LICENCE DE PHYSIQUE — RELATIVITÉ RESTREINTE

DEVOIR

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2020–2021

À remettre avant le dimanche 25 octobre 2020, en séance ou via Moodle avant minuit

1. Propulsion d'une fusée

On rappelle que la seconde loi de Newton ("principe fondamental de la dynamique", "RFD"), sous sa forme la plus générale, dans un référentiel galiléen, s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \mathbf{F}_{\text{ext}}$$

où $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ est la *quantité de mouvement* du système considéré, et $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}}$ est la somme des forces extérieures agissant sur le système matériel considéré. En l'absence de forces agissant sur le système, la quantité de mouvement est conservée.

De plus, pour un système de masse constante m, l'expression se réduit à :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = m\,\mathbf{a} = \sum \mathbf{F}_{\text{ext}}$$

On souhaite analyser le mouvement d'une fusée pendant sa phase de décollage.

1.1 — En se plaçant dans le référentiel au sol (pas de tir, $\mathcal{R}$), écrivez l'expression de la quantité de mouvement $\mathbf{p}$ de la fusée à l'instant t : la masse de la fusée est alors m, et sa vitesse $\mathbf{v}$ (par rapport au sol).

1.2 — Faites de même à l'instant $t + \mathrm{d}t$ (fig. 1) : pendant $\mathrm{d}t$, la fusée a éjecté une masse de gaz $(-\mathrm{d}m) > 0$ et sa masse est désormais $m + \mathrm{d}m < m$, tandis que sa vitesse vaut $v + \mathrm{d}v$. Les gaz sont éjectés à la vitesse w dans le référentiel de la fusée. Exprimez la quantité de mouvement du système $\{$ fusée + ejecta $\}$.

1.3 — Si on suppose que la fusée ne subit aucune force extérieure, la quantité de mouvement totale est conservée : déduisez-en une relation entre l'accélération de la fusée $\mathbf{a} = \mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t$, la vitesse d'éjection des gaz $\mathbf{w}$ et le débit massique de la tuyère du moteur de la fusée $q_m = -\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$.

1.4 — À un instant t arbitraire, on se place dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ *tangent* à la fusée, c'est à dire dans le *référentiel inertiel qui se confond avec celui de la fusée à cet instant t précis*. En raisonnant dans $\mathcal{R}'$ aux instants t et $t + \mathrm{d}t$, retrouvez la relation entre l'accélération de la fusée $\mathrm{d}v'/\mathrm{d}t$ mesurée dans $\mathcal{R}'$, la vitesse d'éjection des gaz $\mathbf{w}$ et le débit massique q_m de la tuyère ($\mathbf{v}'$ étant la vitesse de la fusée dans $\mathcal{R}'$).

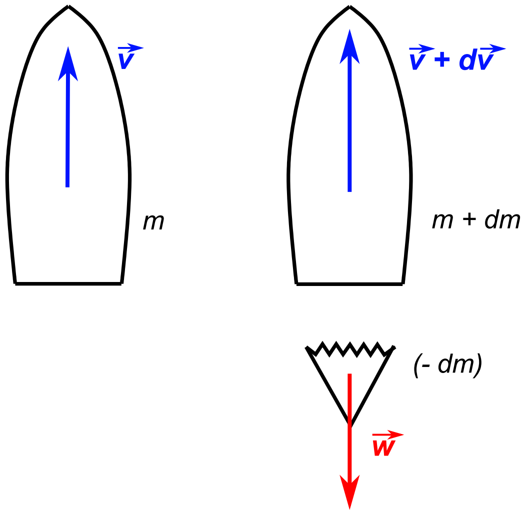

FIGURE 1 – *À gauche, à l'instant t, le système considéré est la fusée de masse totale m, possédant la vitesse $\mathbf{v}(t)$. À droite, un instant $\mathrm{d}t$ plus tard, la vitesse de la fusée est désormais $\mathbf{v} + \mathrm{d}\mathbf{v}$, tandis que sa masse a décru et vaut maintenant $m + \mathrm{d}m$. Les gaz éjectés (ejecta) par la tuyère, de masse $(-\mathrm{d}m)$, sortent de la tuyère avec une vitesse $\mathbf{w}$ par rapport à la fusée.*

