LICENCE DE PHYSIQUE — RELATIVITÉ RESTREINTE

DEVOIR

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2022–2023

À remettre avant le mardi 22 novembre 2022 minuit, en séance ou via Moodle

1. Physique dans un téléphérique

Vous traiterez cet exercice dans le cadre de la mécanique classique. Les deux parties peuvent être traitées indépendamment. Pour les applications numériques, les données utiles sont indiquées à la fin de chaque partie d'exercice.

Étude des mouvements dans une cabine de téléphérique

On s'intéresse au comportement mécanique des objets à l'intérieur d'une cabine de téléphérique en mouvement. On suppose que la cabine se déplace à vitesse constante $\mathbf{v}$, parallèlement à son câble tendu ; on suppose dans cette partie de l'exercice que la tension du câble est telle qu'on puisse assimiler la forme du câble à une droite, et que le mouvement de la cabine est un mouvement de translation uniforme.

1.1 — La cabine s'élève d'une hauteur H lorsqu'elle se déplace à l'horizontale d'une distance L (*cf.* fig. 1). Donnez l'expression et la valeur numérique de l'angle θ que forme le câble avec l'horizontale.

1.2 — On suppose qu'à l'instant $t = 0$, la cabine passe à proximité de la station située au point O, sans modifier son mouvement ; autrement dit, qu'on a $O \equiv O'$ à $t = 0$ (la cabine passe par cette station sans s'y arrêter). Écrivez les équations de la transformation de Galilée entre le référentiel $\mathcal{R}$ (référentiel de la station située en O) et le référentiel $\mathcal{R}'$ solidaire de la cabine (on placera son origine O' au centre du plancher de la cabine). Vous écrirez la transformation de Galilée sous forme vectorielle ($\mathbf{r} \to \mathbf{r}'$), puis en coordonnées ($(x, y, z) \to (x', y', z')$).

Attention ! Dans la configuration considérée, les axes (Ox) et $(O'x')$ ne sont pas orientés parallèlement à la vitesse relative entre les référentiels : la forme des équations de la transformation de Galilée sera légèrement différente de la forme habituelle...

1.3 — À l'instant $t_0 > 0$, Un passager du téléphérique laisse tomber au milieu de la cabine un objet de masse m d'une hauteur h (comptée à partir du sol de la cabine) sans vitesse initiale. Écrivez les équations du mouvement de cet objet dans le référentiel $\mathcal{R}'$ de la cabine ; résolvez ces équations et donnez la vitesse $\mathbf{u}'(t)$ et la position $\mathbf{r}'(t)$ de cet objet en fonction du temps, dans le référentiel $\mathcal{R}'$. Décrivez l'allure de la trajectoire jusqu'à l'impact sur le sol de la cabine. *Vous donnerez les expressions littérales des composantes $(u'_x(t), u'_y(t), u'_z(t))$ de la vitesse $\mathbf{u}'(t)$, ainsi que celles des coordonnées $\mathbf{r}'(t)$: $(x'(t), y'(t), z'(t))$ de l'objet considéré.*

