

EXAMEN — CORRIGÉ

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2022–2023

Mardi 8 novembre 2022 – 16h-18h

[Total : 54 pts]

1. Transformations de Lorentz, composition des vitesses

[7 pts]

1 pt

1.1 — Écrivez les transformations des coordonnées  $(ct, x, y, z)$  d'un événement lors du passage d'un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  à un autre référentiel galiléen  $\mathcal{R}'$  se déplaçant à la vitesse  $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . Mettez cette relation sous forme matricielle.

La transformation de Lorentz s'écrit dans ce cas :

$$\left\{ \begin{array}{l} t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \end{array} \right. \quad \text{i.e.} \quad \left\{ \begin{array}{l} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{array} \right. \quad \text{et réciproquement} \quad \left\{ \begin{array}{l} ct = \gamma(ct' + \beta x') \\ x = \gamma(x' + \beta ct') \\ y = y' \\ z = z' \end{array} \right.$$

où on pose :  $\beta = \frac{v}{c}$  ou  $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} = \frac{\mathbf{v}}{c}$  et  $\gamma = \gamma(\mathbf{v}) = (1 - \beta^2)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ .

On peut mettre ces équations sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & +\beta\gamma & 0 & 0 \\ +\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

1 pt

1.2 — Si la vitesse relative du référentiel  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  était selon l'axe  $Oz$  au lieu de  $Ox$ , i.e.  $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_z$ , comment s'écrirait la transformation de Lorentz pour passer de  $\mathcal{R}$  à  $\mathcal{R}'$ ? Écrivez de même cette relation sous forme matricielle.

Les relations précédentes deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} t' = \frac{t - vz/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x' = x \\ y' = y \\ z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array} \right. \quad \text{i.e.} \quad \left\{ \begin{array}{l} ct' = \gamma(ct - \beta z) \\ x' = x \\ y' = y \\ z' = \gamma(z - \beta ct) \end{array} \right. \quad \text{et réciproquement} \quad \left\{ \begin{array}{l} ct = \gamma(ct' + \beta z') \\ x = x' \\ y = y' \\ z = \gamma(z' + \beta ct') \end{array} \right.$$

On peut mettre ces équations sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

**Pour toute la suite de cet exercice, on considèrera que le mouvement relatif entre les référentiels est selon l'axe  $Ox$  :  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v \mathbf{e}_x$ .**

1 pt

**1.3** — Considérons deux événements très proches séparés par une distance infinitésimale  $dr$  de composantes  $(dx, dy, dz)$  et par un intervalle de temps infinitésimal  $dt$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , et par une distance  $dr'$  :  $(dx', dy', dz')$  et un intervalle de temps  $dt'$  dans  $\mathcal{R}'$ . Exprimez  $dt'$  et  $dx'$  en fonction de  $dt$  et  $dx$ . Que devient cette relation si les deux événements considérés se produisent à la même abscisse  $x'$  dans  $\mathcal{R}'$ ? Qu'est-ce que le temps propre  $\tau$ ?

Pour deux événements se produisant au même point dans  $\mathcal{R}'$ , séparés par un petit intervalle de temps  $dt'$ , on aura  $dx' = \gamma(dx - \beta cdt) = 0$ , et donc  $dx = \beta cdt = vt$ . L'intervalle de temps  $dt'$  vaut ainsi :

$$cdt' = \gamma(cdt - \beta dx) = \gamma(1 - \beta^2)dt = \frac{1}{\gamma}dt \quad \text{d'où} \quad dt = \gamma dt' > dt'$$

Le temps semble s'écouler plus lentement dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ .

Pour un observateur, le temps  $d\tau$  mesuré dans le référentiel qui lui est attaché semble toujours s'écouler plus lentement que dans tout autre référentiel :  $dt = \gamma d\tau > d\tau$ . Le temps  $\tau$  est le **temps propre** de l'observateur ; c'est un invariant car  $ds^2 = c^2 d\tau^2$ .

1 pt

**1.4** — Déduisez de la transformation de Lorentz la loi de transformation des composantes de la vitesse  $\mathbf{u} = dr/dt$  d'un point matériel M lors du passage du référentiel  $\mathcal{R}$  au référentiel  $\mathcal{R}'$ .

À partir des transformations de Lorentz, on dérive la loi de composition des vitesses :

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{1}{\gamma} \frac{u_y}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{1}{\gamma} \frac{u_z}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \end{array} \right. \quad \text{et réciproquement} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \\ u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{u'_y}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \\ u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{u'_z}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \end{array} \right.$$

**1 pt** 1.5 — Précisez les cas limites intéressants, en particulier pour des vitesses faibles devant la célérité  $c$  de la lumière. Que retrouve-t-on? D'autre part, que vaut  $u_x$  si  $u'_x = c$ ?

D'une part, on montre facilement que pour des vitesses faibles devant la célérité  $c$  de la lumière, la loi de composition des vitesses tend vers la limite classique :

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \simeq u'_x + v \quad \text{quand} \quad u'_x \ll c \quad \text{et} \quad v \ll c$$

D'autre part, on constate immédiatement que la vitesse de la lumière est une vitesse limite : par exemple, quand  $u'_x = c$ , on obtient alors dans le référentiel  $\mathcal{R}$  :

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c}} = c$$

De même, lorsque  $v = c$ , on aura alors  $u_x = c$ .

**2 pts** 1.6 — En partant de la loi de composition des vitesses, montrez que la vitesse d'un objet ne peut dépasser  $c$  quel que soit le référentiel où on mesure cette vitesse.

Considérons un mobile se déplaçant à la vitesse  $u' < c$  dans un référentiel  $\mathcal{R}'$ . Sa vitesse  $u$  mesurée dans un référentiel  $\mathcal{R}$  tel que  $v(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v < c$  est donc (en supposant les vitesses  $u$ ,  $u'$  et  $v$  colinéaires) :

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \quad \frac{u}{c} = \frac{\frac{u'}{c} + \frac{v}{c}}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

Posons  $a = u'/c$  et  $\beta = v/c$ . On a :

$$0 \leq a = \frac{u'}{c} < 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \beta = \frac{v}{c} < 1$$

Comme  $0 \leq a < 1$ , on en déduit que  $0 < 1 - a \leq 1$ ; En multipliant l'inégalité  $\beta < 1$  par  $(1 - a) > 0$ , on obtient ainsi :

$$(1 - a)\beta < 1 - a \quad \text{d'où} \quad \beta - a\beta < 1 - a \quad \text{soit} \quad a + \beta < 1 + a\beta$$

Et par conséquent,

$$\frac{u}{c} = \frac{\frac{u'}{c} + \frac{v}{c}}{1 + \frac{u'v}{c^2}} = \frac{a + \beta}{1 + a\beta} < 1 \quad \text{i.e.} \quad u < c$$

Pour un mobile se déplaçant à une vitesse  $u' < c$  dans un référentiel  $\mathcal{R}'$ , sa vitesse  $u$  mesurée dans tout autre référentiel sera elle aussi inférieure à  $c$ .

## 2. Départs en mission

[23 pts]

Vous traiterez cet exercice dans le cadre de la relativité restreinte.

Luke, à bord de son chasseur (*X-Wing*) et Han Solo, à bord du Faucon Millenium, partent tous deux en mission. Ils quittent au même instant la base rebelle, et s'en éloignent à la même vitesse  $u < c$  mais dans des directions opposées. On néglige les phases de démarrage des vaisseaux et on suppose qu'ils se déplacent à vitesse constante.

Pour simplifier, on supposera les vaisseaux quasi-ponctuels, ainsi que la base rebelle. On notera  $\mathcal{R}$  le référentiel de la base,  $\mathcal{R}'$  le référentiel de Han, et  $\mathcal{R}''$  celui de Luke. On choisira l'origine  $O$  de  $\mathcal{R}$  en un point arbitraire de la base, et on orientera l'axe  $Ox$  dans la direction du mouvement du Faucon Millenium, le vaisseau de Han. On munira les référentiels  $\mathcal{R}'$  et  $\mathcal{R}''$  d'axes parallèles à ceux de  $\mathcal{R}$ . On prendra comme origine des temps  $t = t' = t'' = 0$  l'instant du départ des deux vaisseaux.

