LICENCE DE PHYSIQUE — RELATIVITÉ RESTREINTE

DEVOIR — CORRIGÉ

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2021–2022

À remettre avant le lundi 15 novembre 2021 minuit, en séance ou via Moodle

1. Un canon contre l'Étoile Noire

Vous traiterez cet exercice dans le cadre de la mécanique classique.

Sur la Lune Forestière de la planète Endor, les Ewoks sont très contrariés : l'Étoile Noire en construction depuis quelques temps pollue leur ciel nocturne. Heureusement, une livraison récente en provenance de la Rébellion leur donne un nouvel espoir : ils viennent de recevoir un canon permettant de lancer des obus. Les Ewoks comptent bien s'en servir pour détruire l'Étoile Noire. S'ils avaient fait un peu plus de mécanique et un peu moins de promenades en forêt, ils sauraient que cet espoir est vain... Sans compter que l'Étoile Noire est protégée par un bouclier. Mais les Ewoks sont persévérants.

En un lieu noté O de la surface de la Lune Forestière d'Endor, de latitude λ, les Ewoks tirent au canon un obus de masse $m = 20$ kg selon la verticale ascendante avec une vitesse initiale $\mathbf{v}_0$. On désigne par (O, x, y, z) un repère orthonormé lié au référentiel de la lune $\mathcal{R}_L$, pourvu d'une base $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. L'axe (Ox) pointe vers le Nord et l'axe (Oz) correspond à la verticale locale. On néglige la résistance de l'air et les variations de l'accélération de la pesanteur (notée $\mathbf{g}$) avec l'altitude. On néglige également l'influence de la planète Endor elle-même, et notamment les forces de marée générées par Endor et les autres astres aux alentours. La Lune Forestière tourne sur elle-même avec la vitesse angulaire $\mathbf{\Omega}$.

1.1 — Représentez la situation sur un schéma. On représentera en particulier la surface de la lune, la base $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ et les axes correspondants, l'angle de la latitude λ et le vecteur vitesse de rotation angulaire $\mathbf{\Omega}$ de la Lune Forestière.

Voir figure 1.

Comme sa période de révolution (sur elle-même) vaut $T = 20h$, la vitesse angulaire de rotation de la Lune Forestière s'écrit :

$$\mathbf{\Omega} = \Omega\, \mathbf{e}_{z\star} \qquad \text{avec} \quad \Omega = +\frac{2\pi}{T} = +\frac{2\pi}{20\,\text{h}} = +\frac{2\pi}{72000\,\text{s}} \approx 8.727 \times 10^{-5}\,\text{rad/s}$$

Le vecteur $\mathbf{\Omega}$ est orienté selon $+\mathbf{e}_{z\star}$ car la Lune Forestière tourne d'Ouest en Est, comme la Terre (sens direct trigonométrique).

1.2 — On supposera dans la suite de l'exercice que le vecteur $\mathbf{g}$ pointe vers le centre de la Lune Forestière. À quelle approximation cette hypothèse correspond-elle ?

Considérer que le vecteur $\mathbf{g}$ du champ de pesanteur local pointe vers le centre de la Lune Forestière revient à ignorer l'effet de la composante centrifuge $-\mathbf{a}_e$ du champ de pesanteur sur l'orientation du

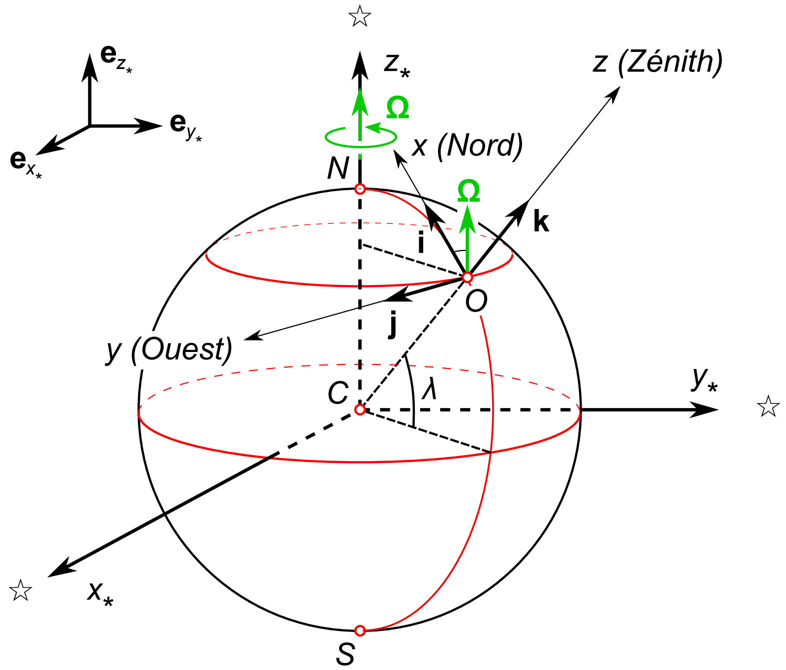

FIGURE 1 – *Référentiel local $\mathcal{R}_L$ au point O de latitude λ, référentiel que l'on munit d'un repère (O, x, y, z) avec Ox dirigé vers le Nord, Oy vers l'Ouest, et Oz selon la verticale du lieu (définie par la direction de $-\mathbf{g}$, par exemple au moyen d'un fil à plomb), et de la base correspondante $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. On a aussi représenté le référentiel sélénocentrique de repère $(C, x_\star, y_\star, z_\star)$, dont l'origine est le centre C de la Lune Forestière et dont les axes sont définis par les étoiles.*

champ local de pesanteur. En effet, le champ de pesanteur est la résultante de l'attraction gravitationnelle exercée par la Lune Forestière, et de l'accélération centrifuge due à la rotation de la Lune sur elle-même.