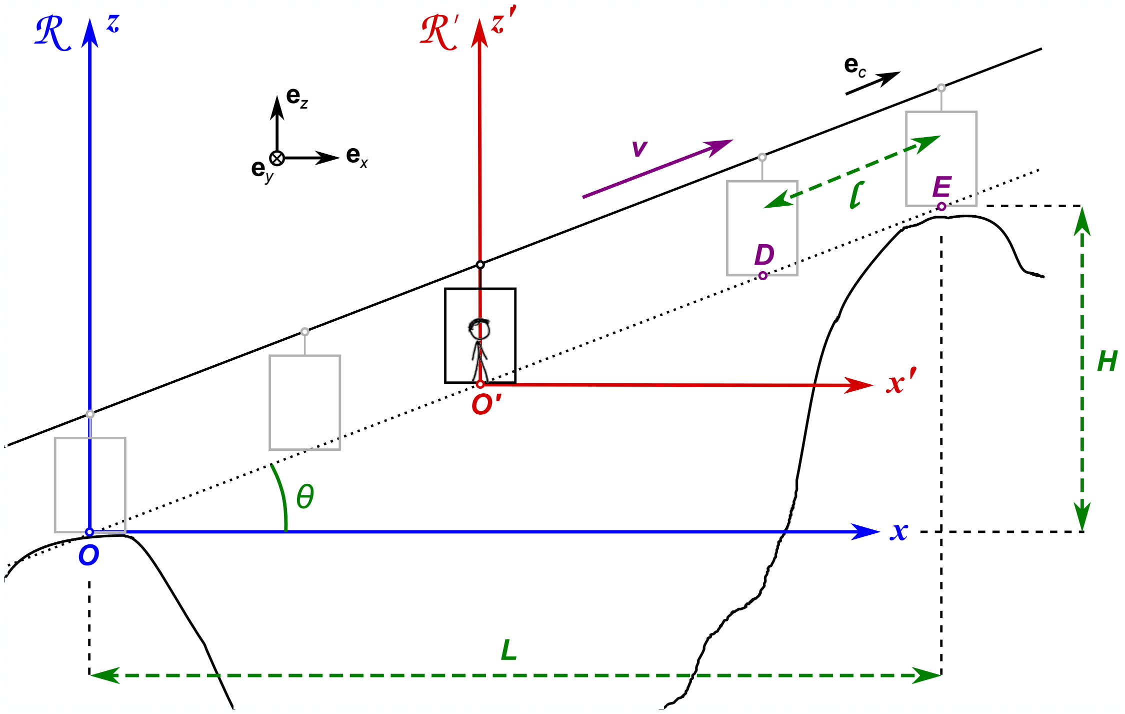

FIGURE 1 – *Trajectoire de la cabine du téléphérique. On suppose que le câble reste tendu, et que le mouvement de la cabine s'effectue à la vitesse constante* $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_c$*. Le vecteur* $\mathbf{e}_c$ *est le vecteur unitaire parallèle au câble tendu, dans la direction ascendante.*

1.4 — Quelle est l'abscisse x'_I du point d'impact I de l'objet sur le sol de la cabine ?

1.5 — On suppose maintenant que le passager a lâché l'objet en question depuis la même hauteur h, toujours sans vitesse initiale, mais en tendant le bras à travers une fenêtre de la cabine : l'objet tombe ainsi à l'extérieur. Donnez l'expression de la vitesse $\mathbf{u}'(t)$ et de la position $\mathbf{r}'(t)$ de cet objet, dans $\mathcal{R}'$.

1.6 — Qu'observe-t-on dans le référentiel $\mathcal{R}$? En appliquant la transformation de Galilée et la composition classique des vitesses, donnez la position $\mathbf{r}(t)$ et la vitesse $\mathbf{u}(t)$ du même objet, mais vu dans le référentiel $\mathcal{R}$.

1.7 — Décrivez et dessinez la trajectoire de l'objet dans le référentiel $\mathcal{R}$.

On considère désormais qu'à partir du point D, la cabine décélère uniformément afin d'arriver avec une vitesse nulle à sa destination E.

1.8 — À partir du point D, le référentiel $\mathcal{R}'$ de la cabine est-il toujours galiléen ? Commentez.

1.9 — En supposant la décélération uniforme (c'est à dire que l'accélération $\mathbf{a}$ de la cabine est constante entre D et E). Écrivez l'équation du mouvement de la cabine entre les points D et E.

Pour ce calcul, on aura intérêt à projeter sur la droite parallèle à la direction du câble, qu'on peut munir d'un vecteur unitaire $\mathbf{e}_c$ *selon la direction ascendante du câble du téléphérique.*

1.10 — Résolvez l'équation du mouvement de la cabine entre D et E, et donnez l'expression de la vitesse et de la position de la cabine (relativement au point D). Connaissant la distance de freinage $\ell = DE$, déterminez l'expression de la durée de freinage.

1.11 — Déduisez-en l'expression de l'accélération $\mathbf{a} = a\,\mathbf{e}_c$ de la cabine (a algébrique). Exprimez les composantes (a_x, a_y, a_z) de l'accélération $\mathbf{a}$ de la cabine dans $\mathcal{R}$. Applications numériques.