1.5 — Afin de construire un modèle plus réaliste, on tient compte des forces qui s'exercent sur la fusée : son poids, et les frottements de l'air ("réaction aérodynamique") dont le module peut se mettre sous la forme : $R = \frac{1}{2} C_x \rho_{\text{air}} S v^2$ où ρ_{air} est la masse volumique de l'air, S la section de la fusée (en m^2) et C_x un facteur de forme, sans dimension. En utilisant la seconde loi de Newton, déduisez-en la variation $\mathrm{d}\mathbf{p}$ de la quantité de mouvement pendant un instant $\mathrm{d}t$.

1.6 — Montrez que l'accélération $\mathbf{a} = \mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t$ de la fusée peut s'écrire :

$$m\,\mathbf{a} = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = m\,\mathbf{g} + \mathbf{R} + \mathbf{F}_{\text{poussée}}$$

où $\mathbf{F}_{\text{poussée}}$ est la *poussée* de la fusée. Explicitez $\mathbf{F}_{\text{poussée}}$ en fonction de la vitesse w d'éjection des gaz et de $q_m = -\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$, le débit massique de la tuyère de la fusée.

1.7 — En faisant l'hypothèse, simpliste, que l'on peut négliger la résultante aérodynamique R (au départ, la vitesse est faible, et dans les hautes couches de l'atmosphère, l'air se raréfie), exprimez le gain de vitesse $\Delta v = v(\tau) - v(0)$ qu'obtient la fusée pendant la durée de fonctionnement τ de son étage de propulsion (temps que dure le carburant de cet étage) : exprimez ce gain de vitesse en fonction de la masse de la fusée à $t = 0$ et à $t = \tau$.

1.8 — Simplifiez l'expression précédente pour $\Delta v = v(\tau) - v(0)$ en faisant l'hypothèse supplémentaire que que la vitesse d'éjection w est constante.

1.9 — Application. On suppose que la fusée pèse 14 tonnes sans carburant, et qu'elle emporte 148 tonnes d'ergols pour sa propulsion ; on suppose de plus que la vitesse d'éjection w est constante et vaut $w = 4500\,\mathrm{m/s}$, soit la vitesse maximale avec la technologie actuelle. Enfin, on suppose que tout le carburant est consommé au bout de 145 s. Calculez le gain de vitesse Δv de la fusée à l'issue de cette phase de propulsion.

1.10 — La vitesse de libération sur Terre est d'environ 11.2 km/s. Justifiez l'emploi de fusées gigognes à plusieurs étages dans l'industrie aérospatiale.

2. Record de vitesse à skis

Après avoir détruit l'Etoile de la Mort, Luke décide de se payer des vacances au ski. Puisqu'il aime la vitesse, il entreprend de battre le record de vitesse à skis établi à 255 km.h^{-1} en 2016 et dans une galaxie très, très lointaine, par l'Italien Ivan Origone [1].

Luke pèse $m = 80$ kg et on suppose dans un premier temps qu'il glisse sans frottement sur une piste rectiligne faisant un angle de θ =45° avec l'horizontale. Il subit de la part de l'air une force de résistance de module $\frac{1}{2}kSv^2$ où $S = 0.4\,\mathrm{m}^2$ (surface présentée au flux d'air) et k le coefficient aérodynamique vaut $0.8\,\mathrm{kg/m}^3$. Il part sans vitesse initiale à la position $x = 0$.

