

## EXAMEN

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2023–2024

Mardi 7 novembre 2023 – 16h-18h

*Documents, ordinateurs et téléphones sont interdits.*

*Les calculatrices (basiques) sont autorisées.*

### 1. Mécanique dans un Train à Grande Vitesse (TGV)

*Vous traiterez l'ensemble de cet exercice dans le cadre de la mécanique classique.*

*Les équation de transformation de la vitesse et de l'accélération lors du passage d'un référentiel galiléen à un second référentiel non-galiléen, ainsi que les expressions des forces inertielles dans un référentiel non galiléen sont rappelées page 4, à la fin de l'énoncé de l'exercice.*

#### TGV se déplaçant en ligne droite, à vitesse constante

On raisonnera dans le référentiel local terrestre  $\mathcal{R}$ , qu'on supposera galiléen/inertiel. On munit  $\mathcal{R}$  d'une origine arbitraire  $O$  et d'un trièdre direct  $\{e_x, e_y, e_z\}$ , où le vecteur  $e_z$  est orienté selon la verticale locale, et  $e_x, e_y$  sont dans le plan horizontal.

Un train à grande vitesse (TGV) se déplace en ligne droite à la vitesse  $v = 324 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ . On considère le référentiel d'un des wagons, que l'on note  $\mathcal{R}'$ ; on munit ce référentiel d'une origine arbitraire  $O'$  (placée au centre du wagon), et du même trièdre  $\{e_x, e_y, e_z\}$  que précédemment. On choisit l'orientation

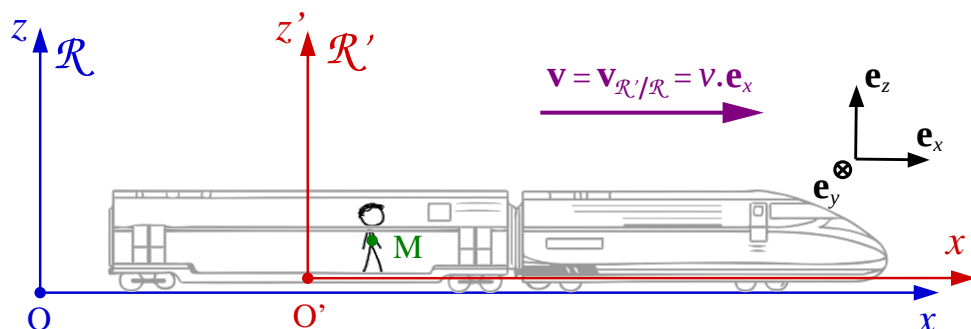


FIGURE 1 – Référentiel terrestre (solidaire du sol et des rails) et référentiel du wagon.

de  $\mathbf{e}_x$  dans la direction du mouvement du train : la vitesse relative  $\mathbf{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  s'écrit ainsi  $\mathbf{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = v \mathbf{e}_x$ . On prendra l'origine du temps  $t$  à l'instant où les origines  $O$  et  $O'$  coïncident (figure 1).

On considère un passager  $M$  (supposé ponctuel) dont on analyse le mouvement dans les deux référentiels, celui du sol et celui du wagon. On repère à chaque instant la position de  $M$  dans  $\mathcal{R}$  par le vecteur position  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{OM}(t) : (x, y, z)$ , et par le vecteur position  $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{O'M}(t) : (x', y', z')$  dans  $\mathcal{R}'$ .

**1.1** — Le référentiel du wagon est-il galiléen/inertiel ?

**1.2** — Rappelez l'expression de la transformation de Galilée entre  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  : donnez l'expression sous forme vectorielle; puis donnez les expressions des coordonnées  $(x', y', z')$  du mobile dans le référentiel du wagon en fonction de ses coordonnées  $(x, y, z)$  dans le référentiel local terrestre.

**1.3** — Rappelez la loi classique de composition des vitesses entre les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ . On notera respectivement  $\mathbf{u}(t) : (u_x = dx/dt, u_y = dy/dt, u_z = dz/dt)$  la vitesse du mobile  $M$  dans  $\mathcal{R}$ , et  $\mathbf{u}'(t) : (u'_x = dx'/dt, u'_y = dy'/dt, u'_z = dz'/dt)$  sa vitesse dans  $\mathcal{R}'$ . Donnez la loi de composition des vitesses sous forme vectorielle, puis en composantes.

