LICENCE DE PHYSIQUE — RELATIVITÉ RESTREINTE

EXAMEN — CORRIGÉ

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2021–2022

13 janvier 2022 — 16h30–18h

1. Durée de vie moyenne et désintégration du pion neutre π^0

Le pion[1] neutre π^0 est une particule élémentaire de la famille des *mésons*, apparenté aux pions π^+ et π^-, mais dont la durée de vie moyenne est très faible. Étant neutre électriquement, il ne laisse pas de trace dans les émulsions photographiques ou dans les détecteurs de type chambre à bulles/chambre à brouillard ; il n'a été découvert vers 1950 que via ses produits de désintégration.

Quadri-vitesse et quadrivecteur énergie-impulsion

1.1 — Rappelez la définition et l'expression du quadrivecteur vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$ d'un point matériel M. Comment ses composantes U^μ se transforment-elles lorsqu'on passe d'un référentiel inertiel (ou galiléen) $\mathcal{R}$ à un autre référentiel $\mathcal{R}'$, avec $\mathcal{R}'$ en translation uniforme à la vitesse $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_x$ par rapport à $\mathcal{R}$? Que vaut la pseudo-norme carrée de $\widetilde{\mathbf{U}}$? Est-ce un invariant ?

Par définition, pour un objet mobile, son quadrivecteur vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$ est la dérivée de son quadrivecteur position $\widetilde{\mathbf{r}}$: $r^\mu = (ct, \mathbf{r})$ par rapport à ***son temps propre*** τ :

$$\widetilde{\mathbf{U}} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}\tau} \qquad U^\mu = \frac{\mathrm{d}r^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}r^\mu}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix}\gamma(u)c\\ \gamma(u)\mathbf{u}\end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad \mathbf{u} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$$

où $\mathbf{u} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$ est la vitesse de l'objet dans le référentiel $\mathcal{R}$.

Comme l'intervalle élémentaire $\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}$: $\mathrm{d}r^\mu$ est un quadrivecteur, et que l'intervalle de temps propre $\mathrm{d}\tau$ est un invariant de Lorentz, $\widetilde{\mathbf{U}}$ est aussi un quadrivecteur, et ses composantes contravariantes U^μ se transforment selon les équations de la transformation de Lorentz quand on passe de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$:

$$\begin{cases} U'^0 &= \gamma(v)\left(U^0 - \beta(v)U^1\right)\\ U'^1 &= \gamma(v)\left(U^1 - \beta(v)U^0\right)\\ U'^2 &= U^2\\ U'^3 &= U^3\end{cases} \qquad \text{et réciproquement} \qquad \begin{cases} U^0 &= \gamma(v)\left(U'^0 + \beta(v)U'^1\right)\\ U^1 &= \gamma(v)\left(U'^1 + \beta(v)U'^0\right)\\ U^2 &= U'^2\\ U^3 &= U'^3\end{cases}$$

1. Aussi appelé "méson pi".

Où $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_x$ est la vitesse relative de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$, et où on pose :

$$\beta(v) = \frac{v}{c} \quad \text{et} \quad \gamma(v) = \gamma(\mathbf{v}) = \left(1 - \beta^2(v)\right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}.$$

On peut mettre ces équations sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} U'^0 \\ U'^1 \\ U'^2 \\ U'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -\beta(v)\gamma(v) & 0 & 0 \\ -\beta(v)\gamma(v) & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^0 \\ U^1 \\ U^2 \\ U^3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} U^0 \\ U^1 \\ U^2 \\ U^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v) & +\beta(v)\gamma(v) & 0 & 0 \\ +\beta(v)\gamma(v) & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U'^0 \\ U'^1 \\ U'^2 \\ U'^3 \end{pmatrix}$$

La pseudo-norme carrée du quadrivecteur vitesse $\widetilde{\mathbf{U}}$ s'écrit :

$$\widetilde{\mathbf{U}}^2 = \widetilde{\mathbf{U}} \cdot \widetilde{\mathbf{U}} = (U^0)^2 - (\mathbf{U})^2 = \gamma^2(u)c^2 - \gamma^2(u)\mathbf{u}^2 = c^2\,\gamma^2(u)\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = c^2.$$

Comme il s'agit d'une pseudo-norme, c'est par conséquent un invariant de Lorentz (ce qui est cohérent car c est un invariant, c'est un des postulats de la relativité restreinte). De plus, c'est aussi une grandeur constante.

1.2 — Rappelez la définition du quadrivecteur énergie-impulsion $\widetilde{\mathbf{p}}$ du point matériel M de masse au repos m se déplaçant dans $\mathcal{R}$ à la vitesse $\mathbf{u}$. Retrouvez l'expression de ses composantes p^μ et les identités remarquables associées : l'expression de sa pseudo-norme $\widetilde{\mathbf{p}}^2$, la relation entre énergie totale E, quantité de mouvement $\mathbf{p}$ et masse (*relation d'Einstein*), et l'expression de γ en fonction des composantes p^μ de $\widetilde{\mathbf{p}}$.

À partir du quadrivecteur vitesse, on construit le quadrivecteur énergie-impulsion (ou quadri-impulsion) $\widetilde{\mathbf{p}}$ par analogie avec la mécanique classique, en multipliant la quadri-vitesse par la masse au repos de l'objet :

$$\widetilde{\mathbf{p}} = m\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}\tau} = m\widetilde{\mathbf{U}} \qquad p^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(u)mc \\ \gamma(u)m\,\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c = \gamma(u)mc \\ \mathbf{p} = \gamma(u)m\,\mathbf{u} \end{pmatrix}$$

Dans cette relation, m est la masse propre de l'objet (c'est à dire sa masse au repos, qui est un invariant), $E = \gamma(u)mc^2$ son énergie totale, somme de son *énergie de masse* $E_0 = mc^2$ et de son énergie cinétique $T = E - mc^2 = (\gamma(u) - 1)mc^2$. Enfin, $\mathbf{p} = \gamma(u)m\,\mathbf{u}$ est son vecteur quantité de mouvement relativiste (abusivement aussi appelé "*impulsion*").

