurs.

1 pt 1.6 — Comment les composantes U^μ de la quadri-vitesse $\tilde{\mathbf{U}}$ se transforment-elles lorsqu'on passe de \mathcal{R} à \mathcal{R}' ? Calculez explicitement les 4 composantes U'^μ de la quadri-vitesse $\tilde{\mathbf{U}}'$ du mobile dans le référentiel \mathcal{R}' .

La quadri-vitesse $\tilde{\mathbf{U}}$ est un quadrivecteur : ses composantes (contravariantes) U^μ se transforment donc selon la transformation de Lorentz, qui s'écrit ici :

$$\begin{pmatrix} U'^0 \\ U'^1 \\ U'^2 \\ U'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -\beta(v)\gamma(v) & 0 & 0 \\ -\beta(v)\gamma(v) & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^0 \\ U^1 \\ U^2 \\ U^3 \end{pmatrix}$$

Ce qui peut encore s'écrire, en remplaçant les composantes U^μ et U'^μ par leurs expressions,

$$\begin{pmatrix} \gamma(u') c \\ \gamma(u') u'_x \\ \gamma(u') u'_y \\ \gamma(u') u'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -\beta(v)\gamma(v) & 0 & 0 \\ -\beta(v)\gamma(v) & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma(u) c \\ \gamma(u) u_x \\ \gamma(u) u_y \\ \gamma(u) u_z \end{pmatrix}$$

Soit,

$$\begin{cases} \gamma(u') c &= \gamma(v)\gamma(u) [c - \beta(v)u_x] \\ \gamma(u') u'_x &= \gamma(v)\gamma(u) [u_x - \beta(v)c] = \gamma(v)\gamma(u) [u_x - v] \\ \gamma(u') u'_y &= \gamma(u) u_y \\ \gamma(u') u'_z &= \gamma(u) u_z. \end{cases} \tag{1}$$

3 pts 1.7 — À partir des équations précédentes, redémontrez la loi relativiste de composition des vitesses qui fournit les expressions de u'_x , u'_y et u'_z en fonction de u_x , u_y , u_z et v .

En utilisant la première ligne du système d'équations (1), on obtient immédiatement :

$$\gamma(v) \frac{\gamma(u)}{\gamma(u')} = \frac{c}{c - \beta(v)u_x} = \frac{1}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}.$$

En utilisant l'expression précédente, et en substituant dans les 3 dernières lignes de (1), on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_x = \gamma(v) \frac{\gamma(u)}{\gamma(u')} [u_x - v] = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_y = \frac{\gamma(u)}{\gamma(u')} u_y = \frac{1}{\gamma(v)} \frac{u_y}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_z = \frac{\gamma(u)}{\gamma(u')} u_z = \frac{1}{\gamma(v)} \frac{u_z}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \end{array} \right.$$

On retrouve ainsi la loi relativiste de composition des vitesses.

2. Voiles solaires, propulsion laser et voyage intersidéral

[28 pts]

La plupart des questions concernant la trajectoire de la sonde (partie 2.2) peuvent être traitées indépendamment de la première partie de l'exercice.

En 2016, plusieurs milliardaires (dont Yuri Milner et Mark Zuckerberg) et Stephen Hawking ont lancé le projet "Breakthrough Starshot"¹ dont l'objectif est de concevoir, construire et lancer plusieurs milliers de sondes spatiales miniaturisées équipées de voiles solaires vers le système stellaire le plus proche de nous, Alpha Centauri², situé à $D = 4.37$ années-lumière du Soleil. Chaque sonde serait constituée d'une voile légère et réfléchissante d'environ $4\text{ m} \times 4\text{ m}$, à la manière d'un cerf-volant, et d'un petit module intégré comportant notamment un système de communication et une ou plusieurs caméras miniaturisées, le tout d'une masse d'environ 1 gramme. La propulsion serait assurée par le tir de très puissants lasers basés sur Terre : l'impact des photons se réfléchissant sur la voile ("pression de radiation") fournirait l'accélération nécessaire, permettant à ces sondes miniatures d'obtenir des vitesses entre $0.2c$ et $0.5c$, et d'atteindre les étoiles les plus proches comme Alpha Centauri en quelques décennies.

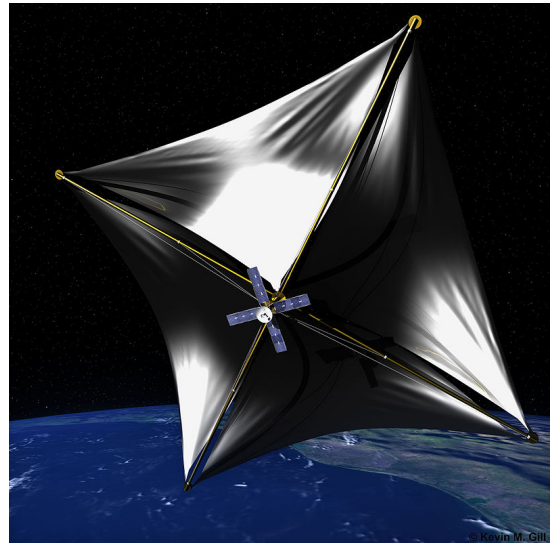


FIGURE 1 – Sonde spatiale munie d'une voile solaire (vue d'artiste).

2.1. Propulsion par laser

Afin de comprendre le fonctionnement de ces sondes, on se propose d'analyser le principe de la propulsion d'une voile sur laquelle on envoie un faisceau intense de lumière monochromatique.

On rappelle qu'un photon de fréquence ν et de longueur d'onde λ transporte une énergie $E = h\nu$ et une quantité de mouvement $\hbar \mathbf{k}$, avec \mathbf{k} le vecteur d'onde du photon de norme $k = 2\pi/\lambda = 2\pi\nu/c$.

1 pt 2.1 — Écrivez le quadrivecteur énergie-impulsion $\tilde{\mathbf{q}}$ d'un tel photon, ainsi que ses composantes q^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$). On suppose que ce photon se propage selon \mathbf{e}_x dans le référentiel considéré.

Les composantes q^μ du quadrivecteur énergie-impulsion $\tilde{\mathbf{q}}$ d'un photon de fréquence ν et de longueur d'onde λ s'écrivent :

$$\tilde{\mathbf{q}} : q^\mu = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h\nu}{c} \\ \hbar \mathbf{k} \end{pmatrix}$$

où $\mathbf{q} = \hbar \mathbf{k}$ est la quantité de mouvement transportée par le photon; \mathbf{k} est le vecteur d'onde du photon, de norme $|\mathbf{k}| = k = 2\pi/\lambda = 2\pi\nu/c$, et dont la direction est celle de la propagation du photon.

La masse au repos du photon étant nulle, on aura $\tilde{\mathbf{q}}^2 = 0$.

1. "Reaching for the Stars, Across 4.37 Light-Years", New York Times, 13 avril 2016, https://www.nytimes.com/2016/04/13/science/alpha-centauri-breakthrough-starshot-yuri-milner-stephen-hawking.html?_r=0

2. Alpha Centauri est un système de trois étoiles liées gravitationnellement, deux étoiles similaires au Soleil baptisées Alpha Centauri A ("Rigil Kentaurus"), Alpha Centauri B ("Toliman"), et une naine rouge nommée "Proxima Centauri". L'existence d'une planète de type terrestre ("Proxima b") orbitant dans la zone habitable autour de Proxima Centauri a été confirmée; on soupçonne l'existence d'autres planètes dans ce système stellaire.