**1 pt** 2.1 — Quelle est la vitesse relative de Luke par rapport à Han? Donnez l'expression littérale du vecteur vitesse correspondant  $\mathbf{u}'_L = u'_L \mathbf{e}_x$ , puis la valeur numérique de  $u'_L$ .

Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  de la base, les vitesses de Han et de Luke sont respectivement  $\mathbf{u}_H$  et  $\mathbf{u}_L$ , avec :

$$\mathbf{u}_H = u_H \mathbf{e}_x = +u \mathbf{e}_x \quad (\text{Han}) \quad \mathbf{u}_L = u_L \mathbf{e}_x = -u \mathbf{e}_x \quad (\text{Luke})$$

Le référentiel  $\mathcal{R}'$  de Han est ainsi en translation uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$ , avec une vitesse relative  $\mathbf{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \mathbf{u}_H = +u \mathbf{e}_x$ . En appliquant la loi relativiste de composition des vitesses, on obtient la vitesse  $\mathbf{u}'_L$  de Luke dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  de Han (le problème est ici unidimensionnel selon  $Ox$ ) :

$$\mathbf{u}'_L = u'_L \mathbf{e}_x \quad \text{avec} \quad u'_L = \frac{u_L - v_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{1 - \frac{v_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} u_L}{c^2}} = -\frac{2u}{1 + \frac{u^2}{c^2}} \quad \text{soit} \quad \mathbf{u}'_L = -\frac{2u}{1 + \frac{u^2}{c^2}} \mathbf{e}_x.$$

Numériquement, on obtient :

$$\|\mathbf{u}_H\| = \|\mathbf{u}_L\| = u = \frac{3c}{5} \approx 1.8 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad u'_L = -\frac{2u}{1 + \frac{u^2}{c^2}} = -\frac{15}{17}c \approx -2.65 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

**1 pt** 2.2 — Que vaut la vitesse de Han par rapport à Luke?

Par symétrie, la vitesse  $\mathbf{u}''_H$  de Han par rapport à Luke (i.e. la vitesse de Han dans  $\mathcal{R}''$ ) est l'opposée de celle de Luke par rapport à Han :

$$\mathbf{u}''_H = -\mathbf{u}'_L = \frac{2u}{1 + \frac{u^2}{c^2}} \mathbf{e}_x \quad \text{i.e.} \quad \|\mathbf{u}''_H\| = +\frac{15}{17}c \approx +2.65 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

La base rebelle est située sur une planète entourée d'un anneau de rayon  $R_A$  (rayon de la limite intérieure de l'anneau, mesuré dans le référentiel de la planète).

**1.5 pt** 2.3 — Faites un schéma de la situation. Vous ferez apparaître sur votre dessin la base rebelle, les deux vaisseaux, les différents référentiels en jeu, leurs origines et leurs axes, ainsi que l'anneau planétaire.

Voir figure 1.

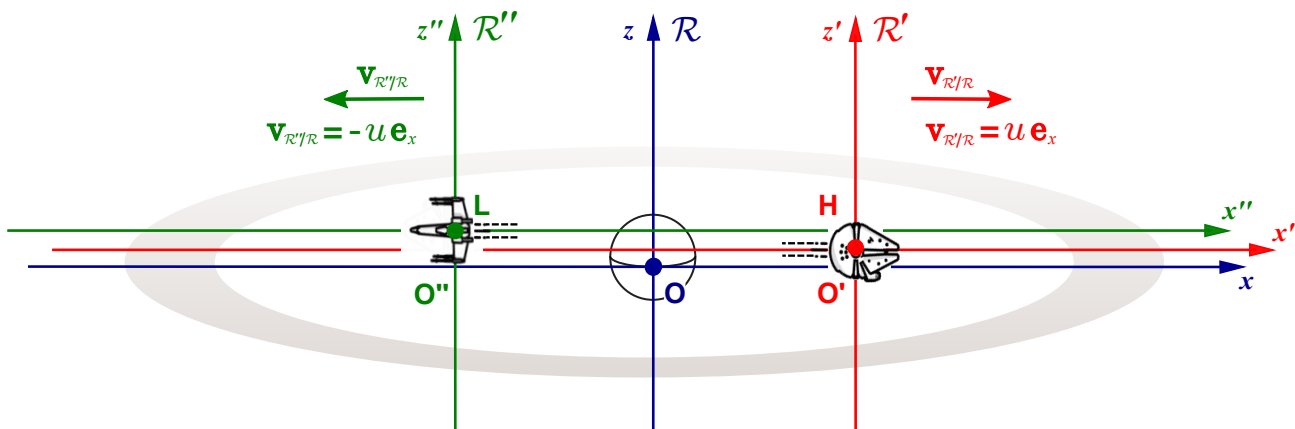


FIGURE 1 – Schéma de la situation : en bleu, les axes du référentiel  $\mathcal{R}$ , solidaire de la base rebelle sur la planète; l’origine du repère de  $\mathcal{R}$  est choisie sur la base. En rouge, les axes du référentiel  $\mathcal{R}'$ , solidaire du vaisseau de Han (H) : l’origine  $O'$  est choisie sur le Faucon Millenium en H. En vert, les axes du référentiel  $\mathcal{R}''$  du vaisseau de Luke (L). Le référentiel  $\mathcal{R}'$  est en translation uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$  à la vitesse  $\mathbf{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \mathbf{u}_H = +u \mathbf{e}_x$ , tandis que le référentiel  $\mathcal{R}''$  est en translation uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$  à la vitesse  $\mathbf{v}_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}} = \mathbf{u}_L = -u \mathbf{e}_x$ . Les deux vaisseaux ont quitté la base à  $t = t' = t'' = 0$ , et se déplacent à la même vitesse  $u$  mais dans des directions opposées : leurs trajectoires sont manifestement symétriques par rapport à l’origine  $O$  du référentiel  $\mathcal{R}$ . (Les axes  $Ox$ ,  $O'x'$  et  $O''x''$  se confondent : ils sont séparés sur le schéma pour des raisons de lisibilité.)

**1 pt** 2.4 — Dans le référentiel de la planète, à quel instant  $t_H$  Han atteint-il l’anneau planétaire ? Quelle est alors sa position  $x$  ? On notera  $A_H$  l’événement correspondant.

Dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , Han est parti à  $t = 0$  de la base en  $x = 0$  ; il se déplace à la vitesse  $u_H = +u$  selon  $\mathbf{e}_x$  : il atteint donc l’anneau planétaire à  $t_H = R_A/u$ , et sa position est alors  $x_H = +R_A$ . Les coordonnées de l’événement correspondant  $A_H$  sont ainsi  $(t_H = +R_A/u, x_H = +R_A)$ .

Numériquement, cela donne :  $x_H = 9 \times 10^8 \text{ m}$ ,  $t_H \approx 5 \text{ s}$ .

**2 pts** 2.5 — Donnez les coordonnées de l’événement  $A_H$  dans le référentiel de Han, et dans celui de Luke.

Pour un événement donné, connaissant ses coordonnées  $(ct, x, y, z)$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  de la base, on obtient ses coordonnées  $(ct', x', y', z')$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  de Han par la transformation de Lorentz, qui prend ici la forme suivante (avec  $\mathbf{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \mathbf{u}_H = +u \mathbf{e}_x$ ) :

$$\begin{cases} ct' = \gamma(u) \left( ct - \frac{ux}{c} \right) & \text{soit } t' = \gamma(u) \left( t - \frac{ux}{c^2} \right) \\ x' = \gamma(u) (x - ut) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

De la même manière, on obtient les coordonnées  $(ct'', x'', y'', z'')$  dans le référentiel  $\mathcal{R}''$  par la transformation de Lorentz entre  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}''$ , avec  $\mathbf{v}_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}} = \mathbf{u}_L = -u \mathbf{e}_x$  :

$$\begin{cases} ct'' = \gamma(u) \left( ct + \frac{ux}{c} \right) & \text{soit } t'' = \gamma(u) \left( t + \frac{ux}{c^2} \right) \\ x'' = \gamma(u) (x + ut) \\ y'' = y \\ z'' = z \end{cases}$$

Pour l'événement  $A_H$ , on trouve ainsi, dans  $\mathcal{R}'$  :

$$t'_H = t'(A_H) = \gamma(u) \left[ t_H - \frac{ux_H}{c^2} \right] = \gamma(u) \frac{R_A}{u} \left[ 1 - \frac{u^2}{c^2} \right] = \frac{1}{\gamma(u)} \frac{R_A}{u}$$

$$x'_H = x'(A_H) = \gamma(u) [x_H - ut_H] = \gamma(u) \left[ R_A - \frac{uR_A}{u} \right] = 0.$$

on a évidemment  $x'_H = 0$  puisque l'événement  $A_H$  se produit à la position de Han dans son propre référentiel  $\mathcal{R}'$ .