1.3 — On suppose dans cette question que le référentiel $\mathcal{R}_L$ est galiléen. Quelle est la hauteur maximale atteinte par l'obus ? Où retombe-t-il ? Application numérique.

Si on suppose le référentiel local $\mathcal{R}_L$ galiléen (ou inertiel), on peut appliquer la relation fondamentale de la dynamique (2ème loi de Newton) à l'obus dans ce référentiel. Si on néglige les frottements de l'air, la seule force à prendre en compte dans le bilan des forces est le poids $\mathbf{P} = m\,\mathbf{g}$ de l'obus. L'intégration des équations du mouvement est immédiate :

$$m\,\mathbf{a} = \mathbf{P} = m\,\mathbf{g} \qquad \text{soit} \qquad \ddot{x} = 0 \qquad \ddot{y} = 0 \qquad \ddot{z} = -g$$

ce qui donne, en tenant compte des conditions initiales (vitesse initiale v_0 selon la verticale ascendante, point de départ pris comme origine) :

$$\dot{x}(t) = 0 \qquad \dot{y}(t) = 0 \qquad \dot{z}(t) = v_0 - gt$$

$$x(t) = 0 \qquad y(t) = 0 \qquad z(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

On en déduit l'instant t_{max} où l'altitude $z(t)$ de l'obus est maximale, qui correspond à l'instant de l'annulation de la vitesse $\dot{z}$:

$$\dot{z}(t_{\text{max}}) = v_0 - g t_{\text{max}} = 0 \qquad \text{d'où} \quad t_{\text{max}} = \frac{v_0}{g} = \frac{500\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{4\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}} = 125\,\text{s},$$

ce qui correspond à une altitude maximale de :

$$h = z(t_{\text{max}}) = v_0 t_{\text{max}} - \frac{1}{2} g t_{\text{max}}^2 = \frac{v_0^2}{2g} = 31250\,\text{m} = 31.25\,\text{km}.$$

Puis, l'obus retombe au sol, à l'instant t_{impact} tel que $z(t_{\text{impact}}) = 0$, c'est à dire :

$$z(t_{\text{impact}}) = t_{\text{impact}} \left(v_0 - \frac{1}{2} g t_{\text{impact}} \right) = 0 \qquad \textit{i.e.} \quad t_{\text{impact}} = \frac{2v_0}{g} = 250\,\text{s}.$$

La seconde solution ($t = 0$) de l'équation $z(t_{\text{impact}}) = 0$ correspond bien sûr au lancer de l'obus. D'après les équations du mouvement que nous venons d'établir, l'obus retombe exactement à son point de départ, au point origine O.

1.4 — On tient maintenant compte de la rotation de la Lune Forestière sur elle-même : autrement dit, on ne considère plus $\mathcal{R}_L$ comme galiléen. En utilisant l'expression littérale de la vitesse déterminée à la question précédente, et en appliquant la relation fondamentale de la dynamique pour un référentiel non-galiléen, déterminez le temps de vol de l'obus (de son départ jusqu'à sa chute). À quelle distance du canon, et dans quelle direction l'obus touche-t-il le sol ? Application numérique.

Dans le référentiel local, l'obus est soumis à son poids (ce qui inclut la pseudo-force inertielle d'entraînement, *i.e.* la force centrifuge due à la rotation de la Lune Forestière sur elle-même) et à la pseudo-force inertielle de Coriolis. Comme précédemment, on lance l'obus selon la verticale locale, c'est à dire selon Oz, définie par la direction de $-\mathbf{g}$.

La relation fondamentale de la dynamique modifiée s'écrit ainsi :

$$m\, \mathbf{a}_{/\mathcal{R}_L} = m\, \mathbf{g} - 2m\, \mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}(t) \tag{1}$$

où $\mathbf{v}(t)$ est la vitesse de l'obus dans le référentiel local $\mathcal{R}_L$, et $\mathbf{a}_{/\mathcal{R}_L}$ son accélération dans le même référentiel.

Pour poursuivre le calcul, il nous faut projeter le vecteur rotation angulaire $\mathbf{\Omega}$ sur les axes du référentiel local :

$$\mathbf{\Omega} = \Omega \cos\lambda\, \mathbf{i} + \Omega \sin\lambda\, \mathbf{k}$$

En divisant l'équation (1) par la masse m, et en projetant sur les axes du référentiel local, on trouve :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= +2\Omega \sin\lambda \times \dot{y} \\ \ddot{y} &= -2\Omega \sin\lambda \times \dot{x} + 2\Omega \cos\lambda \times \dot{z} \\ \ddot{z} &= -g - 2\Omega \cos\lambda \times \dot{y}. \end{aligned} \tag{2}$$

Si on suppose que la trajectoire effective sera assez peu différente de celle calculée sans la force de Coriolis, les vitesses dans le plan horizontal seront faibles, et on pourra négliger les termes en $\Omega\dot{x}$ et $\Omega\dot{y}$ dans les équations établies précédemment, et remplacer $\dot{z}$ par l'expression trouvée en négligeant Coriolis, $\dot{z}(t) = v_0 - gt$. On obtient alors :

$$\ddot{x} \approx 0 \qquad \ddot{y} \approx 2\Omega \cos\lambda \times \dot{z} \approx 2\Omega \cos\lambda (v_0 - gt) \qquad \ddot{z} \approx -g.$$