1 pt 2.2 — De même, écrivez le quadrivecteur énergie-impulsion $\tilde{\mathbf{p}}$ de la sonde de masse m , ainsi que ses composantes p^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$). On suppose que la sonde voyage selon \mathbf{e}_x dans le référentiel considéré, avec une vitesse $v(t)$.

Pour la sonde qui se déplace à la vitesse $\mathbf{v}(t) = v(t) \mathbf{e}_x$, son énergie E et sa quantité de mouvement \mathbf{p} s'écrivent :

$$E = \gamma(v)mc^2 \quad \mathbf{p} = \gamma(v)m \mathbf{v}.$$

Son quadrivecteur énergie-impulsion s'écrit ainsi :

$$\tilde{\mathbf{p}} = m \tilde{\mathbf{U}} = m \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\tau} \quad \text{avec } \tilde{\mathbf{U}} \text{ la quadrivitesse de composantes } U^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(v)c \\ \gamma(v)\mathbf{v} \end{pmatrix}$$

et ses composantes contravariantes p^μ sont :

$$p^\mu = mU^\mu = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v)mc \\ \gamma(v)m \mathbf{v} \end{pmatrix}$$

Elles vérifient :

$$\tilde{\mathbf{p}}^2 = (p^0)^2 - (\mathbf{p})^2 = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2c^2 \quad \text{soit} \quad E = \sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2}.$$

Ici, la vitesse $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$ de la sonde est selon \mathbf{e}_x , et les composantes p^μ du quadrivecteur énergie-impulsion $\tilde{\mathbf{p}}$ de la sonde se réduisent à :

$$p^\mu = mU^\mu = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v)mc \\ \gamma(v)m \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v)mc \\ \gamma(v)mv \mathbf{e}_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v)mc \\ \gamma(v)mv \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Considérons un photon de fréquence ν_i en provenance de la Terre qui se propage selon \mathbf{e}_x et qui se réfléchit en incidence normale sur la surface parfaitement réfléchissante de la voile solaire de la sonde. Le photon repart avec une fréquence ν_f en sens opposé. On notera E_i et \mathbf{p}_i respectivement l'énergie totale et la quantité de mouvement de la sonde avant l'impact du photon, et E_f et \mathbf{p}_f son énergie totale et sa quantité de mouvement après le rebond du photon.

1 pt 2.3 — Écrivez la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement pour le système constitué du photon et de la sonde. Même si cela n'est pas indispensable (on peut effectuer ce calcul sans), on aura avantage à utiliser le formalisme des quadrivecteurs : on notera $\tilde{\mathbf{q}}_i$ et $\tilde{\mathbf{q}}_f$ les quadrivecteurs énergie-impulsion du photon avant et après le rebond du photon sur la sonde respectivement. De même, on notera $\tilde{\mathbf{p}}_i$ et $\tilde{\mathbf{p}}_f$ les quadrivecteurs énergie-impulsion de la sonde avant et après l'interaction avec le photon incident.

La conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total pour le système constitué du photon et de la sonde, considéré avant et après le rebond du photon sur la voile de la sonde, s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{p}}_i + \tilde{\mathbf{q}}_i = \tilde{\mathbf{p}}_f + \tilde{\mathbf{q}}_f \quad \text{soit, en composantes} \quad p_i^\mu + q_i^\mu = p_f^\mu + q_f^\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (2)$$

Or, les composantes respectives des quadrivecteurs énergie-impulsion s'écrivent :

$$p_i^\mu = \begin{pmatrix} E_i/c \\ \mathbf{p}_i = p_i \mathbf{e}_x \end{pmatrix} \quad q_i^\mu = \begin{pmatrix} \frac{h\nu_i}{c} \\ \hbar \mathbf{k}_i = +\hbar k_i \mathbf{e}_x \end{pmatrix} \quad p_f^\mu = \begin{pmatrix} E_f/c \\ \mathbf{p}_f = p_f \mathbf{e}_x \end{pmatrix} \quad q_f^\mu = \begin{pmatrix} \frac{h\nu_f}{c} \\ \hbar \mathbf{k}_f = -\hbar k_f \mathbf{e}_x \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total du système (équation (2)) équivaut aux deux équations suivantes, qui décrivent la conservation de l'énergie totale et de la quantité de mouvement totale du système { sonde + photon } :

$$E_i + h\nu_i = E_f + h\nu_f \quad (3)$$

$$\mathbf{p}_i + \hbar \mathbf{k}_i = \mathbf{p}_f + \hbar \mathbf{k}_f. \quad (4)$$

3 pts 2.4 — En utilisant le résultat précédent, et en raisonnant dans le référentiel galiléen \mathcal{R}' tangent à la sonde (autrement dit, le référentiel galiléen ou inertiel qui se confond avec le référentiel de la sonde à l'instant considéré), établissez dans le référentiel inertiel tangent \mathcal{R}' l'expression de la variation $\Delta\lambda' = \lambda'_f - \lambda'_i$ de la longueur d'onde du photon après qu'il se soit réfléchi sur la voile de la sonde. Application numérique : Exprimez $\Delta\lambda'$ en nanomètres. On supposera que la masse totale de la sonde (voile comprise) est $m = 1$ gramme. Commentez.

Le calcul est analogue à celui de l'effet Compton, avec la sonde dans le rôle de l'électron, pour une diffusion du photon avec un angle de diffusion $\theta = \pi$ (rétro-diffusion).

À l'instant considéré, on se place dans le référentiel inertiel tangent à la sonde : avant l'impact du photon, la sonde y est donc immobile, et $\mathbf{p}'_i = \mathbf{0}$ dans ce référentiel. En conservant les mêmes notations que précédemment mais primées, car on se place dans le référentiel inertiel tangent \mathcal{R}' , on trouve :

$$\tilde{\mathbf{p}}'_i + \tilde{\mathbf{q}}'_i = \tilde{\mathbf{p}}'_f + \tilde{\mathbf{q}}'_f \quad \text{soit} \quad \tilde{\mathbf{p}}'_f = \tilde{\mathbf{p}}'_i + \tilde{\mathbf{q}}'_i - \tilde{\mathbf{q}}'_f.$$

En élevant le tout au carré, on obtient :

$$(\tilde{\mathbf{p}}'_f)^2 = (\tilde{\mathbf{p}}'_i)^2 + (\tilde{\mathbf{q}}'_i)^2 + (\tilde{\mathbf{q}}'_f)^2 + 2\tilde{\mathbf{p}}'_i \cdot \tilde{\mathbf{q}}'_i - 2\tilde{\mathbf{p}}'_i \cdot \tilde{\mathbf{q}}'_f - 2\tilde{\mathbf{q}}'_i \cdot \tilde{\mathbf{q}}'_f \quad \text{i.e.} \quad \tilde{\mathbf{q}}'_i \cdot \tilde{\mathbf{q}}'_f = \tilde{\mathbf{p}}'_i \cdot (\tilde{\mathbf{q}}'_i - \tilde{\mathbf{q}}'_f) \quad (5)$$

car $(\tilde{\mathbf{p}}'_i)^2 = (\tilde{\mathbf{p}}'_f)^2 = m^2c^2$ où m est la masse au repos de la sonde, et $(\tilde{\mathbf{q}}'_i)^2 = (\tilde{\mathbf{q}}'_f)^2 = 0$ (la masse au repos du photon est nulle).