**1.4** — Un passager du train se déplace dans un des wagons à  $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  le long du train, depuis la motrice vers la queue du train. Donnez l'expression de sa vitesse dans les deux référentiels (vous donnerez toutes les composantes). Application numérique pour  $u'_x$  et  $u_x$  (*attention aux unités*).

**1.5** — Un second passager se déplace latéralement à  $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , perpendiculairement à la direction du mouvement du train. Donnez les trois composantes de sa vitesse dans  $\mathcal{R}$ , puis dans  $\mathcal{R}'$ .

## Arrivée du train dans un virage

Le TGV arrive dans un virage. On suppose que le rayon de courbure  $R_c$  des rails est constant dans le virage (fig. 2). Pour simplifier le traitement du problème, on redéfinit le repère du référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  au centre du cercle de rayon  $R_c = 5 \text{ km}$  coïncidant avec la voie ferrée dans le virage. On placera le centre  $O'$  du repère solide  $\mathcal{R}'$  du train au centre d'un des wagons et on choisit dans  $\mathcal{R}'$  un trièdre  $\{\mathbf{e}_{x'}, \mathbf{e}_{y'}, \mathbf{e}_{z'}\}$  dont l'orientation reste tangente au train au point  $O'$  (fig. 2).

Dans le virage, le TGV maintient sa vitesse de  $324 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  par rapport aux rails, mais sa trajectoire est désormais circulaire.

**1.6** — Le référentiel solide du wagon est-il toujours galiléen ? Justifiez votre réponse.

**1.7** — En utilisant la relation de Varignon, écrivez l'expression de la vitesse  $\mathbf{u}(O') = \mathbf{v}_{O'/\mathcal{R}}$  du point  $O'$  mesurée dans  $\mathcal{R}$ , en fonction du rayon de courbure  $R_c$  de la voie ferrée et de la vitesse angulaire  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  du wagon dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$ .

**1.8** — Déduisez-en l'expression de la vitesse angulaire  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  du wagon (par exemple, celle du point  $O'$ ) dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$ . Application numérique.

**1.9** — Montrez que l'accélération du point  $O'$  dans  $\mathcal{R}$  s'écrit :

$$\mathbf{a}(O') = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OO}') = -\omega^2 \mathbf{OO}'.$$

On considère un passager  $M$  initialement immobile au point  $O'$ .

**1.10** — Faites le bilan des forces qui s'appliquent sur le passager dans le référentiel du wagon, et écrivez la relation fondamentale de la dynamique pour le passager  $M$  de masse  $m$ , qu'on assimile ici à un point.

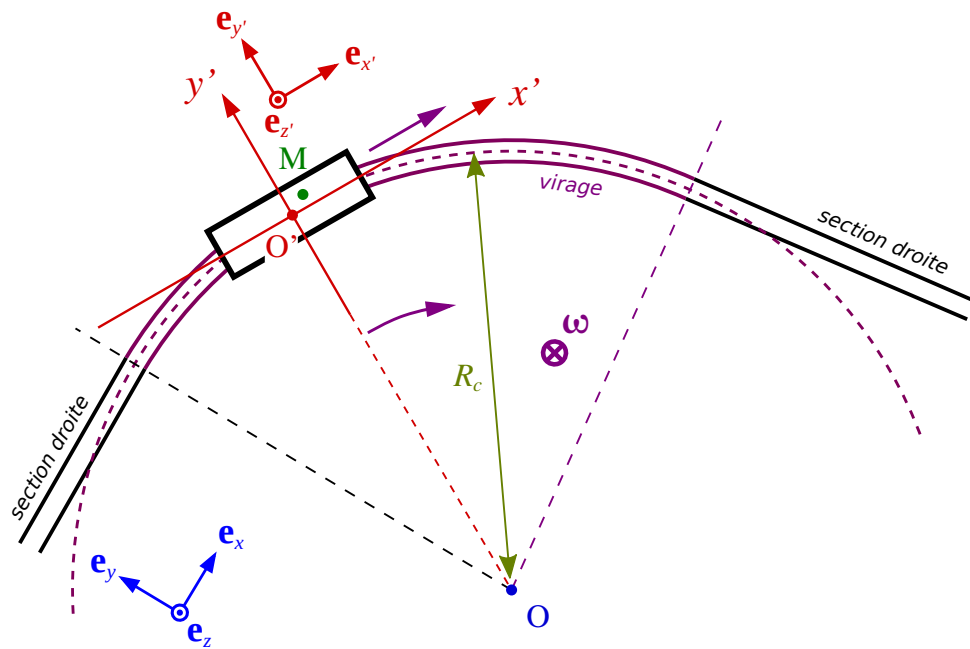


FIGURE 2 – Référentiel terrestre (solidaire du sol et des rails) et référentiel d’un wagon. Pour simplifier, on place l’origine  $O$  au centre de courbure de la voie ferrée. Le trièdre  $\{e_{x'}, e_{y'}, e_{z'}\}$  tourne avec le wagon, avec l’axe  $e_{x'}$  qui reste tangent à la voie ferrée.