Ce qui donne :

$$\dot{x} \approx 0 \qquad \dot{y} \approx 2\Omega \cos\lambda \left(v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \right) \qquad \dot{z} \approx v_0 - gt$$

et,

$$x(t) \approx 0 \qquad y(t) \approx 2\Omega\cos\lambda\left(\frac{v_0 t^2}{2} - \frac{1}{6}gt^3\right) \qquad z(t) \approx v_0 t - \frac{1}{2}gt^2.$$

À l'instant $t_{\text{impact}} \approx 2v_0/g$ où l'obus touche le sol, sa position est :

$$x(t_{\text{impact}}) \approx 0 \qquad y(t_{\text{impact}}) \approx +\frac{4}{3}\,\Omega\cos\lambda \times \frac{v_0^3}{g^2} \approx +696\,\text{m}.$$

L'obus retombe ainsi à environ 696 m à l'Ouest de son point de départ (sens des y positifs avec les conventions choisies ici).

Remarques. Le résultat précédent a été obtenu en négligeant les termes en $\Omega\dot{x}$ et $\Omega\dot{y}$ dans les équations du mouvement, et en supposant que le vecteur $\mathbf{g}$ du champ de pesanteur local pointe vers le centre de la Lune Forestière (on ignore l'effet de la composante centrifuge $-\mathbf{a}_\text{e}$ du champ de pesanteur sur l'orientation du champ $\mathbf{g}$ et donc sur la direction de la verticale locale). Pour un projectile qui atteint plusieurs dizaines de kilomètres d'altitude, il faudrait aussi prendre en compte les variations du champ de pesanteur $\mathbf{g}$ avec l'altitude.

Applications numériques :

Période de révolution (sur elle-même) de la Lune Forestière d'Endor : $T = 20\,\text{h}$. On supposera que la Lune Forestière tourne sur elle-même dans le même sens que la Terre.

Intensité de la pesanteur sur la Lune Forestière : $g = 4\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Diamètre de la Lune Forestière : $D = 4900\,\text{km}$. Position (latitude) du canon sur la Lune : $\lambda = +40^\text{o}$.

Vitesse d'éjection de l'obus : $v_0 = 500\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

2. Retour à la base : de l'art de garer correctement le Faucon Millenium

Vous traiterez cet exercice dans le cadre de la relativité restreinte.

De retour de mission, Luke, à bord de son chasseur (*X-Wing*), accompagne et ouvre la route à Han et Chewbacca qui reviennent à bord du Faucon Millenium, *le tas de ferraille le plus rapide de la galaxie*. Dans le référentiel $\mathcal{R}$ de la planète rebelle sur laquelle ils se rendent, les deux vaisseaux volent en file indienne à la vitesse constante $v = 3c/5$; de plus, afin d'éviter tout accident malheureux, ils pilotent leurs vaisseaux respectifs en maintenant entre eux une distance D', mesurée dans leur référentiel commun $\mathcal{R}'$: pour cela, ils échangent régulièrement des signaux lumineux afin de maintenir cette distance constante.

Pour simplifier, on supposera les vaisseaux quasi-ponctuels ; de plus, on placera l'origine du repère du référentiel $\mathcal{R}'$ sur le Faucon Millenium. On supposera les deux référentiels inertiels pour la durée des phénomènes considérés.

2.1 — À un instant quelconque t' (dans $\mathcal{R}'$), que vaut l'abscisse $x'_\text{H}(t')$ de Han dans le référentiel $\mathcal{R}'$? Même question pour l'abscisse de Luke $x'_\text{L}(t')$.

Han et Luke sont immobiles dans le référentiel $\mathcal{R}'$, puisqu'il s'agit de leur propre référentiel commun. D'après les conventions choisies, on aura, à tout instant t' (au moins jusqu'à ce que Luke s'arrête à destination) :

$$\forall t' \qquad x'_\text{H}(t') = 0 \qquad \text{et} \qquad x'_\text{L}(t') = +D'.$$

2.2 — Pour un événement quelconque M, écrivez les équations de la transformation de Lorentz qui donne les coordonnées (ct', x', y', z') de cet événement dans le référentiel $\mathcal{R}'$ à partir de ses coordonnées (ct, x, y, z) dans le référentiel $\mathcal{R}$. Rappelez les expressions littérales des facteurs β et $\gamma(v)$, et calculez leurs valeurs numériques pour $v = 3c/5$.

La transformation de Lorentz s'écrit dans ce cas :

$$\begin{cases} t' &= \dfrac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\ x' &= \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{cases} \quad \textit{i.e.} \quad \begin{cases} ct' &= \gamma\,(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma\,(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{cases} \quad \text{et réciproquement} \quad \begin{cases} ct &= \gamma\,(ct' + \beta x') \\ x &= \gamma\,(x' + \beta ct') \\ y &= y' \\ z &= z' \end{cases}$$

$$\text{où on pose :} \quad \beta = \frac{v}{c} \qquad \text{ou} \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} = \frac{\mathbf{v}}{c} \qquad \text{et} \quad \gamma = \gamma(\mathbf{v}) = \left(1-\beta^2\right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}.$$

On peut mettre ces équations sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & +\beta\gamma & 0 & 0 \\ +\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Numériquement, avec $v = 3c/5$, on trouve :

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{3}{5} \qquad \text{et} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{9}{25}}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{16}{25}}} = \frac{5}{4} = 1.25$$

La destination finale des deux vaisseaux est une base secrète située sur la planète rebelle. Avant d'atteindre la base, les deux vaisseaux passent l'un après l'autre à proximité d'une station orbitale de surveillance chargée de contrôler l'accès à la planète rebelle.