En exprimant cette dernière équation à l'aide des composantes dans le référentiel \mathcal{R}' , on trouve :

$$\frac{h^2\nu'_i\nu'_f}{c^2} - \hbar^2 \mathbf{k}'_i \cdot \mathbf{k}'_f = mc \left[\frac{h\nu'_i}{c} - \frac{h\nu'_f}{c} \right]. \quad (6)$$

Comme le photon rebondit et repart selon $(-\mathbf{e}_x)$, le produit scalaire $\mathbf{k}'_i \cdot \mathbf{k}'_f$ des vecteurs d'onde du photon avant et après l'impact vaut simplement :

$$\mathbf{k}'_i \cdot \mathbf{k}'_f = (k'_i \mathbf{e}_x) \cdot (-k'_f \mathbf{e}_x) = -k'_i k'_f = -\frac{2\pi}{\lambda'_i} \frac{2\pi}{\lambda'_f} = -\frac{4\pi^2}{\lambda'_i \lambda'_f}$$

L'équation (6) devient ainsi :

$$\frac{h^2\nu'_i\nu'_f}{c^2} + \frac{h^2}{\lambda'_i \lambda'_f} = mc \left[\frac{h\nu'_i}{c} - \frac{h\nu'_f}{c} \right] \quad \text{soit} \quad \frac{2h^2}{\lambda'_i \lambda'_f} = mc \left[\frac{h}{\lambda'_i} - \frac{h}{\lambda'_f} \right]$$

en utilisant la relation $\lambda = c/\nu$. En multipliant le tout par $\lambda'_i \lambda'_f$ et en simplifiant, on obtient :

$$\Delta\lambda' = \lambda'_f - \lambda'_i = \frac{2h}{mc}$$

On remarque qu'on retrouve une formule analogue à celle de l'effet Compton, avec la sonde dans le rôle de l'électron et pour un angle de diffusion du photon $\theta = \pi$ (rétro-diffusion).

Numériquement, pour une sonde de masse $m = 1$ gramme, on trouve :

$$\Delta\lambda' = \frac{2 \times 6.626070 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}}{10^{-3} \text{ kg} \times 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} \approx 4.42 \times 10^{-39} \text{ m} = 4.42 \times 10^{-30} \text{ nm}$$

Du fait de la masse macroscopique de la sonde, le changement de longueur d'onde dans le référentiel de la sonde est extrêmement faible : on pourra le négliger.

Pour la suite de l'exercice, on négligera la variation de longueur d'onde du photon avant et après réflexion, et on prendra :

$$\lambda_f \approx \lambda_i = \lambda \quad \text{et} \quad \nu_f \approx \nu_i = \nu$$

2 pts 2.5 — En raisonnant dans le référentiel \mathcal{R} du système solaire, supposé galiléen, dans l'approximation $\nu_f \approx \nu_i = \nu$ (qu'on supposera aussi valide dans \mathcal{R}), et en utilisant la conservation de la quantité de mouvement, montrez que l'impact du photon de fréquence $\nu_i = \nu$ provoque une augmentation de la quantité de mouvement de la sonde d'une quantité :

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i \approx \frac{2h\nu}{c} \mathbf{e}_x$$

Si on fait l'approximation que la fréquence des photons n'est pas modifiée par l'impact dans le référentiel \mathcal{R} du système solaire, considéré comme galiléen, le résultat est alors immédiat : en appliquant la conservation de la quantité de mouvement totale pour le système { sonde + photon } donnée par l'équation (4), on a directement :

$$\mathbf{p}_i + \hbar \mathbf{k}_i = \mathbf{p}_f + \hbar \mathbf{k}_f.$$

Ce qui donne :

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \hbar \mathbf{k}_i - \hbar \mathbf{k}_f = \hbar k_i \mathbf{e}_x - (-\hbar k_f \mathbf{e}_x) = 2\pi\hbar \left[\frac{1}{\lambda_i} + \frac{1}{\lambda_f} \right] \mathbf{e}_x = \frac{h}{c} (\nu_i + \nu_f) \mathbf{e}_x \approx \frac{2h\nu}{c} \mathbf{e}_x.$$

L'impact de chaque photon d'énergie $h\nu$ fournit ainsi une quantité de mouvement $(2h\nu/c) \mathbf{e}_x$ à la sonde.

1 pt 2.6 — Pour le projet "Breakthrough Starshot", la puissance lumineuse cumulée des lasers nécessaire pour propulser la sonde est estimée à $\mathcal{P} = 100$ GigaWatts (Rappel : 1 Watt = 1 Joule / seconde). En supposant que la totalité du faisceau de lumière émis sur Terre soit capté par la voile réfléchissante de la sonde, exprimez le nombre de photons dN qui frappent la voile pendant un temps élémentaire dt , et déduisez-en le nombre dN/dt d'impacts de photons par unité de temps. Application numérique.

En supposant que tout le faisceau frappe la voile, la puissance lumineuse reçue par la voile de la sonde est donc $\mathcal{P} = 100$ GigaWatts. L'énergie lumineuse qui vient frapper la voile pendant un instant dt vaut ainsi $\mathcal{P}dt$. Dans ce flux de lumière, chaque photon transporte une énergie $h\nu$; comme on suppose le faisceau monochromatique, le nombre dN de photons reçus pendant un instant dt élémentaire vaut donc :

$$dN = \frac{\mathcal{P}dt}{h\nu} = \frac{\mathcal{P}}{h\nu} dt$$

On en déduit le nombre d'impacts de photons par unité de temps,

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\mathcal{P}}{h\nu} = \frac{\mathcal{P}\lambda}{hc}$$

Numériquement, cela donne :

$$\frac{dN}{dt} = \frac{10^{11} \text{ W} \times 632.8 \times 10^{-9} \text{ m}}{6.626070 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \times 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} \approx 3.19 \times 10^{29} \text{ photons/s.}$$

- 2 pts** 2.7 — Exprimez la variation $d\mathbf{p}$ de la quantité de mouvement de la sonde pendant un intervalle de temps dt en fonction de la masse de la sonde et de la puissance laser \mathcal{P} reçue. Montrez que la quantité de mouvement \mathbf{p} de la sonde vérifie l'équation :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{2\mathcal{P}}{c} \mathbf{e}_x \quad \text{avec} \quad \mathbf{p} = \gamma(v)m \mathbf{v}. \quad (7)$$

où $\mathbf{v}(t) = v(t) \mathbf{e}_x$ est la vitesse de la sonde mesurée dans le référentiel \mathcal{R} du système solaire.

Pendant un instant dt , chaque photon d'énergie $h\nu$ transfère à la sonde une quantité de mouvement $(2h\nu/c) \mathbf{e}_x$: or, pendant un instant dt , dN photons frappent la sonde. La quantité de mouvement de la sonde augmente donc d'une quantité $d\mathbf{p}$ (dans le référentiel \mathcal{R}), qui s'écrit :

$$d\mathbf{p} = \frac{2h\nu}{c} dN \mathbf{e}_x = \frac{2h\nu}{c} \frac{\mathcal{P}}{h\nu} \mathbf{e}_x dt = \frac{2\mathcal{P}}{c} \mathbf{e}_x dt.$$

À partir de l'équation précédente, on obtient le résultat :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{2\mathcal{P}}{c} \mathbf{e}_x.$$

- 3 pts** 2.8 — En supposant constantes la fréquence ν des photons reçus par la sonde et la puissance laser reçue \mathcal{P} , résolvez l'équation (7) et donnez l'expression de la vitesse $v(t)$ de la sonde en fonction du temps dans le référentiel \mathcal{R} . Pour la résolution de (7), on supposera que la vitesse de la sonde est nulle à $t = 0$. On posera $a = 2\mathcal{P}/mc$: donnez sa valeur numérique. Quel type de mouvement reconnaît-on ?