De la même manière, on obtient les coordonnées de  $A_H$  dans le référentiel  $\mathcal{R}''$  de Luke :

$$t''_H = t''(A_H) = \gamma(u) \left[ t_H + \frac{ux_H}{c^2} \right] = \gamma(u) \left[ 1 + \frac{u^2}{c^2} \right] \frac{R_A}{u}$$

$$x''_H = x''(A_H) = \gamma(u) [x_H + ut_H] = \gamma(u) \left[ R_A + \frac{uR_A}{u} \right] = 2\gamma(u)R_A.$$

Numériquement, on obtient :

$$t'_H \approx 4 \text{ s} \quad x'_H = 0 \text{ m} \quad t''_H \approx 8.5 \text{ s} \quad x''_H = 22.5 \times 10^8 \text{ m}.$$

**1 pt** 2.6 — Connaissant sa propre vitesse par rapport à la base, que vaut pour Han le rayon de l'anneau planétaire ?

Han atteint l'anneau planétaire à l'instant  $t'_H = t'(A_H) = (1/\gamma(u))(R_A/u)$ . S'il connaît par ailleurs sa vitesse  $u_H = u$  par rapport à  $\mathcal{R}$ , il peut en déduire que le rayon de l'anneau planétaire vaut, dans son référentiel  $\mathcal{R}'$ ,

$$\Delta x' = u \times t'_H = \frac{R_A}{\gamma(u)} < R_A.$$

L'anneau paraît plus petit dans  $\mathcal{R}'$  : c'est l'effet relativiste de contraction des distances dans la direction du mouvement relatif (*contraction de FitzGerald-Lorentz*).

**2 pts** 2.7 — Le vaisseau de Luke atteint lui aussi l'anneau planétaire : on note  $A_L$  cet événement. Quelles sont ses coordonnées  $(t, x)$  dans  $\mathcal{R}$ ? Quelles sont les coordonnées  $(t', x')$  du même événement dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  de Han ?

Dans  $\mathcal{R}$ , le vaisseau de Luke se déplace à la vitesse  $\mathbf{u}_L = -u \mathbf{e}_x$ . Il parcourt donc le rayon  $R_A$  de l'anneau (vers les  $x$  négatifs) en un temps  $\Delta t = R_A/u$ , et atteint l'anneau planétaire à  $t_L = +R_A/u$ ; sa position est alors  $x_L = -R_A$ . Dans  $\mathcal{R}$ , les coordonnées de l'événement  $A_L$  sont donc  $(t_L = R_A/u, x_L = -R_A)$ .

En appliquant la transformation de Lorentz ( $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ ), on obtient les coordonnées  $(t'_L, x'_L)$  du même événement dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  de Han :

$$t'_L = t'(A_L) = \gamma(u) \left[ t_L - \frac{ux_L}{c^2} \right] = \gamma(u) \frac{R_A}{u} \left[ 1 + \frac{u^2}{c^2} \right] = \gamma(u) \left[ 1 + \frac{u^2}{c^2} \right] \frac{R_A}{u}$$

$$x'_L = x'(A_L) = \gamma(u) [x_L - ut_L] = \gamma(u) \left[ -R_A - \frac{uR_A}{u} \right] = -2\gamma(u)R_A.$$

Numériquement, on obtient :

$$t'_L \approx 5 \text{ s} \quad x'_L = -9 \times 10^8 \text{ m} \quad t_L \approx 8.5 \text{ s} \quad x_L = -22.5 \times 10^8 \text{ m}.$$

**1 pt** 2.8 — Discutez la simultanéité des événements  $A_L$  et  $A_H$  dans les référentiels de la base rebelle ( $\mathcal{R}$ ) et de Han ( $\mathcal{R}'$ ).

Les coordonnées des événements  $A_H$  et  $A_L$  dans les référentiels  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{R}'$  et  $\mathcal{R}''$  sont regroupées dans la table 1.

	$A_H$	$A_L$
$\mathcal{R}$ (Base)	$x_H = x(A_H) = R_A$ $t_H = t(A_H) = \frac{R_A}{u}$	$x_L = x(A_L) = -R_A$ $t_L = t(A_L) = \frac{R_A}{u}$
$\mathcal{R}'$ (Han)	$x'_H = x'(A_H) = 0$ $t'_H = t'(A_H) = \frac{1}{\gamma(u)} \frac{R_A}{u} < \frac{R_A}{u}$	$x'_L = x'(A_L) = -2\gamma(u)R_A$ $t'_L = t'(A_L) = \gamma(u) \left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right) \frac{R_A}{u} > \frac{R_A}{u}$
$\mathcal{R}''$ (Luke)	$x''_H = x''(A_H) = 2\gamma(u)R_A$ $t''_H = t''(A_H) = \gamma(u) \left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right) \frac{R_A}{u} > \frac{R_A}{u}$	$x''_L = x''(A_L) = 0$ $t''_L = t''(A_L) = \frac{1}{\gamma(u)} \frac{R_A}{u} < \frac{R_A}{u}$

TABLE 1 – Coordonnées des événements  $A_H$  et  $A_L$  établies dans les trois référentiels,  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{R}'$  et  $\mathcal{R}''$ .

Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  de la base, les situations de Han et de Luke sont symétriques, et on a  $t_H = t_L$  : les événements  $A_H$  et  $A_L$  y sont simultanés.

Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  de Han, on a

$$t'_H = t'(A_H) = \gamma(u) \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \frac{R_A}{u} = \frac{1}{\gamma(u)} \frac{R_A}{u} < \frac{R_A}{u}$$

$$t'_L = t'(A_L) = \gamma(u) \left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right) \frac{R_A}{u} > \frac{R_A}{u}$$

par conséquent,  $t'_H < R_A/u < t'_L$  : dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , l'événement  $A_H$  (Han atteint l'anneau planétaire) se produit donc **avant** l'événement  $A_L$  (Luke atteint l'anneau planétaire). On vérifie ainsi que la simultanéité entre événements est relative, et dépend du référentiel.

**1 pt** 2.9 — Dans quel ordre se produisent ces deux événements dans le référentiel de Luke ?

Dans le référentiel  $\mathcal{R}''$  de Luke, la situation est symétrique, et on a :

$$t''_H = t''(A_H) = \gamma(u) \left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right) \frac{R_A}{u} > \frac{R_A}{u}$$

$$t''_L = t''(A_L) = \gamma(u) \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \frac{R_A}{u} = \frac{1}{\gamma(u)} \frac{R_A}{u} < \frac{R_A}{u}.$$

Cette fois,  $t''_L < R_A/u < t''_H$  : dans le référentiel  $\mathcal{R}''$ , l'événement  $A_H$  se produit cette fois donc **après** l'événement  $A_L$ . L'ordre des événements  $A_H$  et  $A_L$  dans le référentiel de Luke est l'inverse de celui observé dans le référentiel de Han.

**1 pt 2.10** — Montrez algébriquement que les événements  $A_L$  et  $A_H$  forment un intervalle d'espace-temps de *genre espace*. Peut-il y avoir un lien de causalité entre ces deux événements ?

