SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

LICENCE DE PHYSIQUE — RELATIVITÉ RESTREINTE

EXAMEN

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2021–2022

16 novembre 2021 – 16h-18h

Documents, ordinateurs, tablettes et téléphones sont interdits.

Les calculatrices (basiques) sont autorisées.

1. Transformations de Lorentz, composition des vitesses

1.1 — Écrivez les transformations des coordonnées (ct, x, y, z) d'un événement lors du passage d'un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ à un autre référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ se déplacant à la vitesse $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_x$ par rapport à $\mathcal{R}$. Mettez cette relation sous forme matricielle.

1.2 — Si la vitesse relative du référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ était selon l'axe $\mathrm{O}z$ au lieu de $\mathrm{O}x$, *i.e.* $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_z$, comment s'écrirait la transformation de Lorentz pour passer de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$? Écrivez de même cette relation sous forme matricielle.

Pour toute la suite de cet exercice, on considèrera que le mouvement relatif entre les référentiels est selon l'axe $\mathrm{O}x$ ***:*** $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v\,\mathbf{e}_x$***.***

1.3 — Considérons deux événements très proches séparés par une distance infinitésimale $\mathrm{d}\mathbf{r}$ de composantes $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$ et par un intervalle de temps infinitésimal $\mathrm{d}t$ dans le référentiel $\mathcal{R}$, et par une distance $\mathrm{d}\mathbf{r'}$: $(\mathrm{d}x', \mathrm{d}y', \mathrm{d}z')$ et un intervalle de temps $\mathrm{d}t'$ dans $\mathcal{R}'$. Exprimez $\mathrm{d}t'$ et $\mathrm{d}x'$ en fonction de $\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}x$. Que devient cette relation si les deux événements considérés se produisent à la même abcisse x' dans $\mathcal{R}'$? Qu'est-ce que le temps propre τ ?

1.4 — Déduisez de la transformation de Lorentz la loi de transformation des composantes de la vitesse $\mathbf{u} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$ d'un point matériel M lors du passage du référentiel $\mathcal{R}$ au référentiel $\mathcal{R}'$.

1.5 — Précisez les cas limites intéressants, en particulier pour des vitesses faibles devant la célérité c de la lumière. Que retrouve-t-on ? D'autre part, que vaut u_x si $u'_x = c$?

1.6 — En partant de la loi de composition des vitesses, montrez que la vitesse d'un objet ne peut dépasser c quel que soit le référentiel où on mesure cette vitesse.

2. Course-poursuite interstellaire

Vous traiterez cet exercice dans le cadre de la relativité restreinte.

Leia a été capturée et est retenue prisonnière à bord d'une frégate impériale (référentiel $\mathcal{R}'$) qui a quitté la planète Tatooine (référentiel R) à $t = t' = 0$, et qui s'éloigne à la vitesse constante $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_x$ avec $v < c$. Han, lui aussi sur Tatooine, se rend compte de sa disparition à $t = t_1 > 0$, saute aussitôt à bord du Faucon Millenium, *"le tas de ferraille le plus rapide de la galaxie"*, et se lance à sa poursuite, à la vitesse $\mathbf{u} = u\,\mathbf{e}_x$, avec $v < u < c$ (dans la précipitation, il n'a hélas pas eu le temps de réparer son propulseur superluminique). Son vaisseau se déplaçant plus vite que la frégate, il la rattrape à l'instant $t = t_2$. On notera $E_1 : (t_1, x_1)$ l'événement correspondant au départ de Han, et $E_2 : (t_2, x_2)$ l'événement associé à la rencontre du vaisseau de Han et de la frégate qui emporte Leia. On prendra l'astroport de départ sur Tatooine comme origine O du référentiel $\mathcal{R}$, et un point arbitraire de la frégate comme origine O' dans $\mathcal{R}'$.

2.1 — À quel instant t_2 Han rattrape-t-il la frégate ?