En remplaçant dans l'équation (7) la quantité de mouvement \mathbf{p} par son expression, $\mathbf{p} = \gamma(v)m\mathbf{v}$, on trouve :

$$\frac{d}{dt} (\gamma(v)m\mathbf{v}) = \frac{2\mathcal{P}}{c} \mathbf{e}_x \quad \text{i.e.} \quad \frac{d(\gamma(v)\mathbf{v})}{dt} = \frac{2\mathcal{P}}{mc} \mathbf{e}_x = a \mathbf{e}_x. \quad (8)$$

où a a la dimension d'une accélération et vaut numériquement :

$$a = \frac{2\mathcal{P}}{mc} \approx \frac{2 \times 10^{11} \text{ W}}{10^{-3} \text{ kg} \times 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} \approx 6.67 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Si on suppose que la puissance lumineuse \mathcal{P} reçue par la sonde est maintenue constante, alors a est constante et on peut intégrer l'équation (8). En séparant les variables, l'équation différentielle (8) devient :

$$d(\gamma(v)\mathbf{v}) = a \mathbf{e}_x dt.$$

De manière évidente, si on suppose la vitesse nulle au départ, la vitesse $\mathbf{v}(t)$ de la sonde est selon \mathbf{e}_x et on a $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$. L'intégration est immédiate,

$$\left[\gamma(v)v \right]_{v(0)}^{v(t)} = \int_0^t a dt = at$$

Et, en prenant $v(0) = 0$,

$$\gamma(v(t))v(t) = at \quad \text{i.e.} \quad \frac{v(t)}{\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}} = at.$$

On obtient alors l'expression de la vitesse de la sonde en élevant le tout au carré et en extrayant $v(t)$,

$$\frac{v^2(t)}{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} = a^2 t^2 \quad \text{soit} \quad v(t) = \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}(t) = v(t) \mathbf{e}_x.$$

On reconnaît l'expression de la vitesse du mouvement dit "hyperbolique".

On suppose qu'il est possible de maintenir en fonctionnement le faisceau laser de telle sorte que la puissance laser reçue \mathcal{P} par la sonde soit constante, aussi longtemps que possible.

1 pt 2.9 — Vers quelle vitesse limite tend la vitesse de la sonde ?

D'après l'expression de la vitesse de la sonde, la vitesse limite pour $at \gg c$ soit $t \gg c/a$ vaut :

$$v(t) = \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}} \xrightarrow{t \gg c/a} \frac{at}{\sqrt{\frac{a^2 t^2}{c^2}}} = \frac{at}{at} c = c.$$

La vitesse limite de la sonde est la vitesse c de la lumière dans le vide.

2.2. Trajectoire de la sonde

2 pts 2.10 — On prendra comme origine du référentiel \mathcal{R} la position initiale de la sonde : $x(t=0) = 0$. En intégrant l'expression de la vitesse $v(t)$, montrez que la position $x(t)$ de la sonde en fonction du temps vérifie :

$$x(t) = \frac{c^2}{a} \left[\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right] \quad (9)$$

En intégrant l'expression de la vitesse, on obtient la position de la sonde dans le référentiel \mathcal{R} en fonction du temps :

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t) dt = \int_0^t \left(1 + \frac{a^2 t^2}{c^2} \right)^{-1/2} at dt = \left[\frac{c^2}{a} \left(1 + \frac{a^2 t^2}{c^2} \right)^{1/2} \right]_0^t = \frac{c^2}{a} \left[\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right].$$

2 pts 2.11 — Montrez que dans l'espace-temps, la trajectoire de la sonde est une hyperbole d'équation :

$$(Ax + B)^2 - (Dct)^2 = 1$$

Donnez l'expression des coefficients A , B et D .

À partir de l'expression (9) de $x(t)$, on montre qu'on a :

$$\frac{a}{c^2} x + 1 = \sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} \quad \text{soit} \quad \left(\frac{a}{c^2} x + 1 \right)^2 = 1 + \frac{a^2 t^2}{c^2} \quad \text{i.e.} \quad \left(\frac{a}{c^2} x + 1 \right)^2 - \left(\frac{a}{c^2} ct \right)^2 = 1$$

où on reconnaît l'équation $(Ax + B)^2 - (Dct)^2 = 1$ d'une hyperbole avec

$$A = \frac{a}{c^2} \quad B = 1 \quad D = \frac{a}{c^2}.$$

L'équation obtenue est celle d'une hyperbole dans le plan (x, ct) . La ligne d'univers de la sonde est ainsi une branche d'hyperbole dans l'espace-temps (d'où l'appellation de "mouvement hyperbolique" pour ce mouvement particulier).

2 pts 2.12 — Représentez la trajectoire de la sonde du point de vue du référentiel du système solaire dans un diagramme d'espace-temps (diagramme de Minkowski). **Par souci de lisibilité, vous consacrez une page entière à ce diagramme d'espace-temps.** Montrez que l'hyperbole présente deux asymptotes obliques, d'équations :

$$ct = \frac{A}{D}x + \frac{B}{D} \quad (\text{branche positive}) \quad ct = -\frac{A}{D}x - \frac{B}{D} \quad (\text{branche négative})$$

Explicitez ces deux équations, et dessinez l'asymptote à la branche positive de l'hyperbole sur votre diagramme. Quelle est la pente de cette asymptote ?

À partir de l'équation donnant la trajectoire $x(t)$, on peut exprimer ct en fonction de x ,

$$x(t) = \frac{c^2}{a} \left[\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right] \quad \text{soit} \quad \frac{a}{c^2}x + 1 = \sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} \quad \text{i.e.} \quad \left(\frac{a}{c^2}x + 1 \right)^2 = 1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}$$

Ce qui donne :

$$\frac{at}{c} = \pm \sqrt{\left(\frac{a}{c^2}x + 1 \right)^2 - 1} = \pm \left(\frac{a}{c^2}x + 1 \right) \sqrt{1 - \left(\frac{a}{c^2}x + 1 \right)^{-2}}$$

Pour obtenir l'équation des asymptotes, on peut linéariser cette dernière expression pour des x et des t grands, ce qui donne les équations des asymptotes recherchées :

$$\frac{at}{c} \approx \pm \left(\frac{a}{c^2}x + 1 \right) \quad ct \approx \pm \left(x + \frac{c^2}{a} \right)$$

L'hyperbole considéré présente ainsi deux asymptotes obliques, d'équations :

$$ct = x + \frac{c^2}{a} \quad \text{et} \quad ct = -x - \frac{c^2}{a}$$

On remarque que la pente de ces droites est ± 1 (même pente que la ligne d'univers d'un photon).

1 pt 2.13 — À quelle coordonnée t_{limite} l'asymptote de la branche positive coupe-t-elle l'axe des temps ?

D'après ce qui précède, l'équation de l'asymptote à la branche de l'hyperbole dans le cadran positif ($x > 0, ct > 0$) est :

$$ct = x + \frac{c^2}{a}.$$

Cette droite coupe l'axe des temps en $x = 0$, ce qui correspond à

$$ct = \frac{c^2}{a} \quad \text{soit} \quad t = t_{\text{limite}} = \frac{c}{a}$$

Numériquement, on trouve $t_{\text{limite}} \approx 449$ s.

3 pts 2.14 — Dessinez sur votre diagramme la ligne d'univers d'un photon émis depuis la Terre en direction de la sonde, dans les trois cas suivants :

1. Le photon est émis sur Terre à un instant $t \in [0, t_{\text{limite}}[$.
2. Le photon est émis sur Terre à un instant $t > t_{\text{limite}}$.
3. Le photon est émis à $t = t_{\text{limite}}$.