On s'intéresse aux événements suivants :

- A : Le vaisseau de Luke passe à proximité de la station orbitale ;
- E : Le vaisseau de Luke atteint la base sur la planète rebelle, et s'y arrête quasi-instantanément (son *X-Wing* dernier modèle est équipé d'un excellent frein à main). Aussitôt arrêté, les feux "stop" de son vaisseau émettent un bref flash lumineux rouge vers l'arrière, pour prévenir ses camarades qu'il a atteint la base, et qu'il est grand temps de freiner à leur tour.
- F : Le Faucon Millenium, avec à son bord Han et Chewbacca, passe à son tour à proximité de la station orbitale ;
- R : Han reçoit le signal lumineux émis par Luke.

On placera l'origine du repère du référentiel $\mathcal{R}$ sur la station orbitale rebelle. On appelle ℓ la distance entre la station orbitale et la base rebelle (mesurée dans le référentiel commun de la station et de la planète). On prendra l'origine des temps $t = t' = 0$ à l'instant où le vaisseau de Han passe à proximité de la station orbitale.

2.3 — Sur un dessin, représentez schématiquement la station orbitale, la base sur la planète rebelle, ainsi que les 2 vaisseaux ; indiquez aussi les origines O et O', les axes Ox et $O'x'$ (le long du mouvement relatif) et les axes Oz et $O'z'$ (on supposera la station orbitale et la base rebelle ponctuelles), et la vitesse relative v.

Voir figure 2.

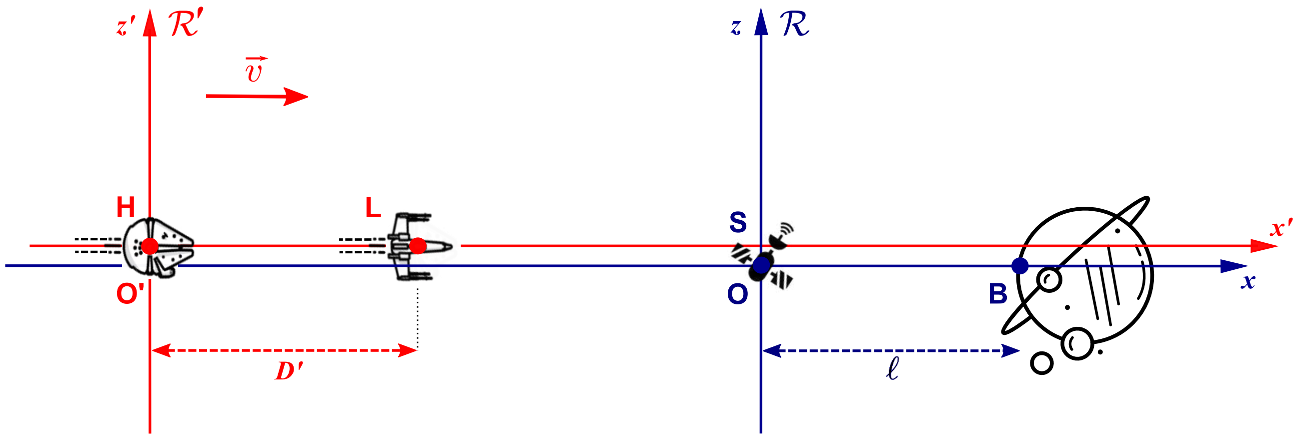

FIGURE 2 – *Schéma de la situation : en bleu, les axes du référentiel $\mathcal{R}$, solidaire de la base rebelle (B) et de la station orbitale (S) ; l'origine du repère de $\mathcal{R}$ est fixée sur cette dernière. En rouge, le référentiel $\mathcal{R}'$, solidaire des vaisseaux de Han (H) et de Luke (L) : l'origine est choisie sur le Faucon Millenium en H. Le référentiel $\mathcal{R}'$ est en translation uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ à la vitesse* $\mathbf{v}$. *Les deux vaisseaux maintiennent une distance D' entre eux (mesurée dans leur référentiel propre $\mathcal{R}'$), tandis qu'une distance ℓ sépare la station orbitale de la base rebelle dans le référentiel $\mathcal{R}$.*

2.4 — Déterminez les coordonnées spatio-temporelles des événements A, E et F dans les deux référentiels. Justifiez explicitement votre raisonnement. *Vous donnerez les expressions littérales de toutes les coordonnées (t,x) et (t',x') des événements A, E et F. Pour plus de lisibilité, vous pourrez par exemple regrouper vos résultats dans un tableau.*

Déterminons les coordonnées spatio-temporelles des événements A, E et F dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$.

A : L'événement A se produit en $x'_A = x'_L = +D'$ (position de Luke) dans le référentiel $\mathcal{R}'$, et en $x_A = 0$ (station orbitale, choisie comme origine) dans $\mathcal{R}$. On peut considérer les relations de la transformation de Lorentz pour l'événement A comme un système linéaire à résoudre, qui va ainsi nous fournir t_A et t'_A :

$$\begin{cases} ct'_A &= \gamma\,(ct_A - \beta x_A) \\ x'_A &= \gamma\,(x_A - \beta ct_A) \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} t'_A &= \gamma t_A \\ D' &= -\gamma\beta ct_A = -\gamma v t_A \end{cases}$$

D'où,

$$t_A = -\frac{1}{\gamma}\frac{D'}{v} \qquad x_A = 0 \qquad \text{et} \quad t'_A = -\frac{D'}{v} \qquad x'_A = D'.$$