1.12 — Une lampe de masse M est accrochée par son fil électrique au plafond de la cabine. En négligeant la masse du fil, faites le bilan des forces que subit la lampe pendant la phase de freinage de la cabine du téléphérique. En supposant la lampe à l'équilibre, donnez l'expression littérale et la valeur numérique de l'angle que forme le fil de la lampe avec la verticale pendant la phase de freinage. Faites un schéma.

1.13 — Pendant la phase de freinage de la cabine, un passager lâche à nouveau un objet de masse m sans vitesse initiale d'une hauteur h. Quelle est cette fois l'abscisse x'_I du point d'impact de l'objet sur le sol de la cabine ?

Données :

Dénivelé : $H = 1000\,\mathrm{m}$. Distance (horizontale) parcourue par la cabine : $L = 5\,\mathrm{km}$

Vitesse du téléphérique (le long du câble) : $\|\mathbf{v}\| = 10\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

Distance de freinage du téléphérique : $\ell = DE = 100\,\mathrm{m}$

Hauteur de chute de l'objet étudié : $h = 1\,\mathrm{m}$.

Forme géométrique du câble de téléphérique

Dans cette seconde partie, on souhaite déterminer la forme géométrique qu'adopte naturellement un câble tendu entre deux points d'attache sous l'effet de la pesanteur. On suppose ici qu'on a au préalable décroché la cabine du téléphérique pour maintenance, et que seul demeure le câble, un peu détendu.

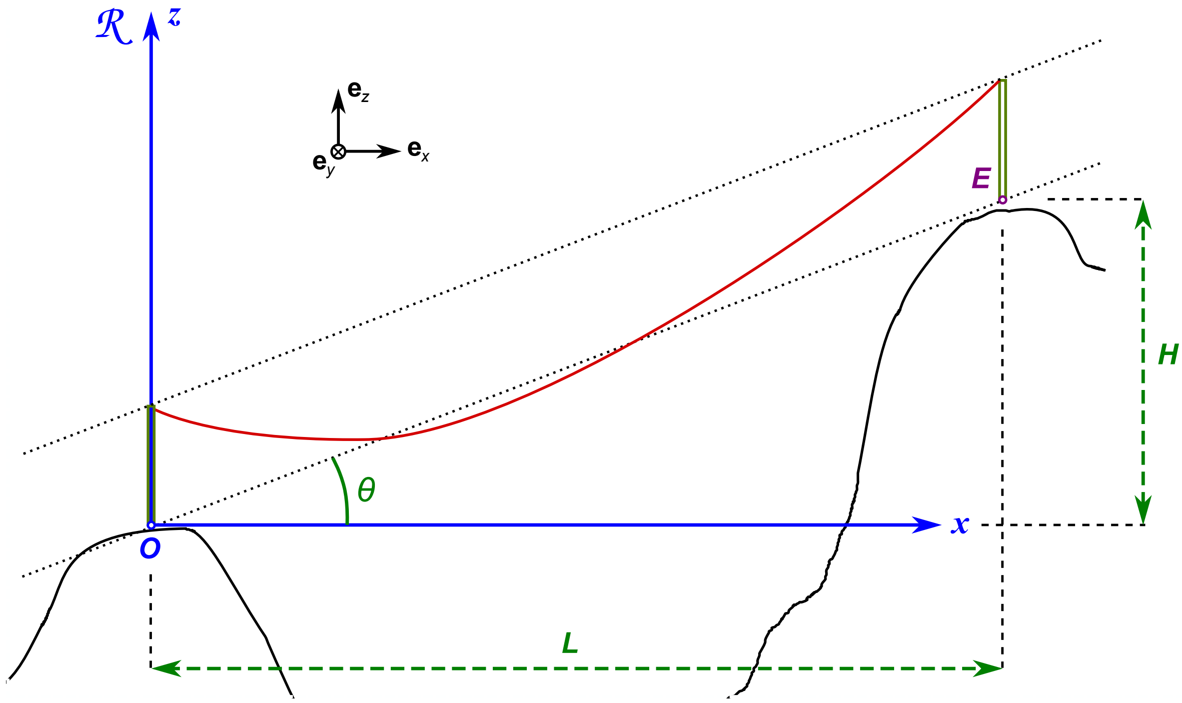

FIGURE 2 – *Câble d'acier supportant la cabine du téléphérique, détendu. On a retiré la cabine pour maintenance. On souhaite déterminer la fonction mathématique $z = f(x)$ qui décrit la forme géométrique adoptée naturellement par le câble sous l'effet de son propre poids.*