La pseudo-norme carrée de $\widetilde{\mathbf{p}}$ vaut $\widetilde{\mathbf{p}}^2 = m^2c^2 = (mc^2)^2/c^2$.

Les composantes de $\widetilde{\mathbf{p}}$ vérifient les relations suivantes :

$$\widetilde{\mathbf{p}}^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 = (p^0)^2 - (\mathbf{p})^2 = (mc^2)^2/c^2 \qquad \textit{i.e.} \quad E^2 = \mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4 \qquad \textit{("relation d'Einstein")}$$

$$\frac{\mathbf{u}}{c} = \frac{\mathbf{p}}{p^0} = \frac{\mathbf{p}c}{E} \qquad \text{et} \qquad \gamma(u) = \frac{E}{mc^2}.$$

1.3 — Donnez l'expression des composantes du quadrivecteur énergie-impulsion $\widetilde{\mathbf{q}}$ d'un photon de fréquence ν et de longueur d'onde dans le vide λ. Que vaut $\widetilde{\mathbf{q}}^2$?

Pour un photon de fréquence ν et de longueur d'onde $\lambda = c/\nu$ dans le vide, son énergie s'écrit :

$$E = h\nu = \hbar\omega$$

où $\omega = 2\pi\nu$ est la pulsation du photon, $h = 6.626070 \times 10^{-34}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}$ la constante de Planck et $\hbar = h/2\pi$.

De plus, le photon transporte aussi une quantité de mouvement relativiste qui vaut $\mathbf{p} = \hbar\,\mathbf{k}$, où $\mathbf{k}$ est le *vecteur d'onde* du photon : c'est un vecteur dont la direction et le sens correspondent à la direction de propagation du photon, et dont la norme $k = |\mathbf{k}|$ vaut :

$$k = |\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c}$$

Pour un photon, on peut construire son quadrivecteur d'onde $\widetilde{\mathbf{k}}$ selon :

$$\widetilde{\mathbf{k}} : k^\mu = \begin{pmatrix} \dfrac{\omega}{c} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2\pi\nu}{c} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}.$$

Et, de la même manière, son quadrivecteur énergie-impulsion $\widetilde{\mathbf{q}}$,

$$\widetilde{\mathbf{q}} = \hbar\,\widetilde{\mathbf{k}} \qquad \text{de composantes} \quad q^\mu = \begin{pmatrix} \dfrac{\hbar\omega}{c} \\ \hbar\,\mathbf{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{h\nu}{c} \\ \hbar\,\mathbf{k} \end{pmatrix}.$$

Pour un photon, la pseudo-norme carrée de son quadrivecteur énergie-impulsion est toujours nulle :

$$\widetilde{\mathbf{q}}^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 - \hbar^2\,\mathbf{k}^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 - \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 = 0,$$

ce qui est logique : pour une particule massive de masse m, la pseudo-norme carrée de son quadrivecteur énergie-impulsion vaut m^2c^2 ; comme la masse au repos du photon est nulle, on trouve naturellement ici que $\widetilde{\mathbf{q}}^2 = 0$.

Mesure de la vie moyenne du pion π^0

La mesure *directe* de la durée de vie moyenne des pions π^0 a été effectuée au CERN[2] auprès du *Super Proton Synchrotron* (SPS). Le principe de l'expérience est le suivant : un faisceau de protons d'énergie $E_p = 450\,\mathrm{GeV}$ est envoyé sur une cible constituée de deux fines feuilles de tungstène dont on peut faire varier l'écartement. Lors des collisions des protons sur la cible, des pions π^0 sont produits, dont l'énergie moyenne est estimée à $E_\pi \approx 235\,\mathrm{GeV}$. Les pions π^0 se désintègrent rapidement, et l'analyse statistique des particules finales produites en fonction de la distance séparant les feuilles de tungstène permet de remonter au ***parcours moyen*** des pions, autrement dit à la distance moyenne parcourue par les pions entre l'instant de leur production et leur désintégration dans le détecteur. On trouve ainsi un parcours moyen de $\ell_\pi \approx 46.5\,\mu\mathrm{m}$ pour les pions π^0.

1.4 — Exprimez le facteur relativiste $\gamma(u_p)$ et la vitesse u_p des protons du faisceau incident dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire, ainsi que la différence $c - u_p$. Applications numériques.

L'énergie totale d'un proton de vitesse u_p dans $\mathcal{R}$ peut s'écrire :

$$E_p = \gamma(u_p) m_p c^2 \qquad \text{d'où} \quad \gamma(u_p) = \frac{E_p}{m_p c^2}.$$

2. H. W. Atherton *et al.*, "Direct measurement of the lifetime of the neutral pion", *Physics Letters*, 158B, 81 (1985) : c'est encore aujourd'hui la valeur de référence pour la mesure directe du temps de vie moyen du π^0.

Connaissant le facteur $\gamma(u_p)$, on en déduit immédiatement la vitesse u_p du proton :

$$\gamma(u_p) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_p^2}{c^2}}} \qquad \text{soit} \quad u_p = c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2(u_p)}}.$$

Ce qui donne, numériquement :

$$\gamma(u_p) = \frac{E_p}{m_p c^2} \approx \frac{450\,\mathrm{GeV}}{938.272\,\mathrm{MeV}} \approx 479.6 \qquad \text{et} \quad u_p \approx 0.999997826\,c \qquad c - u_p \approx 651.6\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}.$$

1.5 — Faites de même pour les pions produits : en considérant leur énergie moyenne, estimez leur facteur relativiste $\gamma(u_\pi)$ moyen et la vitesse correspondante u_π dans le référentiel du laboratoire. Applications numériques.

