

DEVOIR

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2021–2022

À remettre avant le lundi 15 novembre 2021 minuit, en séance ou via Moodle

1. Un canon contre l'Étoile Noire*Vous traiterez cet exercice dans le cadre de la mécanique classique.*

Sur la Lune Forestière de la planète Endor, les Ewoks sont très contrariés : l'Étoile Noire en construction depuis quelques temps pollue leur ciel nocturne. Heureusement, une livraison récente en provenance de la Rébellion leur donne un nouvel espoir : ils viennent de recevoir un canon permettant de lancer des obus. Les Ewoks comptent bien s'en servir pour détruire l'Étoile Noire. S'ils avaient fait un peu plus de mécanique et un peu moins de promenades en forêt, ils sauraient que cet espoir est vain... Sans compter que l'Étoile Noire est protégée par un bouclier. Mais les Ewoks sont persévérants.

En un lieu noté O de la surface de la Lune Forestière d'Endor, de latitude λ , les Ewoks tirent au canon un obus de masse $m = 20$ kg selon la verticale ascendante avec une vitesse initiale v_0 . On désigne par (O, x, y, z) un repère orthonormé lié au référentiel de la lune \mathcal{R}_L , pourvu d'une base $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. L'axe (Ox) pointe vers le Nord et l'axe (Oz) correspond à la verticale locale. On néglige la résistance de l'air et les variations de l'accélération de la pesanteur (notée g) avec l'altitude. On néglige également l'influence de la planète Endor elle-même, et notamment les forces de marée générées par Endor et les autres astres aux alentours. La Lune Forestière tourne sur elle-même avec la vitesse angulaire Ω .

1.1 — Représentez la situation sur un schéma. On représentera en particulier la surface de la lune, la base $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ et les axes correspondants, l'angle de la latitude λ et le vecteur vitesse de rotation angulaire Ω de la Lune Forestière.

1.2 — On supposera dans la suite de l'exercice que le vecteur g pointe vers le centre de la Lune Forestière. À quelle approximation cette hypothèse correspond-elle ?

1.3 — On suppose dans cette question que le référentiel \mathcal{R}_L est galiléen. Quelle est la hauteur maximale atteinte par l'obus ? Où retombe-t-il ? Application numérique.

1.4 — On tient maintenant compte de la rotation de la Lune Forestière sur elle-même : autrement dit, on ne considère plus \mathcal{R}_L comme galiléen. En utilisant l'expression littérale de la vitesse déterminée à la question précédente, et en appliquant la relation fondamentale de la dynamique pour un référentiel non-galiléen, déterminez le temps de vol de l'obus (de son départ jusqu'à sa chute). À quelle distance du canon, et dans quelle direction l'obus touche-t-il le sol ? Application numérique.

Applications numériques :

Période de révolution (sur elle-même) de la Lune Forestière d'Endor : $T = 20$ h. On supposera que la Lune Forestière tourne sur elle-même dans le même sens que la Terre.

Intensité de la pesanteur sur la Lune Forestière : $g = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Diamètre de la Lune Forestière : $D = 4900$ km. Position (latitude) du canon sur la Lune : $\lambda = +40^\circ$.

Vitesse d'éjection de l'obus : $v_0 = 500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

2. Retour à la base : de l'art de garer correctement le Faucon Millenium

Vous traiterez cet exercice dans le cadre de la relativité restreinte.

De retour de mission, Luke, à bord de son chasseur (*X-Wing*), accompagne et ouvre la route à Han et Chewbacca qui reviennent à bord du Faucon Millenium, *le tas de ferraille le plus rapide de la galaxie*. Dans le référentiel \mathcal{R} de la planète rebelle sur laquelle ils se rendent, les deux vaisseaux volent en file indienne à la vitesse constante $v = 3c/5$; de plus, afin d'éviter tout accident malheureux, ils pilotent leurs vaisseaux respectifs en maintenant entre eux une distance D' , mesurée dans leur référentiel commun \mathcal{R}' : pour cela, ils échangent régulièrement des signaux lumineux afin de maintenir cette distance constante.

Pour simplifier, on supposera les vaisseaux quasi-ponctuels; de plus, on placera l'origine du repère du référentiel \mathcal{R}' sur le Faucon Millenium. On supposera les deux référentiels inertiels pour la durée des phénomènes considérés.

2.1 — À un instant quelconque t' (dans \mathcal{R}'), que vaut l'abscisse $x'_H(t')$ de Han dans le référentiel \mathcal{R}' ? Même question pour l'abscisse de Luke $x'_L(t')$.

2.2 — Pour un événement quelconque M , écrivez les équations de la transformation de Lorentz qui donne les coordonnées (ct', x', y', z') de cet événement dans le référentiel \mathcal{R}' à partir de ses coordonnées (ct, x, y, z) dans le référentiel \mathcal{R} . Rappelez les expressions littérales des facteurs β et $\gamma(v)$, et calculez leurs valeurs numériques pour $v = 3c/5$.

La destination finale des deux vaisseaux est une base secrète située sur la planète rebelle. Avant d'atteindre la base, les deux vaisseaux passent l'un après l'autre à proximité d'une station orbitale de surveillance chargée de contrôler l'accès à la planète rebelle.

