

EXAMEN

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2021–2022

13 janvier 2022 — 16h30–18h

Documents, ordinateurs, tablettes et téléphones sont interdits. Les calculatrices (basiques) sont autorisées. Dans vos notations, pensez à bien distinguer les vecteurs des quantités scalaires : par exemple, avec une flèche, car vous ne pouvez pas les noter en gras comme ici dans l'énoncé.

1. Durée de vie moyenne et désintégration du pion neutre π^0

Le pion¹ neutre π^0 est une particule élémentaire de la famille des mésons, apparenté aux pions π^+ et π^- , mais dont la durée de vie moyenne est très faible. Étant neutre électriquement, il ne laisse pas de trace dans les émulsions photographiques ou dans les détecteurs de type chambre à bulles/chambre à brouillard ; il n'a été découvert vers 1950 que via ses produits de désintégration.

Quadri-vitesse et quadrivecteur énergie-impulsion

1.1 — Rappelez la définition et l'expression du quadrivecteur vitesse \tilde{U} d'un point matériel M. Comment ses composantes U^μ se transforment-elles lorsqu'on passe d'un référentiel inertiel (ou galiléen) \mathcal{R} à un autre référentiel \mathcal{R}' , avec \mathcal{R}' en translation uniforme à la vitesse $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$ par rapport à \mathcal{R} ? Que vaut la pseudo-norme carrée de \tilde{U} ? Est-ce un invariant?

1.2 — Rappelez la définition du quadrivecteur énergie-impulsion $\tilde{\mathbf{p}}$ du point matériel M de masse au repos m se déplaçant dans \mathcal{R} à la vitesse \mathbf{u} . Retrouvez l'expression de ses composantes p^μ et les identités remarquables associées : l'expression de sa pseudo-norme $\tilde{\mathbf{p}}^2$, la relation entre énergie totale E , quantité de mouvement \mathbf{p} et masse (*relation d'Einstein*), et l'expression de γ en fonction des composantes p^μ de $\tilde{\mathbf{p}}$.

1.3 — Donnez l'expression des composantes du quadrivecteur énergie-impulsion $\tilde{\mathbf{q}}$ d'un photon de fréquence ν et de longueur d'onde dans le vide λ . Que vaut $\tilde{\mathbf{q}}^2$?

1. Aussi appelé "méson pi".

Mesure de la vie moyenne du pion π^0

La mesure *directe* de la durée de vie moyenne des pions π^0 a été effectuée au CERN² auprès du *Super Proton Synchrotron* (SPS). Le principe de l'expérience est le suivant : un faisceau de protons d'énergie $E_p = 450$ GeV est envoyé sur une cible constituée de deux fines feuilles de tungstène dont on peut faire varier l'écartement. Lors des collisions des protons sur la cible, des pions π^0 sont produits, dont l'énergie moyenne est estimée à $E_\pi \approx 235$ GeV. Les pions π^0 se désintègrent rapidement, et l'analyse statistique des particules finales produites en fonction de la distance séparant les feuilles de tungstène permet de remonter au **parcours moyen** des pions, autrement dit à la distance moyenne parcourue par les pions entre l'instant de leur production et leur désintégration dans le détecteur. On trouve ainsi un parcours moyen de $\ell_\pi \approx 46.5 \mu\text{m}$ pour les pions π^0 .

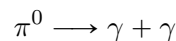
1.4 — Exprimez le facteur relativiste $\gamma(u_p)$ et la vitesse u_p des protons du faisceau incident dans le référentiel \mathcal{R} du laboratoire, ainsi que la différence $c - u_p$. Applications numériques.

1.5 — Faites de même pour les pions produits : en considérant leur énergie moyenne, estimez leur facteur relativiste $\gamma(u_\pi)$ moyen et la vitesse correspondante u_π dans le référentiel du laboratoire. Applications numériques.

1.6 — Déduisez-en la durée de vie moyenne τ_π du pion neutre π^0 (n'oubliez pas que la durée de vie moyenne d'une particule est définie *au repos*). Application numérique.

Désintégration du pion π^0

Dans 98.82% des cas, le pion neutre π^0 se désintègre en une paire de photons gamma selon la réaction :



1.7 — Exprimez la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total avant et après la désintégration du pion neutre π^0 . On notera $\tilde{\mathbf{p}}_\pi$ le quadrivecteur énergie-impulsion du pion, et $\tilde{\mathbf{q}}_1, \tilde{\mathbf{q}}_2$ les quadrivecteurs énergie-impulsion des deux photons issus de la désintégration du π^0 .

1.8 — Dans le référentiel $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}_\pi$ du pion avant la désintégration (*i.e.* dans le *référentiel propre* du pion), Exprimez les énergies E_1^* et E_2^* des deux photons produits. Que vaut nécessairement l'angle θ^* entre les deux photons ?

1.9 — Que vaut la masse invariante $m_{\gamma\gamma}$ du système formé par les deux photons issus de la désintégration du pion ?

1.10 — Écrivez maintenant le bilan de la désintégration du pion en deux photons dans le référentiel du laboratoire \mathcal{R} . Exprimez la masse invariante $m_{\gamma\gamma}$ en fonction des énergies E_1 et E_2 de chacun des deux photons et de l'angle θ_{12} entre les deux photons. Exprimez la masse m_π du pion π^0 en fonction de E_1, E_2 et θ_{12} .

Données :

masse du proton : $m_p = 938.272 \text{ MeV}/c^2$

masse du pion neutre π_0 : $m_\pi = 134.977 \text{ MeV}/c^2$

$c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

2. H. W. Atherton *et al.*, "Direct measurement of the lifetime of the neutral pion", *Physics Letters*, 158B, 81 (1985) : c'est encore aujourd'hui la valeur de référence pour la mesure directe du temps de vie moyen du π^0 .