Le référentiel considéré ici est le référentiel terrestre, supposé galiléen, que l'on muni d'un trièdre direct $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$. Le repère choisi est illustré par la Figure 2 : l'axe (Ox) est horizontal, l'axe (Oz) est vertical, et le câble est entièrement contenu dans le plan (O, x, z). Dans un premier temps, le choix exact de l'origine du repère n'a pas d'importance, comme nous allons le voir dans la suite.

On caractérise le câble par sa masse linéique, c'est-à-dire sa masse par unité de longueur, que l'on notera μ (exprimée en $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}$). Pour simplifier, on suppose ici que le câble d'acier est sans élasticité : il ne s'allonge pas sous l'effet de son poids. On néglige aussi son éventuelle raideur, c'est à dire qu'on suppose que le câble peut se tordre sans effort (au moins pour une faible courbure du câble).

Pour traiter le problème, on considère un élément quelconque du câble de longueur infinitésimale $\mathrm{d}\ell$, situé à une abscisse x. Ce petit élément de longueur fait un angle $\alpha(x)$ avec l'horizontale. α est une fonction de x.

1.14 — Représentez le petit élément de câble de longueur $\mathrm{d}\ell$ en faisant apparaître l'angle $\alpha(x)$ et les coordonnées x, z, $x + \mathrm{d}x$, $z + \mathrm{d}z$ et la longueur $\mathrm{d}\ell$. Il est important de se souvenir que le câble est courbe et que l'angle $\alpha(x)$ que le câble fait avec l'horizontale varie en chaque point du câble. *Faites une figure assez grande, que vous compléterez au fur et à mesure de l'exercice.*

1.15 — Que vaut la masse $\mathrm{d}m$ de l'élément infinitésimal de câble considéré ? Donnez l'expression vectorielle de son poids $\mathrm{d}\mathbf{P}$ en fonction de μ et $\mathrm{d}l$.

On notera $\mathbf{T}(x)$ la force de tension du câble, c'est à dire ici la force qu'exerce à l'abscisse x le segment de câble compris entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$ sur la portion de câble située en amont, *i.e.* aux abscisses inférieures à x.

1.16 — De manière immédiate, que vaut par conséquent la force exercée au point d'abscisse x par la portion de câble située en amont de l'abscisse x, sur le segment compris entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$?

1.17 — Effectuez le bilan des forces qui s'appliquent au petit élément de câble situé entre x et $x + \mathrm{d}x$. On notera $\mathbf{T}(x + \mathrm{d}x)$ la force exercée en $x + \mathrm{d}x$ sur le segment de câble situé entre x et $x + \mathrm{d}x$ par la portion de câble située en aval, au-delà de $x + \mathrm{d}x$. Ajoutez la représentation des forces exercées sur l'élément de câble sur le schéma précédent.

1.18 — On considère le câble à l'équilibre. Appliquez la seconde loi de Newton au segment de câble de longueur $\mathrm{d}\ell$ et projetez la relation obtenue sur les axes (Ox) et (Oz). On notera $T_h(x)$ et $T_v(x)$ les composantes horizontales et verticales de la force de tension $\mathbf{T}(x)$.

1.19 — Déduisez-en l'expression de la composante horizontale T_h. Qu'a-t-elle de particulier ?

1.20 — Exprimez la relation existant entre $\mathrm{d}T_v/\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}\ell/\mathrm{d}x$.

1.21 — Ecrivez la relation géométrique très simple existant entre $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}z$ et $\mathrm{d}\ell$. Ré-écrivez la en faisant apparaître la *pente* p du câble à l'abscisse x, où $p = \mathrm{d}z/\mathrm{d}x$.