1.11 — Donnez l’expression des accélérations  $a_e$  et  $a_c$  pour le passager  $M$ , en fonction de  $\omega$  et de  $R_c$ . Déduisez-en l’expression des forces inertielles d’entraînement  $F_e$  et de Coriolis  $F_c$  que subit le passager. Applications numériques pour  $a_e$  et  $a_c$ .

1.12 — Représentez les forces  $F_e$  et  $F_c$  ressenties par le passager, sur un schéma dans le plan horizontal.

1.13 — Le passager se déplace maintenant à la vitesse  $u' = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  selon  $e_{y'}$  dans le référentiel du wagon. Exprimez l’accélération d’entraînement  $a_e$  et l’accélération de Coriolis  $a_c$ . Applications numériques pour  $a_e$  et  $a_c$ ; commentez.

1.14 — Sans modifier la vitesse du train, on souhaite limiter l’accélération transverse subie par le passager à  $0.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Quel est le rayon minimal de courbure de la voie ferrée dans le virage?

1.15 — Citez 4 solutions permettant de réduire l’inconfort des passagers lorsque le TGV parcourt un virage.

1.16 — Commentez le message suivant de la SNCF (fig. 3).



FIGURE 3 – Message affiché dans la voiture-bar d’un TGV.

**Rappels : transformation de la vitesse et de l'accélération entre un référentiel galiléen et un référentiel non-galiléen. Généralisation de la deuxième loi de Newton (RFD). Forces inertielles.** Soient deux référentiels : un premier référentiel  $\mathcal{R}$ , galiléen (ou inertiel), et un second référentiel  $\mathcal{R}'$ , animé d'un mouvement quelconque par rapport à  $\mathcal{R}$  et par conséquent non galiléen. On appelle  $O$  et  $O'$  les origines choisies dans les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ , respectivement. De plus, on note  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  le vecteur vitesse angulaire instantané de rotation du référentiel  $\mathcal{R}'$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ .

Considérons un point matériel  $M$  en mouvement quelconque, dont la position à chaque instant dans les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  est repérée par les vecteurs positions  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{O}\mathbf{M}(t)$  et  $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{O}'\mathbf{M}(t)$  respectivement.

Si on note  $\mathbf{u}(t)$  la vitesse instantanée de  $M$  mesurée dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , et  $\mathbf{u}'(t)$  sa vitesse instantanée mesurée cette fois dans  $\mathcal{R}'$ , ces deux vitesses se déduisent l'une de l'autre par la relation :

$$\mathbf{u}(t) = \left( \frac{d\mathbf{O}\mathbf{M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \quad \mathbf{u}'(t) = \left( \frac{d\mathbf{O}'\mathbf{M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = \left( \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}'}$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}_{O'/\mathcal{R}} + \mathbf{u}'(t) + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{O}'\mathbf{M}.$$

Si on note  $\mathbf{a}(t)$  l'accélération de  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , et  $\mathbf{a}'(t)$  son accélération dans  $\mathcal{R}'$ , on aura, en dérivant la relation précédente (et en utilisant la relation de Varignon),

$$\mathbf{a}(t) = \left( \frac{d^2\mathbf{O}\mathbf{M}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}} \quad \mathbf{a}'(t) = \left( \frac{d^2\mathbf{O}'\mathbf{M}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}'} \quad \mathbf{a}(t) = \mathbf{a}'(t) + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c$$

où les termes d'accélération supplémentaires sont l'**accélération d'entraînement**  $\mathbf{a}_e$  et l'**accélération de Coriolis**  $\mathbf{a}_c$  qui s'écrivent respectivement :

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_{e/\mathcal{R}} = \mathbf{a}(O'/\mathcal{R}) + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{O}'\mathbf{M}) + \frac{d\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \times \mathbf{O}'\mathbf{M} \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{u}'$$

Si on considère un mobile  $M$  de masse  $m$  dans le référentiel non galiléen  $\mathcal{R}'$ , la deuxième loi de Newton (RFD) se généralise sous la forme :

$$m\mathbf{a}' = \sum \mathbf{F}_{\text{ext}} - m\mathbf{a}_e - m\mathbf{a}_c = \sum \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_c$$

avec  $\mathbf{F}_e = -m\mathbf{a}_e$  la force inertielle d'entraînement et  $\mathbf{F}_c = -m\mathbf{a}_c$  la force inertielle de Coriolis.