Pour déterminer la nature de l'intervalle d'espace-temps  $\widetilde{A_H A_L}$ , il faut déterminer le signe de sa pseudo-norme carrée  $\Delta s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$ , qui est un invariant de Lorentz. Si on l'exprime en fonction des coordonnées dans  $\mathcal{R}$ , on obtient :

$$\Delta_{A_H \rightarrow A_L} s^2 = c^2 [t_L - t_H]^2 - [x_L - x_H]^2 = 0 - (-2R_A)^2 = -4R_A^2 < 0.$$

On peut aussi exprimer la pseudo-norme carrée de l'intervalle d'espace-temps dans  $\mathcal{R}'$  ou dans  $\mathcal{R}''$  (les expressions sont similaires) :

$$\begin{aligned} \Delta_{A_H \rightarrow A_L} s^2 &= c^2 [t'_L - t'_H]^2 - [x'_L - x'_H]^2 \\ &= c^2 \left[ \gamma(u) \left( 1 + \frac{u^2}{c^2} \right) \frac{R_A}{u} - \frac{1}{\gamma(u)} \frac{R_A}{u} \right]^2 - [-2\gamma(u)R_A]^2 \\ &= c^2 \left[ \gamma(u) \left( 1 + \frac{u^2}{c^2} \right) \frac{R_A}{u} - \gamma(u) \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \frac{R_A}{u} \right]^2 - [-2\gamma(u)R_A]^2 \\ &= c^2 \left[ 2\gamma(u) \frac{u}{c^2} R_A \right]^2 - 4\gamma^2(u) R_A^2 = 4\gamma^2(u) R_A^2 \left[ \frac{u^2}{c^2} - 1 \right] = -4R_A^2 < 0. \end{aligned}$$

La pseudo-norme carrée de l'intervalle d'espace-temps étant négative, l'intervalle est de *genre espace* : il ne peut y avoir de relation causale entre les événements  $A_H$  et  $A_L$  ; de plus, l'ordre temporel de ces événements dépend du référentiel considéré, ce qu'on constate ici dans les référentiels  $\mathcal{R}'$  et  $\mathcal{R}''$ .

À l'instant  $t_0 > 0$ , la base rebelle émet un signal électromagnétique dans toutes les directions (événement  $E$ ). On note respectivement  $R_H$  et  $R_L$  les événements de réception de ce signal par Han et par Luke.

**4.5 pts 2.11** — Quelles sont les coordonnées spatio-temporelles des événements  $E$ ,  $R_H$  et  $R_L$  dans le référentiel de la base ? dans celui de Han ? dans celui de Luke ? *On pourra profiter ici des symétries évidentes du problème.*

Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  de la base, de manière immédiate, l'événement d'émission se produit à  $t(E) = t_0 > 0$  en  $x(E) = 0$ .

En appliquant la transformation de Lorentz, on obtient les coordonnées de l'événement  $E$  dans  $\mathcal{R}'$  :

$$t'(E) = \gamma(u)(t(E) - 0) = \gamma(u)t(E) = \gamma(u)t_0 \quad x'(E) = \gamma(u)(0 - ut(E)) = -\gamma(u)ut_E = -\gamma(u)ut_0.$$

De même, dans  $\mathcal{R}''$ , les coordonnées de l'événement  $E$  d'émission du signal sont :

$$t''(E) = \gamma(u)(t(E) + 0) = \gamma(u)t(E) = \gamma(u)t_0 \quad x''(E) = \gamma(u)(0 + ut(E)) = +\gamma(u)ut_E = +\gamma(u)ut_0.$$

Cherchons maintenant les coordonnées  $(t(R_H), x(R_H))$  dans  $\mathcal{R}$  de l'événement de réception du signal par Han. Le signal électromagnétique est émis à  $t(E) = t_0$  (Han est alors à la position  $x = ut_0$ ) et parvient à Han à l'instant  $t(R_H)$  lorsque Han est à la position  $x = ut(R_H)$ . Le signal se propageant à la vitesse  $c$ , on a nécessairement, à l'instant de la réception du signal par Han :

$$ut(R_H) = c[t(R_H) - t(E)].$$



On en déduit  $t(R_H)$  :

$$ct(R_H) - ct(E) = ut(R_H) \quad \text{d'où} \quad (c - u)t(R_H) = ct(E) = ct_0 \quad \text{i.e.} \quad t(R_H) = \frac{c}{c - u} t_0 = \frac{1}{1 - \frac{u}{c}} t_0.$$

Et par conséquent,

$$x(R_H) = ut(R_H) = \frac{uc}{c - u} t_0 = \frac{u}{1 - \frac{u}{c}} t_0.$$

Par symétrie (les positions de Han et de Luke sont symétriques par rapport à la base, et le signal se propage à la même vitesse dans les 2 directions),

$$t(R_L) = \frac{c}{c - u} t_0 = \frac{1}{1 - \frac{u}{c}} t_0 \quad \text{et} \quad x(R_L) = -ut(R_L) = -\frac{uc}{c - u} t_0 = -\frac{u}{1 - \frac{u}{c}} t_0.$$

En procédant comme précédemment, on obtient les coordonnées des événements  $E$ ,  $R_H$  et  $R_L$  dans les référentiels de Han ( $\mathcal{R}'$ ) et de Luke ( $\mathcal{R}''$ ), en appliquant les équations des transformations de Lorentz aux coordonnées des mêmes événements dans  $\mathcal{R}$ .

Les coordonnées des événements  $E$  (émission du signal),  $R_H$  (réception du signal par Han) et  $R_L$  (réception par Luke) dans les référentiels  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{R}'$  et  $\mathcal{R}''$  sont regroupées dans la table 2.

**1 pt** 2.12 — Discutez l'ordre temporel des événements  $E$ ,  $R_H$  et  $R_L$  dans les 3 référentiels considérés.

Le signal étant émis dans toutes les directions, et les trajectoires de Han et de Luke étant symétriques dans le référentiel  $\mathcal{R}$  de la base, les événements de réception du signal par Han et par Luke sont simultanés dans  $\mathcal{R}$ , et on a :

$$t(E) = t_0 < t(R_L) = t(R_H) = \frac{1}{1 - \frac{u}{c}} t_0.$$

Comme précédemment, l'ordre des événements  $R_H$  et  $R_L$  s'inverse entre les référentiel  $\mathcal{R}'$  de Han et  $\mathcal{R}''$  de Luke. En effet, dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  (Han), on aura :

$$t'(R_H) = \gamma(u) \frac{1 - \frac{u^2}{c^2}}{1 - \frac{u}{c}} t_0 < \gamma(u) \frac{1 + \frac{u^2}{c^2}}{1 - \frac{u}{c}} t_0 = t'(R_L) \quad \text{i.e.} \quad t'(R_H) < t'(R_L)$$

et Han y reçoit le signal **avant** Luke.

Dans le référentiel  $\mathcal{R}''$  (Luke), on a au contraire :

$$t''(R_L) = \gamma(u) \frac{1 - \frac{u^2}{c^2}}{1 - \frac{u}{c}} t_0 < \gamma(u) \frac{1 + \frac{u^2}{c^2}}{1 - \frac{u}{c}} t_0 = t''(R_H) \quad \text{i.e.} \quad t''(R_L) < t''(R_H)$$

autrement dit, Luke y reçoit le signal **avant** Han.

On peut vérifier que l'intervalle d'espace-temps entre les événements  $R_H$  et  $R_L$  est bien de *genre espace* (en utilisant par exemple les coordonnées de ces deux événements exprimées dans  $\mathcal{R}$ , où

	$E$ (émission)	$R_H$ (réception par Han)	$R_L$ (réception par Luke)
$\mathcal{R}$ (Base)	$x(E) = 0$ $t(E) = t_0$	$x(R_H) = \frac{u}{1 - \frac{u}{c}} t_0$ $t(R_H) = \frac{1}{1 - \frac{u}{c}} t_0$	$x(R_L) = -\frac{u}{1 - \frac{u}{c}} t_0$ $t(R_L) = \frac{1}{1 - \frac{u}{c}} t_0$
$\mathcal{R}'$ (Han)	$x'(E) = -\gamma(u)u t_0$ $t'(E) = \gamma(u) t_0$	$x'(R_H) = 0$ $t'(R_H) = \gamma(u) \frac{1 - \frac{u^2}{c^2}}{1 - \frac{u}{c}} t_0$	$x'(R_L) = -\frac{2\gamma(u)u}{1 - \frac{u}{c}} t_0$ $t'(R_L) = \gamma(u) \frac{1 + \frac{u^2}{c^2}}{1 - \frac{u}{c}} t_0$
$\mathcal{R}''$ (Luke)	$x''(E) = +\gamma(u)u t_0$ $t''(E) = \gamma(u) t_0$	$x''(R_H) = \frac{2\gamma(u)u}{1 - \frac{u}{c}} t_0$ $t''(R_H) = \gamma(u) \frac{1 + \frac{u^2}{c^2}}{1 - \frac{u}{c}} t_0$	$x''(R_L) = 0$ $t''(R_L) = \gamma(u) \frac{1 - \frac{u^2}{c^2}}{1 - \frac{u}{c}} t_0$