2.1 — Effectuer le bilan des forces. Représenter ses forces par des vecteurs sur un graphique. Pour simplifier, on supposera qu'elles s'appliquent toutes au niveau du centre de gravité G. On représentera les vecteurs de base $(\mathbf{e_x}, \mathbf{e_z})$, choisis de manière judicieuse.

2.2 — Exprimer le module de la vitesse limite v_ℓ que Luke peut espérer atteindre. On fera l'application numérique en donnant le résultat avec deux décimales.

2.3 — On souhaite maintenant exprimer la vitesse à tout instant t. Pour cela, on ne va pas y couper : il va falloir résoudre l'équation différentielle. Comme Luke s'élançant en haut de la pente neigeuse, ne paniquons pas. Allons-y par étapes.

i) Montrer que l'équation différentielle à résoudre peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + Av^2 = B \tag{1}$$

et expliciter les coefficients A et B. Exprimer également v_ℓ en fonction de A et B.

ii) On définit une nouvelle fonction $u(t)$ telle que $v(t) = \alpha u(t)$ et une nouvelle variable s telle que $t = \beta s$. α et β sont des constantes. Montrer que

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}.$$

iii) Déterminer les valeurs des coefficients α et β de façon à ce que l'équation différentielle vérifiée par la fonction $u(s)$ s'écrive

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = 1 - u^2.$$

On exprimera α et β en fonction de A et B.

iv) Montrer que $u(s)$ vérifie l'expression

$$s = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u(s)}{1-u(s)}\right| + C,$$

où C est une constante.

v) En sachant que pour $x \in [0, 1[$,

$$\mathrm{argth}\ x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},$$

montrer finalement que la vitesse de Luke s'exprime en fonction du temps par

$$v(t) = v_\ell\ \mathrm{th}\,(t/\tau)\,.$$

Exprimer τ en fonction des données du problème. Application numérique.

1. https://wd40.fr/nos-athletes/ivan-origone-detenteur-du-record-du-monde-de-vitesse-sur-skis/

2.4 — Quel temps t_{99} faut-il au skieur pour atteindre 99% de la vitesse limite ?

2.5 — Déterminer l'équation horaire du mouvement, c'est-à-dire la fonction $x(t)$. Pour cela, on rappelle que la primitive de la fonction th est donnée par

$$\int \mathrm{th}(x)\,\mathrm{d}x = \ln(\mathrm{ch}(x)) + C.$$

Quelle distance Luke aura-t-il parcouru au bout d'une durée t_{99} ?

2.6 — Jusqu'à présent, on a fait l'hypothèse que les skis glissent sur la neige sans frottement. Dans cette dernière question, on tient compte d'une force de frottement supplémentaire de module fv, où f est le coefficient de frottement, de valeur 0,05. Quelle est la nouvelle valeur de la vitesse limite v'_ℓ ? On donnera le résultat numérique avec deux décimales.

2.7 — Pour conclure, expliquer sur quel aspect Luke doit travailler pour espérer battre le record de vitesse : doit-il plutôt chercher à améliorer la glisse des skis, ou bien à diminuer sa traînée aérodynamique ?

Données : $g = 9.8$ m.s^{-2}.

3. Jeu de ballon sur un tourniquet

Lorsque la lutte contre l'Empire leur laisse un peu de répit, Luke et Leia aiment s'adonner à des jeux simples et néanmoins intellectuellement stimulants. Aussi un jour décident-ils de se faire des passes avec un ballon, tout deux assis sur le plateau en rotation d'un tourniquet. Han Solo observe la scène à quelque distance, jaloux que Leia préfère jouer avec son frère (son frère à elle, il faut suivre).

La figure 2 montre la situation avec Leia et Luke sur le plateau, respectivement aux points A et B, et Han qui observe la scène au point C. Han est immobile dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au sol, supposé galiléen. Le repère d'espace utilisé est cartésien, pourvu d'un repère dont l'origine O est au centre du plateau. La base associée est cartésienne avec pour vecteurs unitaires de base $(\mathbf{u_x}, \mathbf{u_y}, \mathbf{u_z})$. Le plateau tourne à la vitesse *constante* $\mathbf{\Omega} = \Omega\,\mathbf{u_z}$. On suppose que $OA = OB = R$. Dans tout l'exercice, on négligera l'épaisseur du plateau.