**Double produit vectoriel.** Une relation utile, notamment en physique, est la formule du double produit vectoriel : si  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  sont trois vecteurs quelconques, alors :

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}.$$

## 2. Course-poursuite interstellaire

Vous traiterez cet exercice dans le cadre de la relativité restreinte.

Leia a été capturée et est retenue prisonnière à bord d’une frégate impériale (référentiel  $\mathcal{R}'$ ) qui a quitté la planète Tatooine (référentiel  $\mathcal{R}$ ) à  $t = t' = 0$ , et qui s’éloigne à la vitesse constante  $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$  avec  $v < c$ . Han, lui aussi sur Tatooine, se rend compte de sa disparition à  $t = t_1 > 0$ , saute aussitôt à bord du Faucon Millenium, “le tas de ferraille le plus rapide de la galaxie”, et se lance à sa poursuite, à la vitesse  $\mathbf{u} = u \mathbf{e}_x$ , avec  $v < u < c$  (dans la précipitation, il n’a hélas pas eu le temps de réparer son propulseur superluminique). Son vaisseau se déplaçant plus vite que la frégate, il la rattrape à l’instant  $t = t_2$ . On notera  $E_1 : (t_1, x_1)$  l’événement correspondant au départ de Han, et  $E_2 : (t_2, x_2)$  l’événement associé à la rencontre du vaisseau de Han et de la frégate qui emporte Leia. On prendra l’astroport de départ sur Tatooine comme origine  $O$  du référentiel  $\mathcal{R}$ , et un point arbitraire de la frégate comme origine  $O'$  dans  $\mathcal{R}'$ .

2.1 — Écrivez les transformations des coordonnées  $(ct, x, y, z)$  d’un événement lors du passage d’un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  à un autre référentiel galiléen  $\mathcal{R}'$  se déplaçant à la vitesse  $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . Écrivez cette relation sous forme matricielle.

2.2 — À quel instant  $t_2$  Han rattrape-t-il la frégate ?

2.3 — Établissez, dans les deux référentiels (supposés galiléens)  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  les coordonnées spatio-temporelles des événements  $E_1$  et  $E_2$ . Exprimez toutes les coordonnées  $(x_1, t'_1, x'_1, t_2, x_2, t'_2$  et  $x'_2)$  en fonction de  $t_1, u$  et  $v$ .

2.4 — En utilisant les coordonnées des événements  $E_1$  et  $E_2$  dans le référentiel de la frégate impériale, exprimez la vitesse  $u'$  du vaisseau de Han dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ . Montrez que vous retrouvez ainsi la loi relativiste de composition des vitesses.

2.5 — Représentez toute cette aventure sur un diagramme d’espace-temps (Minkowski ou Loedel, selon votre préférence), en indiquant bien les coordonnées de chaque événement dans les deux référentiels (en traçant les projections correspondantes sur les axes). *Pour obtenir une figure lisible, consacrez une page entière à ce diagramme.*

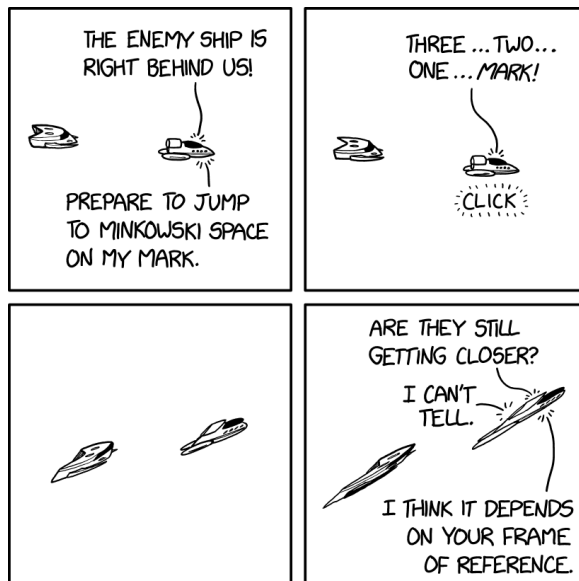


FIGURE 4 – XKCD : “Minkowski Space” (Voir <https://xkcd.com/2646/>)