TABLE 2 – Coordonnées des événements  $E$  (émission du signal à la base),  $R_H$  (réception du signal par Han) et  $R_L$  (réception du signal par Luke) établies dans les trois référentiels  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{R}'$  et  $\mathcal{R}''$ .

leurs expressions sont simples) :

$$\begin{aligned} \Delta_{R_H \rightarrow R_L}^2 &= c^2 [t(R_L) - t(R_H)]^2 - [x(R_L) - x(R_H)]^2 \\ &= c^2 \left[ \frac{1}{1 - \frac{u}{c}} t_0 - \frac{1}{1 - \frac{u}{c}} t_0 \right]^2 - \left[ -\frac{u}{1 - \frac{u}{c}} t_0 - \frac{u}{1 - \frac{u}{c}} t_0 \right]^2 = -\frac{u^2 t_0^2}{\left[1 - \frac{u}{c}\right]^2} < 0. \end{aligned}$$

Comme  $\Delta s^2 < 0$ , l'intervalle est de genre espace : l'ordre des deux événements dépend du référentiel considéré (ce qu'on vérifie bien ici), et aucun lien de causalité ne peut exister entre ces deux événements.

**5 pts** 2.13 — Représentez l'ensemble de ces péripéties sur un diagramme d'espace-temps, de Minkowski ou de Loedel, selon votre préférence.

Pour obtenir une figure lisible, consacrez une page entière à ce diagramme. Afin d'alléger le diagramme, vous ne représenterez que les axes des référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ . Indiquez sur le diagramme la ligne d'univers de la base rebelle, de Luke et de Han; le tube d'univers de l'anneau planétaire; les lignes d'univers des signaux électromagnétiques, ainsi que l'ensemble des événements considérés. Dessinez aussi les projections des événements sur les axes des référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ , afin de mettre en évidence l'ordre temporel des événements dans ces deux référentiels.

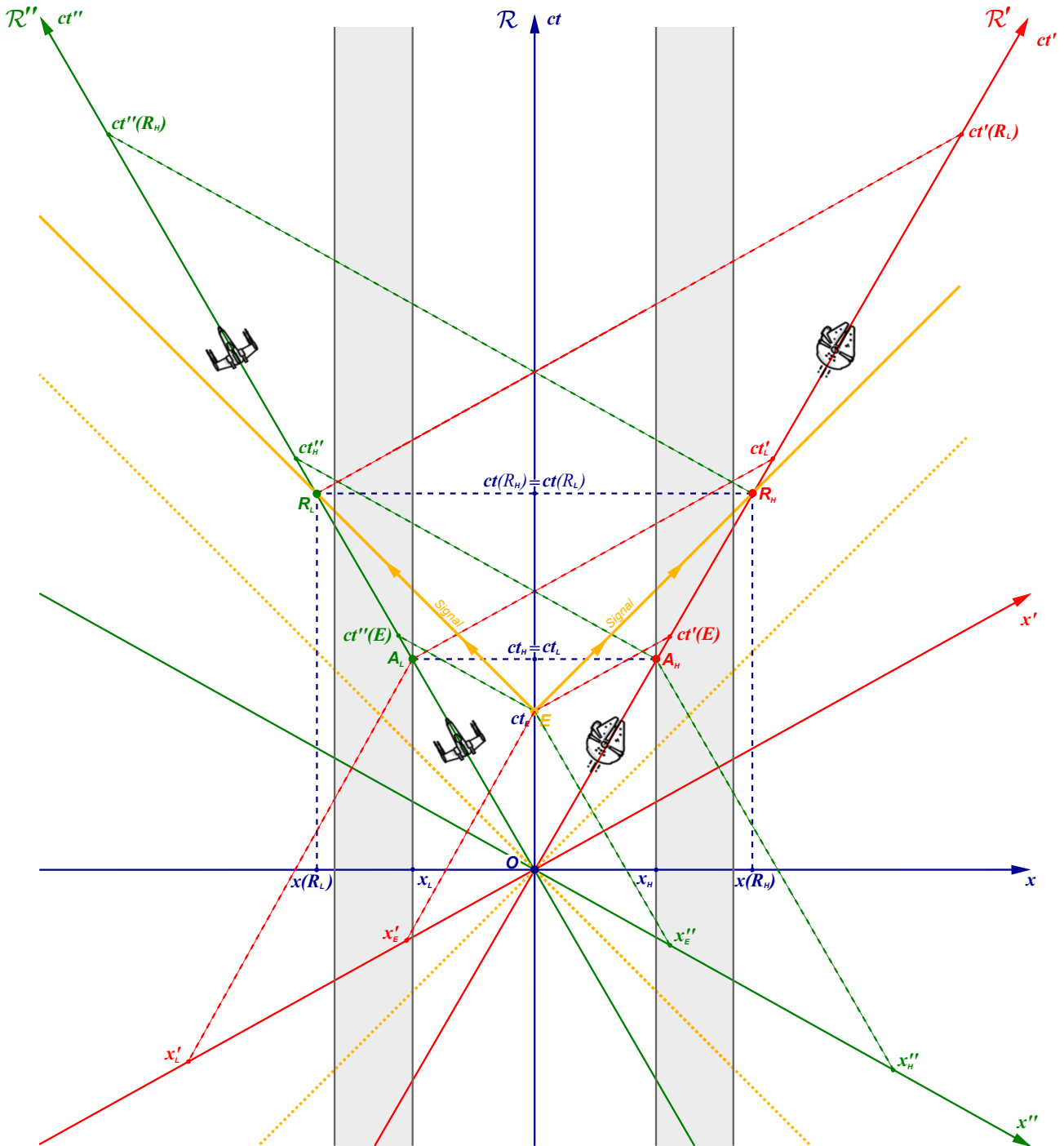
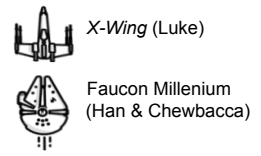


FIGURE 2 – Diagramme d’espace-temps (diagramme de Minkowski). Lignes d’Univers de la base de départ (référentiel  $\mathcal{R}$ , en bleu), de Han (référentiel  $\mathcal{R}'$ , en rouge) et de Luke (référentiel  $\mathcal{R}''$ , en vert). Le tube d’Univers de l’anneau planétaire dans le plan  $(Oxz)$  est aussi représenté (en grisé). L’ordre des événements  $A_H$  et  $A_L$  dépend du référentiel d’observation, ainsi que l’ordre des événements  $R_H$  et  $R_L$  de réception du signal par Han et Luke.

Voir figure 2.

**Applications numériques :**

$$c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad u = 3c/5 \quad R_A = 900\,000 \text{ km}.$$

**3. Équilibre d’un pendule sur un plateau tournant**

**[24 pts]**

*Vous traiterez cet exercice dans le cadre de la mécanique classique.*

On souhaite étudier l’équilibre d’un pendule simple placé sur un plateau tournant. Une bille de plomb, suspendue à un fil, lui-même accroché à une potence est représenté figure 3. Le plateau est centré en O et peut tourner autour d’un axe de rotation vertical. Au repos, la bille de masse  $m$ , représentée par le point M, est suspendue au bout du fil de longueur  $\ell = O'M$  accroché au point O'. On note R la distance entre le centre du plateau O et le point N, situé à la verticale du point O' et de la bille lorsque celle-ci est au repos. La potence à laquelle le fil est accroché est solidement fixée au plateau au point Q, et orientée de manière à ce que les points O, Q, O', M et N soient tous dans le même plan, lorsque le plateau est immobile.