2.2 — Établissez, dans les deux référentiels (supposés galiléens) $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ les coordonnées spatio-temporelles des événements E_1 et E_2. Exprimez toutes les coordonnées (x_1, t'_1, x'_1, t_2, x_2, t'_2 et x'_2) en fonction de t_1, u et v.

2.3 — En utilisant les coordonnées des événements E_1 et E_2 dans le référentiel de la frégate impériale, exprimez la vitesse u' du vaisseau de Han dans le référentiel $\mathcal{R}'$. Montrez que vous retrouvez ainsi la loi relativiste de composition des vitesses.

2.4 — Représentez toute cette aventure sur un diagramme d'espace-temps (Minkowski ou Loedel, selon votre préférence), en indiquant bien les coordonnées de chaque événement dans les deux référentiels (en traçant les projections correspondantes sur les axes). *Pour obtenir une figure lisible, consacrez une page entière à ce diagramme.*

3. Jeu de ballon sur un tourniquet

Vous traiterez cet exercice dans le cadre de la mécanique classique.

Lorsque la lutte contre l'Empire leur laisse un peu de répit, Luke et Leia aiment s'adonner à des jeux simples et néanmoins intellectuellement stimulants. Aussi décident-ils un jour de se faire des passes avec un ballon, tous les deux debout sur le plateau d'un tourniquet en rotation. Han Solo observe la scène à quelque distance, jaloux que Leia préfère jouer avec son frère jumeau (le sien, pas celui de Han, il faut suivre).

La figure 1 montre la situation avec Leia et Luke sur le plateau, respectivement aux points A et B, et Han qui observe la scène au point C. Han est immobile dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au sol, supposé galiléen. Le repère d'espace utilisé est cartésien et son origine O est au centre du plateau. La base associée au référentiel lié au sol a pour vecteurs unitaires $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$. Le plateau tourne à la vitesse angulaire *constante* $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\,\mathbf{e_z}$. On suppose que $OA = OB = R$. On munit le référentiel $\mathcal{R}'$ du plateau d'un trièdre orthonormé $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ solidaire du plateau tournant. Dans tout l'exercice, on négligera l'épaisseur du plateau.

Trajectoire du ballon dans le repère lié au référentiel $\mathcal{R}$

On étudie dans un premier temps la trajectoire du ballon dans le repère $\mathcal{R}$, c'est-à-dire telle qu'observée par Han. Le repère $(O, \{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\})$ est lié au sol. A l'instant $t = 0$, alors qu'elle est sur l'axe (Ox) au point A$(-R, 0, 0)$, Leia lance le ballon dans la direction de Luke avec une vitesse initiale

$$\mathbf{v}_{0/\mathcal{R}'} = \mathbf{v}_{/\mathcal{R}'}(t=0) = v_{0,x}\,\mathbf{e}_x + v_{0,y}\,\mathbf{e}_y + v_{0,z}\,\mathbf{e}_z.$$

Pour l'instant, on ne fera pas d'hypothèses sur les composantes initiales $v_{0,x}, v_{0,y}, v_{0,z}$, et on traitera le cas le plus général.

Remarque : la norme de la vitesse tangentielle (donc perpendiculaire au rayon) d'un point situé à une distance r du centre du plateau est donnée par $r\Omega$.

3.1 — Exprimez les composantes du vecteur vitesse du ballon $\mathbf{v}_{\mathbf{0}/\boldsymbol{\mathcal{R}}} = \mathbf{v}_{/\mathcal{R}}(t=0)$ mesuré par Han dans $\mathcal{R}$ à $t = 0$.

3.2 — Déterminez l'équation paramétrique $\{x(t), y(t), z(t)\}$ de la trajectoire du ballon vue dans le référentiel $\mathcal{R}$. On négligera la force de frottement de l'air. Exprimez le temps t_{impact} que met le ballon pour arriver au niveau du sol.

3.3 — Représentez schématiquement la projection sur le plan (Ox, Oy) de la trajectoire du ballon telle que vue par Han dans $\mathcal{R}$. Vous indiquerez également la projection sur le plan (Ox, Oy) du vecteur vitesse initial. *Pour cette question, pour simplifier la représentation, vous pourrez prendre* $v_{0,x} = 2R\Omega$ *et* $v_{0,y} = 0$.

