LICENCE DE PHYSIQUE — RELATIVITÉ RESTREINTE

EXAMEN

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2022–2023

Mardi 8 novembre 2022 – 16h-18h

Documents, ordinateurs, tablettes et téléphones sont interdits.

Les calculatrices (basiques) sont autorisées.

1. Transformations de Lorentz, composition des vitesses

1.1 — Écrivez les transformations des coordonnées (ct, x, y, z) d'un événement lors du passage d'un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ à un autre référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ se déplacant à la vitesse $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_x$ par rapport à $\mathcal{R}$. Mettez cette relation sous forme matricielle.

1.2 — Si la vitesse relative du référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ était selon l'axe $\mathrm{O}z$ au lieu de $\mathrm{O}x$, *i.e.* $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_z$, comment s'écrirait la transformation de Lorentz pour passer de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$? Écrivez de même cette relation sous forme matricielle.

Pour toute la suite de cet exercice, on considèrera que le mouvement relatif entre les référentiels est selon l'axe $\mathrm{O}x$ ***:*** $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v\,\mathbf{e}_x$**.**

1.3 — Considérons deux événements très proches séparés par une distance infinitésimale $\mathrm{d}\mathbf{r}$ de composantes $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$ et par un intervalle de temps infinitésimal $\mathrm{d}t$ dans le référentiel $\mathcal{R}$, et par une distance $\mathrm{d}\mathbf{r'}$: $(\mathrm{d}x', \mathrm{d}y', \mathrm{d}z')$ et un intervalle de temps $\mathrm{d}t'$ dans $\mathcal{R}'$. Exprimez $\mathrm{d}t'$ et $\mathrm{d}x'$ en fonction de $\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}x$. Que devient cette relation si les deux événements considérés se produisent à la même abcisse x' dans $\mathcal{R}'$? Qu'est-ce que le temps propre τ ?

1.4 — Déduisez de la transformation de Lorentz la loi de transformation des composantes de la vitesse $\mathbf{u} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$ d'un point matériel M lors du passage du référentiel $\mathcal{R}$ au référentiel $\mathcal{R}'$.

1.5 — Précisez les cas limites intéressants, en particulier pour des vitesses faibles devant la célérité c de la lumière. Que retrouve-t-on ? D'autre part, que vaut u_x si $u'_x = c$?

1.6 — En partant de la loi de composition des vitesses, montrez que la vitesse d'un objet ne peut dépasser c quel que soit le référentiel où on mesure cette vitesse.

2. Départs en mission

Vous traiterez cet exercice dans le cadre de la relativité restreinte.

Luke, à bord de son chasseur (*X-Wing*) et Han Solo, à bord du Faucon Millenium, partent tous deux en mission. Ils quittent au même instant la base rebelle, et s'en éloignent à la même vitesse $u < c$ mais dans des directions opposées. On néglige les phases de démarrage des vaisseaux et on suppose qu'ils se déplacent à vitesse constante.

Pour simplifier, on supposera les vaisseaux quasi-ponctuels, ainsi que la base rebelle. On notera $\mathcal{R}$ le référentiel de la base, $\mathcal{R}'$ le référentiel de Han, et $\mathcal{R}''$ celui de Luke. On choisira l'origine O de $\mathcal{R}$ en un point arbitraire de la base, et on orientera l'axe Ox dans la direction du mouvement du Faucon Millenium, le vaisseau de Han. On munira les référentiels $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}''$ d'axes parallèles à ceux de $\mathcal{R}$. On prendra comme origine des temps $t = t' = t'' = 0$ l'instant du départ des deux vaisseaux.

2.1 — Quelle est la vitesse relative de Luke par rapport à Han ? Donnez l'expression littérale du vecteur vitesse correspondant $\mathbf{u}'_L = u'_L\,\mathbf{e}_x$, puis la valeur numérique de u'_L.

2.2 — Que vaut la vitesse de Han par rapport à Luke ?

La base rebelle est située sur une planète entourée d'un anneau de rayon R_A (rayon de la limite intérieure de l'anneau, mesuré dans le référentiel de la planète).