E : L'événement E se produit en $x'_E = x'_L = +D'$ (position de Luke) dans le référentiel $\mathcal{R}'$, et en $x_E = \ell$ (base rebelle) dans $\mathcal{R}$. On peut procéder comme pour l'événement A,

$$\begin{cases} ct'_E & = \gamma\,(ct_E - \beta x_E) \\ x'_E & = \gamma\,(x_E - \beta ct_E) \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} t'_E & = \gamma t_E - \dfrac{\gamma v \ell}{c^2} \\ D' & = \gamma \ell - \gamma v t_E \end{cases}$$

On en déduit :

$$t_E = \frac{\ell}{v} - \frac{1}{\gamma}\frac{D'}{v} \qquad \text{et} \quad t'_E = -\frac{D'}{v} + \frac{\ell}{v}\gamma(1-\beta^2) = -\frac{D'}{v} + \frac{1}{\gamma}\frac{\ell}{v} \qquad \text{car} \quad (1-\beta^2) = \frac{1}{\gamma^2}.$$

F : De par les conventions choisies, et du fait du choix du passage du Faucon Millenium (H) à proximité de la station orbitale (S) comme événement origine, on a de manière immédiate :

$$t_F = 0 \qquad x_F = 0 \qquad \text{et} \qquad t'_F = 0 \qquad x'_F = 0$$

Les coordonnées des événements A, E et F sont regroupées table 1.

	A	E	F
$\mathcal{R}$	$x_A = 0$ $t_A = -\frac{1}{\gamma}\frac{D'}{v}$	$x_E = \ell$ $t_E = -\frac{1}{\gamma}\frac{D'}{v} + \frac{\ell}{v}$	$x_F = 0$ $t_F = 0$
$\mathcal{R}'$	$x'_A = D'$ $t'_A = -\frac{D'}{v}$	$x'_E = D'$ $t'_E = -\frac{D'}{v} + \frac{1}{\gamma}\frac{\ell}{v}$	$x'_F = 0$ $t'_F = 0$

TABLE 1 – *Coordonnées des événements A, E et F établies dans les deux référentiels, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.*

2.5 — En raisonnant sur la trajectoire du signal lumineux émis vers l'arrière par le vaisseau de Luke, déterminez la coordonnée temporelle t_R de l'événement réception R dans le référentiel $\mathcal{R}$. Déduisez-en les coordonnées de cet événement dans les deux référentiels.

Dans le référentiel $\mathcal{R}$, comme le vaisseau de Han se déplace à la vitesse v vers l'avant, et que sa coordonnée est $x_{\mathrm{H}}(t=0) = 0$ à $t = 0$, sa position $x_{\mathrm{H}}(t)$ en fonction du temps s'écrit simplement :

$$x_{\mathrm{H}}(t) = vt.$$

D'autre part, l'émission du signal lumineux a lieu en $x = \ell$ à $t = t_E$ dans le référentiel $\mathcal{R}$; le signal se propageant vers l'arrière à la vitesse $-c$ selon l'axe Ox, sa position s'écrit :

$$x_{\text{Signal}}(t) = \ell - c(t - t_E) \qquad \forall t \geqslant t_E.$$

La réception du signal par Han (événement H) a par conséquent lieu quand ces deux abscisses coïncident, c'est à dire à $t = t_R$ tel que :

$$x_{\mathrm{H}}(t_R) = x_{\text{Signal}}(t_R) \qquad \text{i.e.} \qquad vt_R = \ell - c(t_R - t_E) \qquad \text{soit} \qquad (c+v)t_R = \ell + ct_E \qquad t_R = \frac{l + ct_E}{c+v}.$$

De plus, l'événement R se produit à l'abscisse :

$$x_R = vt_R = \frac{v}{c+v}(\ell + ct_E).$$

En appliquant la transformation de Lorentz aux coordonnées de l'événement R dans $\mathcal{R}$, on obtient de manière immédiate les coordonnées de R dans le référentiel $\mathcal{R}'$:

$$\begin{cases} ct'_R &= \gamma\,(ct_R - \beta x_R) = \gamma \left(\dfrac{\ell + ct_E}{c+v}\right)\left(c - \dfrac{v^2}{c}\right) = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{c}{c+v}(\ell + ct_E) \\ x'_R &= \gamma\,(x_R - \beta ct_R) = 0 \end{cases}$$

L'événement R se produisant à la position de Han, on a naturellement $x'_R = x'_{\mathrm{H}} = 0$ dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

2.6 — Par souci de sécurité, un soldat rebelle de garde sur la station orbitale note avec précision les instants de passage des 2 vaisseaux, respectivement t_A et t_F. Connaissant par d'autres moyens la vitesse v des deux vaisseaux dans son référentiel, il peut en déduire la distance qui sépare les deux vaisseaux en vol. Que trouve-t-il ? Commentez.

Pour le soldat de garde, l'intervalle de temps entre les passages des deux vaisseaux vaut :

$$t_F - t_A = 0 - \left(-\frac{1}{\gamma}\frac{D'}{v}\right) = \frac{1}{\gamma}\frac{D'}{v}.$$

S'il connaît par ailleurs la vitesse v des vaisseaux dans son référentiel $\mathcal{R}$, il en déduit la distance D qui les sépare dans $\mathcal{R}$:

$$D = v(t_F - t_A) = \frac{D'}{\gamma} < D'.$$

Il trouve ainsi une distance $D < D'$, plus petite d'un facteur $1/\gamma$ par rapport à la ***distance propre*** D' qui sépare les deux vaisseaux dans $\mathcal{R}'$: c'est l'effet relativiste de *contraction des longueurs* (qu'on appelle aussi *contraction de FitzGerald–Lorentz*).