Trajectoire du ballon dans le repère tournant (référentiel $\mathcal{R}'$)

Cette fois, on souhaite analyser la trajectoire du ballon telle qu'observée dans le référentiel tournant $\mathcal{R}'$ par Leia et Luke. On utilise le repère tournant $(O' = O, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\})$, *solidaire du plateau*, représenté sur la figure 1. Ainsi, à $t = 0$, le repère tournant coïncide avec le repère fixe de la première partie (mais plus ensuite).

Comme précédemment, à l'instant $t = 0$, depuis le point $A : (-R, 0, 0)$, Leia lance le ballon dans la direction de Luke, donc le long de l'axe (Ox), avec une vitesse initiale $\mathbf{v}_{0/\mathcal{R}'}$. On notera M la position

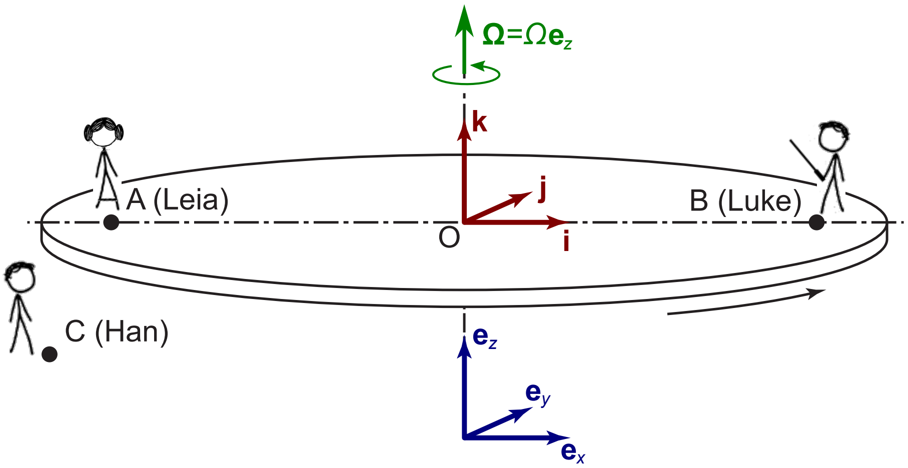

FIGURE 1 – *Schéma montrant la position des différents personnages à $t = 0$, ainsi que la base $(O, \{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\})$ solidaire du sol, et la base $(O' = O, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\})$ solidaire du plateau tournant, à l'instant initial $t = 0$. Leia et Luke sont sur le plateau tournant tandis que Han observe la situation à quelque distance. Leia s'apprête à lancer son ballon vers Luke.*

du ballon à un instant quelconque t, de sorte que son vecteur position est $\mathbf{O'M}(t)$. Les coordonnées du ballon dans $\mathcal{R}'$ seront notées (X, Y, Z) et sa vitesse $\mathbf{v}_{/\mathcal{R}'}$.

3.4 — Ecrivez la relation fondamentale de la dynamique régissant le mouvement du ballon dans le référentiel tournant, encore une fois en négligeant les forces de frottement dans l'air. *Attention, le référentiel tournant n'est pas galiléen !*

3.5 — Exprimez l'accélération d'entraînement $\mathbf{a}_e$ et l'accélération de Coriolis $\mathbf{a}_c$ en fonction des coordonnées X, Y et Z du ballon, de leurs dérivées par rapport au temps $\dot{X}$, $\dot{Y}$ et $\dot{Z}$, de Ω et des vecteurs de la base tournante $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

3.6 — En appliquant la relation fondamentale de la dynamique dans le repère tournant, établissez les équations différentielles vérifiées par les coordonnées X, Y et Z. Vous vérifierez que l'équation sur $Z(t)$ est identique à celle obtenue dans le référentiel fixe, et qu'elle admet la même solution.