2.3 — Faites un schéma de la situation. *Vous ferez apparaître sur votre dessin la base rebelle, les deux vaisseaux, les différents référentiels en jeu, leurs origines et leurs axes, ainsi que l'anneau planétaire.*

2.4 — Dans le référentiel de la planète, à quel instant t_H Han atteint-il l'anneau planétaire ? Quelle est alors sa position x ? On notera A_H l'événement correspondant.

2.5 — Donnez les coordonnées de l'événement A_H dans le référentiel de Han, et dans celui de Luke.

2.6 — Connaissant sa propre vitesse par rapport à la base, que vaut pour Han le rayon de l'anneau planétaire ?

2.7 — Le vaisseau de Luke atteint lui aussi l'anneau planétaire : on note A_L cet événement. Quelles sont ses coordonnées (t, x) dans $\mathcal{R}$? Quelles sont les coordonnées (t', x') du même événement dans le référentiel $\mathcal{R}'$ de Han ?

2.8 — Discutez la simultanéité des événements A_L et A_H dans les référentiels de la base rebelle ($\mathcal{R}$) et de Han ($\mathcal{R}'$).

2.9 — Dans quel ordre se produisent ces deux événements dans le référentiel de Luke ?

2.10 — Montrez algébriquement que les événements A_L et A_H forment un intervalle d'espace-temps de *genre espace*. Peut-il y avoir un lien de causalité entre ces deux événements ?

À l'instant $t_0 > 0$, la base rebelle émet un signal électromagnétique dans toutes les directions (événement E). On note respectivement R_H et R_L les événements de réception de ce signal par Han et par Luke.

2.11 — Quelles sont les coordonnées spatio-temporelles des événements E, R_H et R_L dans le référentiel de la base ? dans celui de Han ? dans celui de Luke ? *On pourra profiter ici des symétries évidentes du problème.*

2.12 — Discutez l'ordre temporel des événements E, R_H et R_L dans les 3 référentiels considérés.

2.13 — Représentez l'ensemble de ces péripéties sur un diagramme d'espace-temps, de Minkowski ou de Loedel, selon votre préférence.

Pour obtenir une figure lisible, consacrez une page entière à ce diagramme. Afin d'alléger le diagramme, vous ne représenterez que les axes des référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Indiquez sur le diagramme la ligne d'univers de la base rebelle, de Luke et de Han ; le tube d'univers de l'anneau planétaire ; les lignes d'univers des signaux électromagnétiques, ainsi que l'ensemble des événements considérés. Dessinez aussi les projections des événements sur les axes des référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, afin de mettre en évidence l'ordre temporel des événements dans ces deux référentiels.

Applications numériques :

$c = 299\,792\,458\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} \approx 3\times10^8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ $\qquad u = 3c/5$ $\qquad R_A = 900\,000\,\mathrm{km}.$

3. Équilibre d'un pendule sur un plateau tournant

Vous traiterez cet exercice dans le cadre de la mécanique classique.

On souhaite étudier l'équilibre d'un pendule simple placé sur un plateau tournant. Une bille de plomb, suspendue à un fil, lui-même accroché à une potence est représenté figure 1. Le plateau est centré en O et peut tourner autour d'un axe de rotation vertical. Au repos, la bille de masse m, représentée par le point M, est suspendue au bout du fil de longueur $\ell = \mathrm{O'M}$ accroché au point O′. On note R la distance entre le centre du plateau O et le point N, situé à la verticale du point O′ et de la bille lorsque celle-ci est au repos. La potence à laquelle le fil est accroché est solidement fixée au plateau au point Q, et orientée de manière à ce que les points O, Q, O′, M et N soient tous dans le même plan, lorsque le plateau est immobile.