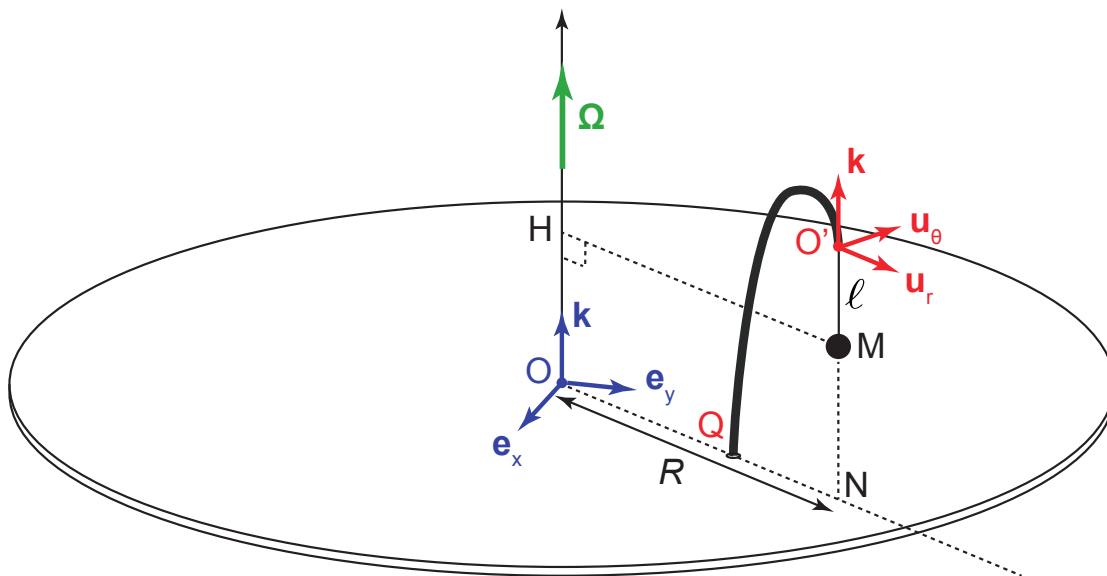


FIGURE 3 – Pendule simple suspendu au point O' à une potence elle-même placée sur un plateau tournant. La configuration représentée correspond à une situation où le plateau est immobile.

Le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$ , muni d’une base orthonormée  $(O, e_x, e_y, k)$  est supposé galiléen. On considère un second référentiel  $\mathcal{R}'$ , lié au plateau (et donc dans lequel le plateau est immobile), pourvu d’une base orthonormée  $(O', u_r, u_\theta, k)$  solidaire du plateau. Le plateau peut tourner autour d’un axe de rotation vertical, de sorte que le vecteur rotation angulaire s’écrit  $\Omega = \Omega k$ .

**Les expressions de l’accélération d’entraînement et de l’accélération de Coriolis sont rappelées à la fin du présent exercice.**

**2 pts** 3.1 — Le plateau est mis en rotation de sorte que sa vitesse angulaire de rotation  $\Omega$  augmente progressivement. Qu’observerait une personne immobile dans  $\mathcal{R}'$ ? La bille de plomb reste-t-elle dans le plan  $(OQO')$ ? Si non, dans quelle direction est-elle entraînée? **Attention, vous répondrez à cette première question de manière qualitative, sans calcul.**

Pour comparaison, on peut se ramener au cas d'un pendule simple qui serait suspendu dans une rame de métro. Lorsque le métro accélère, la direction selon laquelle agit la force d'inertie d'entraînement est opposée au sens de l'accélération de la rame. Dans le cas de notre expérience, la bille va être déviée dans le sens opposé à la direction de la vitesse tangentielle, c'est-à-dire dans la direction  $-\mathbf{u}_\theta$ . La force centrifuge va progressivement entrer en action, ce qui va en plus déporter la bille vers l'extérieur, c'est-à-dire dans la direction  $\mathbf{u}_r$ . La bille ne reste donc pas dans le plan  $(\mathbf{OQO}')$ .

Dans la suite de l'exercice, on considère que le plateau a atteint sa vitesse de rotation nominale, est que celle-ci est constante :  $d\boldsymbol{\Omega}/dt = \mathbf{0}$ . La bille de plomb est donc au repos dans le référentiel tournant  $\mathcal{R}'$ . L'angle entre le fil (vecteur  $\mathbf{O}'\mathbf{M}$ ) et l'axe vertical (vecteur  $\mathbf{k}$ ) est noté  $\alpha$ .

**1 pt** 3.2 — En appliquant la relation de Varignon, montrez que

$$\left(\frac{d^2\mathbf{OO}'}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}} = \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{OO}').$$

On applique une première fois la relation de Varignon au vecteur  $\mathbf{OO}'$  :

$$\left(\frac{d\mathbf{OO}'}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\mathbf{OO}'}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} + \boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{OO}'.$$

Comme le vecteur  $\mathbf{OO}'$  est constant dans le référentiel tournant, et que de plus  $\boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \equiv \boldsymbol{\Omega}$ , on a

$$\left(\frac{d\mathbf{OO}'}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} = \mathbf{0},$$

et par conséquent,

$$\left(\frac{d\mathbf{OO}'}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{OO}'.$$

En appliquant à nouveau la relation de Varignon, le résultat attendu s'obtient immédiatement :

$$\left(\frac{d^2\mathbf{OO}'}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}} = \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{OO}').$$

**1 pt** 3.3 — Déduisez-en l'expression de l'accélération d'inertie d'entraînement de la bille de plomb en fonction du vecteur  $\mathbf{OM}$ .

Compte-tenu du résultat de la question précédente, et comme  $d\boldsymbol{\Omega}/dt = \mathbf{0}$ , il vient immédiatement :

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_{ie} = \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{OO}') + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{O}'\mathbf{M}) = \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{OM}).$$

**1 pt** 3.4 — Donnez l'expression de la force d'inertie de Coriolis.

Comme la bille est au repos dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , on a immédiatement  $\mathbf{v}_{M/\mathcal{R}'} = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{a}_c = \mathbf{a}_{ic} = \mathbf{0}$  : l'accélération de Coriolis est nulle, et par conséquent la force inertielle de Coriolis l'est aussi.

**2 pts** 3.5 — Pour un observateur immobile dans  $\mathcal{R}'$ , quelles sont les forces qui s'appliquent à la bille de plomb de masse  $m$  ?

Étant en rotation par rapport au référentiel inertiel  $\mathcal{R}$ , Le référentiel  $\mathcal{R}'$  est par conséquent non galiléen. Lorsqu'on effectue le bilan des forces qui s'exercent sur la bille dans  $\mathcal{R}'$ , il faut par conséquent prendre en compte les pseudo-forces inertielles, qui se réduisent ici à la force d'inertie d'entraînement. Les forces extérieures que subit la bille sont donc :



On peut projeter sur les vecteurs de la base :

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_{ie} = \Omega \mathbf{k} \times [(\Omega \mathbf{k}) \times (HM \mathbf{u}_r)] = \Omega^2 HM \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{u}_r).$$

Comme  $\mathbf{k} \times \mathbf{u}_r = \mathbf{u}_\theta$  et  $\mathbf{k} \times \mathbf{u}_\theta = -\mathbf{u}_r$ , il reste

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_{ie} = -\Omega^2 HM \mathbf{u}_r \quad \text{d'où} \quad \mathbf{F}_e = \mathbf{F}_{ie} = -m \mathbf{a}_e = m \Omega^2 HM \mathbf{u}_r = m \Omega^2 (R + \ell \sin \alpha) \mathbf{u}_r.$$

La force d'inertie d'entraînement est donc purement radiale, dirigée vers l'extérieur. On la désigne en général comme la "force centrifuge".

**2.5 pts 3.9** — Appliquez la seconde loi de Newton dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  non galiléen afin d'en déduire la relation vectorielle existant entre les différentes forces. Complétez la figure obtenue à la question 6 pour ajouter les forces qui s'exercent sur la bille de plomb. **Sur votre schéma, vous prendrez soin de respecter la relation vectorielle existante entre les différentes forces représentées.**

En notant  $\mathbf{a}'$  le vecteur accélération de la bille de masse  $m$  dans  $\mathcal{R}'$ , la seconde loi de Newton (généralisée pour le cas d'un référentiel non galiléen) s'écrit ici :

$$m \mathbf{a}' = \mathbf{P} + \mathbf{T} + \mathbf{F}_e.$$

Comme la bille est immobile dans le référentiel tournant, l'expression précédente devient simplement (équilibre dans  $\mathcal{R}'$ ) :

$$\mathbf{P} + \mathbf{T} + \mathbf{F}_e = \mathbf{0}.$$

**2 pts 3.10** — En déduire le système d'équations vérifiées par  $\alpha$  en fonction des autres grandeurs du problème.

