

EXAMEN — CORRIGÉ

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2023–2024

Mardi 7 novembre 2023 – 16h-18h

1. Mécanique dans un Train à Grande Vitesse (TGV)

Vous traiterez l'ensemble de cet exercice dans le cadre de la mécanique classique.

Les équation de transformation de la vitesse et de l'accélération lors du passage d'un référentiel galiléen à un second référentiel non-galiléen, ainsi que les expressions des forces inertielles dans un référentiel non galiléen sont rappelées page 8, à la fin de l'énoncé de l'exercice.

TGV se déplaçant en ligne droite, à vitesse constante

On raisonnera dans le référentiel local terrestre \mathcal{R} , qu'on supposera galiléen/inertiel. On munit \mathcal{R} d'une origine arbitraire O et d'un trièdre direct $\{e_x, e_y, e_z\}$, où le vecteur e_z est orienté selon la verticale locale, et e_x, e_y sont dans le plan horizontal.

Un train à grande vitesse (TGV) se déplace en ligne droite à la vitesse $v = 324 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. On considère le référentiel d'un des wagons, que l'on note \mathcal{R}' ; on munit ce référentiel d'une origine arbitraire O' (placée au centre du wagon), et du même trièdre $\{e_x, e_y, e_z\}$ que précédemment. On choisit l'orientation de e_x dans la direction du mouvement du train : la vitesse relative $\mathbf{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ s'écrit ainsi $\mathbf{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = v \mathbf{e}_x$. On prendra l'origine du temps t à l'instant où les origines O et O' coïncident (figure 1).

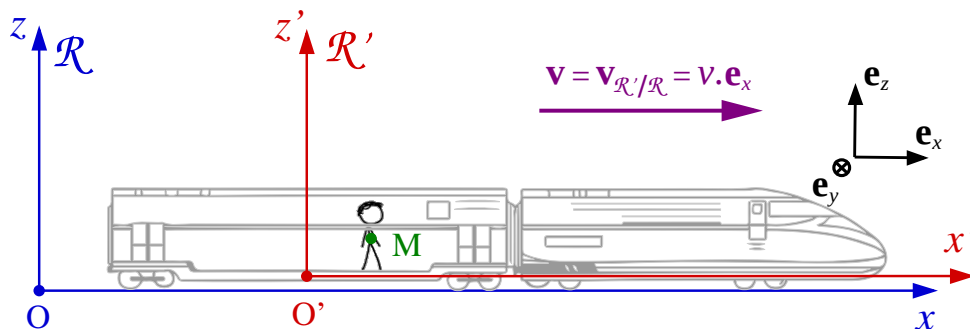


FIGURE 1 – Référentiel terrestre (solidaire du sol et des rails) et référentiel du wagon.

On considère un passager M (supposé ponctuel) dont on analyse le mouvement dans les deux référentiels, celui du sol et celui du wagon. On repère à chaque instant la position de M dans \mathcal{R} par le vecteur position $\mathbf{r}(t) = \mathbf{OM}(t) : (x, y, z)$, et par le vecteur position $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{O'M}(t) : (x', y', z')$ dans \mathcal{R}' .

1.1 — Le référentiel du wagon est-il galiléen/inertiel ?

Le train se déplaçant selon un mouvement de translation uniforme (i.e. à vitesse constante) dans le référentiel terrestre \mathcal{R} supposé inertiel/galiléen, le référentiel solidaire du wagon est par conséquent lui aussi inertiel/galiléen.

1.2 — Rappelez l'expression de la transformation de Galilée entre \mathcal{R} et \mathcal{R}' : donnez l'expression sous forme vectorielle; puis donnez les expressions des coordonnées (x', y', z') du mobile dans le référentiel du wagon en fonction de ses coordonnées (x, y, z) dans le référentiel local terrestre.

Considérons un mobile ponctuel M qui se trouve à l'instant t à la position définie par $\mathbf{r} = \mathbf{OM} : (x, y, z)$ dans le repère associé au référentiel terrestre \mathcal{R} supposé galiléen. On souhaite en déduire au même instant t la position $\mathbf{r}' = \mathbf{O'M} : (x', y', z')$ du même mobile dans le référentiel \mathcal{R}' solidaire du wagon, en translation uniforme par rapport à \mathcal{R} à la vitesse constante $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$. Le passage entre les référentiels galiléens (ou inertiels) \mathcal{R} et \mathcal{R}' s'effectue par la transformation suivante (dite *transformation de Galilée*) :

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OO'} + \mathbf{O'M} \quad \text{d'où} \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v}t.$$

en choisissant l'origine du temps quand les origines O et O' se confondent.

Comme on a choisi de munir les deux référentiels de deux repères dont les axes sont parallèles, et où les axes (Ox) et $(O'x')$ sont choisis parallèlement à la vitesse relative $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v \mathbf{e}_x$, en projetant sur les axes la relation précédente, la transformation de Galilée peut s'écrire :

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \text{et réciproquement} \quad \begin{cases} x = x' + vt \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

On suppose ici que le temps s'écoule de la même manière dans les deux référentiels considérés (hypothèse d'un temps universel) et on choisit par convention $t = t' = 0$ quand les origines O et O' se confondent.