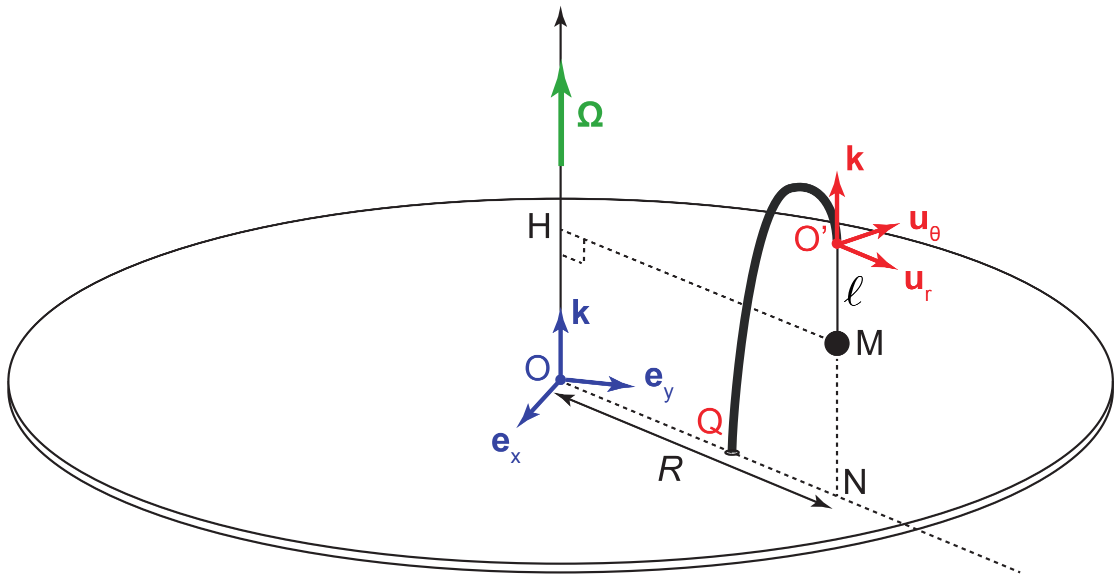

FIGURE 1 – *Pendule simple suspendu au point* O′ *à une potence elle-même placée sur un plateau tournant. La configuration représentée correspond à une situation où le plateau est immobile.*

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}$, muni d'une base orthonormée $(\mathrm{O}, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{k})$ est supposé galiléen. On considère un second référentiel $\mathcal{R}'$, lié au plateau (et donc dans lequel le plateau est immobile), pourvu d'une base orthonormée $(\mathrm{O}', \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{k})$ solidaire du plateau. Le plateau peut tourner autour d'un axe de rotation vertical, de sorte que le vecteur rotation angulaire s'écrit $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\, \mathbf{k}$.

Les expressions de l'accélération d'entraînement et de l'accélération de Coriolis sont rappelées à la fin du présent exercice.

3.1 — Le plateau est mis en rotation de sorte que sa vitesse angulaire de rotation Ω augmente progressivement. Qu'observerait une personne immobile dans $\mathcal{R}'$? La bille de plomb reste-t-elle dans le plan (OQO') ? Si non, dans quelle direction est-elle entraînée ? ***Attention, vous répondrez à cette première question de manière qualitative, sans calcul.***

Dans la suite de l'exercice, on considère que le plateau a atteint sa vitesse de rotation nominale, est que celle-ci est constante : $\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}/\mathrm{d}t = \mathbf{0}$. La bille de plomb est donc au repos dans le référentiel tournant $\mathcal{R}'$. L'angle entre le fil (vecteur $\mathbf{O'M}$) et l'axe vertical (vecteur $\mathbf{k}$) est noté α.

3.2 — En appliquant la relation de Varignon, montrez que

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{OO'}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}} = \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{OO'}).$$

3.3 — Déduisez-en l'expression de l'accélération d'inertie d'entraînement de la bille de plomb en fonction du vecteur $\mathbf{OM}$.

3.4 — Donnez l'expression de la force d'inertie de Coriolis.

3.5 — Pour un observateur immobile dans $\mathcal{R}'$, quelles sont les forces qui s'appliquent à la bille de plomb de masse m ?

3.6 — Représentez sur un schéma dans le plan $(\mathrm{O}', \mathbf{u}_r, \mathbf{k})$:

(i) l'axe de rotation $(\mathrm{O}, \mathbf{k})$;

(ii) la base $(\mathrm{O}', \mathbf{u}_r, \mathbf{k})$;

(iii) la distance R ;

(iv) le fil de longueur ℓ incliné d'un angle α avec la verticale ;

(v) la bille de plomb au point M ;

(vi) le point H.

3.7 — Exprimez la longueur HM en fonction de R, ℓ et α.

3.8 — Donnez l'expression vectorielle de la force d'inertie d'entraînement en fonction de Ω, m, R, ℓ, α, et des vecteurs de la base $(\mathrm{O}', \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{k})$. Comment appelle-t-on cette force dans la vie courante ?