Toutes les forces mises en jeu sont contenues dans le plan  $(O', \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{k})$ . On a donc deux projections à effectuer, l'une selon  $\mathbf{u}_r$  et l'autre sur  $\mathbf{k}$  :

$$\begin{cases} -T \sin \alpha + m \Omega^2 (R + \ell \sin \alpha) = 0 \\ T \cos \alpha - m g = 0. \end{cases}$$

**1 pt 3.11** — Dans le cas le plus général, résoudre ce système d'équations sans faire d'approximation pour exprimer l'angle  $\alpha$  donne des expressions analytiques assez complexes. Dans un premier temps, on fera l'hypothèse que l'angle  $\alpha$  est petit. Sous cette hypothèse, quelle est l'expression de  $\alpha$  (en radians) en fonction des autres données du problème? Que remarque-t-on qui peut sembler contre-intuitif?

Lorsque l'angle  $\alpha$  est petit,  $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\cos \alpha \approx 1$ , et il reste  $T \approx m g$ , soit

$$\alpha \approx \frac{\Omega^2 R}{g - \Omega^2 \ell}.$$

On constate alors que pour de petits angles  $\alpha$ , l'angle  $\alpha$  ne dépend pas de la masse de la bille de plomb.

**3 pts 3.12** — Il existe un autre cas pour lequel le système d'équations donnant  $\alpha$  possède des solutions simples : lorsque  $R = 0$ , c'est à dire lorsque le point d'accroche du pendule appartient à l'axe de rotation du plateau. Résolvez le système d'équations dans ce cas. **Pour ce cas particulier, vous traiterez à part le cas  $\alpha = 0$ ; vous montrerez aussi que la solution  $\alpha > 0$  n'existe que si une condition sur  $\Omega$  est vérifiée, condition que vous préciserez.**

La première équation devient dans ce cas :

$$\sin \alpha (m \Omega^2 \ell - T) = 0$$

Il faut alors considérer deux cas :

- soit  $\sin \alpha = 0$ , auquel cas l'angle  $\alpha$  est nul (on ne conserve que la solution physique, puisque intuitivement,  $\alpha$  ne peut pas dépasser  $90^\circ$ ). Cette solution correspond au cas où le pendule reste vertical, confondu avec l'axe de rotation. Dans ce cas, la deuxième équation donne simplement  $T = mg$  : la force de tension du fil compense exactement le poids de la bille ;
- soit  $\sin \alpha \neq 0$  : dans ce cas, on peut diviser la première équation par  $\sin \alpha$ , ce qui donne :

$$-T + m \Omega^2 \ell = 0 \quad \text{i.e.} \quad T = m \Omega^2 \ell$$

et, d'autre part,

$$T \cos \alpha = mg \quad \text{d'où on déduit} \quad \cos \alpha = \frac{mg}{T} = \frac{mg}{m \Omega^2 \ell} = \frac{g}{\Omega^2 \ell}.$$

Cette solution n'est possible que si  $\cos \alpha = g/(\Omega^2 \ell) \leq 1$ , sans quoi l'angle  $\alpha$  n'est pas défini. Pour que cette seconde solution existe, il faut par conséquent que

$$\cos \alpha = \frac{g}{\Omega^2 \ell} \leq 1 \quad \text{soit} \quad \Omega^2 \geq \frac{g}{\ell} \quad \text{i.e.} \quad \Omega \geq \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Cette solution n'existe donc que si la vitesse angulaire  $\Omega$  de rotation du plateau est supérieure à une vitesse seuil  $\Omega_0 = \sqrt{g/\ell}$ .

On est ici en présence d'un phénomène de *bifurcation* : pour  $\Omega < \Omega_0 = \sqrt{g/\ell}$ , seule la solution  $\alpha = 0$  est possible et le pendule reste vertical ; pour  $\Omega \geq \Omega_0 = \sqrt{g/\ell}$ , deux solutions sont possibles :  $\alpha = 0$  (pendule vertical, équilibre instable), et  $\alpha = \arccos(g/(\Omega^2 \ell))$  (équilibre stable).

- 2 pts** **3.13** — En repartant du système général d'équations obtenu à la question 10, et cette fois sans faire d'approximation, donnez l'expression de  $\Omega$  en fonction de  $g$ ,  $R$ ,  $\ell$  et  $\alpha$ . En pratique, cette expression n'a pas d'application immédiate puisque la vitesse de rotation est imposée par l'expérimentateur. Cependant, faute de solution analytique simple, elle nous permettra de déterminer **graphiquement** une solution. Cette fonction  $\Omega(\alpha)$  est représentée sur la figure 5 (courbe rouge), pour  $R = 10$  m,  $\ell = 1$  m et  $g = 9.81$  m · s<sup>-2</sup>. Que constate-t-on lorsque  $\Omega$  augmente ?

En éliminant  $T$ , on obtient

$$\Omega = \sqrt{\frac{g \tan \alpha}{R + \ell \sin \alpha}}.$$

Lorsque  $\Omega$  augmente, on constate que l'angle  $\alpha$  augmente aussi et tend vers  $90^\circ$ , ce qui correspond bien à ce qu'on attend intuitivement.

- 2 pts** **3.14** — Par lecture du graphique, donnez la valeur de l'angle  $\alpha$  obtenu pour  $\Omega = 2$  rad · s<sup>-1</sup>. Que vaut le module de la force de tension  $T$  pour cet angle, si la masse de la bille de plomb vaut  $m = 1$  kg ?

Par lecture du graphique (fig. 6), on trouve  $\alpha \approx 77^\circ$ . Comme  $T \cos \alpha = mg$ , on trouve  $T = mg / \cos \alpha \approx 43.6$  N.