1.3 — Rappelez la loi classique de composition des vitesses entre les référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' . On notera respectivement $\mathbf{u}(t) : (u_x = dx/dt, u_y = dy/dt, u_z = dz/dt)$ la vitesse du mobile M dans \mathcal{R} , et $\mathbf{u}'(t) : (u'_x = dx'/dt, u'_y = dy'/dt, u'_z = dz'/dt)$ sa vitesse dans \mathcal{R}' . Donnez la loi de composition des vitesses sous forme vectorielle, puis en composantes.

La loi de composition des vitesses s'obtient en dérivant les équations de la transformation de Galilée par rapport au temps t . Connaissant la vitesse instantanée \mathbf{u} d'un mobile dans le référentiel \mathcal{R} , la vitesse \mathbf{u}' du même objet vu dans le référentiel \mathcal{R}' s'écrira :

$$\mathbf{u}' = \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} - \mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{v} \quad \text{et réciproquement} \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v}.$$

On parle aussi d'*additivité des vitesses*.

En utilisant les mêmes conventions que précédemment (axes Ox et $O'x'$ choisis selon la vitesse relative \mathbf{v} entre les référentiels), cette relation, en composantes, devient :

$$\begin{cases} u'_x = u_x - v \\ u'_y = u_y \\ u'_z = u_z \end{cases} \quad \text{et réciproquement} \quad \begin{cases} u_x = u'_x + v \\ u_y = u'_y \\ u_z = u'_z \end{cases}$$

Remarque : cette expression de la loi de composition des vitesses reste valide même si les origines O et O' ne se confondent pas à $t = 0$.

1.4 — Un passager du train se déplace dans un des wagons à $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ le long du train, depuis la motrice vers la queue du train. Donnez l'expression de sa vitesse dans les deux référentiels (vous donnerez toutes les composantes). Application numérique pour u'_x et u_x (*attention aux unités*).

La vitesse du TGV dans le référentiel terrestre vaut $v = 324 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 90 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Dans le référentiel \mathcal{R}' solidaire du wagon, avec le système d'axes choisi (\mathbf{e}_x selon la vitesse \mathbf{v}), les composantes de la vitesse \mathbf{u}' du passager s'écrivent : $\mathbf{u}' : (u'_x = -1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, u'_y = 0, u'_z = 0)$. En appliquant la loi classique de composition des vitesses, on obtient les composantes de la vitesse \mathbf{u} du passager dans le référentiel terrestre \mathcal{R} :

$$\begin{cases} u_x = u'_x + v = -1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} + 90 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = +89 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ u_y = u'_y = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ u_z = u'_z = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{cases}$$

1.5 — Un second passager se déplace latéralement à $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, perpendiculairement à la direction du mouvement du train. Donnez les trois composantes de sa vitesse dans \mathcal{R} , puis dans \mathcal{R}' .

Cette fois, les composantes de la vitesse du passager dans le référentiel \mathcal{R}' du wagon sont :

$$\mathbf{u}' : (u'_x = 0, u'_y = +1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, u'_z = 0) \quad (\text{si le passager se déplace par exemple selon } +\mathbf{e}_y).$$

En appliquant la loi classique de composition des vitesses, on obtient dans le référentiel terrestre \mathcal{R} :

$$\mathbf{u} : (u_x = +90 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, u_y = +1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, u_z = 0).$$

Arrivée du train dans un virage

Le TGV arrive dans un virage. On suppose que le rayon de courbure R_c des rails est constant dans le virage (fig. 2). Pour simplifier le traitement du problème, on redéfinit le repère du référentiel terrestre \mathcal{R} au centre du cercle de rayon $R_c = 5 \text{ km}$ coïncidant avec la voie ferrée dans le virage. On placera le centre O' du repère solidaire \mathcal{R}' du train au centre d'un des wagons et on choisit dans \mathcal{R}' un trièdre $\{\mathbf{e}_{x'}, \mathbf{e}_{y'}, \mathbf{e}_{z'}\}$ dont l'orientation reste tangente au train au point O' (fig. 2).

Dans le virage, le TGV maintient sa vitesse de $324 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ par rapport aux rails, mais sa trajectoire est désormais circulaire.

1.6 — Le référentiel solidaire du wagon est-il toujours galiléen ? Justifiez votre réponse.

Dans le référentiel terrestre \mathcal{R} , qu'on suppose galiléen/inertiel, le wagon effectue désormais un mouvement de rotation : le référentiel \mathcal{R}' associé au wagon n'est donc plus galiléen/inertiel. Des forces inertielles (entraînement, Coriolis) peuvent s'y manifester.

1.7 — En utilisant la relation de Varignon, écrivez l'expression de la vitesse $\mathbf{u}(O') = \mathbf{v}_{O'/\mathcal{R}}$ du point O' mesurée dans \mathcal{R} , en fonction du rayon de courbure R_c de la voie ferrée et de la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ du wagon dans le référentiel terrestre \mathcal{R} .