3.9 — Appliquez la seconde loi de Newton dans le référentiel $\mathcal{R}'$ non galiléen afin d'en déduire la relation vectorielle existant entre les différentes forces. Complétez la figure obtenue à la question 6 pour ajouter les forces qui s'exercent sur la bille de plomb. ***Sur votre schéma, vous prendrez soin de respecter la relation vectorielle existante entre les différentes forces représentées.***

3.10 — En déduire le système d'équations vérifiées par α en fonction des autres grandeurs du problème.

3.11 — Dans le cas le plus général, résoudre ce système d'équations sans faire d'approximation pour exprimer l'angle α donne des expressions analytiques assez complexes. Dans un premier temps, on fera l'hypothèse que l'angle α est petit. Sous cette hypothèse, quelle est l'expression de α (en radians) en fonction des autres données du problème ? Que remarque-t-on qui peut sembler contre-intuitif ?

3.12 — Il existe un autre cas pour lequel le système d'équations donnant α possède des solutions simples : lorsque $R = 0$, c'est à dire lorsque le point d'accroche du pendule appartient à l'axe de rotation du plateau. Résolvez le système d'équations dans ce cas. ***Pour ce cas particulier, vous traiterez à part le cas*** $\alpha = 0$ ***; vous montrerez aussi que la solution*** $\alpha > 0$ ***n'existe que si une condition sur*** Ω ***est vérifiée, condition que vous préciserez.***

3.13 — En repartant du système général d'équations obtenu à la question 10, et cette fois sans faire d'approximation, donnez l'expression de Ω en fonction de g, R, ℓ et α. En pratique, cette expression n'a pas d'application immédiate puisque la vitesse de rotation est imposée par l'expérimentateur. Cependant, faute de solution analytique simple, elle nous permettra de déterminer ***graphiquement*** une solution. Cette fonction $\Omega(\alpha)$ est représentée sur la figure 2 (courbe rouge), pour $R = 10\,\mathrm{m}$, $\ell = 1\,\mathrm{m}$ et $g = 9.81\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$. Que constate-t-on lorsque Ω augmente ?

3.14 — Par lecture du graphique, donnez la valeur de l'angle α obtenu pour $\Omega = 2\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Que vaut le module de la force de tension T pour cet angle, si la masse de la bille de plomb vaut $m = 1\,\mathrm{kg}$?