### 3. *Clocks around the Rock* : l'expérience de Hafele et Keating

À la fin des années 50 les horloges atomiques au césium-133 commencent à être commercialisées, et leur précision et leur stabilité deviennent suffisantes pour qu'il soit possible, avec de telles horloges, de tester directement les prédictions de la relativité concernant la dilatation du temps.

En 1971, Joseph C. Hafele (1933–2014) propose de vérifier la désynchronisation prédite par la Relativité entre des horloges en mouvement les unes par rapport aux autres ("paradoxe des jumeaux"); il suggère de faire voyager des horloges atomiques en leur faisant faire un tour du globe en avion, soit vers l'Est, soit vers l'Ouest, et de comparer le temps qu'elles affichent avec celui d'une autre horloge atomique restée au sol. Joseph C. Hafele et l'astronome Richard E. Keating (1941–2006) réalisent ensemble l'expérience en octobre 1971. Ils effectuent deux tours du monde en avion (avec escales) sur des lignes commerciales, en transportant avec eux quatre horloges atomiques ("*Mister Clock*", fig. 5); ils surveillent la bonne marche des horloges tout au long des deux voyages, avant de comparer la durée enregistrée avec celle qu'indiquent les horloges atomiques de référence restées à l'US Naval Observatory (USNO)<sup>1</sup>.



FIGURE 5 – Joseph C. Hafele (1933–2014) et Richard E. Keating (1941–2006) accompagnant "*Mister Clock*", les 4 horloges atomiques au césium qui occupaient deux sièges dans l'avion. Photo prise un peu avant le départ du vol Pan American 106 de Washington à Londres [Source : *Time Magazine*, 18 octobre 1971].

1. C'est probablement l'une des expériences les moins chères jamais réalisées pour tester la théorie de la Relativité : les horloges atomiques ayant été empruntées à l'USNO, l'ensemble de l'expérience n'a coûté que 8000 dollars de l'époque, dépensés principalement en billets d'avion pour deux tours du monde avec 4 "passagers", *Mr. Clock* occupant deux fauteuils.

**Préambule : temps propre d’une horloge en mouvement**

Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , considérons une horloge parfaite en mouvement, selon une trajectoire quelconque, à une vitesse  $\mathbf{u}(t)$  (non nécessairement constante). À un instant  $t$  donné, on considère le référentiel  $\mathcal{R}'$  qui se confond à cet instant précis  $t$  avec le référentiel propre de l’horloge. Autrement dit, la vitesse  $\mathbf{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  est égale, à cet instant  $t$  particulier, à  $\mathbf{u}(t)$ .

3.1 — En utilisant l’invariance de l’intervalle d’espace-temps, montrez que deux événements de la trajectoire de l’horloge séparés par  $(dt, d\mathbf{r})$  dans le référentiel inertiel  $\mathcal{R}$ , sont séparés dans le référentiel inertiel tangent  $\mathcal{R}'$  par  $(d\tau, \mathbf{0})$ , avec

$$d\tau = \frac{1}{\gamma(\mathbf{u})} dt = \left(1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} dt = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} dt$$

où  $\tau$  est le *temps propre* de l’horloge, c’est à dire le temps que l’horloge affiche.

3.2 — Pour des vitesses  $u$  faibles devant la vitesse de la lumière, développez l’expression précédente en ne conservant que les termes de premier ordre en  $u^2/c^2$ .

**Dilatation cinématique du temps**

Afin de modéliser l’expérience de Hafele et Keating, on se placera dans le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_g$ , à savoir le référentiel dont l’origine est le centre de la Terre, et dont les trois axes pointent vers des étoiles lointaines (fig. 6). Comme les expériences considérées ne durent que quelques jours, on assimilera le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_g$  à un référentiel galiléen.