La vitesse du point O' dans le référentiel terrestre \mathcal{R} est la dérivée du vecteur \mathbf{OO}' dans \mathcal{R} ; en appliquant la relation de Varignon, on obtient :

$$\mathbf{v}_{O'/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\mathbf{OO}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\mathbf{OO}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{OO}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OO}'$$

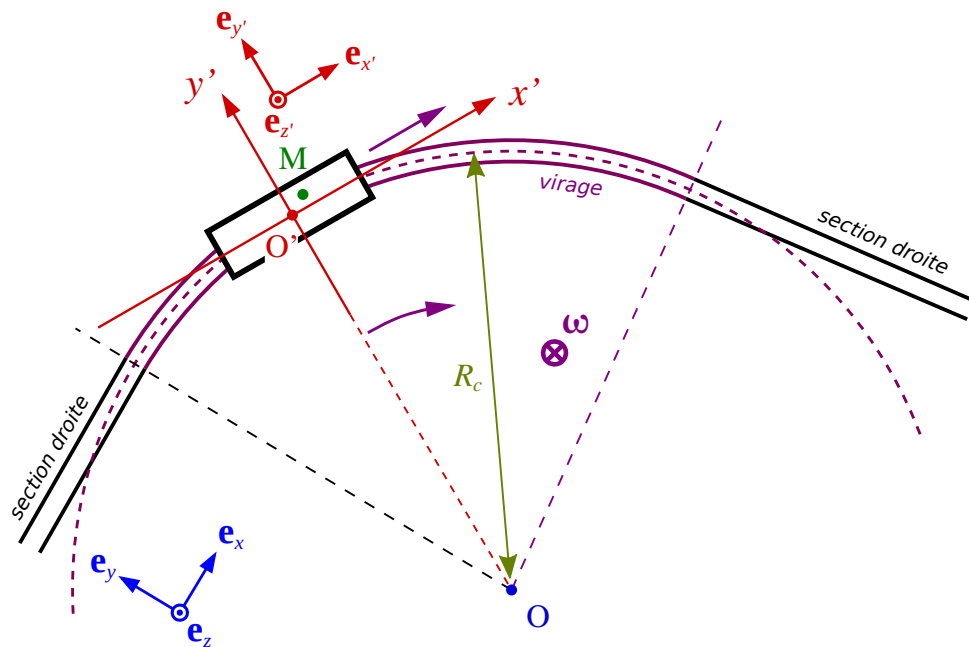


FIGURE 2 – Référentiel terrestre (solidaire du sol et des rails) et référentiel d’un wagon. Pour simplifier, on place l’origine O au centre de courbure de la voie ferrée. Le trièdre $\{e_{x'}, e_{y'}, e_{z'}\}$ tourne avec le wagon, avec l’axe $e_{x'}$ qui reste tangent à la voie ferrée.

car le vecteur $\mathbf{OO}' = R_c e_{y'}$ est un vecteur constant dans la base $\{e_{x'}, e_{y'}, e_{z'}\}$ du référentiel \mathcal{R}' solidaire du wagon. Si on note ω la norme (positive) de $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$, on a de plus $\boldsymbol{\omega} = -\omega e_{z'} = -\omega e_z$ et par conséquent,

$$\mathbf{v}_{O'/\mathcal{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OO}' = (-\omega e_{z'}) \times (R_c e_{y'}) = +R_c \omega e_{x'}.$$

1.8 — Déduisez-en l’expression de la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ du wagon (par exemple, celle du point O') dans le référentiel terrestre \mathcal{R} . Application numérique.

Comme la vitesse du train se maintient à $v_{O'/\mathcal{R}} = 324 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 90 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ dans le virage, et que, par construction, $\mathbf{v}_{O'/\mathcal{R}}$ est selon $e_{x'}$, on en déduit :

$$\mathbf{v}_{O'/\mathcal{R}} = v_{O'/\mathcal{R}} e_{x'} = +R_c \omega e_{x'} \quad \text{d'où} \quad \omega = \frac{v_{O'/\mathcal{R}}}{R_c} = \frac{90 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{5 \times 10^3 \text{ m}} = 0.018 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

1.9 — Montrez que l’accélération du point O' dans \mathcal{R} s’écrit :

$$\mathbf{a}(O') = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OO}') = -\omega^2 \mathbf{OO}'.$$

L’accélération $\mathbf{a}(O') = \mathbf{a}_{O'/\mathcal{R}}$ du point O' dans \mathcal{R} s’obtient en dérivant par rapport au temps t la vitesse $\mathbf{v}_{O'/\mathcal{R}}$ du même point dans le référentiel terrestre \mathcal{R} (obtenue précédemment). En appliquant la relation de Varignon, on obtient :

$$\mathbf{a}(O') = \mathbf{a}_{O'/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\mathbf{v}_{O'/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\mathbf{v}_{O'/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{v}_{O'/\mathcal{R}}.$$

Or, la vitesse $\mathbf{v}_{O'/\mathcal{R}}$ vaut, d’après ce qui précède :

$$\mathbf{v}_{O'/\mathcal{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OO}' = (-\omega e_{z'}) \times (R_c e_{y'}) = +R_c \omega e_{x'}$$