2.7 — On suppose de plus que $\ell = D'$ (*pour cette question et pour toutes les questions suivantes*). Discutez l'ordre temporel des événements E et F dans les deux référentiels. Calculez numériquement t_E et t'_E. De quelle nature est l'intervalle d'espace-temps $\widetilde{\mathbf{EF}}$ entre ces deux événements E et F ? Donnez le signe de l'expression :

$$\Delta s^2 = c^2(t_F - t_E)^2 - (x_F - x_E)^2$$

Si on suppose $D' = \ell$, les coordonnées des événements A, E et R se simplifient. Leurs expressions sont regroupées dans la table 2. On a toujours, par convention, $x_F = 0$, $t_F = 0$, $x'_F = 0$ et $t'_F = 0$.

On constate immédiatement que $t_E > t_F$ dans le référentiel $\mathcal{R}$, tandis qu'au contraire, $t'_E < t'_F$ dans le référentiel $\mathcal{R}'$. Autrement dit, l'ordre temporel des événements E et F dépend du référentiel : dans le référentiel $\mathcal{R}$ de la station orbitale et de la planète rebelle, l'événement E (arrivée de Luke sur la base rebelle) se produit ***après*** l'événement F (arrivée de Han à proximité de la station orbitale), alors que dans le référentiel $\mathcal{R}'$, l'événement E se produit ***avant*** l'événement F.

L'ordre des événements E et F s'inversant entre les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, l'intervalle d'espace-temps correspondant $\widetilde{EF}$ doit nécessairement être de **genre espace**. On peut le vérifier algébriquement en déterminant le signe de $\Delta s^2 = \widetilde{EF}^2$. On aura :

$$\widetilde{EF}^2 = c^2\,(t_F - t_E)^2 - (x_F - x_E)^2 = c^2\frac{\ell^2}{v^2}\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)^2 - \ell^2 = \ell^2\left[\frac{c^2}{v^2}\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)^2 - 1\right].$$

	A	E	R
$\mathcal{R}$	$x_A = 0$ $t_A = -\dfrac{1}{\gamma}\dfrac{\ell}{v} \simeq -4.45\,\mathrm{s}$	$x_E = \ell = 10^9\,\mathrm{m}$ $t_E = \dfrac{\ell}{v}\left(1 - \dfrac{1}{\gamma}\right) \approx +1.11\,\mathrm{s}$	$x_R = \dfrac{v\ell}{c+v}\left[1 + \dfrac{c}{v}\left(1 - \dfrac{1}{\gamma}\right)\right] = 5 \times 10^8\,\mathrm{m}$ $t_R = \dfrac{\ell}{c+v}\left[1 + \dfrac{c}{v}\left(1 - \dfrac{1}{\gamma}\right)\right] \approx 2.78\,\mathrm{s}$
$\mathcal{R}'$	$x'_A = \ell = 10^9\,\mathrm{m}$ $t'_A = -\dfrac{\ell}{v} \simeq -5.56\,\mathrm{s}$	$x'_E = \ell = 10^9\,\mathrm{m}$ $t'_E = -\dfrac{\ell}{v}\left(1 - \dfrac{1}{\gamma}\right) \approx -1.11\,\mathrm{s}$	$x'_R = 0$ $t'_R = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{\ell}{c+v}\left[1 + \dfrac{c}{v}\left(1 - \dfrac{1}{\gamma}\right)\right] \approx 2.22\,\mathrm{s}$

TABLE 2 – *Coordonnées des événements A, E et R établies dans les deux référentiels, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, sous l'hypothèse $D' = \ell$. On a toujours, par convention, $x_F = 0$, $t_F = 0$, $x'_F = 0$ et $t'_F = 0$. Applications numériques pour $\beta = 3/5$.*

Or,

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \beta^2 \qquad \text{d'où} \quad \beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \qquad \text{et} \quad \frac{c^2}{v^2} = \frac{1}{\beta^2} = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1}.$$

En substituant dans l'expression de $\widetilde{EF}^2$, cela donne :

$$\begin{aligned}\widetilde{EF}^2 &= \ell^2\left[\frac{c^2}{v^2}\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)^2 - 1\right] = \ell^2\left[\frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1}\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right)^2 - 1\right] \\ &= \ell^2\left[\frac{(\gamma-1)^2}{\gamma^2 - 1} - 1\right] = \ell^2\left[\frac{(\gamma-1)^2}{(\gamma-1)(\gamma+1)} - 1\right] = \ell^2\left[\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} - 1\right] = -\frac{2\ell^2}{\gamma + 1} < 0.\end{aligned}$$

Ainsi, $\Delta s^2 = \widetilde{EF}^2 < 0$ et l'intervalle d'espace-temps correspondant $\widetilde{EF}$ est de **genre espace** ; l'événements E n'appartient pas au cône de lumière de l'événement F (et réciproquement), et il ne peut exister aucun lien causal entre ces deux événements.

À noter. On peut remarquer que l'intervalle entre les événements E et R est de ***genre lumière*** : en effet,

$$\begin{aligned}\widetilde{ER}^2 &= c^2(t_R - t_E)^2 - (x_R - x_E)^2 \\ &= c^2\left[\frac{\ell + ct_E}{c+v} - t_E\right]^2 - \left[\frac{v}{c+v}(\ell + ct_E) - \ell\right]^2 = c^2\left[\frac{\ell - vt_E}{c+v}\right]^2 - c^2\left[\frac{vt_E - \ell}{c+v}\right]^2 = 0.\end{aligned}$$

Ce résultat était attendu puisque E et R sont deux événements appartenant à la ligne d'univers du même signal lumineux, formant donc un intervalle d'espace-temps de ***genre lumière***.