1.22 — Exprimez la relation existant entre T_v, T_h et l'angle α, puis celle existant entre $\mathrm{d}T_v/\mathrm{d}x$ et $(\mathrm{d}z/\mathrm{d}x)^2$.

1.23 — Déduisez des questions précédentes l'équation différentielle vérifiée par la fonction $z = f(x)$ définissant la forme du câble.

1.24 — Vous pouvez simplifer l'équation précédente en effectuant un changement de variable : vous exprimerez tous les termes en fonction de la pente $p(x) = f'(x) = \mathrm{d}z/\mathrm{d}x$ du câble. Vous simplifierez aussi les expressions en posant $a = T_h/\mu g$ (a est homogène à une longueur).

1.25 — Résolvez l'équation différentielle obtenue : donnez l'expression de $x(p)$, puis déduisez-en celle de $p(x)$.

1.26 — En intégrant une deuxième fois, donnez l'expression générale de $z = f(x)$. Les constantes d'intégration seront notées x_0 et z_0, choisies de manière à vérifier $(\mathrm{d}z/\mathrm{d}x)(x_0) = 0$ (x_0 correspond ainsi à l'abscisse du point le plus bas du câble), et $z(x_0) = z_0 + a$ (hauteur du point le plus bas du câble).

1.27 — Bonus : déterminez les expressions des constantes x_0 et z_0 en fonction de L et H. La hauteur h_p des poteaux qui soutiennent le câble vaut $h_p = 10\,\mathrm{m}$. Applications numériques.

Données :
Dénivelé : $H = 1000\,\mathrm{m}$. Distance (horizontale) parcourue par la cabine : $L = 5\,\mathrm{km}$
Hauteur des deux poteaux : $h_p = 10\,\mathrm{m}$
Diamètre du câble d'acier : $\varnothing = 30\,\mathrm{mm}$
Masse linéique du câble d'acier : $\mu = 3\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}$
Composante horizontale de la force de tension sur le câble : $T_h = 100\,\mathrm{kN}$

Formules utiles :

$$\frac{\mathrm{d}\cosh x}{\mathrm{d}x} = \sinh x \qquad \frac{\mathrm{d}\sinh x}{\mathrm{d}x} = \cosh x \qquad \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{argcosh}\,x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{argsinh}\,x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

2. La Fuite du Faucon Millenium

Vous traiterez cet exercice dans le cadre de la relativité restreinte.

Après avoir libéré la princesse Leia retenue prisonnière sur l'Étoile Noire (référentiel $\mathcal{R}$), Han Solo, Chewbacca, Luke et leurs amis prennent la fuite à $t = t' = 0$ à bord du Faucon Millenium (référentiel $\mathcal{R}'$). Le Faucon Millenium s'éloigne de l'Étoile Noire à la vitesse $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_x$ (mesurée dans $\mathcal{R}$), qu'on supposera constante, avec $v < c$: dans la précipitation, Han Solo n'a hélas pas eu le temps de réparer son propulseur superluminique.

On négligera la phase de démarrage du Faucon : on fera comme si à $t = 0$ sa vitesse passait de 0 à v en un temps extrêmement bref : après tout, il est question ici du Faucon Millenium, *"le tas de ferraille le plus rapide de la galaxie"*.

Pour cet exercice, on munira le référentiel $\mathcal{R}$ d'un repère (O, x, y, z), et le référentiel $\mathcal{R}'$ d'un repère (O', x', y', z'), de telle sorte que les axes soient orientés de la même manière dans les deux référentiels ; on choisira les axes (Ox) et $(O'x')$ selon la direction du mouvement du Faucon Millenium. Dans $\mathcal{R}$, on prendra pour origine O la position qu'occupait le Faucon Millenium dans le hangar à vaisseaux à la surface de l'Étoile Noire où il était garé ; dans $\mathcal{R}'$, on prendra un point arbitraire du Faucon comme origine O'.

Mesure de la vitesse des fuyards

Désireux de rattraper les fuyards, Tarkin, l'officier commandant l'Étoile Noire, ordonne au préalable d'estimer la vitesse du Faucon Millenium. Pour cela, un officier radariste envoie une succession de signaux électromagnétiques (par exemple, des signaux lumineux) très brefs en direction du Faucon : ces signaux sont émis régulièrement et espacés temporellement d'une durée Δt mesurée dans le référentiel de l'étoile Noire.