Le vecteur $\mathbf{v}_{O'/\mathcal{R}}$ est donc un vecteur constant dans \mathcal{R}' : sa dérivée dans \mathcal{R}' est donc nulle :

$$\left(\frac{d\mathbf{v}_{O'/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} = \left(\frac{d}{dt}[R_c \omega \mathbf{e}_{x'}]\right)_{\mathcal{R}'} = \mathbf{0}.$$

Par conséquent, l'expression de $\mathbf{a}(O')$ se réduit à :

$$\mathbf{a}(O') = \mathbf{a}_{O'/\mathcal{R}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{v}_{O'/\mathcal{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{O'/\mathcal{R}} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OO}').$$

Enfin, en appliquant la formule du double produit vectoriel, l'expression précédente devient :

$$\mathbf{a}(O') = \mathbf{a}_{O'/\mathcal{R}} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OO}') = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{OO}') \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{OO}' = -\omega^2 \mathbf{OO}'$$

car les vecteurs $\boldsymbol{\omega}$ et \mathbf{OO}' sont orthogonaux.

On considère un passager M initialement immobile au point O' .

1.10 — Faites le bilan des forces qui s'appliquent sur le passager dans le référentiel du wagon, et écrivez la relation fondamentale de la dynamique pour le passager M de masse m , qu'on assimile ici à un point.

Le passager M de masse m est soumis aux forces suivantes :

- Son poids \mathbf{P} , dirigé vers le bas, tel que $\mathbf{P} = -mg \mathbf{e}_z$;
- La réaction \mathbf{R} du plancher du wagon (qui comprend d'éventuelles forces de frottement).

De plus, comme le référentiel \mathcal{R}' n'est pas galiléen, il faut tenir compte des forces inertielles d'entraînement \mathbf{F}_e et de Coriolis \mathbf{F}_c lorsqu'on écrit la seconde loi de Newton (généralisée) pour le passager dans \mathcal{R}' :

$$m \mathbf{a}'(M) = \mathbf{P} + \mathbf{R} + \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_c$$

où $\mathbf{F}_e = -m \mathbf{a}_e$ et $\mathbf{F}_c = -m \mathbf{a}_c$, avec \mathbf{a}_e l'accélération d'entraînement et \mathbf{a}_c l'accélération de Coriolis que subit le passager.

1.11 — Donnez l'expression des accélérations \mathbf{a}_e et \mathbf{a}_c pour le passager M , en fonction de $\boldsymbol{\omega}$ et de R_c . Déduisez-en l'expression des forces inertielles d'entraînement \mathbf{F}_e et de Coriolis \mathbf{F}_c que subit le passager. Applications numériques pour a_e et a_c .

Pour le passager au point M , initialement immobile en $M \equiv O'$, l'accélération d'entraînement \mathbf{a}_e se réduit à :

$$\mathbf{a}_e(M) = \mathbf{a}_{O'/\mathcal{R}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{O}'M) = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OO}') = -\omega^2 \mathbf{OO}' = -\omega^2 R_c \mathbf{e}_{y'}$$

car $\mathbf{O}'M = \mathbf{0}$. On en déduit la force d'entraînement associée :

$$\mathbf{F}_e(M) = -m \mathbf{a}_e(M) = +m\omega^2 \mathbf{OO}' = +m\omega^2 R_c \mathbf{e}_{y'}.$$

On reconnaît l'expression de la *force centrifuge*.

Numériquement, l'accélération centrifuge vaut, en norme :

$$a_e(M) = \omega^2 R_c = (0.018 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1})^2 \times 5000 \text{ m} = 1.62 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

D'autre part, le passager étant immobile dans \mathcal{R}' , l'accélération de Coriolis et la force de Coriolis sont nulles :

$$\mathbf{a}_c(M) = \mathbf{0} \quad \mathbf{F}_c(M) = \mathbf{0}.$$

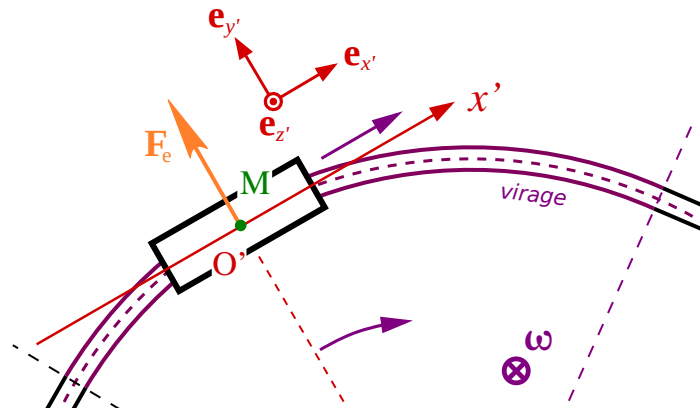


FIGURE 3 – Forces inertielles que subit le passager en M (initialement M est à l’origine) dans le référentiel \mathcal{R}' solide du wagon. La force inertielle d’entraînement \mathbf{F}_e se réduit au terme de force centrifuge, radiale par rapport au centre de courbure de la voie dans le virage, orientée vers l’extérieur du virage. D’autre part, comme le passager est initialement immobile, la force inertielle de Coriolis \mathbf{F}_c est nulle (pas représentée ici).