De la même manière, on obtient pour le pion π^0 :

$$\gamma(u_\pi) = \frac{E_\pi}{m_\pi c^2} \qquad \text{et} \qquad \gamma(u_\pi) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_\pi^2}{c^2}}} \qquad \text{soit} \quad u_\pi = c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2(u_\pi)}}.$$

Ce qui donne cette fois pour le facteur gamma moyen des pions et la vitesse associée u_π :

$$\gamma(u_\pi) = \frac{E_\pi}{m_\pi c^2} \approx \frac{235\,\mathrm{GeV}}{134.977\,\mathrm{MeV}} \approx 1741.04 \qquad \text{et} \quad u_\pi \approx 0.999999835\,c \qquad c - u_\pi \approx 49.5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}.$$

1.6 — Déduisez-en la durée de vie moyenne τ_π du pion neutre π^0 (n'oubliez pas que la durée de vie moyenne d'une particule est définie *au repos*). Application numérique.

La durée de vie moyenne du pion est simplement leur parcours moyen ℓ_π divisé par leur vitesse, ici $u_\pi \approx c$. Toutefois, il faut aussi tenir compte de la dilatation du temps : le temps de vie dans le référentiel du laboratoire est dilaté par un facteur $\gamma(u_\pi)$ par rapport au temps de vie du pion dans son référentiel propre. On obtient ainsi la durée de vie moyenne τ_π du pion :

$$\tau_\pi = \frac{1}{\gamma(u_\pi)} \times \frac{\ell_\pi}{u_\pi} \approx \frac{1}{\gamma(u_\pi)} \times \frac{\ell_\pi}{c}.$$

Ce qui donne, numériquement,

$$\tau_\pi \approx \frac{1}{\gamma(u_\pi)} \times \frac{\ell_\pi}{c} \approx \frac{1}{1741.04} \times \frac{46.5\ \times 10^{-6}\,\mathrm{m}}{299\,792\,458\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}} \approx 8.91 \times 10^{-17}\,\mathrm{s}.$$

Désintégration du pion π^0

Dans 98.82% des cas, le pion neutre π^0 se désintègre en une paire de photons gamma selon la réaction :

$$\pi^0 \longrightarrow \gamma + \gamma$$

1.7 — Exprimez la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total avant et après la désintégration du pion neutre π^0. On notera $\tilde{\mathbf{p}}_\pi$ le quadrivecteur énergie-impulsion du pion, et $\tilde{\mathbf{q}}_1$, $\tilde{\mathbf{q}}_2$ les quadrivecteurs énergie-impulsion des deux photons issus de la désintégration du π^0.

Du fait de la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total, on aura :

$$\tilde{\mathbf{p}}_\pi = \tilde{\mathbf{q}}_1 + \tilde{\mathbf{q}}_2$$

où $\tilde{\mathbf{p}}_\pi$, $\tilde{\mathbf{q}}_1$ et $\tilde{\mathbf{q}}_2$ sont respectivement les quadrivecteurs énergie-impulsion du pion π^0 avant sa désintégration, et des deux photons issus de sa désintégration.

1.8 — Dans le référentiel $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}_\pi$ du pion avant la désintégration (*i.e.* dans le *référentiel propre* du pion), Exprimez les énergies E_1^* et E_2^* des deux photons produits. Que vaut nécessairement l'angle θ^* entre les deux photons ?

Du fait de la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total, on aura :

$$\tilde{\mathbf{p}}_\pi = \tilde{\mathbf{q}}_1 + \tilde{\mathbf{q}}_2$$

où $\tilde{\mathbf{p}}_\pi$, $\tilde{\mathbf{q}}_1$ et $\tilde{\mathbf{q}}_2$ sont respectivement les quadrivecteurs énergie-impulsion du pion π^0 avant sa désintégration, et des deux photons issus de la désintégration.

Dans le référentiel propre du pion $\mathcal{R}_\pi$, leurs composantes contravariantes sont :

$$\tilde{\mathbf{p}}_\pi : p_\pi^\mu = \begin{pmatrix} m_\pi c \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad \tilde{\mathbf{q}}_1 : q_1^\mu = \begin{pmatrix} E_1^*/c = h\nu_1^*/c \\ \hbar\,\mathbf{k}_1^* \end{pmatrix} \qquad \tilde{\mathbf{q}}_2 : q_2^\mu = \begin{pmatrix} E_2^*/c = h\nu_2^*/c \\ \hbar\,\mathbf{k}_2^* \end{pmatrix}$$

Par conservation du vecteur quantité de mouvement, on a nécessairement

$$\hbar\,\mathbf{k}_1^* + \hbar\,\mathbf{k}_2^* = \mathbf{0} \quad \text{soit} \quad \hbar\,\mathbf{k}_2^* = -\hbar\,\mathbf{k}_1^*.$$

On en déduit que les deux photons sont émis dos à dos dans le référentiel $\mathcal{R}_\pi$, avec des impulsions égales en norme mais opposées ; ils ont par conséquent la même énergie $E_\gamma^* = E_1^* = E_2^*$, et par conservation de l'énergie totale, on aura dans $\mathcal{R}_\pi$:

$$m_\pi c^2 = E_1^* + E_2^* = 2E_\gamma^* \qquad \text{d'où} \quad E_1^* = E_2^* = E_\gamma^* = \frac{m_\pi c^2}{2},$$

et l'angle θ^* entre leurs vecteurs quantité de mouvement vaut nécessairement $\theta^* = \pi = 180^\text{o}$.