2.1 — On considère un signal électromagnétique extrêmement bref émis depuis la surface de l'Étoile Noire en direction du vaisseau qui s'éloigne. Lorsqu'il atteint le vaisseau, le rayon se réfléchit sur sa carlingue et repart aussitôt en sens inverse en direction de l'Étoile Noire, avant de parvenir à l'instrument de mesure de l'officier radariste.

On notera E_1 l'événement d'émission du rayon à l'instant $t_1 = t(E_1) > 0$, I_1 l'événement d'impact (et de rebond) du rayon sur le vaisseau, et R_1 l'événement de réception du rayon réfléchi sur l'antenne du radar de l'Étoile Noire.

Établissez les coordonnées (t, x) dans $\mathcal{R}$ des événements E_1, I_1 et R_1 en fonction de $t_1 = t(E_1)$ et v. Vous donnerez les expressions littérales de ces coordonnées.

2.2 — Faites de même dans le référentiel $\mathcal{R}'$ du Faucon Millenium, et donnez les expressions des coordonnées (t', x') des événements E_1, I_1 et R_1 en fonction de t_1 et v.

2.3 — On s'intéresse maintenant au signal émis immédiatement après celui émis en E_1 : autrement dit, au signal émis à $t = t(E_1) + \Delta t = t_1 + \Delta t$. On notera l'événement d'émission de ce signal E_2, l'impact sur le vaisseau I_2, et la réception du signal réfléchi sur l'antenne radar R_2. Comme précédemment, établissez les coordonnées (t, x) dans le référentiel $\mathcal{R}$ de ces 3 événements, ainsi que leurs coordonnées (t', x') dans le référentiel $\mathcal{R}'$ du vaisseau, en fonction de t_1, Δt et v.

2.4 — Donnez l'expression de la durée qui s'écoule entre les événements d'impact I_1 et I_2, dans le référentiel de l'Étoile Noire, et dans le référentiel du vaisseau.

2.5 — Quelle est la durée $\Delta t_R = t(R_2) - t(R_1)$ entre les événements R_1 et R_2 de réception de deux signaux successifs sur l'antenne radar de l'Étoile Noire ?

2.6 — La connaissance de la durée entre les signaux émis, et la mesure de la durée entre les signaux reçus permet d'en déduire la vitesse v du vaisseau. Exprimez cette vitesse v en fonction de Δt et de Δt_R.

2.7 — En considérant que les événements E_1 et E_2 correspondent plutôt à l'émission de deux maxima d'amplitude successifs d'une même onde électromagnétique de fréquence ν (dans $\mathcal{R}$), quelle est la fréquence ν' de cette même onde électromagnétique dans le référentiel du vaisseau, au moment de l'impact de l'onde sur le vaisseau ? Montrez que vous retrouvez ainsi l'expression de l'effet Doppler relativiste.

2.8 — Toujours en considérant que les événements E_1 et E_2 correspondent à l'émission de deux maxima d'amplitude successifs d'une même onde électromagnétique de fréquence ν, donnez l'expression de la fréquence ν_R du signal reçu par l'antenne radar. Déduisez-en une expression de la vitesse v du vaisseau en fonction de la fréquence émise ν et reçue ν_R.

2.9 — On prendra $v = 5c/13$. Donnez l'expression et la valeur numérique des facteurs β et $\gamma(v)$.

2.10 — On suppose que le radar de l'Étoile Noire émet à la fréquence $\nu = 1\,\text{GHz}$. Donnez la valeur numérique de la fréquence ν_R.

Envoi d'un chasseur impérial pour intercepter les fuyards

Une fois estimée la vitesse du vaisseau rebelle, l'officier commandant l'Étoile Noire réalise qu'il est encore possible de rattraper les fuyards. Il décide de faire décoller un chasseur impérial (*TIE fighter*) avec pour mission de rattraper et d'intercepter le Faucon Millenium et les dangereux rebelles à son bord. Le chasseur décolle de la surface de l'étoile noire à $t = t_D$ (événement D) ; on considère qu'il se déplace à la vitesse constante $\mathbf{u} = u\,\mathbf{e}_x$ par rapport à l'Étoile Noire, avec $u > v$, mais $u < c$ (les forces impériales ont aussi quelques soucis de maintenance de leur matériel volant).