1.12 — Représentez les forces \mathbf{F}_e et \mathbf{F}_c ressenties par le passager, sur un schéma dans le plan horizontal.

Le passager étant immobile dans le référentiel \mathcal{R}' solide du wagon, la force de Coriolis est nulle. Voir figure 3.

1.13 — Le passager se déplace maintenant à la vitesse $u' = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ selon $\mathbf{e}_{y'}$ dans le référentiel du wagon. Exprimez l’accélération d’entraînement \mathbf{a}_e et l’accélération de Coriolis \mathbf{a}_c . Applications numériques pour a_e et a_c ; commentez.

Les expressions de l’accélération et de la force d’entraînement sont les mêmes qu’à la question précédente. Pour l’accélération et la force de Coriolis, comme le passager possède désormais une vitesse non nulle $\mathbf{u}' = u' \mathbf{e}_{y'}$ dans \mathcal{R}' , avec $u' = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, on obtient :

$$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{u}' = 2(-\omega \mathbf{e}_{z'}) \times u' \mathbf{e}_{y'} = +2\omega u' \mathbf{e}_{x'} \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_c = -m \mathbf{a}_c = -2m\omega u' \mathbf{e}_{x'}$$

Numériquement, la norme a_c de l’accélération de Coriolis \mathbf{a}_c vaut :

$$a_c = +2\omega u' = 2 \times 0.018 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \times 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 0.036 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

ce qui demeure très faible devant l’accélération d’entraînement; c’est aussi très faible comparé à l’accélération de pesanteur g pour le passager. La vitesse du passager est ici trop faible pour qu’il puisse ressentir via ses sens les effets de la force de Coriolis.

1.14 — Sans modifier la vitesse du train, on souhaite limiter l’accélération transverse subie par le passager à $0.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Quel est le rayon minimal de courbure de la voie ferrée dans le virage ?

La vitesse du train (donc ici de l’origine O' du wagon) dans le virage est $v_{O'/\mathcal{R}} = \omega R_c$. On souhaite maintenir cette vitesse à $v_{O'/\mathcal{R}} = 90 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, mais que l’accélération centrifuge a_e ne dépasse pas $a_e^{\text{max}} = 0.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. On souhaite donc que l’inégalité suivante soit vérifiée, tout en maintenant $v_{O'/\mathcal{R}} = \omega R_c = 90 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ constante :

$$a_e \leq a_e^{\text{max}} \quad \text{soit} \quad a_e = \omega^2 R_c \leq a_e^{\text{max}}$$

qu'on peut ré-écrire comme :

$$a_e = \omega^2 R_c = \frac{\omega^2 R_c^2}{R_c} = \frac{v_{O'/\mathcal{R}}^2}{R_c} \leq a_e^{\max} \quad \text{d'où} \quad R_c \geq \frac{v_{O'/\mathcal{R}}^2}{a_e^{\max}} = R_c^{\min}$$

Numériquement, on trouve un rayon de courbure minimal de $R_c^{\min} = 16200 \text{ m} = 16.2 \text{ km}$.

1.15 — Citez 4 solutions permettant de réduire l'inconfort des passagers lorsque le TGV parcourt un virage.

Afin de réduire l'inconfort des passagers dans les virages, autrement dit afin de réduire la force centrifuge (terme dominant ici), on peut :

- (i) Réduire la vitesse du train dans les virages, ce qui réduira par conséquent la force centrifuge ;
- (ii) Augmenter le rayon de courbure des virages de la voie ferrée, lors de la construction de la voie ;
- (iii) Incliner les rails dans les virages (on parle de "dévers" de la voie), afin qu'idéalement, la somme du poids et de la force d'entraînement soit orthogonale à la voie ;
- (iv) Concevoir le train de manière à incliner les wagons dans les virages : c'est le principe des *trains pendulaires*.

1.16 — Commentez le message suivant de la SNCF (fig. 4).



FIGURE 4 – Message affiché dans la voiture-bar d'un TGV.

Au premier ordre, ce n'est pas la vitesse du train qui est la cause directe de l'inconfort : si le train se déplaçait selon un mouvement parfait de translation uniforme, le mouvement du train ne serait pas détectable (principe même d'un référentiel galiléen). La Terre se déplace bien dans l'espace à $30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ sans qu'on ressente son mouvement. Ce sont les accélérations inertielles, et par conséquent les forces inertielles qui sont sources d'inconfort pour les passagers. Toutefois, l'intensité de la force centrifuge est directement liée à la vitesse du train dans les virages (elle est proportionnelle au carré de la vitesse) : le message de la SNCF reste donc fondé.

Rappels : transformation de la vitesse et de l'accélération entre un référentiel galiléen et un référentiel non-galiléen. Généralisation de la deuxième loi de Newton (RFD). Forces inertielles. Soient deux référentiels : un premier référentiel \mathcal{R} , galiléen (ou inertiel), et un second référentiel \mathcal{R}' , animé d'un mouvement quelconque par rapport à \mathcal{R} et par conséquent non galiléen. On appelle O et O' les origines choisies dans les référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' , respectivement. De plus, on note $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ le vecteur vitesse angulaire instantané de rotation du référentiel \mathcal{R}' par rapport au référentiel \mathcal{R} .