On s'intéresse aux événements suivants :

A : Le vaisseau de Luke passe à proximité de la station orbitale ;

E : Le vaisseau de Luke atteint la base sur la planète rebelle, et s'y arrête quasi-instantanément (son *X-Wing* dernier modèle est équipé d'un excellent frein à main). Aussitôt arrêté, les feux "stop" de son vaisseau émettent un bref flash lumineux rouge vers l'arrière, pour prévenir ses camarades qu'il a atteint la base, et qu'il est grand temps de freiner à leur tour.

F : Le Faucon Millenium, avec à son bord Han et Chewbacca, passe à son tour à proximité de la station orbitale ;

R : Han reçoit le signal lumineux émis par Luke.

On placera l'origine du repère du référentiel \mathcal{R} sur la station orbitale rebelle. On appelle ℓ la distance entre la station orbitale et la base rebelle (mesurée dans le référentiel commun de la station et de la planète). On prendra l'origine des temps $t = t' = 0$ à l'instant où le vaisseau de Han passe à proximité de la station orbitale.

2.3 — Sur un dessin, représentez schématiquement la station orbitale, la base sur la planète rebelle, ainsi que les 2 vaisseaux ; indiquez aussi les origines O et O' , les axes Ox et $O'x'$ (le long du mouvement relatif) et les axes Oz et $O'z'$ (on supposera la station orbitale et la base rebelle ponctuelles), et la vitesse relative v .

2.4 — Déterminez les coordonnées spatio-temporelles des événements A , E et F dans les deux référentiels. Justifiez explicitement votre raisonnement. *Vous donnerez les expressions littérales de toutes les coordonnées (t, x) et (t', x') des événements A , E et F . Pour plus de lisibilité, vous pourrez par exemple regrouper vos résultats dans un tableau.*

2.5 — En raisonnant sur la trajectoire du signal lumineux émis vers l’arrière par le vaisseau de Luke, déterminez la coordonnée temporelle t_R de l’événement réception R dans le référentiel \mathcal{R} . Déduisez-en les coordonnées de cet événement dans les deux référentiels.

2.6 — Par souci de sécurité, un soldat rebelle de garde sur la station orbitale note avec précision les instants de passage des 2 vaisseaux, respectivement t_A et t_F . Connaissant par d’autres moyens la vitesse v des deux vaisseaux dans son référentiel, il peut en déduire la distance qui sépare les deux vaisseaux en vol. Que trouve-t-il ? Commentez.

2.7 — On suppose de plus que $\ell = D'$ (pour cette question et pour toutes les questions suivantes). Discutez l’ordre temporel des événements E et F dans les deux référentiels. Calculez numériquement t_E et t'_E . De quelle nature est l’intervalle d’espace-temps \overline{EF} entre ces deux événements E et F ? Donnez le signe de l’expression :

$$\Delta s^2 = c^2(t_F - t_E)^2 - (x_F - x_E)^2$$

2.8 — Une fois le vaisseau de Luke arrêté, comme décrit plus haut, ses feux “stop” émettent un bref signal lumineux dans le rouge, centré sur la longueur d’onde $\lambda_{\text{émission}} = 750 \text{ nm}$, dans la direction de Han et Chewbacca.

Quelles sont la longueur d’onde et la couleur du signal lumineux reçu par Han et Chewbacca ?

2.9 — Tandis que Luke gare son vaisseau, Han et Chewbacca se chamaillent comme d’habitude dans le cockpit du Faucon Millenium et ne remarquent pas le signal lumineux que Luke leur a envoyé pour les prévenir. Ils poursuivent donc leur chemin sans modifier leur trajectoire ni leur vitesse. À quel instant t (dans \mathcal{R}) emboutissent-ils le vaisseau de Luke ? Donnez l’expression littérale de t , puis faites l’application numérique.

2.10 — On notera Q l’événement de la collision. Quelles sont ses coordonnées (t_Q, x_Q) et (t'_Q, x'_Q) dans les deux référentiels ? Si Han et Chewbacca avaient été plus attentifs, de combien de temps $\Delta t'$ disposaient-ils entre la réception du signal de Luke et la collision ? Applications numériques.

2.11 — Vous représenterez toutes ces péripéties sur un diagramme d’espace-temps, de Minkowski ou de Loedel, selon votre préférence. Pour une meilleure lisibilité, vous consacrerez une pleine page à ce diagramme. Si vous utilisez un diagramme de Minkowski, prenez garde à la graduation des axes qui n’est pas triviale.

Vous indiquerez les lignes d’univers de la station orbitale (qu’on considérera ponctuelle), de la base rebelle (idem), de Han et de Luke ; vous représenterez aussi la ligne d’univers du signal lumineux émis par Luke et reçu par Han. Vous placerez sur le diagramme tous les événements considérés dans l’énoncé, en indiquant graphiquement leurs coordonnées dans les deux référentiels.

Applications numériques :

$$c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad v = 3c/5 \quad \ell = D' = 1\,000\,000 \text{ km}$$