1.9 — Que vaut la masse invariante $m_{\gamma\gamma}$ du système formé par les deux photons issus de la désintégration du pion ?

La masse invariante du système constitué des deux photons s'écrit dans $\mathcal{R}_\pi$:

$$m_{\gamma\gamma}^2 c^2 = (\tilde{\mathbf{q}}_1 + \tilde{\mathbf{q}}_2)^2 = \left(\frac{E_1^*}{c} + \frac{E_2^*}{c}\right)^2 = 4\frac{E_\gamma^{*2}}{c^2}$$

Soit,

$$m_{\gamma\gamma}^2 = 4\frac{E_\gamma^{*2}}{c^4} \qquad m_{\gamma\gamma} = 2\frac{E_\gamma^*}{c^2} = m_\pi,$$

ce qu'on pouvait établir de manière immédiate en se souvenant que la masse invariante du système est une grandeur conservée : la masse invariante du pion avant désintégration étant sa masse propre (masse au repos), on a nécessairement $m_{\gamma\gamma} = m_\pi$.

1.10 — Écrivez maintenant le bilan de la désintégration du pion en deux photons dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$. Exprimez la masse invariante $m_{\gamma\gamma}$ en fonction des énergies E_1 et E_2 de chacun des deux photons et de l'angle θ_{12} entre les deux photons. Exprimez la masse m_π du pion π^0 en fonction de E_1, E_2 et θ_{12}.

Dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire, en réutilisant les même notations mais cette fois dans $\mathcal{R}$, on a :

$$\widetilde{\mathbf{p}}_\pi : p_\pi^\mu = \begin{pmatrix} E_\pi/c \\ \mathbf{p}_\pi \end{pmatrix} \qquad \widetilde{\mathbf{q}}_{\gamma 1} : q_{\gamma 1}^\mu = \begin{pmatrix} E_1/c = h\nu_1/c \\ \hbar\,\mathbf{k}_1 \end{pmatrix} \qquad \widetilde{\mathbf{q}}_{\gamma 2} : q_{\gamma 2}^\mu = \begin{pmatrix} E_2/c = h\nu_2/c \\ \hbar\,\mathbf{k}_2 \end{pmatrix}$$

où E_π, E_1 et E_2 sont cette fois les énergies du pion π^0 et des deux photons dans le référentiel $\mathcal{R}$, et $\mathbf{p}_\pi$, $\hbar\,\mathbf{k}_1$ et $\hbar\,\mathbf{k}_2$ les quantités de mouvement du pion et des deux photons.

La masse invariante du système constitué des deux photons s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
m_{\gamma\gamma}^2 c^2 &= (\widetilde{\mathbf{q}}_1 + \widetilde{\mathbf{q}}_2)^2 = \widetilde{\mathbf{q}}_1^2 + \widetilde{\mathbf{q}}_2^2 + 2\widetilde{\mathbf{q}}_1 \cdot \widetilde{\mathbf{q}}_2 = 2\widetilde{\mathbf{q}}_1 \cdot \widetilde{\mathbf{q}}_2 \\
&= 2\frac{E_1 E_2}{c^2} - 2\hbar^2\,\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 = 2\frac{E_1 E_2}{c^2} - 2\frac{h^2}{\lambda_1 \lambda_2}\cos\theta_{12} \\
&= 2\frac{E_1 E_2}{c^2} - 2\frac{h^2 \nu_1 \nu_2}{c^2}\cos\theta_{12} = 2\frac{E_1 E_2}{c^2}\left[1 - \cos\theta_{12}\right] \\
m_{\gamma\gamma} &= \sqrt{\frac{2E_1 E_2}{c^4}\left(1 - \cos\theta_{12}\right)}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, comme d'une part le quadrivecteur énergie-impulsion total est conservé (et donc sa pseudo-norme carrée), et que d'autre part la pseudo-norme carrée est un invariant de Lorentz, on a :

$$m_{\gamma\gamma}^2 c^2 = (\widetilde{\mathbf{q}}_1 + \widetilde{\mathbf{q}}_2)^2 = \widetilde{\mathbf{p}}_\pi^2 = m_\pi^2 c^2 \qquad \text{soit} \quad m_\pi = m_{\gamma\gamma}$$

La masse invariante du système constitué des deux photons est donc toujours égale à la masse du pion avant désintégration, quel que soit le référentiel dans lequel on mesure l'énergie des deux photons.

Données :

masse du proton : $m_p = 938.272\,\mathrm{MeV}/c^2$

masse du pion neutre π^0 : $m_\pi = 134.977\,\mathrm{MeV}/c^2$

$c = 299\,792\,458\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \approx 3 \times 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

2. Physique des tachyons

> There was a young lady named Bright
> Whose speed was far faster than light
> She went out one day
> In a relative way
> And returned the previous night.
>
> — Reginald Buller, *Punch* (1923)

Le tachyon (baptisé ainsi par Gerald Feinberg en 1957, de $\tau\alpha\chi\upsilon\varsigma$ (*tachus*), "rapide", "prompt" en grec) est une particule hypothétique dont la vitesse u serait supérieure à c. En se basant uniquement sur cette définition (particule de vitesse u telle que $u > c$), on peut tenter de décrire les propriétés d'une telle particule dans le cadre de la relativité restreinte.

FIGURE 1 – *Tachyon en peluche, The Particle Zoo.*

2.1 — Sur un diagramme d'espace-temps (Minkowski ou Loedel, selon votre préférence), indiquez les axes x et ct du référentiel $\mathcal{R}$. Indiquez aussi le cône de lumière passé et futur du point-événement choisi comme origine O de coordonnées $(t = 0, x = 0)$ dans $\mathcal{R}$. *(Par souci de clarté, consacrez une pleine page à ce diagramme qui sera complété au fur et à mesure des questions suivantes).*

Voir figures 2 et 3.