Considérons un point matériel M en mouvement quelconque, dont la position à chaque instant dans les référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' est repérée par les vecteurs positions $\mathbf{r}(t) = \mathbf{OM}(t)$ et $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{O'M}(t)$ respectivement.

Si on note $\mathbf{u}(t)$ la vitesse instantanée de M mesurée dans le référentiel \mathcal{R} , et $\mathbf{u}'(t)$ sa vitesse instantanée mesurée cette fois dans \mathcal{R}' , ces deux vitesses se déduisent l'une de l'autre par la relation :

$$\mathbf{u}(t) = \left(\frac{d\mathbf{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \quad \mathbf{u}'(t) = \left(\frac{d\mathbf{O'M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}'}$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}_{O'/\mathcal{R}} + \mathbf{u}'(t) + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{O'M}.$$

Si on note $\mathbf{a}(t)$ l'accélération de M dans le référentiel \mathcal{R} , et $\mathbf{a}'(t)$ son accélération dans \mathcal{R}' , on aura, en dérivant la relation précédente (et en utilisant la relation de Varignon),

$$\mathbf{a}(t) = \left(\frac{d^2\mathbf{OM}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}} \quad \mathbf{a}'(t) = \left(\frac{d^2\mathbf{O'M}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}'} \quad \mathbf{a}(t) = \mathbf{a}'(t) + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c$$

où les termes d'accélération supplémentaires sont l'**accélération d'entraînement** \mathbf{a}_e et l'**accélération de Coriolis** \mathbf{a}_c qui s'écrivent respectivement :

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_{e/\mathcal{R}} = \mathbf{a}(O'/\mathcal{R}) + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{O'M}) + \frac{d\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \times \mathbf{O'M} \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{u}'$$

Si on considère un mobile M de masse m dans le référentiel non galiléen \mathcal{R}' , la deuxième loi de Newton (RFD) se généralise sous la forme :

$$m\mathbf{a}' = \sum \mathbf{F}_{\text{ext}} - m\mathbf{a}_e - m\mathbf{a}_c = \sum \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_c$$

avec $\mathbf{F}_e = -m\mathbf{a}_e$ la force inertielle d'entraînement et $\mathbf{F}_c = -m\mathbf{a}_c$ la force inertielle de Coriolis.

Double produit vectoriel. Une relation utile, notamment en physique, est la formule du double produit vectoriel : si \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{C} sont trois vecteurs quelconques, alors :

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}.$$

2. Course-poursuite interstellaire

Vous traiterez cet exercice dans le cadre de la relativité restreinte.

Leia a été capturée et est retenue prisonnière à bord d’une frégate impériale (référentiel \mathcal{R}') qui a quitté la planète Tatooine (référentiel \mathcal{R}) à $t = t' = 0$, et qui s’éloigne à la vitesse constante $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$ avec $v < c$. Han, lui aussi sur Tatooine, se rend compte de sa disparition à $t = t_1 > 0$, saute aussitôt à bord du Faucon Millenium, “le tas de ferraille le plus rapide de la galaxie”, et se lance à sa poursuite, à la vitesse $\mathbf{u} = u \mathbf{e}_x$, avec $v < u < c$ (dans la précipitation, il n’a hélas pas eu le temps de réparer son propulseur superluminique). Son vaisseau se déplaçant plus vite que la frégate, il la rattrape à l’instant $t = t_2$. On notera $E_1 : (t_1, x_1)$ l’événement correspondant au départ de Han, et $E_2 : (t_2, x_2)$ l’événement associé à la rencontre du vaisseau de Han et de la frégate qui emporte Leia. On prendra l’astroport de départ sur Tatooine comme origine O du référentiel \mathcal{R} , et un point arbitraire de la frégate comme origine O' dans \mathcal{R}' .

2.1 — Écrivez les transformations des coordonnées (ct, x, y, z) d’un événement lors du passage d’un référentiel galiléen \mathcal{R} à un autre référentiel galiléen \mathcal{R}' se déplaçant à la vitesse $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$ par rapport à \mathcal{R} . Écrivez cette relation sous forme matricielle.

La transformation de Lorentz s’écrit dans ce cas :

$$\left\{ \begin{array}{l} t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \end{array} \right. \quad \text{i.e.} \quad \left\{ \begin{array}{l} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{array} \right. \quad \text{et réciproquement} \quad \left\{ \begin{array}{l} ct = \gamma(ct' + \beta x') \\ x = \gamma(x' + \beta ct') \\ y = y' \\ z = z' \end{array} \right.$$

Où on pose :

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{et} \quad \gamma = \gamma(v) = (1 - \beta^2)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

On peut mettre ces équations sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & +\beta\gamma & 0 & 0 \\ +\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

2.2 — À quel instant t_2 Han rattrape-t-il la frégate ?