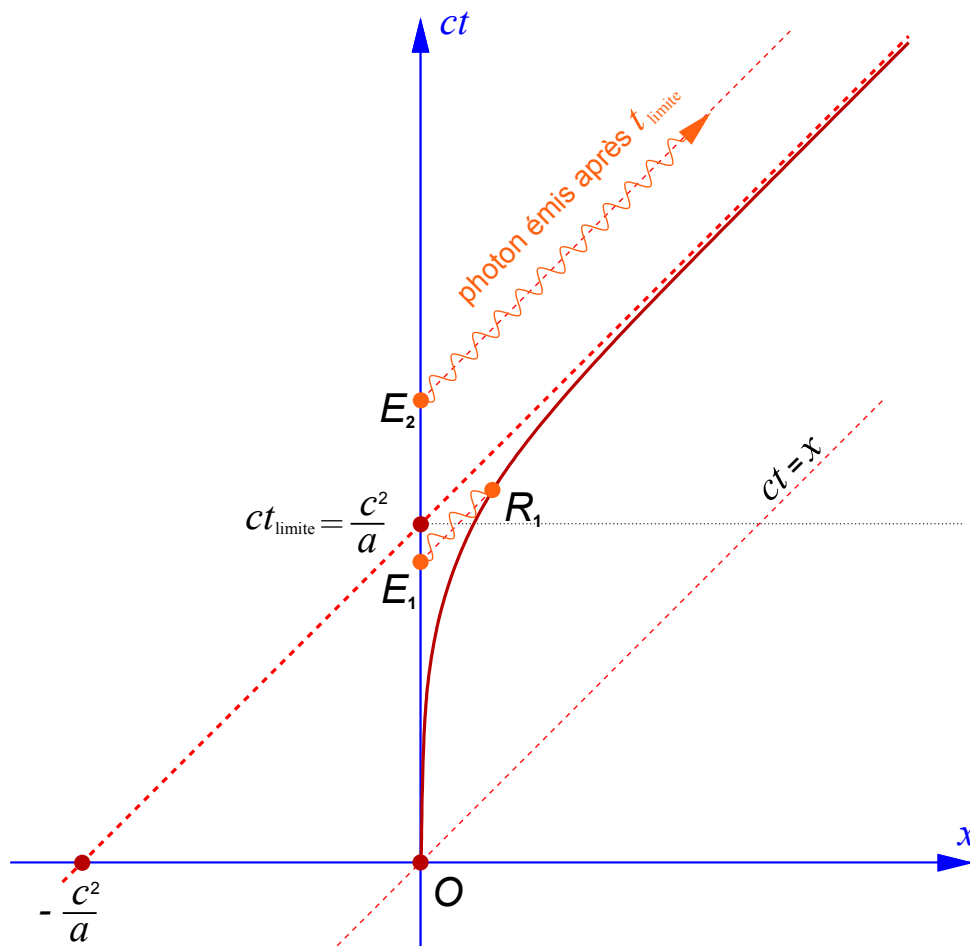


FIGURE 2 – *Ligne d’univers de la sonde (en rouge), avec son asymptote d’équation $ct = x + c^2/a$ qui coupe l’axe des temps en $ct_{\text{limite}} = c^2/a$ avec $t_{\text{limite}} = c/a$. On a aussi représenté la ligne d’univers d’un photon émis depuis la Terre dans la direction de la sonde à $t < t_{\text{limite}}$: ce photon est émis en E_1 et atteint la sonde en R_1 . Enfin, un photon émis à $t \geq t_{\text{limite}}$ (événement E_2) ne pourra jamais rattraper la sonde.*

Concluez : d’après votre diagramme, est-il possible à un photon émis sur Terre à $t \geq t_{\text{limite}}$ d’atteindre la sonde ? Commentez quant à la possibilité d’envoyer à la sonde des messages émis depuis la Terre après t_{limite} . Est-il utile de maintenir le laser de propulsion allumé sur Terre au-delà de $t = t_{\text{limite}}$?

La ligne d’univers de la sonde, son asymptote et les trajectoires d’un photon émis à $t < t_{\text{limite}}$ (événement E_1) et d’un photon émis à $t > t_{\text{limite}}$ (événement E_2) sont représentées sur la figure 2.

Comme la pente de l’asymptote de la ligne d’univers est la même que celle de la trajectoire d’un photon, il apparaît clairement qu’un photon émis depuis la Terre à un instant $t \geq t_{\text{limite}} = c/a$ ne pourra jamais rejoindre la sonde (deux droites parallèles dans le plan ne se coupent jamais). Tout message émis depuis la Terre après t_{limite} ne pourra donc jamais atteindre la sonde (par contre, il est possible à la sonde d’envoyer des messages vers la Terre). De même, il est inutile de maintenir le laser de propulsion allumé au-delà de $t = t_{\text{limite}}$ car les photons émis sur Terre après cet instant ne pourront pas rejoindre la sonde et lui donner un supplément de quantité de mouvement.

2 pts 2.15 — En pratique, on souhaite atteindre une vitesse de croisière de $v_c = 0.2c$. Exprimez le temps nécessaire Δt_{laser} pendant lequel il faut illuminer la voile à l’aide du faisceau laser pour atteindre cette vitesse. Application numérique.

À partir de l’expression de la vitesse $v(t)$, on établit la relation inverse (déjà rencontrée plus haut lors de la résolution des équations du mouvement),

$$v(t) = \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}} \quad \text{d'où} \quad at = \frac{v(t)}{\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}}$$

Le temps Δt_{laser} pendant lequel il faut maintenir le laser de propulsion allumé est donc :

$$\Delta t_{\text{laser}} = \frac{v_c}{a\sqrt{1 - \frac{v_c^2}{c^2}}} \approx 91.7 \text{ s.}$$

1 pt 2.16 — Avec une telle vitesse de croisière, en négligeant la phase d’accélération, en combien de temps la sonde attendra-t-elle Alpha Centauri ? Application numérique.

Si on néglige la phase d’accélération et qu’on considère que l’essentiel du voyage s’effectue à la vitesse constante $v_c = 0.2c$, le temps de parcours $\Delta t_{\text{parcours}}$ s’écrit simplement :

$$\Delta t_{\text{parcours}} = \frac{D}{v_c} = \frac{4.37 \text{ années-lumière}}{0.2c} \approx 21.8 \text{ années.}$$

Données :

Distance Soleil - Alpha Centauri : $D = 4.37$ années-lumière = 1.34 parsec

Masse de la sonde (voile comprise) : $m = 1$ gramme

Puissance et longueur d’onde du laser : $\mathcal{P} = 100$ GW $\lambda = 632.8$ nm

$h = 6.626070 \times 10^{-34}$ kg · m² · s⁻¹ $\hbar = h/2\pi$ $c = 299792458$ m · s⁻¹.

Remarque : Le calcul que nous venons d’effectuer n’est pas tout à fait correct, car nous avons négligé deux effets importants : d’une part, si le laser émet ses photons avec une fréquence ν constante sur Terre, ces photons sont reçus avec une fréquence inférieure $\nu' < \nu$ par la sonde dans son référentiel propre, du fait de l’effet Doppler ; cette fréquence ν' décroît au fur et à mesure que la sonde accélère,

et tend vers zéro quand v tend vers c . D'autre part, si la puissance laser émise sur Terre est constante (nombre constant de photons émis par unité de temps sur Terre), le nombre de photons reçus par unité de temps par la sonde diminue progressivement, du fait de l'augmentation de la vitesse de la sonde et des effets de dilatation du temps. Par ailleurs, on néglige ici la divergence du faisceau laser utilisé.