2.8 — Une fois le vaisseau de Luke arrêté, comme décrit plus haut, ses feux "stop" émettent un bref signal lumineux dans le rouge, centré sur la longueur d'onde $\lambda_{\text{émission}} = 750\,\mathrm{nm}$, dans la direction de Han et Chewbacca.

Quelles sont la longueur d'onde et la couleur du signal lumineux reçu par Han et Chewbacca ?

On rappelle la loi de l'effet Doppler relativiste longitudinal : un signal lumineux émis à la fréquence ν_E dans le référentiel de l'émetteur (E) est vu avec une fréquence ν_R dans le référentiel du récepteur (R), avec

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \sqrt{\frac{c - v_{E/R}}{c + v_{E/R}}}$$

où $v_{E/R}$ est la vitesse de l'émetteur (source) par rapport au récepteur, comptée positivement si l'émetteur s'éloigne du récepteur et négativement s'il se rapproche.

Pour un signal lumineux de fréquence ν, sa la longueur d'onde dans le vide λ vaut $\lambda = c/\nu$; on déduit de l'équation précédente la relation entre la longueur d'onde émise et celle reçue :

$$\frac{\lambda_E}{\lambda_R} = \frac{\nu_R}{\nu_E} = \sqrt{\frac{c - v_{E/R}}{c + v_{E/R}}}.$$

Lorsque le vaisseau de Luke émet son signal, il est déjà à l'arrêt et par conséquent solidaire du référentiel $\mathcal{R}$; il émet dans $\mathcal{R}$ un signal de longueur d'onde $\lambda_E = \lambda = 750\,\text{nm}$. La longueur d'onde $\lambda_R = \lambda'$ du signal reçu par Han et Chewbacca (dans $\mathcal{R}'$) s'écrit par conséquent :

$$\lambda' = \lambda_R = \lambda_E \sqrt{\frac{c + v_{E/R}}{c - v_{E/R}}} = \lambda \sqrt{\frac{c - v}{c + v}} = \lambda \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

car ici $v_{E/R} = -v$ avec les conventions choisies. On trouve ainsi :

$$\lambda' = \lambda \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} = \lambda \sqrt{\frac{1 - 3/5}{1 + 3/5}} = \frac{1}{2}\lambda \qquad \textit{i.e.} \quad \lambda' = 375\,\text{nm}$$

ce qui correspond pour Han et Chewbacca à un signal lumineux violet sombre, à la limite du spectre visible pour l'oeil humain (début de l'ultraviolet).

2.9 — Tandis que Luke gare son vaisseau, Han et Chewbacca se chamaillent comme d'habitude dans le cockpit du Faucon Millenium et ne remarquent pas le signal lumineux que Luke leur a envoyé pour les prévenir. Ils poursuivent donc leur chemin sans modifier leur trajectoire ni leur vitesse. À quel instant t (dans $\mathcal{R}$) emboutissent-ils le vaisseau de Luke ? *Donnez l'expression littérale de t, puis faites l'application numérique.*

2.10 — On notera Q l'événement de la collision. Quelles sont ses coordonnées (t_Q, x_Q) et (t'_Q, x'_Q) dans les deux référentiels ? Si Han et Chewbacca avaient été plus attentifs, de combien de temps $\Delta t'$ disposaient-ils entre la réception du signal de Luke et la collision ? Applications numériques.

Traitons ensemble les deux questions. Dans le référentiel $\mathcal{R}'$, la collision (événement Q) se produit à la position de Han, à savoir en $x'_Q = x'_\text{H} = 0$. Dans le référentiel $\mathcal{R}$, la collision a lieu à la base rebelle, c'est à dire en $x_Q = x_\text{B} = +\ell$. La transformation de Lorentz pour passer des coordonnées (t_Q, x_Q) de l'événement Q dans $\mathcal{R}$ aux coordonnées (t'_Q, x'_Q) du même événement dans $\mathcal{R}'$ s'écrit :

$$\begin{cases} ct'_Q &= \gamma\,(ct_Q - \beta x_Q) \\ x'_Q &= \gamma\,(x_Q - \beta c t_Q) \end{cases}$$

Or, on sait que $x_Q = +\ell$ et $x'_Q = 0$: la seconde équation nous donne directement :

$$x_Q - v t_Q = 0 \qquad \text{d'où} \quad t_Q = \frac{x_Q}{v} = \frac{\ell}{v}.$$

En utilisant la première équation, on en déduit t'_Q :

$$t'_Q = \gamma\left(t_Q - \frac{v}{c^2}x_Q\right) = \gamma\left(\frac{\ell}{v} - \frac{v}{c^2}\ell\right) = \gamma\frac{\ell}{v}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{\gamma}\frac{\ell}{v}.$$

Numériquement, on obtient :

$$t_Q \approx 5.56\,\mathrm{s} \qquad x_Q = 10^9\,\mathrm{m} \qquad t'_Q \approx 4.45\,\mathrm{s} \qquad x'_Q = 0.$$

Han et Chewbacca disposaient donc de $\Delta t' = t'_Q - t'_R \approx 2.22\,\mathrm{s}$ entre la réception du signal (événement R) et la collision (événement Q).

2.11 — Vous représenterez toutes ces péripéties sur un diagramme d'espace-temps, de Minkowski ou de Loedel, selon votre préférence. *Pour une meilleure lisibilité, vous consacrerez une pleine page à ce diagramme. Si vous utilisez un diagramme de Minkowski, prenez garde à la graduation des axes qui n'est pas triviale.*

Vous indiquerez les lignes d'univers de la station orbitale (qu'on considérera ponctuelle), de la base rebelle (idem), de Han et de Luke ; vous représenterez aussi la ligne d'univers du signal lumineux émis par Luke et reçu par Han. Vous placerez sur le diagramme tous les événements considérés dans l'énoncé, en indiquant graphiquement leurs coordonnées dans les deux référentiels.