Lorsqu’il rattrape la frégate, Han a parcouru la distance $x_2 - x_1$ en un temps $t_2 - t_1$ à la vitesse u dans le référentiel \mathcal{R} . On a donc :

$$x_2 - x_1 = u(t_2 - t_1) \quad \text{avec} \quad x_1 = 0 \quad \text{d’où} \quad x_2 = u(t_2 - t_1)$$

Par ailleurs, à l’instant t_2 dans le référentiel \mathcal{R} , la frégate impériale a parcouru la distance x_2 en un temps t_2 à la vitesse v , et par conséquent $x_2 = vt_2$. On en déduit :

$$x_2 = u(t_2 - t_1) = vt_2 \quad \text{d’où} \quad t_2(u - v) = ut_1 \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{u}{u - v} t_1.$$

2.3 — Établissez, dans les deux référentiels (supposés galiléens) \mathcal{R} et \mathcal{R}' les coordonnées spatio-temporelles des événements E_1 et E_2 . Exprimez toutes les coordonnées $(x_1, t'_1, x'_1, t_2, x_2, t'_2$ et $x'_2)$ en fonction de t_1, u et v .

Dans le référentiel \mathcal{R} , les coordonnées de l'événement E_1 sont naturellement $(t_1, x_1 = 0)$. On obtient immédiatement les coordonnées de E_1 dans \mathcal{R}' en utilisant la transformation de Lorentz,

$$ct'_1 = \gamma(ct_1 - \beta x_1) \quad \text{i.e.} \quad t'_1 = \gamma t_1$$

et,

$$x'_1 = \gamma(x_1 - \beta ct_1) = -\beta\gamma ct_1 = -\gamma vt_1 < 0.$$

Pour l'événement E_2 , on a établi précédemment que $t_2 = ut_1/(u - v)$. De plus, l'événement E_2 a lieu à la position x_2 qui vérifie, d'après le raisonnement précédent :

$$x_2 = x_1 + u(t_2 - t_1) = u \left[\frac{u}{u - v} t_1 - t_1 \right] = \frac{uv}{u - v} t_1.$$

De plus, l'événement E_2 a lieu par définition en $x'_2 = 0$ (position de la frégate dans son propre référentiel \mathcal{R}'). En utilisant la transformation de Lorentz, on obtient t'_2 ,

$$ct_2 = \gamma(ct'_2 + \beta x'_2) = \gamma ct'_2 \quad \text{soit} \quad t'_2 = \frac{1}{\gamma} t_2 = \frac{1}{\gamma} \frac{u}{u - v} t_1 = \gamma(1 - \beta^2) \frac{u}{u - v} t_1$$

car $\gamma^{-2} = (1 - \beta^2)$.

Les coordonnées des événements E_1 et E_2 sont donc :

	\mathcal{R}	\mathcal{R}'
E_1	$t_1 > 0$ $x_1 = 0$	$t'_1 = \gamma t_1$ $x'_1 = -\gamma vt_1 < 0$
E_2	$t_2 = \frac{u}{u - v} t_1$ $x_2 = \frac{uv}{u - v} t_1$	$t'_2 = \frac{1}{\gamma} \frac{u}{u - v} t_1 = \gamma(1 - \beta^2) \frac{u}{u - v} t_1$ $x'_2 = 0$

2.4 — En utilisant les coordonnées des événements E_1 et E_2 dans le référentiel de la frégate impériale, exprimez la vitesse u' du vaisseau de Han dans le référentiel \mathcal{R}' . Montrez que vous retrouvez ainsi la loi relativiste de composition des vitesses.

Le vaisseau de Han se déplace selon e_x à la vitesse constante u dans le référentiel \mathcal{R} , et à la vitesse constante u' dans le référentiel \mathcal{R}' . Les événements E_1 et E_2 appartenant tous deux à la *ligne d'univers* de Han, on peut déduire de leurs coordonnées respectives dans \mathcal{R}' la vitesse u' de Han :

$$u' = \frac{x'_2 - x'_1}{t'_2 - t'_1}.$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 u' &= \frac{x'_2 - x'_1}{t'_2 - t'_1} = \frac{0 + \gamma v t_1}{\gamma(1 - \beta^2) \frac{u}{u-v} t_1 - \gamma t_1} = \frac{v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(\frac{u}{u-v}\right) - 1} \\
 &= \frac{v(u-v)}{u - \frac{uv^2}{c^2} - u + v} = \frac{v(u-v)}{v \left[1 - \frac{uv}{c^2}\right]} = \frac{u-v}{1 - \frac{uv}{c^2}}
 \end{aligned}$$

On retrouve ainsi la loi relativiste de composition des vitesses (dans le cas de vitesses parallèles au mouvement relatif entre les référentiels) :

$$u' = \frac{u-v}{1 - \frac{uv}{c^2}}.$$

2.5 — Représentez toute cette aventure sur un diagramme d'espace-temps (Minkowski ou Loedel, selon votre préférence), en indiquant bien les coordonnées de chaque événement dans les deux référentiels (en traçant les projections correspondantes sur les axes). *Pour obtenir une figure lisible, consacrez une page entière à ce diagramme.*

Voir figure 5.