2.2 — Sur le même diagramme, dessinez :

(i) la ligne d'univers (*i.e.* la trajectoire dans l'espace-temps) d'un objet immobile placé à une abscisse $x = x_0 < 0$;

(ii) la ligne d'univers d'un objet se déplaçant à la vitesse constante $\mathbf{w} = w\,\mathbf{e}_x$ avec $0 < w < c$;

(iii) la ligne d'univers d'un photon émis vers l'avant (dans la direction des $x > 0$) au point événement A : (t_A, x_A) avec $t_A > 0$ et $x_A > 0$.

Voir figures 2 et 3.

2.3 — Dans le référentiel $\mathcal{R}$, un tachyon est émis en A : $(t = t_A, x = x_A)$, et reçu un peu plus tard en B : $(t = t_B, x = x_B)$, avec $t_B > t_A$. Dessinez sa ligne d'univers (attention à la pente sur votre dessin ! souvenez-vous que la vitesse u du tachyon est supérieure à c !). Indiquez les projections des événements A et B sur les axes d'espace et de temps de votre diagramme, et les coordonnées t_A, t_B, x_A et x_B sur votre schéma.

Voir figures 2 et 3.

2.4 — Déterminez le signe de l'expression $\Delta s^2 = \widetilde{\mathbf{AB}}^2 = c^2(t_B - t_A)^2 - (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)^2$. Quelle est la nature de l'intervalle d'espace-temps $\widetilde{\mathbf{AB}}$?

Posons :

$$\widetilde{\mathbf{AB}} : \begin{pmatrix} c\Delta t = c(t_B - t_A) \\ \\ \Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \end{pmatrix}$$

Dans le référentiel $\mathcal{R}$, le tachyon se déplace à la vitesse $u > c$. On a donc

$$\widetilde{\mathbf{AB}}^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta \mathbf{r})^2 = (\Delta t)^2(c^2 - u^2) < 0 \qquad \text{car} \quad u > c$$

L'intervalle d'espace-temps $\widetilde{\mathbf{AB}}$ est par conséquent de **genre espace** (pas de lien causal possible entre les événements A et B).

2.5 — Considérons un événement quelconque M repéré dans le référentiel inertiel $\mathcal{R}$ par $\tilde{\mathbf{r}} : r^\mu = (ct, x, y, z) = (ct, \mathbf{r})$, et par $\tilde{\mathbf{r}}' : r'^\mu = (ct', x', y', z') = (ct', \mathbf{r}')$ dans un second référentiel $\mathcal{R}'$, où $\mathcal{R}'$ est en translation uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ avec $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v\,\mathbf{e}_x$, et $v < c$. Rappelez les équations de la transformation de Lorentz entre les référentiels inertiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.

La transformation de Lorentz s'écrit dans ce cas :

$$\left\{\begin{aligned} t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\ x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}\right. \quad \textit{i.e.} \quad \left\{\begin{aligned} ct' &= \gamma\,(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma\,(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}\right. \quad \text{et réciproquement} \quad \left\{\begin{aligned} ct &= \gamma\,(ct' + \beta x') \\ x &= \gamma\,(x' + \beta ct') \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}\right.$$

$$\text{où on pose :} \quad \beta = \frac{v}{c} \qquad \text{ou} \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} = \frac{\mathbf{v}}{c} \qquad \text{et} \quad \gamma = \gamma(\mathbf{v}) = \left(1-\beta^2\right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}.$$

On peut mettre ces équations sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & +\beta\gamma & 0 & 0 \\ +\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

2.6 — Montrez que l'on peut toujours trouver un référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ avec une vitesse relative $v = v(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$, avec $v < c$ telle que $t'_B < t'_A$, ***c'est à dire un référentiel galiléen*** $\mathcal{R}'$ ***dans lequel l'ordre des événements*** A ***et*** B ***est inversé***. Indiquez la condition sur v pour que tel soit le cas. Dans ce référentiel $\mathcal{R}'$, la réception du tachyon (événement B) se produit ***avant*** l'émission du même tachyon (événement A). Sur votre schéma, dessinez les axes ct' et x' de ce référentiel $\mathcal{R}'$, ainsi que les projections des événements A et B sur ces axes, afin de faire apparaître qu'effectivement, dans ce référentiel $\mathcal{R}'$, on a $t'_B < t'_A$.

Écrivons la transformation de Lorentz des coordonnées $(c\Delta t, \Delta \mathbf{r})$ du quadrivecteur $\widetilde{\mathbf{AB}}$. En particulier, la coordonnée temporelle dans le référentiel $\mathcal{R}'$ s'écrit :

$$t'_B - t'_A = \Delta t' = \gamma(v)\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right) = \gamma(v)\Delta t\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)$$

Si $uv/c^2 < 1$, $\Delta t'$ est du même signe que Δt ; par contre, si $uv/c^2 > 1$, c'est à dire si $v/c > c/u$ (possible car $c/u < 1$), $\Delta t'$ sera du signe opposé de celui Δt. Autrement dit, lorsqu'on se place dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ en translation uniforme à la vitesse $v > c^2/u$, l'ordre temporel des événements A et B est inversé dans ce référentiel.

Voir figures 2 et 3.

2.7 — Qu'en concluez-vous à propos des tachyons et du principe de causalité ? Proposez une interprétation possible de la succession des événements A et B dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

En se plaçant dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ tel que $v(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v > c^2/u$ (avec toutefois $v < c$), on observe une inversion de l'ordre des événements A (émission du tachyon) et B (réception du tachyon). C'est à priori incompatible avec le principe de causalité. Un moyen de s'en sortir toutefois, est de décrire cette succession d'événements vus dans $\mathcal{R}'$ comme l'émission d'un anti-tachyon en B, suivi de sa réception en A. Par contre, pour conserver la compatibilité avec le principe de causalité, il est impératif que le tachyon (ou l'anti-tachyon) ne transporte aucune information.