Compléments

Ce qui suit n'était pas attendu lors de l'épreuve : il s'agit seulement d'un complément au corrigé pour les plus curieux.

Comme indiqué ci-dessus, nous avons négligé plusieurs effets importants dans notre calcul. Nous allons les discuter brièvement et indiquer les grandes lignes d'un traitement complet du problème de la propulsion de ces sondes intersidérales.

Photon incident et photon réfléchi. Le raisonnement que nous avons effectué sur la différence (négligeable) de longueur d'onde entre photon incident et photon réfléchi n'est en réalité exact que dans le référentiel inertiel tangent \mathcal{R}' à la sonde. Ce résultat n'est plus valide lorsqu'on raisonne dans le référentiel de départ \mathcal{R} , celui du système solaire. Vu dans \mathcal{R} , le photon incident qui frappe la voile a bien la même longueur d'onde que lorsqu'il est émis sur Terre, mais le photon réfléchi est *redshifté* par effet Doppler, et l'approximation $\lambda_i \approx \lambda_f$ n'est plus légitime, particulièrement lorsque la vitesse de la sonde est grande.

Effet Doppler. Dans le référentiel \mathcal{R} (on confond ici allègrement référentiel terrestre et référentiel du système solaire sans commettre une grande erreur, car les vitesses des sondes sont sans commune mesure avec la vitesse de rotation de la Terre autour du soleil), les photons du laser de propulsion sont émis à la fréquence ν et à la longueur d'onde $\lambda = c/\nu$; du fait du mouvement de la sonde, ils sont reçus par la sonde dans son référentiel (ou plutôt, dans le référentiel galiléen tangent \mathcal{R}') avec une fréquence plus faible ν' et une longueur d'onde plus grande λ' ,

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad \text{et} \quad \lambda' = \lambda \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad (10)$$

où $\beta = v(t)/c$ et $v(t)$ est la vitesse de la sonde dans \mathcal{R} à l'instant t .

Si on fait apparaître la rapidité $\varphi = \operatorname{arctanh} \beta$ de la sonde ($\beta = \tanh \varphi$), les expressions précédentes prennent une forme élégante :

$$\nu' = \nu e^{-\varphi} \quad \text{et} \quad \lambda' = \lambda e^{+\varphi}. \quad (11)$$

Par conséquent, si on raisonne dans le référentiel inertiel tangent \mathcal{R}' , la quantité de mouvement transférée par un photon à la sonde s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{p}' &= \mathbf{p}'_f - \mathbf{p}'_i = \hbar \mathbf{k}'_i - \hbar \mathbf{k}'_f = \hbar k'_i \mathbf{e}_x - (-\hbar k'_f \mathbf{e}_x) \\ \Delta \mathbf{p}' &= 2\pi\hbar \left[\frac{1}{\lambda'_i} + \frac{1}{\lambda'_f} \right] \mathbf{e}_x = \frac{h}{c} (\nu'_i + \nu'_f) \mathbf{e}_x \approx \frac{2h\nu'}{c} \mathbf{e}_x \\ \Delta \mathbf{p}' &\approx \frac{2h\nu}{c} \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \mathbf{e}_x = \frac{2h\nu}{c} e^{-\varphi} \mathbf{e}_x \end{aligned}$$

Car dans le référentiel tangent, comme vu précédemment, on a bien $\lambda'_i \approx \lambda'_f$. L'impact de chaque photon émis sur Terre avec l'énergie $h\nu$ (dans le référentiel \mathcal{R}) fournit ainsi une quantité de mouvement $(2h\nu'/c) \mathbf{e}_x = (2h\nu/c) e^{-\varphi} \mathbf{e}_x$ à la sonde.

Intensité émise et reçue. Non seulement la fréquence des photons est affectée, mais le nombre de photons reçus par unité de temps l'est aussi. En tenant un raisonnement analogue à celui effectué en TD pour démontrer l'effet Doppler (on peut par exemple considérer l'émission et la réception de deux photons successifs), on peut montrer que le nombre dN'/dt' de photons reçus par unité de temps par la sonde est relié au nombre dN/dt de photons émis par unité de temps sur Terre par le même coefficient que celui de l'effet Doppler,

$$\frac{dN'}{dt'} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \frac{dN}{dt} = e^{-\varphi} \frac{dN}{dt}. \quad (12)$$

Et, en faisant apparaître la puissance lumineuse \mathcal{P} émise sur Terre,

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\mathcal{P}}{h\nu}$$

on trouve alors

$$\frac{dN'}{dt'} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \frac{\mathcal{P}}{h\nu} = e^{-\varphi} \frac{\mathcal{P}}{h\nu}$$

Équation du mouvement. Vu dans le référentiel tangent \mathcal{R}' , chaque photon reçu, d'énergie $h\nu'$ transmet à la sonde une quantité de mouvement $2h\nu' \mathbf{e}_x/c$; on aura ainsi :

$$\frac{d\mathbf{p}'}{dt'} = \frac{2h\nu'}{c} \frac{dN'}{dt'} \mathbf{e}_x = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \frac{2h\nu}{c} \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \frac{dN}{dt} \mathbf{e}_x = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right) \frac{2h\nu}{c} \frac{\mathcal{P}}{h\nu} \mathbf{e}_x = e^{-2\varphi} \frac{2\mathcal{P}}{c} \mathbf{e}_x$$

On aboutit ainsi à une équation différentielle de la forme

$$d\mathbf{p}' = e^{-2\varphi} \frac{2\mathcal{P}}{c} dt' \mathbf{e}_x = e^{-2\varphi} ma dt' \mathbf{e}_x \quad (13)$$

en posant $a = 2\mathcal{P}/mc$ comme précédemment. Dans le référentiel tangent, la sonde n'a pas de vitesse (ni de quantité de mouvement) avant l'impact des dN' photons, et sa vitesse devient $d\mathbf{v}' = dv' \mathbf{e}_x$ après l'impact des dN' photons reçus pendant un temps élémentaire dt' ; l'incrément $d\mathbf{p}'$ de quantité de mouvement correspondant s'écrit :

$$d\mathbf{p}' = m\gamma(dv')dv' \mathbf{e}_x = mdv' \mathbf{e}_x$$

car $\gamma(dv') \approx 1$. En substituant, l'équation (13) devient :

$$dv' = e^{-2\varphi} a dt' \quad \text{i.e.} \quad e^{2\varphi} dv' = a dt'.$$

Résolution. En utilisant les résultats déjà établis précédemment lors de l'étude des mouvements accélérés, on peut tout exprimer en fonction de la rapidité φ de la sonde :

$$dv' = \gamma^2(v)dv = c \cosh^2 \varphi \frac{1}{\cosh^2 \varphi} d\varphi = c d\varphi \quad dt' = \frac{dt}{\gamma(v)} = \frac{dt}{\cosh \varphi}.$$

Ce qui donne, en substituant,

$$e^{2\varphi} \cosh \varphi d\varphi = \frac{a}{c} dt \quad \text{soit} \quad (e^{3\varphi} + e^\varphi) d\varphi = \frac{2a}{c} dt. \quad (14)$$