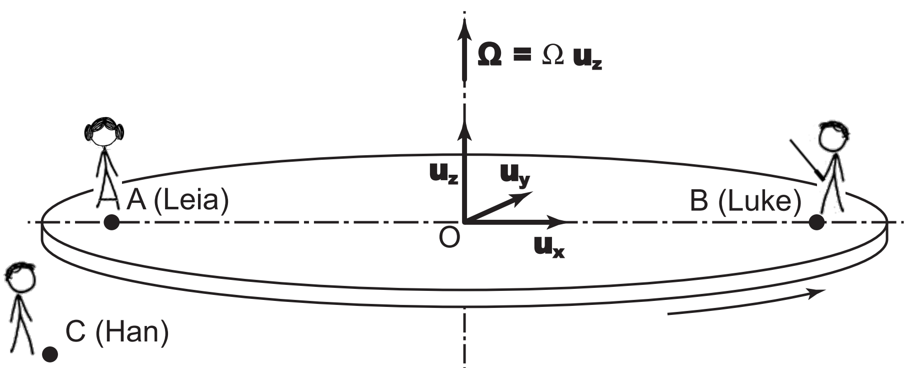

FIGURE 2 – Schéma montrant la position des différents personnages. Leia et Luke sont sur le plateau alors que Han regarde la situation à quelque distance.

Trajectoire du ballon dans le repère $\mathcal{R}$

On étudie dans un premier temps la trajectoire du ballon dans le repère $\mathcal{R}$, c'est-à-dire telle qu'observée par Han. Le repère $(O, \mathbf{u_x}, \mathbf{u_y}, \mathbf{u_z})$ est lié au sol. A l'instant $t = 0$, alors qu'elle est sur l'axe (Ox) au point $\mathrm{A}(-R, 0, 0)$, Leia lance le ballon dans la direction de Luke, donc le long de l'axe (Ox), avec une vitesse initiale $\mathbf{v_{0/\mathcal{R}'}} = v_{0x}\mathbf{u_x} + v_{0y}\mathbf{u_y} + v_{0z}\mathbf{u_z}$.

NB : la norme de la vitesse tangentielle (donc perpendiculaire au rayon) d'un point situé à une distance r du centre du plateau est donnée par $r\Omega$.

3.1 — Exprimer les composantes du vecteur $\mathbf{v_{0/\mathcal{R}}}$ telles que mesurées par Han à $t = 0$.

3.2 — Déterminer l'équation paramétrique $(x(t), y(t), z(t))$ de la trajectoire du ballon vue dans le référentiel $\mathcal{R}$. On négligera la force de frottement de l'air. Exprimer le temps t_{max} que met le ballon pour arriver au niveau du sol.

3.3 — Bonus - A l'aide du logiciel de votre choix, représenter graphiquement la trajectoire à trois dimensions du ballon telle que vue par Han. On se limitera à représenter la courbe entre $t = 0$ et $t = t_{max}$. Données : $R = 2$ m, $v_{0x} = v_{0y} = 6$ m.s^{-1}, $v_{0z} = 5$ m.s^{-1}, $\Omega = 2$ rad/s, $g = 9.8$ m.s^{-2}.

Trajectoire du ballon dans le repère tournant

Cette fois, on souhaite étudier la trajectoire du ballon telle qu'observée dans le référentiel tournant $\mathcal{R}'$ par Leia et Luke. On utilise le repère tournant $(O' = O, \mathbf{u_x}, \mathbf{u_y}, \mathbf{u_z})$, *lié au plateau*, dans la position de la figure 2. Ainsi, pour $t = 0$, le repère tournant coïncide avec le repère fixe de la première partie.