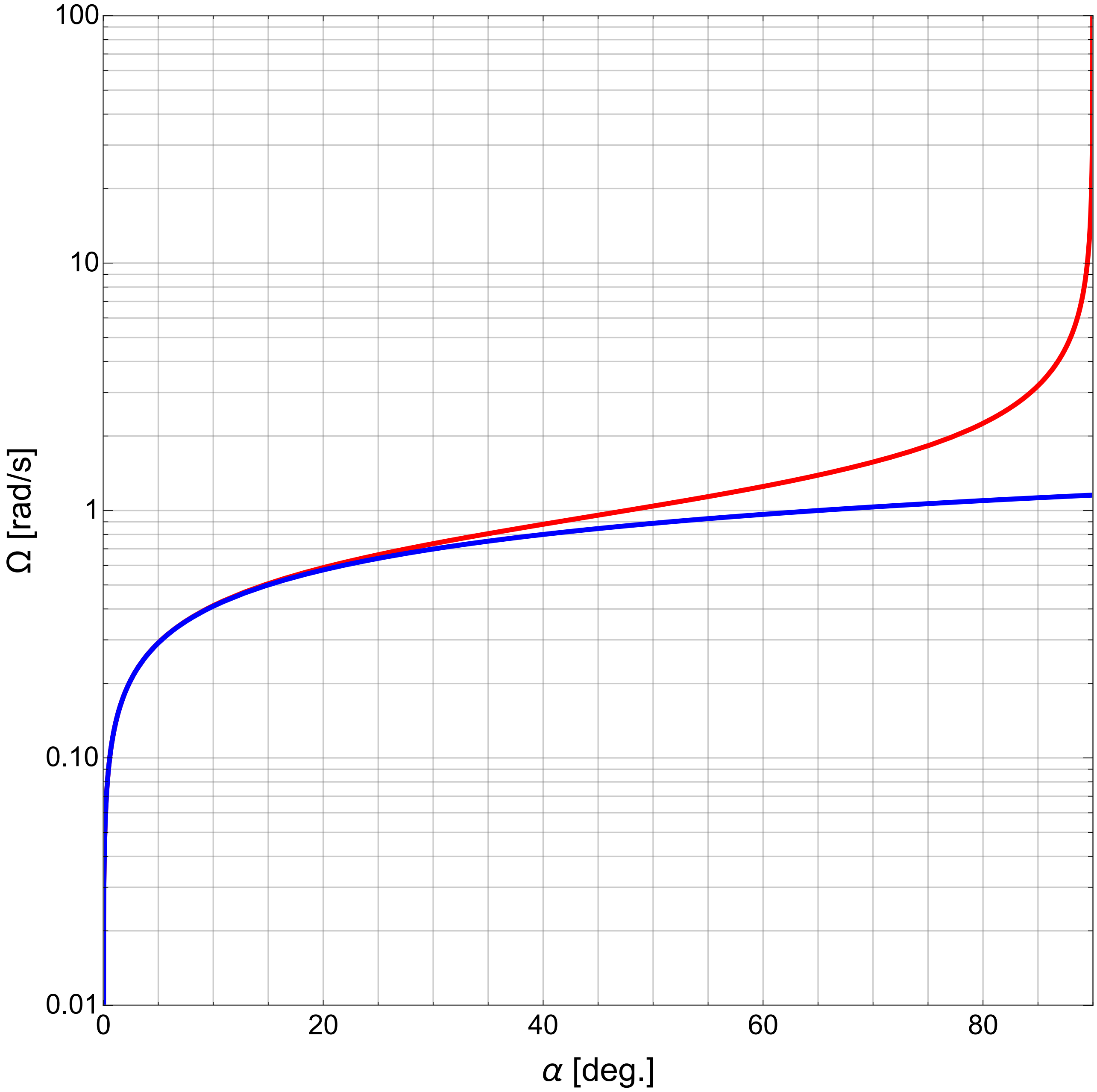

FIGURE 2 – *Evolution de la vitesse angulaire de rotation Ω en fonction de l'angle α pour $R = 10\,m$, $\ell = 1\,m$ et $g = 9.81\,m \cdot s^{-2}$: en bleu pour l'expression simplifiée de la question 11 et en rouge pour l'expression de la question 13.*

Rappels : transformation de la vitesse et de l'accélération entre un référentiel galiléen et un référentiel non-galiléen. Soient deux référentiels : un premier référentiel $\mathcal{R}$, galiléen (ou inertiel), et un second référentiel $\mathcal{R}'$, animé d'un mouvement quelconque par rapport à $\mathcal{R}$ et par conséquent non galiléen. On appelle O et O' les origines choisies dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, respectivement. De plus, on note $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ le vecteur vitesse angulaire instantané de rotation du référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$.

Considérons un point matériel M en mouvement quelconque, dont la position à chaque instant dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ est repérée par les vecteurs positions $\mathbf{r}(t) = \mathbf{OM}(t)$ et $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{O'M}(t)$ respectivement.

Si on note $\mathbf{a}(t)$ l'accélération de M dans le référentiel $\mathcal{R}$, et $\mathbf{a}'(t)$ son accélération dans $\mathcal{R}'$, on aura,

$$\mathbf{a}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}} \qquad \mathbf{a}'(t) = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{O'M}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}'} = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}'} \qquad \mathbf{a}(t) = \mathbf{a}'(t) + \mathbf{a}_{\mathrm{e}} + \mathbf{a}_{\mathrm{c}}$$

où les termes d'accélération supplémentaires sont ***l'accélération d'entraînement*** $\mathbf{a}_{\mathrm{e}}$ (ou $\mathbf{a}_{\mathrm{ie}}$) et ***l'accélération de Coriolis*** $\mathbf{a}_{\mathrm{c}}$ (ou $\mathbf{a}_{\mathrm{ic}}$) qui s'écrivent respectivement :

$$\mathbf{a}_{\mathrm{e}} = \mathbf{a}_{\mathrm{ie}} = \mathbf{a}_{\mathrm{e}/\mathcal{R}} = \mathbf{a}(O'/\mathcal{R}) + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \left(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{O'M}\right) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{O'M} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{a}_{\mathrm{c}} = \mathbf{a}_{\mathrm{ic}} = 2\,\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{u}'$$