2.8 — On s'intéresse maintenant à la dynamique des tachyons. Écrivez l'énergie d'un tachyon de vitesse $u > c$ en fonction de sa masse au repos m et de sa vitesse u. Dans l'expression que vous obtenez, le facteur $\gamma(u)$ est imaginaire pour un tachyon ; pour obtenir une énergie qui soit un nombre réel, on peut faire l'hypothèse que la masse m au repos du tachyon est aussi un nombre imaginaire : $m = iM$ avec M un nombre réel. Ecrivez l'énergie $E(u)$ du tachyon sous cette hypothèse.

L'énergie d'un tachyon de vitesse u s'écrit :

$$E(u) = \gamma(u)mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Comme $u > c$, le dénominateur est imaginaire : on peut encore écrire l'énergie sous la forme :

$$E(u) = \frac{mc^2}{i\sqrt{\frac{u^2}{c^2} - 1}} = -\frac{imc^2}{\sqrt{\frac{u^2}{c^2} - 1}}$$

Pour obtenir une énergie qui soit un nombre réel, on peut par exemple supposer que la masse au repos du tachyon est un nombre imaginaire $m = iM$ avec M réel. Comme on ne peut pas observer un tachyon au repos (sa vitesse est nécessairement toujours supérieure à c dans tous les référentiels, *cf.* la question bonus), sa masse au repos n'a donc a priori pas d'interprétation au sens classique, et on ne peut pas définir son référentiel propre : définir sa masse m comme imaginaire n'est donc pas nécessairement un problème. Avec ce choix, on obtient ainsi :

$$E(u) = \frac{Mc^2}{\sqrt{\frac{u^2}{c^2} - 1}} \qquad \text{avec} \quad E(u), M \in \mathbb{R}.$$

2.9 — Que pouvez-vous dire du comportement de $E(u)$ en fonction de u ? Pour un tachyon, comment évolue son énergie lorsqu'il accélère ? lorsqu'il ralentit ? Combien d'énergie faut-il fournir à un tachyon pour le faire ralentir jusqu'à $u = c$?

On remarque immédiatement que l'énergie $E(u)$ du tachyon diminue quand sa vitesse augmente ; réciproquement, son énergie $E(u)$ croît quand sa vitesse u décroît ; de plus,

$$\lim_{u \to c} E(u) = \lim_{u \to c} \frac{Mc^2}{\sqrt{\frac{u^2}{c^2} - 1}} = +\infty.$$

Ainsi définie, l'énergie $E(u)$ d'un tachyon tend vers l'infini quand sa vitesse u tend vers c : il faudrait donc fournir une énergie infinie pour ralentir un tachyon jusqu'à $u = c$.

2.10 — Qu'en concluez-vous sur la physique de l'hypothétique tachyon dans le cadre de la relativité restreinte ?

Les propriétés de l'hypothétique tachyon sont particulièrement étranges ; la relativité restreinte prédit en particulier que selon le référentiel, l'ordre des événements le long de la trajectoire d'un tachyon puisse être inversé, ce qui est incompatible avec le principe de causalité. Le comportement de son énergie est aussi très surprenant. L'existence effective de tachyons est donc probablement un peu douteuse…