En intégrant entre l'instant du départ et un instant t quelconque, et en supposant que la vitesse initiale est nulle, et par conséquent que la rapidité initiale l'est aussi ($\varphi(0) = 0$), on obtient :

$$\left[\frac{e^{3\varphi}}{3} + e^\varphi \right]_0^{\varphi(t)} = \frac{2at}{c} \quad \text{soit} \quad \frac{e^{3\varphi}}{3} + e^\varphi - \frac{4}{3} = \frac{2at}{c}$$

ce qui donne une équation de la forme :

$$e^{3\varphi} + 3e^\varphi - \frac{6at}{c} - 4 = 0$$

où, en posant $\xi = e^\varphi$, on reconnaît une équation polynomiale cubique en ξ ,

$$\xi^3 + 3\xi - \frac{6at}{c} - 4 = 0.$$

Cette équation polynomiale de degré 3 possède une solution réelle,

$$e^\varphi = \xi = \sqrt[3]{\sqrt{\Delta} + \frac{3at}{c} + 2} - \frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{\Delta} + \frac{3at}{c} + 2}} \quad \text{avec} \quad \Delta = \frac{9a^2t^2}{c^2} + \frac{12at}{c} + 5.$$

Une fois $\xi(t) = e^{\varphi(t)}$ connu, on obtient la rapidité et la vitesse $v(t)$ de la sonde :

$$\frac{v(t)}{c} = \beta(t) = \tanh \varphi(t) = \frac{e^{\varphi(t)} - e^{-\varphi(t)}}{e^{\varphi(t)} + e^{-\varphi(t)}} = \frac{\xi(t) - 1/\xi(t)}{\xi(t) + 1/\xi(t)}.$$

L'évolution de la vitesse est représentée sur la figure 3; on y a aussi dessiné la vitesse calculée précédemment pour un mouvement hyperbolique. On constate que, comme précédemment, la vitesse tend vers c si on maintient le lasers de propulsion allumés suffisamment longtemps. Pour obtenir une vitesse de croisière de $v_c = 0.2c$, il faudra maintenir actifs les lasers de propulsion un peu plus longtemps pour compenser l'effet Doppler et la diminution de la puissance effective reçue par la sonde. On trouve $\Delta t_{\text{laser}} \approx 113$ s au lieu de 91.7 s pour le mouvement hyperbolique.

Trajectoire et ligne d'univers de la sonde. Connaissant l'expression de la vitesse de la sonde dans le référentiel \mathcal{R} du système solaire, on peut en déduire sa trajectoire.

En partant de l'équation différentielle (14), on peut exprimer dt en fonction de $d\varphi$,

$$e^{2\varphi} \cosh \varphi d\varphi = \frac{a}{c} dt \quad \text{d'où} \quad dt = \frac{c}{a} e^{2\varphi} \cosh \varphi d\varphi$$

et en utilisant

$$dx = v(t) dt = c \tanh \varphi dt$$

on en déduit une équation différentielle liant la rapidité et la position :

$$dx = \frac{c^2}{a} e^{2\varphi} \cosh \varphi \tanh \varphi d\varphi = \frac{c^2}{a} e^{2\varphi} \sinh \varphi d\varphi \quad \text{i.e.} \quad dx = \frac{c^2}{2a} (e^{3\varphi} - e^\varphi) d\varphi.$$

En intégrant entre le point de départ ($t = 0, x = 0, v = 0$ et $\varphi = 0$) et un point quelconque de la trajectoire (ct, x) , on trouve :

$$\begin{aligned} x(t) - x(0) = x(t) &= \frac{c^2}{2a} \left[\frac{e^{3\varphi}}{3} - e^\varphi \right]_0^{\varphi(t)} = \frac{c^2}{6a} (e^{3\varphi(t)} - 3e^{\varphi(t)} + 2) \\ &= \frac{c^2}{6a} (e^{3\varphi(t)} - 3e^{\varphi(t)}) + \frac{c^2}{3a} = \frac{c^2}{6a} \left((e^{\varphi(t)})^3 - 3e^{\varphi(t)} \right) + \frac{c^2}{3a}. \end{aligned}$$

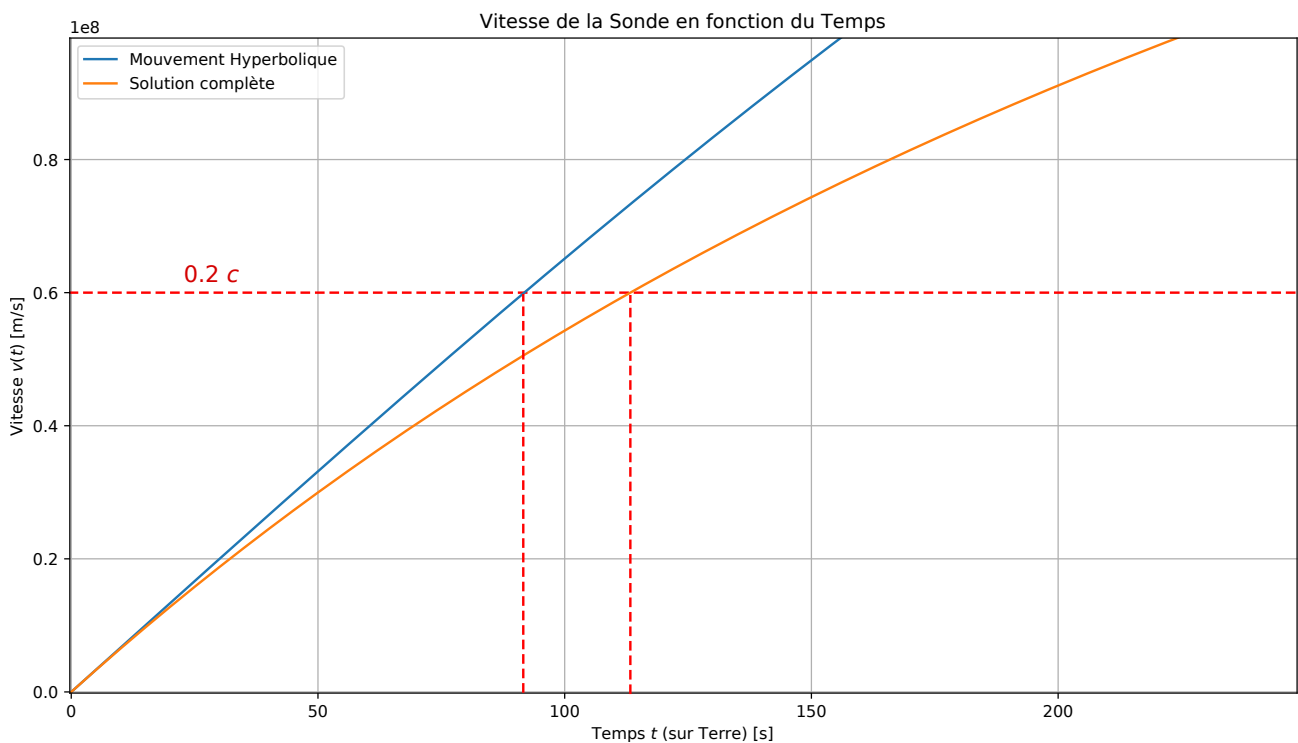
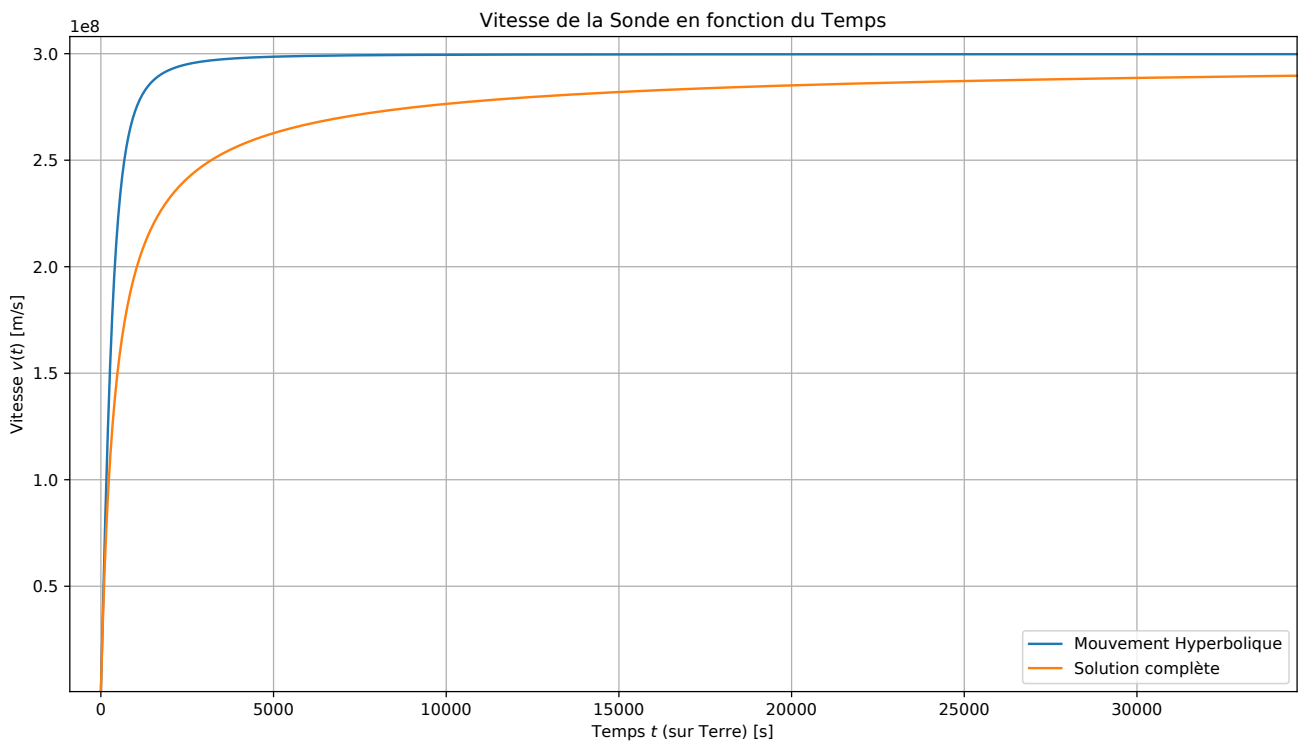