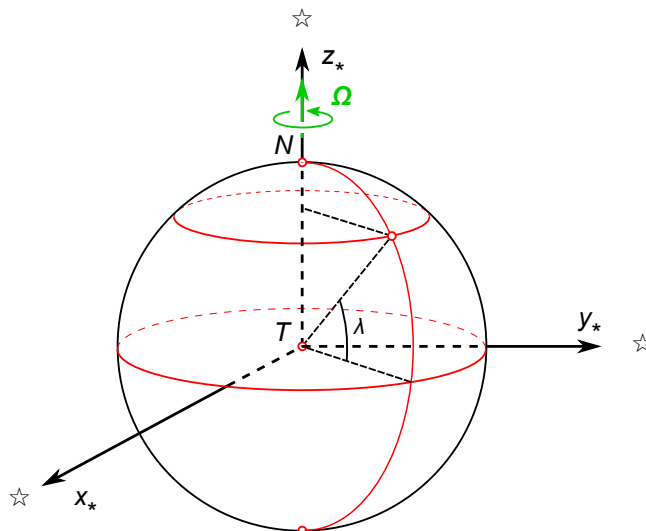


FIGURE 6 – Référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_g$  muni du repère  $(T, x_*, y_*, z_*)$ , dont l’origine est le centre  $T$  de la terre, et dont les axes sont définis par les étoiles. Pour une expérience de courte durée (comparée à la période de révolution de la Terre autour du Soleil), le référentiel géocentrique peut être considéré comme galiléen; le référentiel de Copernic (système solaire) est une meilleure approximation d’un référentiel galiléen.

On considère de plus que ce référentiel  $\mathcal{R}_g$  est muni d’une horloge idéale et parfaite, qui fournit le temps  $t$  : cette horloge, solidaire de  $\mathcal{R}_g$ , ne subit ni la rotation de la Terre, ni le champ de gravité terrestre (elle pourrait par exemple être placée en son centre).

Pour comprendre l'expérience de Hafele et Keating, on s'intéressera à la trajectoire de trois horloges particulières : une horloge atomique placée en un lieu donné à la surface terrestre, immobile par rapport au sol ; et deux horloges qui font chacune un tour du monde en avion, l'une vers l'Est, et l'autre vers l'Ouest.

**3.3** — Faites un dessin, du point de vue d'un observateur placé au pôle Nord, à très haute altitude, et qui regarde la Terre tourner au dessous de lui. Indiquez le sens de rotation de la Terre. Schématisez l'horloge immobile au sol, et les horloges qui font un tour du monde vers l'Est et vers l'Ouest en volant au-dessus de l'équateur.

On notera  $R_{\oplus}$  le rayon de la Terre,  $\Omega_{\oplus}$  sa vitesse angulaire de rotation dans le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_g$ , et  $M_{\oplus}$  la masse de la Terre.

**3.4** — Connaissant la durée d'une révolution terrestre par rapport aux étoiles lointaines (jour sidéral), déduisez-en la vitesse angulaire  $\Omega_{\oplus}$  de rotation de la Terre dans le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_g$ . Donnez son expression et sa valeur numérique.

**3.5** — Supposons, pour simplifier, que l'horloge immobile par rapport au sol soit placée en un point de la surface terrestre à l'équateur. Donnez l'expression littérale et la valeur numérique de la vitesse instantanée (en m/s) de cette horloge dans le référentiel géocentrique.

**3.6** — Déduisez-en le facteur  $\gamma$  associé, et l'expression de l'intervalle de temps propre  $d\tau_{\text{fixe}}$  pour cette horloge fixe par rapport en sol en fonction de  $dt$ . Estimez numériquement le facteur  $\beta$ . En considérant que les vitesses ici sont faibles devant  $c$ , déduisez-en une expression approchée de  $d\tau_{\text{fixe}}$ , de la forme :

$$d\tau_{\text{fixe}} \approx \left(1 - \frac{P}{2c^2}\right) dt \quad (1)$$

Donnez l'expression de  $P$  en fonction de  $R_{\oplus}$  et  $\Omega_{\oplus}$ .

On s'intéresse maintenant à une horloge qui fait le tour du monde à bord d'un avion. L'avion vole à l'altitude  $h$  et à la vitesse  $v$  par rapport au sol, en longeant l'équateur terrestre. On comptera  $v$  positivement si l'avion vole vers l'Est, et négativement s'il vole vers l'Ouest.

**3.7** — En utilisant la loi relativiste de composition des vitesses, donnez l'expression de la vitesse instantanée de l'avion volant au-dessus de l'équateur à l'altitude  $h$  dans le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_g$ . Montrez que vu les faibles vitesses considérées ici par rapport à  $c$ , l'expression peut se réduire à la loi classique de composition des vitesses.