Comme précédemment, à l'instant $t = 0$, depuis le point $\mathrm{A}(-R, 0, 0)$, Leia lance le ballon dans la direction de Luke, donc le long de l'axe (Ox), avec une vitesse initiale $\mathbf{v_{0/\mathcal{R}'}}$. On notera M la position du ballon à un instant quelconque t, de sorte que son vecteur position est $\mathbf{OM}(t) = \mathbf{O'M}(t)$. Les coordonnées de M dans $\mathcal{R}'$ seront notée (X, Y, Z) et sa vitesse $\mathbf{v_{M/\mathcal{R}'}}$.

3.4 — Ecrire la RFD régissant le mouvement du ballon dans le référentiel tournant, encore une fois en négligeant les forces de frottement dans l'air.

3.5 — Exprimer l'accélération d'entraînement $\mathbf{a_e}$ et l'accélération de Coriolis $\mathbf{a_c}$ en fonction de X, Y, Z, de leurs dérivées par rapport au temps $\dot{X}$, $\dot{Y}$, $\dot{Z}$, de Ω et des vecteurs de base $(\mathbf{u_x}, \mathbf{u_y}, \mathbf{u_z})$.

3.6 — En appliquant la RFD dans le repère tournant, établir les équations différentielles vérifiées par les coordonnées X, Y et Z. On remarquera logiquement que l'équation sur $Z(t)$ est identique à celle obtenue dans le référentiel fixe. Elle admet la même solution.

On répondra au choix soit aux questions de l'alternative 1, soit à la question de l'alternative 2. La première alternative est un peu plus difficile et rapportera plus de points que la seconde.

3.7 — Alternative 1 - Effectuer le changement de variable $Q = X + iY$, où $i^2 = -1$ et exprimer l'équation différentielle vérifiée par la fonction Q.

3.8 — Alternative 1 - La forme de l'équation obtenue pour $Q(t)$ nous pousse à essayer la forme $Q(t) = Ae^{rt}$, où A est un nombre complexe non nul. Déterminer la valeur de r.

3.9 — Alternative 1 - Dans le cas où une seule valeur est possible pour r, on peut montrer que la solution de l'équation sur $Q(t)$ est de la forme

$$Q(t) = Ae^{rt} + Bte^{rt},$$

où $A = C + iD$ et $B = E + iF$ sont des constantes complexes. Donner les solutions du système d'équations différentielles couplées obtenu à la question 3.3 en fonction de Ω et des constantes réelles C, D, E et F.

3.10 — Alternative 2 - Montrer que le système d'équation différentielle en $X(t)$ et $Y(t)$ admet pour solution les fonctions :

$$\left\{ \begin{array}{llcl} X(t) = & (C+Et)\cos\Omega t & + & (D+Ft)\sin\Omega t \\ Y(t) = & (D+Ft)\cos\Omega t & - & (C+Et)\sin\Omega t \end{array} \right.$$

3.11 — Déterminer les valeurs des constantes C, D, E et F en fonction des données de l'énoncé. On utilisera les notations de la première partie pour la vitesse initiale du ballon : $\mathbf{v_{0/\mathcal{R}'}} = v_{0x}\mathbf{u_x} + v_{0y}\mathbf{u_y} + v_{0z}\mathbf{u_z}$. Exprimer les fonctions $X(t)$, $Y(t)$ et $Z(t)$.

3.12 — Bonus - A l'aide du logiciel de votre choix, représenter graphiquement la trajectoire à trois dimensions du ballon telle que vue par Leia et Luke. On se limitera à représenter la courbe entre $t = 0$ et $t = t_{max}$. Données : $R = 2$ m, $v_{0x} = v_{0y} = 6$ m.s^{-1}, $v_{0z} = 5$ m.s^{-1}, $\Omega = 2$ rad/s, $g = 9.8$ m.s^{-2}.