2. Physique des tachyons

There was a young lady named Bright
 Whose speed was far faster than light
 She went out one day
 In a relative way
 And returned the previous night.

— Reginald Buller, *Punch* (1923)

Le tachyon (baptisé ainsi par Gerald Feinberg en 1957, de $\tau\alpha\chi\upsilon\varsigma$ (*tachus*), “rapide”, “prompt” en grec) est une particule hypothétique dont la vitesse u serait supérieure à c . En se basant uniquement sur cette définition (particule de vitesse u telle que $u > c$), on peut tenter de décrire les propriétés d’une telle particule dans le cadre de la relativité restreinte.

2.1 — Sur un diagramme d’espace-temps (Minkowski ou Loedel, selon votre préférence), indiquez les axes x et ct du référentiel \mathcal{R} . Indiquez aussi le cône de lumière passé et futur du point-événement choisi comme origine O de coordonnées $(t = 0, x = 0)$ dans \mathcal{R} . (Par souci de clarté, consacrez une pleine page à ce diagramme qui sera complété au fur et à mesure des questions suivantes).

2.2 — Sur le même diagramme, dessinez :

- (i) la ligne d’univers (i.e. la trajectoire dans l’espace-temps) d’un objet immobile placé à une abscisse $x = x_0 < 0$;
- (ii) la ligne d’univers d’un objet se déplaçant à la vitesse constante $\mathbf{w} = w \mathbf{e}_x$ avec $0 < w < c$;
- (iii) la ligne d’univers d’un photon émis vers l’avant (dans la direction des $x > 0$) au point événement $A : (t_A, x_A)$ avec $t_A > 0$ et $x_A > 0$.

2.3 — Dans le référentiel \mathcal{R} , un tachyon est émis en $A : (t = t_A, x = x_A)$, et reçu un peu plus tard en $B : (t = t_B, x = x_B)$, avec $t_B > t_A$. Dessinez sa ligne d’univers (attention à la pente sur votre dessin! souvenez-vous que la vitesse u du tachyon est supérieure à c !). Indiquez les projections des événements A et B sur les axes d’espace et de temps de votre diagramme, et les coordonnées t_A, t_B, x_A et x_B sur votre schéma.

2.4 — Déterminez le signe de l’expression $\Delta s^2 = \widetilde{\mathbf{AB}}^2 = c^2(t_B - t_A)^2 - (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)^2$. Quelle est la nature de l’intervalle d’espace-temps $\widetilde{\mathbf{AB}}$?

2.5 — Considérons un événement quelconque M repéré dans le référentiel inertiel \mathcal{R} par $\tilde{\mathbf{r}} : r^\mu = (ct, x, y, z) = (ct, \mathbf{r})$, et par $\tilde{\mathbf{r}}' : r'^\mu = (ct', x', y', z') = (ct', \mathbf{r}')$ dans un second référentiel \mathcal{R}' , où \mathcal{R}' est en translation uniforme par rapport à \mathcal{R} avec $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v \mathbf{e}_x$, et $v < c$. Rappelez les équations de la transformation de Lorentz entre les référentiels inertiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' .



FIGURE 1 – Tachyon en peluche, *The Particle Zoo*.

2.6 — Montrez que l'on peut toujours trouver un référentiel galiléen \mathcal{R}' avec une vitesse relative $v = v(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$, avec $v < c$ telle que $t'_B < t'_A$, **c'est à dire un référentiel galiléen \mathcal{R}' dans lequel l'ordre des événements A et B est inversé**. Indiquez la condition sur v pour que tel soit le cas. Dans ce référentiel \mathcal{R}' , la réception du tachyon (événement B) se produit **avant** l'émission du même tachyon (événement A). Sur votre schéma, dessinez les axes ct' et x' de ce référentiel \mathcal{R}' , ainsi que les projections des événements A et B sur ces axes, afin de faire apparaître qu'effectivement, dans ce référentiel \mathcal{R}' , on a $t'_B < t'_A$.

2.7 — Qu'en concluez-vous à propos des tachyons et du principe de causalité? Proposez une interprétation possible de la succession des événements A et B dans le référentiel \mathcal{R}' .

2.8 — On s'intéresse maintenant à la dynamique des tachyons. Écrivez l'énergie d'un tachyon de vitesse $u > c$ en fonction de sa masse au repos m et de sa vitesse u . Dans l'expression que vous obtenez, le facteur $\gamma(u)$ est imaginaire pour un tachyon; pour obtenir une énergie qui soit un nombre réel, on peut faire l'hypothèse que la masse m au repos du tachyon est aussi un nombre imaginaire : $m = iM$ avec M un nombre réel. Écrivez l'énergie $E(u)$ du tachyon sous cette hypothèse.

2.9 — Que pouvez-vous dire du comportement de $E(u)$ en fonction de u ? Pour un tachyon, comment évolue son énergie lorsqu'il accélère? lorsqu'il ralentit? Combien d'énergie faut-il fournir à un tachyon pour le faire ralentir jusqu'à $u = c$?

2.10 — Qu'en concluez-vous sur la physique de l'hypothétique tachyon dans le cadre de la relativité restreinte?

2.11 — **Question Bonus** : montrez que si $u > c$ dans le référentiel galiléen \mathcal{R} on a alors nécessairement $u' > c$ dans tout autre référentiel inertiel \mathcal{R}' en translation uniforme par rapport à \mathcal{R} avec $v = v(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) < c$. Pensez à discuter tous les cas possibles en fonction du signe du dénominateur dans l'expression de u' .





FIGURE 2 – The Particle Zoo : le zoo des particules élémentaires du Modèle Standard, en version “peluches”, avec notamment le tachyon dans la catégorie “particules hypothétiques”.