**3.8** — Déduisez-en le facteur  $\gamma$  correspondant, et l'expression de l'intervalle de temps propre  $d\tau_{\text{vol}}$  en fonction de  $dt$  et de la vitesse  $v$  de l'avion. Montrez qu'en développant au premier ordre,  $d\tau_{\text{vol}}$  peut se mettre sous la forme :

$$d\tau_{\text{vol}} \approx \left(1 - \frac{Q}{2c^2}\right) dt \quad (2)$$

et donnez l'expression de  $Q$  en fonction de  $v$ ,  $R_{\oplus}$ ,  $h$  et  $\Omega_{\oplus}$ .

## Effet supplémentaire de la gravitation sur l'écoulement du temps

Comme l'expérience est menée sur Terre, les horloges sont plongées dans le champ gravitationnel terrestre. La Relativité Générale prédit que des horloges parfaites se comportent différemment selon l'intensité du champ gravitationnel qu'elles subissent : plus le champ est intense, et plus l'écoulement du temps ralentit. Le traitement complet nécessiterait d'utiliser le formalisme de la Relativité Générale ; cependant, du fait de la faible intensité du champ terrestre, on pourra se permettre ici d'ajouter



un simple terme correctif gravitationnel dans les équations (1) et (2). Ces équations deviennent ainsi : pour l’horloge fixe,

$$d\tau_{\text{fixe}} \approx \left(1 - \frac{P}{2c^2}\right) dt \quad \longrightarrow \quad d\tau_{\text{fixe}} \approx \left(1 + \frac{\Phi(r_{\text{fixe}})}{c^2} - \frac{P}{2c^2}\right) dt \quad (3)$$

et, pour l’horloge à bord de l’avion,

$$d\tau_{\text{vol}} \approx \left(1 - \frac{Q}{2c^2}\right) dt \quad \longrightarrow \quad d\tau_{\text{vol}} \approx \left(1 + \frac{\Phi(r_{\text{vol}})}{c^2} - \frac{Q}{2c^2}\right) dt \quad (4)$$

où  $\Phi(r)$  est l’intensité du potentiel gravitationnel que subit un objet à la distance  $r \geq R_{\oplus}$  du centre de la Terre :

$$\Phi(r) = -\frac{GM_{\oplus}}{r}$$

avec  $R_{\oplus}$  le rayon de la Terre, et  $M_{\oplus}$  sa masse (Le champ gravitationnel dérive de ce potentiel  $\Phi$ ).

**3.9** — Explicitez les équations (3) et (4) respectivement pour l’horloge fixe au sol, et pour l’horloge qui vole à l’altitude  $h$  ; en particulier, explicitez  $r_{\text{fixe}}$  et  $r_{\text{vol}}$ .

### Calcul approché du décalage des horloges

**3.10** — En intégrant  $d\tau_{\text{fixe}}$  et  $d\tau_{\text{vol}}$  sur tout le parcours, entre l’instant où l’horloge qui voyage quitte l’horloge fixe (événement  $A$ ), et celui où les deux horloges se retrouvent au point de départ à la fin du voyage (événement  $B$ ), calculez les durées  $\Delta\tau_{\text{fixe}}$  et  $\Delta\tau_{\text{vol}}$  mesurées pendant l’ensemble du voyage en fonction de  $\Delta t$ , le temps écoulé entre les événements  $A$  et  $B$  dans le référentiel géocentrique. Pour simplifier, on supposera que l’avion vole à vitesse et à altitude constantes, au dessus de l’équateur terrestre, et on négligera les phases d’atterrissage et de décollage de l’avion.

**3.11** — Exprimez le rapport  $\Delta\tau_{\text{vol}}/\Delta\tau_{\text{fixe}}$ . Pour l’instant, ne poussez pas plus loin le calcul.