3.7 — Vérifiez que le système d'équations différentielles en $X(t)$ et $Y(t)$ admet pour solution les fonctions de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{lll} X(t) = & (C + Et)\cos\Omega t & + \quad (D + Ft)\sin\Omega t \\ Y(t) = & (D + Ft)\cos\Omega t & - \quad (C + Et)\sin\Omega t, \end{array} \right.$$

où C, D, E et F sont des constantes (que l'on déterminera à la question suivante).

3.8 — Déterminer les valeurs des constantes C, D, E et F en fonction des données de l'énoncé. On utilisera les notations de la première partie pour la vitesse initiale du ballon :

$$\mathbf{v_{0/\mathcal{R}'}} = v_{0,x}\,\mathbf{e}_x + v_{0,y}\,\mathbf{e}_y + v_{0,z}\,\mathbf{e}_z.$$

Donnez les expressions des fonctions $X(t)$ et $Y(t)$.

3.9 — Représentez schématiquement sur un même graphique, dans le plan (OX, OY), solidaire du plateau tournant :

1. Le plateau, les positions de Luke et Leia ;

2. L'allure (approchée) de la projection de la trajectoire du ballon dans le plan (OX, OY) dans le référentiel tournant ;

3. La projection du vecteur vitesse initial au moment où Leia lance le ballon ;

4. Pour un point quelconque de la trajectoire noté M, les projections dans le plan (OX, OY) des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis, ainsi que de la vitesse du ballon.

Pour cette question, pour simplifier la représentation, vous pourrez prendre $v_{0,x} = 2R\Omega$ *et* $v_{0,y} = 0$. *Nous vous suggérons de calculer les positions du ballon à* $t = 0$, $t = \pi/4\Omega$, $t = \pi/2\Omega$ *et* $t = \pi/\Omega$.

Rappels : transformation de la vitesse et de l'accélération entre un référentiel galiléen et un référentiel non-galiléen. Soient deux référentiels : un premier référentiel $\mathcal{R}$, galiléen (ou inertiel), et un second référentiel $\mathcal{R}'$, animé d'un mouvement quelconque par rapport à $\mathcal{R}$ et par conséquent non galiléen. On appelle O et O' les origines choisies dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, respectivement. De plus, on note $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ le vecteur vitesse angulaire instantané de rotation du référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$.

Considérons un point matériel M en mouvement quelconque, dont la position à chaque instant dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ est repérée par les vecteurs positions $\mathbf{r}(t) = \mathbf{OM}(t)$ et $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{O'M}(t)$ respectivement.

Si on note $\mathbf{u}(t)$ la vitesse instantanée de M mesurée dans le référentiel $\mathcal{R}$, et $\mathbf{u}'(t)$ sa vitesse instantanée mesurée cette fois dans $\mathcal{R}'$, ces deux vitesses se déduisent l'une de l'autre par la relation :

$$\mathbf{u}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} \qquad \mathbf{u}'(t) = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{O'M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'}$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}_{O'/\mathcal{R}} + \mathbf{u}'(t) + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{O'M}.$$

Si on note $\mathbf{a}(t)$ l'accélération de M dans le référentiel $\mathcal{R}$, et $\mathbf{a}'(t)$ son accélération dans $\mathcal{R}'$, on aura, en dérivant la relation précédente (et en utilisant la relation de Varignon),

$$\mathbf{a}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}} \qquad \mathbf{a}'(t) = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{O'M}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}'} \qquad \mathbf{a}(t) = \mathbf{a}'(t) + \mathbf{a}_{\mathrm{e}} + \mathbf{a}_{\mathrm{c}}$$

où les termes d'accélération supplémentaires sont ***l'accélération d'entraînement*** $\mathbf{a}_{\mathrm{e}}$ et ***l'accélération de Coriolis*** $\mathbf{a}_{\mathrm{c}}$ qui s'écrivent respectivement :

$$\mathbf{a}_{\mathrm{e}} = \mathbf{a}_{\mathrm{e}/\mathcal{R}} = \mathbf{a}(O'/\mathcal{R}) + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \left(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{O'M}\right) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{O'M} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{a}_{\mathrm{c}} = 2\,\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{u}'$$