FIGURE 3 – Évolution de la vitesse de la sonde, en supposant qu'on maintienne le laser allumé aussi longtemps que possible. En bleu, $v(t)$ calculée en ignorant l'effet Doppler et la diminution progressive de la puissance effective reçue (mouvement "hyperbolique"); en orange, $v(t)$ calculée en tenant compte de ces deux effets.

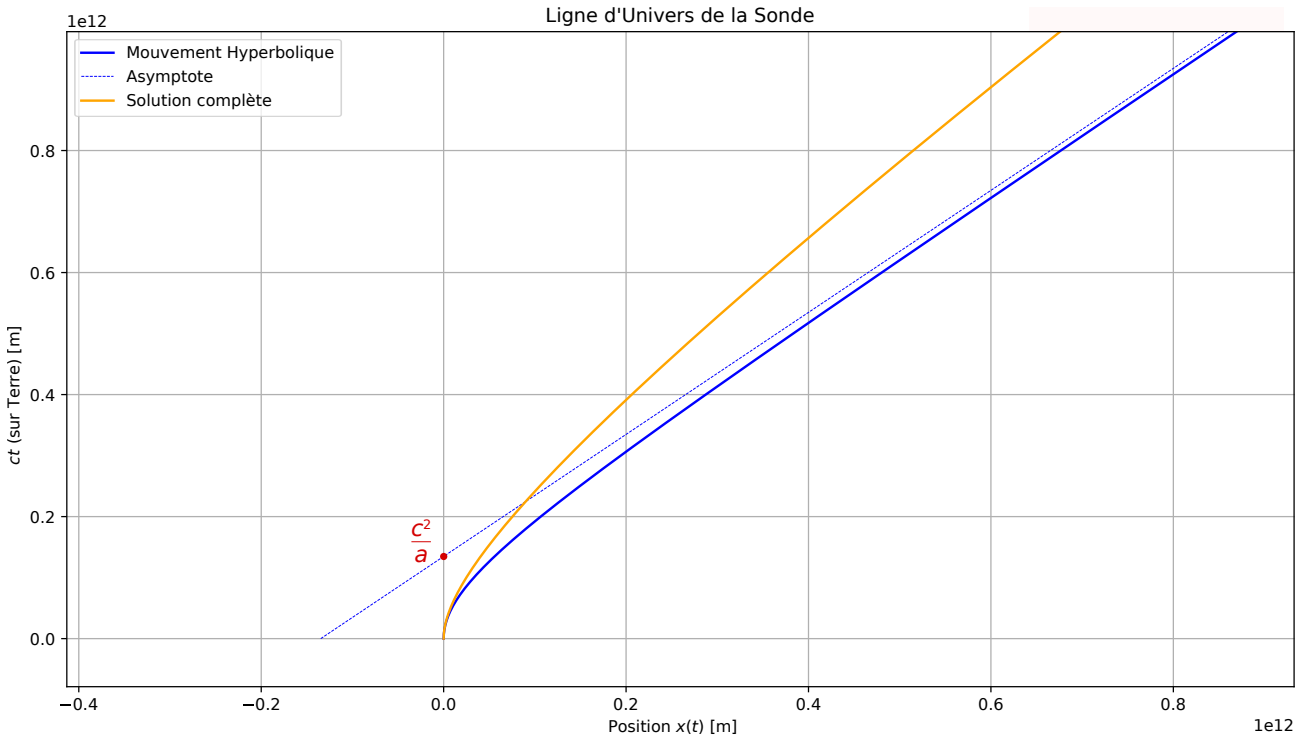


FIGURE 4 – Ligne d’univers de la sonde, en supposant qu’on maintienne le laser allumé aussi longtemps que possible. En bleu, ligne d’univers calculée en ignorant l’effet Doppler et la diminution progressive de la puissance effective reçue (mouvement “hyperbolique”); en orange, ligne d’univers calculée en tenant compte de ces deux effets.

En utilisant l’expression de $e^{\varphi(t)}$ établie précédemment, on obtient la trajectoire de la sonde. Cette fois la ligne d’univers de la sonde n’est plus une hyperbole. La ligne d’univers de la sonde est représentée sur la figure 4.

Dans ce calcul un peu plus complet, on a bien sûr ignoré de nombreux autres effets et problèmes pratiques : le faisceau laser diverge et il n’est pas évident que la voile puisse en capter la totalité pendant la phase d’accélération ; l’espace n’est pas vide et contient des poussières interstellaires qui peuvent ralentir les sondes, voir même les endommager pendant leur trajet ; la puissance du faisceau laser est telle que les contraintes mécaniques et thermiques exercées sur la voile et sa structure sont considérables : en particulier, il faut concevoir une voile très fine et très légère, mais qui ne s’évapore pas instantanément sous l’échauffement produit par l’impact du faisceau laser. Il faudra que le projet “Breakthrough Starshot” réussisse à s’affranchir de nombreux verrous technologiques avant qu’il ne soit effectivement envisageable de lancer des sondes vers Alpha Centauri de cette manière.