On notera D l'événement associé au décollage du chasseur, et A l'événement d'interception du Faucon Millenium par le chasseur, c'est à dire le moment et le lieu où le chasseur impérial rejoint le vaisseau des fuyards.

2.11 — Établissez les coordonnées des événements D (départ du chasseur impérial) et A (interception du Faucon Millenium par le chasseur) dans les deux référentiels, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Pour plus de clarté, vous pouvez présenter ces coordonnées dans un tableau.

2.12 — Que vaut t_A dans la limite où la vitesse u du chasseur tend vers v ? Commentez.

2.13 — Donnez l'expression littérale de la vitesse u' du chasseur impérial dans le référentiel $\mathcal{R}'$. Application numérique.

2.14 — En utilisant uniquement les coordonnées des événements D et A dans le référentiel du Faucon Millenium, exprimez la vitesse du chasseur impérial dans ce référentiel. Redémontrez de cette manière la loi relativiste de composition des vitesses.

Tir Laser

Le chasseur envoyé à la poursuite du Faucon Millenium subit malheureusement une avarie quelques instants avant de rejoindre les fuyards, leur permettant ainsi de poursuivre leur chemin sans encombre.

Dépité devant tant de malchance, et légèrement agacé par les faveurs scénaristiques qui permettent à chaque fois à nos héros de s'en sortir de manière invraisemblable, le commandant de l'Étoile Noire décide d'utiliser les grands moyens : il ordonne d'activer à l'instant $t = t_{\text{tir}} > 0$ l'arme suprême de sa station, à savoir le puissant laser de l'Étoile Noire, et d'effectuer un tir en direction du vaisseau pour en finir une fois pour toutes avec ces rebelles trop favorisés par le scénario.

2.15 — Quelles sont dans $\mathcal{R}'$ les coordonnées $(t'_{\text{tir}}, x'_{\text{tir}})$ de l'événement d'émission du faisceau laser à la surface de l'Étoile Noire ?

2.16 — À quel instant t_{impact} (dans $\mathcal{R}$) le faisceau laser atteindra-t-il le Faucon Millenium ?

2.17 — Quelles sont les coordonnées $(t'_{\text{impact}}, x'_{\text{impact}})$ de l'impact du faisceau laser sur le Faucon dans le référentiel $\mathcal{R}'$?

2.18 — On considère que le laser émet à la fréquence $\nu = 600\,\text{THz}$. Quelle est sa longueur d'onde d'émission λ dans $\mathcal{R}$? À quel domaine de longueur d'onde cela correspond-il ? Quelle est la couleur du laser vu depuis l'Étoile Noire ?

2.19 — À l'instant de l'impact du faisceau laser sur le Faucon Millenium, quelle est la longueur d'onde λ' du faisceau reçu par les passagers du vaisseau ? À quelle couleur cela correspond-il pour les passagers ?

Diagramme d'espace-temps

2.20 — Représentez toutes les péripéties de cette aventure sur un diagramme d'espace-temps (Minkowski ou Loedel, selon votre préférence), en indiquant bien les coordonnées de chaque événement dans les deux référentiels (en traçant les projections correspondantes sur les axes). *Vous représenterez l'ensemble des événements évoqués dans l'exercice sur le même diagramme d'espace-temps. Pour obtenir une figure lisible, consacrez une page entière à ce diagramme.*

Les péripéties décrites ici s'inspirent librement de la scène 39 du film "Star Wars : A New Hope" (1977) de George Lucas. Aucun personnage de George Lucas n'a été maltraité pendant la préparation de cet exercice.

Données :

Vitesse du Faucon Millenium, vaisseau des rebelles : $v = 5c/13$

Vitesse du chasseur impérial (*TIE Fighter*) : $u = 12c/13$

Célérité de la lumière dans le vide : $c = 299\,792\,458\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.