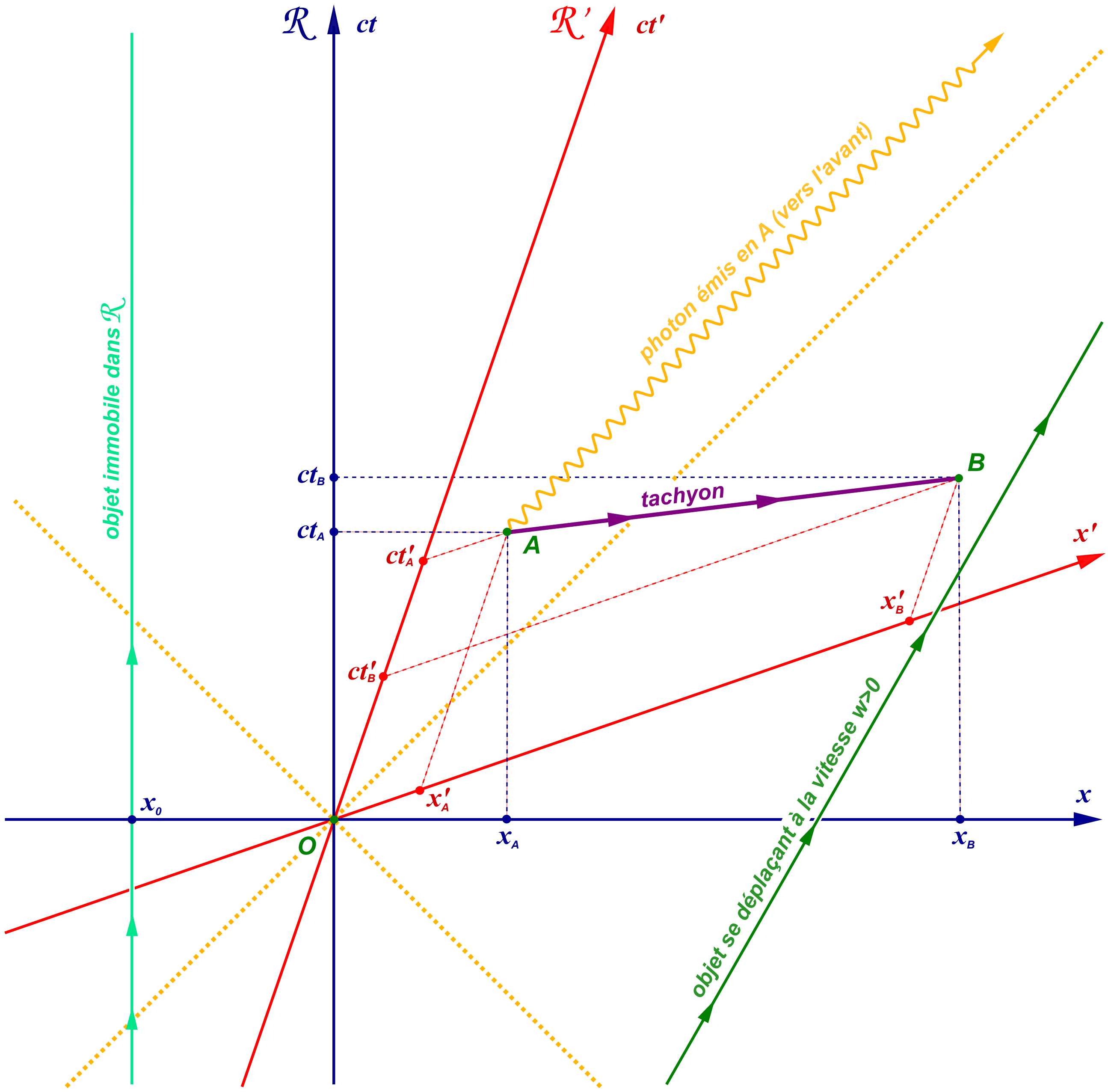

FIGURE 2 – *Diagramme d'espace-temps (diagramme de Minkowski); En turquoise, la ligne d'univers d'un objet immobile dans $\mathcal{R}$ à la position $x_0 < 0$; en vert, la ligne d'univers d'un mobile se déplaçant dans $\mathcal{R}$ à la vitesse w selon $\mathbf{e}_x$ avec $0 < w < c$. En jaune, ligne d'univers d'un photon émis en A et se propageant vers les $x > 0$. En violet, ligne d'univers d'un tachyon émis en A et reçu en B. L'ordre des événements A et B dépend du référentiel d'observation : dans $\mathcal{R}$, $t_B > t_A$ et l'émission du tachyon se produit* **avant** *sa réception; dans $\mathcal{R}'$ au contraire, $t'_B < t'_A$ et l'émission du tachyon en A se produit* **après** *sa réception en B. On peut interpréter la séquence d'événements dans $\mathcal{R}'$ comme l'émission en B d'un anti-tachyon, suivie de sa réception en A.*