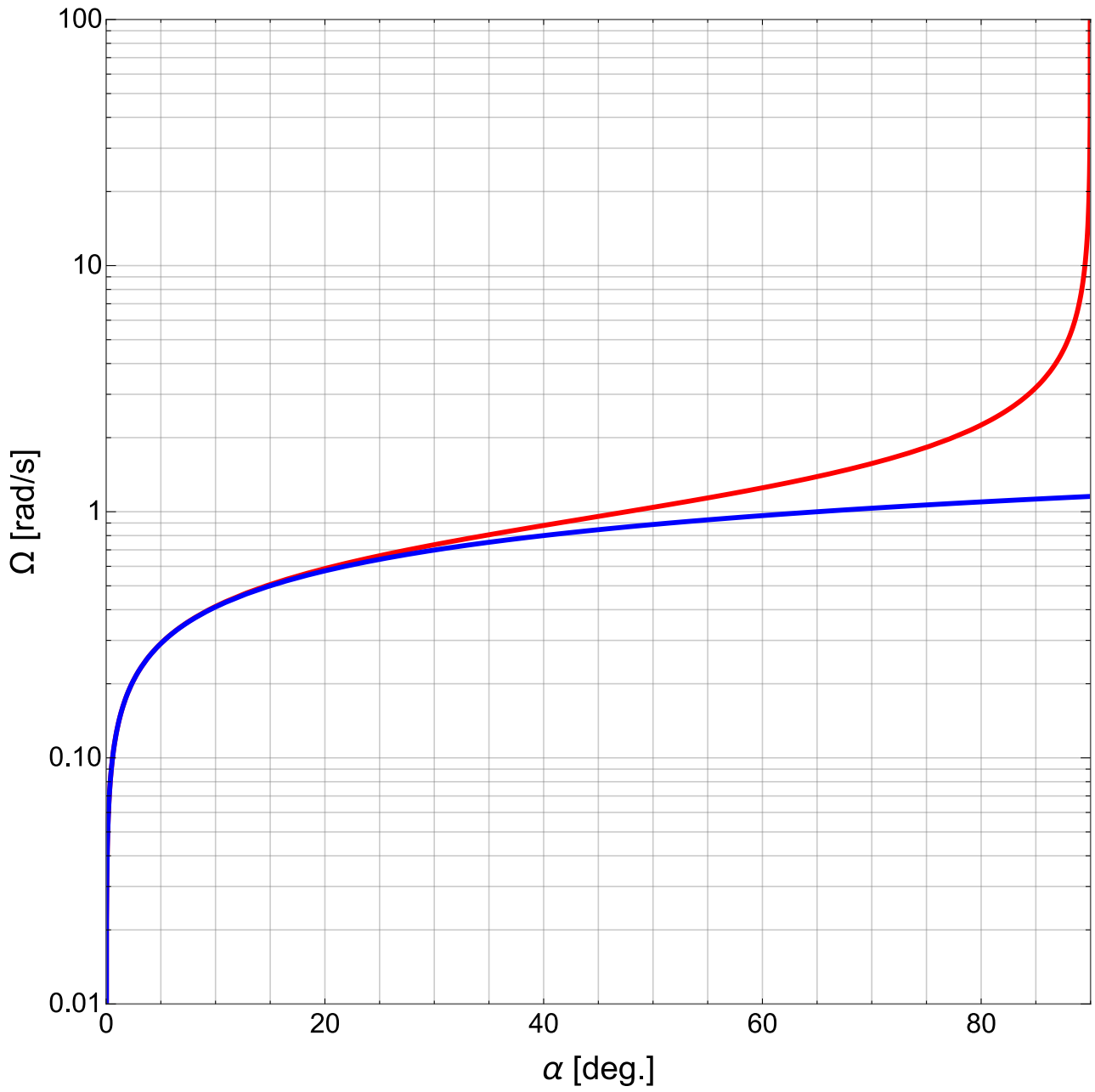


FIGURE 5 – Evolution de la vitesse angulaire de rotation  $\Omega$  en fonction de l'angle  $\alpha$  pour  $R = 10\text{ m}$ ,  $\ell = 1\text{ m}$  et  $g = 9.81\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  : en bleu pour l'expression simplifiée de la question 11 et en rouge pour l'expression de la question 13.

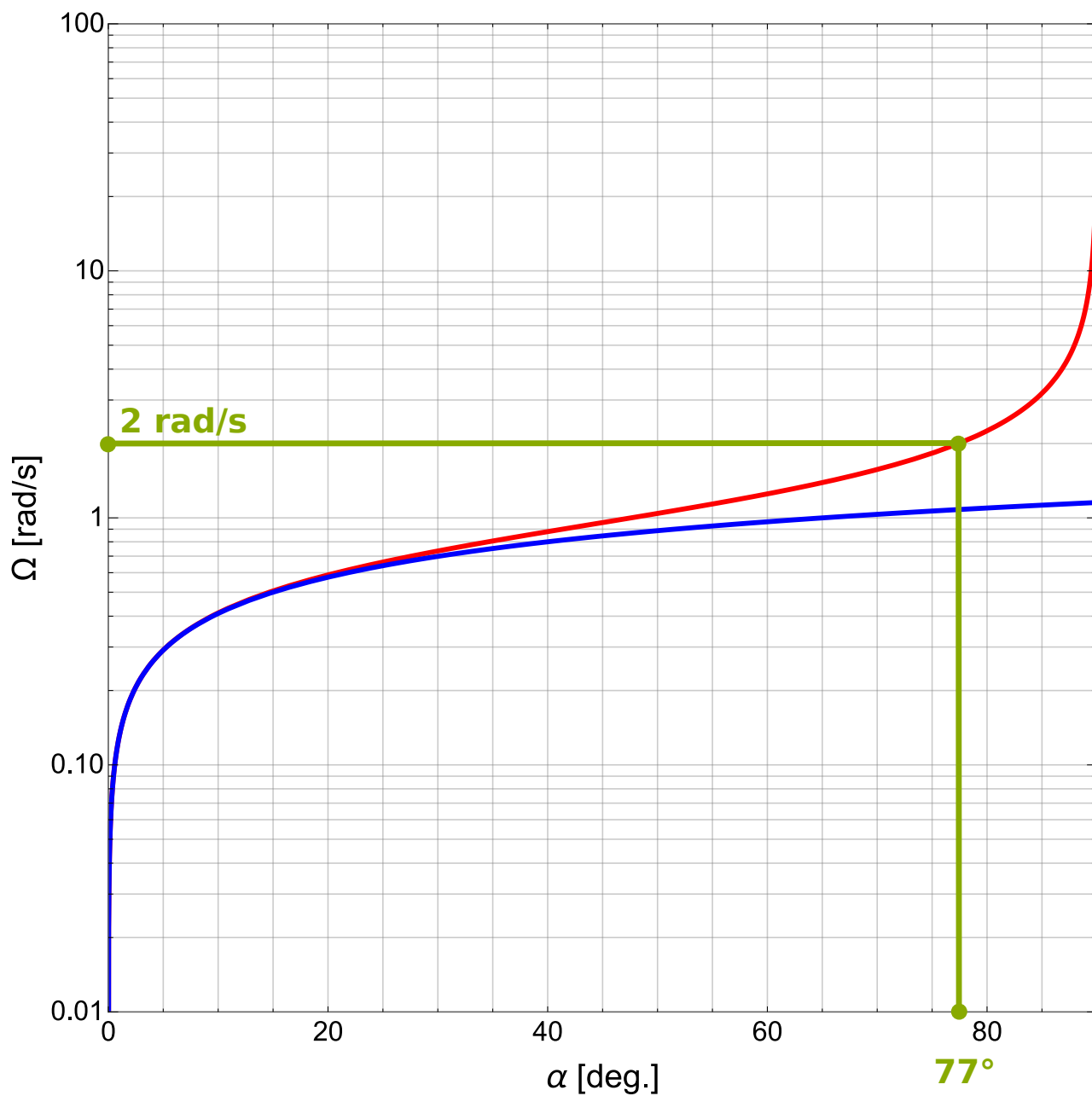


FIGURE 6 – Evolution de la vitesse angulaire de rotation  $\Omega$  en fonction de l'angle  $\alpha$  pour  $R = 10$  m,  $\ell = 1$  m et  $g = 9.81$  m  $\cdot$  s $^{-2}$  : en bleu pour l'expression simplifiée de la question 11 et en rouge pour l'expression de la question 13. On a indiqué en vert les valeurs lues pour  $\Omega = 2$  rad  $\cdot$  s $^{-1}$ .

**Rappels : transformation de la vitesse et de l'accélération entre un référentiel galiléen et un référentiel non-galiléen.** Soient deux référentiels : un premier référentiel  $\mathcal{R}$ , galiléen (ou inertiel), et un second référentiel  $\mathcal{R}'$ , animé d'un mouvement quelconque par rapport à  $\mathcal{R}$  et par conséquent non galiléen. On appelle  $O$  et  $O'$  les origines choisies dans les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ , respectivement. De plus, on note  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  le vecteur vitesse angulaire instantané de rotation du référentiel  $\mathcal{R}'$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ .

Considérons un point matériel  $M$  en mouvement quelconque, dont la position à chaque instant dans les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  est repérée par les vecteurs positions  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{OM}(t)$  et  $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{O'M}(t)$  respectivement.

Si on note  $\mathbf{a}(t)$  l'accélération de  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , et  $\mathbf{a}'(t)$  son accélération dans  $\mathcal{R}'$ , on aura,

$$\mathbf{a}(t) = \left( \frac{d^2 \mathbf{OM}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}} = \left( \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}} \quad \mathbf{a}'(t) = \left( \frac{d^2 \mathbf{O'M}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}'} = \left( \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}'} \quad \mathbf{a}(t) = \mathbf{a}'(t) + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c$$

où les termes d'accélération supplémentaires sont l'**accélération d'entraînement**  $\mathbf{a}_e$  (ou  $\mathbf{a}_{ie}$ ) et l'**accélération de Coriolis**  $\mathbf{a}_c$  (ou  $\mathbf{a}_{ic}$ ) qui s'écrivent respectivement :

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_{ie} = \mathbf{a}_{e/\mathcal{R}} = \mathbf{a}(O'/\mathcal{R}) + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{O'M}) + \frac{d\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \times \mathbf{O'M} \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_c = \mathbf{a}_{ic} = 2 \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{u}'$$



WE NEED TO CHANGE SPACE  
AND TIME TO MAKE THINGS WORK!