Voir figure 3.

Applications numériques :

$c = 299\,792\,458\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \approx 3\times10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \qquad v = 3c/5 \qquad \ell = D' = 1\,000\,000\,\mathrm{km}$

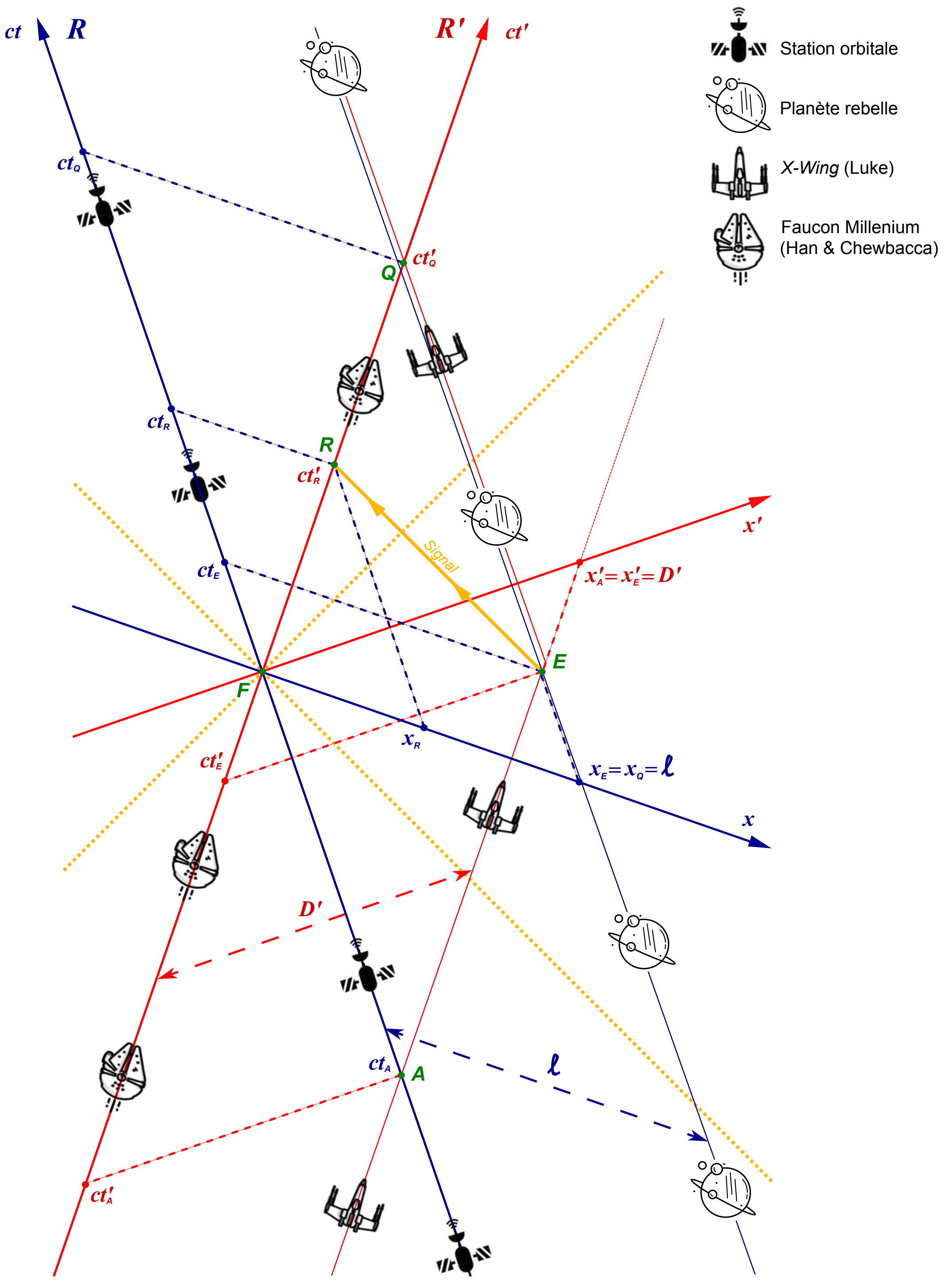

FIGURE 3 – *Diagramme d'espace-temps (diagramme de Loedel). Les lignes d'Univers de la station orbitale et de la base rebelle sont dessinées en bleu (référentiel $\mathcal{R}$), tandis que celles de Luke (dans son chasseur X-Wing) et de Han (avec Chewbacca à bord du Faucon Millenium) sont indiquées en rouge (référentiel $\mathcal{R}'$). À partir de l'instant où Luke atteint la base rebelle et s'y arrête, sa ligne d'univers se confond avec celle de la base. La ligne d'univers du signal lumineux émis par le vaisseau de Luke et reçu par le Faucon Millenium est représentée en jaune (vitesse $-c$). On constate immédiatement que l'ordre temporel des événements E et F dépend du référentiel : dans le référentiel $\mathcal{R}$ de la station orbitale et de la planète rebelle, l'événement E (arrivée de Luke sur la base rebelle) se produit* ***après*** *l'événement F (arrivée de Han à proximité de la station orbitale); au contraire, dans le référentiel $\mathcal{R}'$ l'événement E se produit* ***avant*** *l'événement F.*