**3.12** — L’effet que l’on cherche à mesurer est très faible. On pourra considérer que les vitesses en jeu sont faibles devant  $c$ , et que, de plus, l’altitude de l’avion est petite devant le rayon terrestre :  $h \ll R_{\oplus}$ . Pour notre calcul, afin de ne conserver que les termes significatifs dans le développement, estimez numériquement les termes suivants :

$$\frac{GM_{\oplus}h}{R_{\oplus}^2c^2} \quad \frac{v^2}{2c^2} \quad \frac{R_{\oplus}\Omega_{\oplus}v}{c^2} \quad \frac{h^2\Omega_{\oplus}^2}{2c^2} \quad \frac{h\Omega_{\oplus}v}{c^2}$$

**3.13** — En faisant un développement limité au premier ordre de l’expression de  $\Delta\tau_{\text{vol}}/\Delta\tau_{\text{fixe}}$ , i.e. en négligeant les termes d’ordre supérieur en  $c^{-4}$ ,  $c^{-6}$ , etc, et en ne conservant que les termes significatifs, montrez que

$$\frac{\Delta\tau_{\text{vol}}}{\Delta\tau_{\text{fixe}}} \approx 1 + \frac{GM_{\oplus}h}{R_{\oplus}^2c^2} - \frac{R_{\oplus}\Omega_{\oplus}^2h}{c^2} - \frac{R_{\oplus}\Omega_{\oplus}v}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} \quad (5)$$

**3.14** — Exprimez l’accélération de pesanteur  $g$  à l’équateur, en fonction de  $G$ ,  $M_{\oplus}$ ,  $R_{\oplus}$  et  $\Omega_{\oplus}$ . Rappelez-vous de la définition du poids, et n’oubliez pas que la Terre tourne sur elle-même...

**3.15** — En utilisant ce qui précède, montrez que l’équation (5) peut se ré-écrire :

$$\frac{\Delta\tau_{\text{vol}}}{\Delta\tau_{\text{fixe}}} \approx 1 + \frac{gh}{c^2} - \frac{R_{\oplus}\Omega_{\oplus}v}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}$$

**3.16** — Déduisez-en l'expression de l'écart relatif  $\delta(v)$  entre l'horloge qui a volé et l'horloge restée au sol :

$$\delta(v) = \frac{\Delta\tau_{\text{vol}}(v) - \Delta\tau_{\text{fixe}}}{\Delta\tau_{\text{fixe}}}.$$

**3.17** — Estimez numériquement le décalage relatif  $\delta_E$  attendu pour l'horloge qui a fait le tour de monde vers l'Est; calculez de même  $\delta_W$  pour l'horloge qui est partie vers l'Ouest.

**3.18** — Pour le tour du monde effectué vers l'Est (commencé le 4 octobre 1971), les phases de vol ont duré 41.2 heures au total; pour le tour de monde vers l'Ouest (démarré le 13 octobre 1971), la durée cumulée de vol a été de 48.6 heures. Déduisez-en les décalages attendus  $\Delta\tau_E$  et  $\Delta\tau_W$  par rapport à l'horloge restée fixe, et donnez leurs valeurs en nanosecondes. Comparez avec les mesures effectuées par Hafele et Keating (table 1).

Remarque : on a ici grandement simplifié la trajectoire des avions, en supposant un vol circumterrestre au-dessus de l'équateur, à vitesse et altitude constantes. En pratique, Hafele et Keating ont emprunté des vols commerciaux ordinaires : pour obtenir un calcul théorique plus précis, il faut tenir compte de la latitude du lieu dans l'équation (3), et il faut intégrer l'équation (4) le long des véritables trajets des avions de ligne utilisés, en tenant compte des variations de la latitude, de la vitesse de vol et de l'altitude. Hafele et Keating ont pu effectuer ces calculs à partir des données de vol obtenues auprès des équipages de chacun des avions empruntés lors de l'expérience.

Horloge (numéro de série)	$\Delta\tau_E$	$\Delta\tau_W$
#120	-57 ns	+277 ns
#361	-74 ns	+284 ns
#408	-55 ns	+266 ns
#447	-51 ns	+266 ns
Moyenne	$-59 \pm 10$ ns	$+275 \pm 7$ ns

TABLE 1 – Différences de temps observées entre les 4 horloges atomiques utilisées et l'horloge atomique de référence de l'USNO. [Source : Joseph C. Hafele et Richard E. Keating, "Around-the-world atomic clocks : observed relativistic time gains", *Science*, vol. 177, n°4044 (1972), p. 168-170.]

Données :

$$G = 6.67430(15) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \quad c = 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$M_{\oplus} = 5.9722 \times 10^{24} \text{ kg} \quad R_{\oplus} = 6378 \text{ km} \quad g \approx 9.80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$1 \text{ jour sidéral} : T_{\oplus} = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4 \text{ s}.$$

$$\text{Avion : altitude de vol } h = 10 \text{ km ; vitesse par rapport au sol } v = 200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$