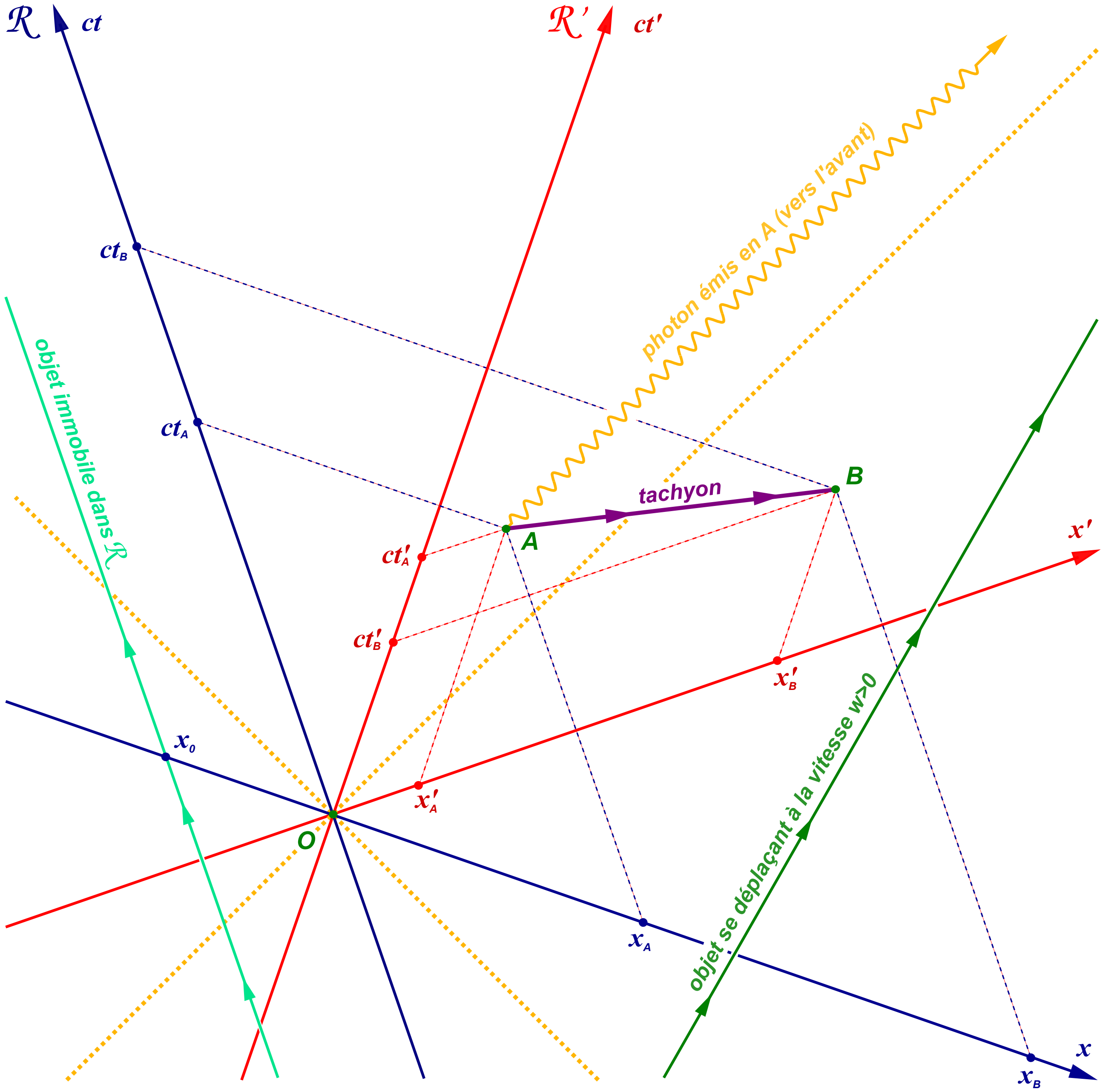

FIGURE 3 – *Diagramme d'espace-temps (diagramme de Loedel); En turquoise, la ligne d'univers d'un objet immobile dans $\mathcal{R}$ à la position $x_0 < 0$; en vert, la ligne d'univers d'un mobile se déplaçant dans $\mathcal{R}$ à la vitesse w selon $\mathbf{e}_x$ avec $0 < w < c$. En jaune, ligne d'univers d'un photon émis en A et se propageant vers les $x > 0$. En violet, ligne d'univers d'un tachyon émis en A et reçu en B. L'ordre des événements A et B dépend du référentiel d'observation : dans $\mathcal{R}$, $t_B > t_A$ et l'émission du tachyon se produit* ***avant*** *sa réception; dans $\mathcal{R}'$ au contraire, $t'_B < t'_A$ et l'émission du tachyon en A se produit* ***après*** *sa réception en B. On peut interpréter la séquence d'événements dans $\mathcal{R}'$ comme l'émission en B d'un anti-tachyon, suivie de sa réception en A.*

2.11 — Question Bonus : montrez que si $u > c$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ on a alors nécessairement $u' > c$ dans tout autre référentiel inertiel $\mathcal{R}'$ en translation uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ avec $v = v(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) < c$. Pensez à discuter tous les cas possibles en fonction du signe du dénominateur dans l'expression de u'.

Considérons un tachyon se déplaçant à la vitesse $\mathbf{u} = u\,\mathbf{e}_x$ dans $\mathcal{R}$, avec $u > c$. Sa vitesse u' mesurée dans un référentiel $\mathcal{R}'$ tel que $v(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v < c$ est donc (en supposant les vitesses $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$ et $\mathbf{v}$ colinéaires) :

$$u' = \frac{u - v}{1 - \dfrac{uv}{c^2}} \qquad \frac{u'}{c} = \frac{\dfrac{u}{c} - \dfrac{v}{c}}{1 - \dfrac{u}{c}\dfrac{v}{c}}$$

Posons $\alpha = u/c$ et $\beta = v/c$. On a :

$$\alpha = \frac{u}{c} > 1 > 0 \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant \beta = \frac{v}{c} < 1$$

Il est nécessaire de distinguer trois cas selon le signe du dénominateur.

a. Si $uv < c^2$, c'est à dire si $\alpha\beta < 1$, le dénominateur $1 - \alpha\beta$ est positif.
Comme $0 \leqslant \beta < 1$, on en déduit que $1 + \beta \geqslant 1 > 0$; en multipliant l'inégalité $\alpha > 1$ par $1 + \beta > 0$, on obtient ainsi :

$$\alpha(1 + \beta) > 1 + \beta \qquad \text{d'où} \qquad \alpha + \alpha\beta > 1 + \beta \qquad \text{soit} \qquad \alpha - \beta > 1 - \alpha\beta$$

Et par conséquent, comme $1 - \alpha\beta > 0$,

$$\frac{u'}{c} = \frac{\dfrac{u}{c} - \dfrac{v}{c}}{1 - \dfrac{u}{c}\dfrac{v}{c}} = \frac{\alpha - \beta}{1 - \alpha\beta} > 1 \qquad \textit{i.e.} \quad u' > c.$$

b. Si $uv > c^2$, c'est à dire si $\alpha\beta > 1$, le dénominateur $1 - \alpha\beta$ est négatif.
Comme $\alpha > 1$, alors $1 + \alpha > 2 > 0$. On peut donc multiplier l'inégalité $\beta < 1$ par $(1 + \alpha)$, ce qui donne :

$$\beta(1 + \alpha) < 1 + \alpha \qquad \text{d'où} \qquad \beta + \alpha\beta < 1 + \alpha \qquad \text{soit} \qquad \alpha\beta - 1 < \alpha - \beta$$

Et par conséquent, comme $\alpha\beta - 1 > 0$,

$$\frac{\alpha - \beta}{\alpha\beta - 1} > 1 \qquad \text{d'où, en multipliant par } -1, \qquad \frac{u'}{c} = \frac{\alpha - \beta}{1 - \alpha\beta} < -1$$

C'est à dire : $u' < -c$. Dans ce cas, le tachyon se déplace dans la direction opposée, avec une vitesse supérieure à c en norme.

c. Enfin, si $uv = c^2$, la vitesse u' du tachyon dans le référentiel $\mathcal{R}'$ est infinie.

Pour un tachyon de vitesse $u > c$ dans $\mathcal{R}$, sa vitesse u' dans $\mathcal{R}'$ est toujours supérieure à c en norme. Un tachyon se déplace donc à une vitesse plus grande que c dans tous les référentiels galiléens.

FIGURE 4 – The Particle Zoo *: le zoo des particules élémentaires du Modèle Standard, en version "peluches", avec notamment le tachyon dans la catégorie "particules hypothétiques".*