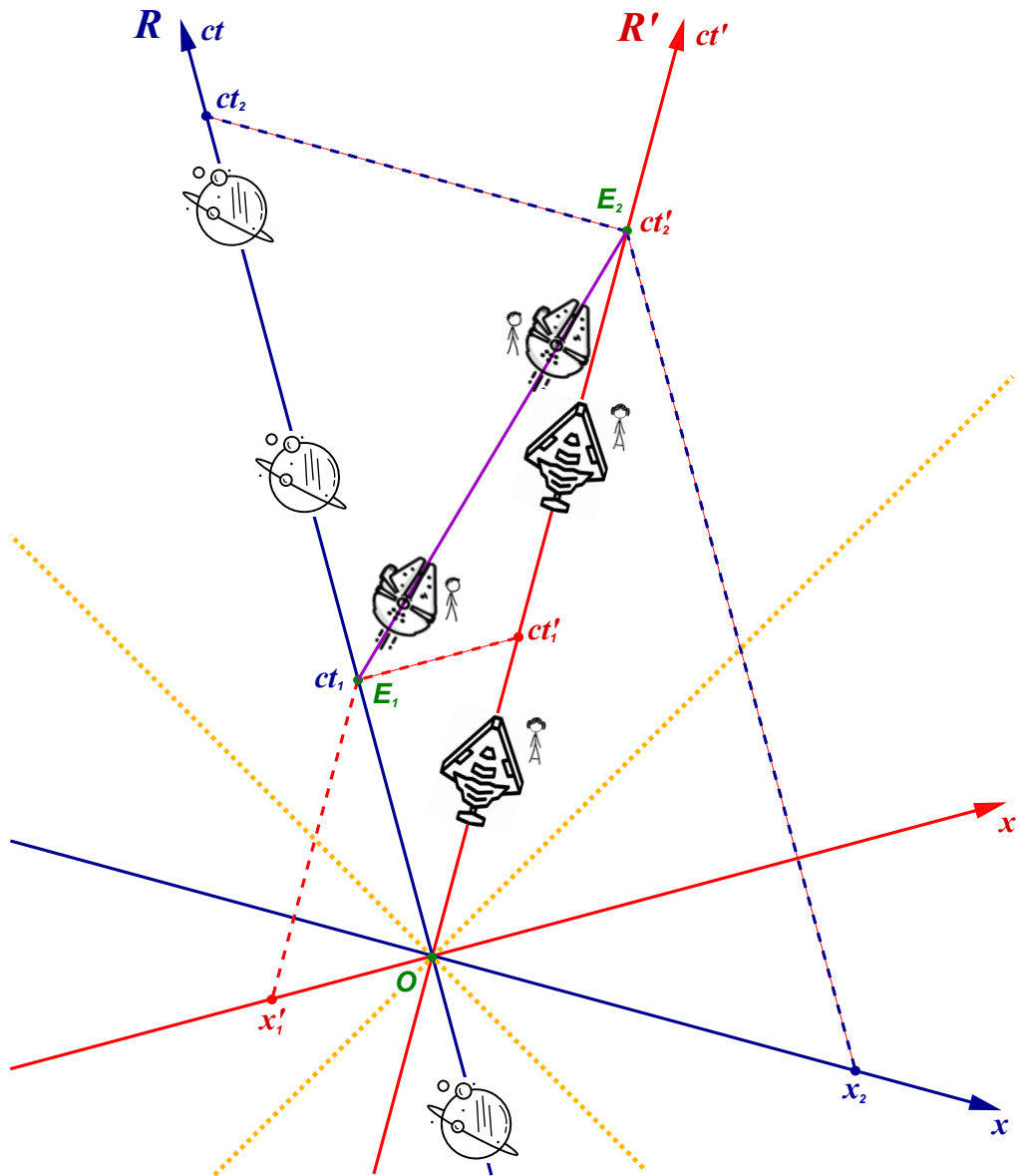


FIGURE 5 – Diagramme d’espace-temps (diagramme de Loedel). Trajectoires de la frégate qui emporte Leia (en rouge, dans \mathcal{R}') et de Han (en mauve) qui quitte Tatooine à $t = t_1 > 0$ (événement E_1) et rattrape Leia à $t = t_2$ (événement E_2).

3. *Clocks around the Rock* : l'expérience de Hafele et Keating

À la fin des années 50 les horloges atomiques au césium-133 commencent à être commercialisées, et leur précision et leur stabilité deviennent suffisantes pour qu'il soit possible, avec de telles horloges, de tester directement les prédictions de la relativité concernant la dilatation du temps.

En 1971, Joseph C. Hafele (1933–2014) propose de vérifier la désynchronisation prédite par la Relativité entre des horloges en mouvement les unes par rapport aux autres ("paradoxe des jumeaux"); il suggère de faire voyager des horloges atomiques en leur faisant faire un tour du globe en avion, soit vers l'Est, soit vers l'Ouest, et de comparer le temps qu'elles affichent avec celui d'une autre horloge atomique restée au sol. Joseph C. Hafele et l'astronome Richard E. Keating (1941–2006) réalisent ensemble l'expérience en octobre 1971. Ils effectuent deux tours du monde en avion (avec escales) sur des lignes commerciales, en transportant avec eux quatre horloges atomiques ("*Mister Clock*", fig. 6); ils surveillent la bonne marche des horloges tout au long des deux voyages, avant de comparer la durée enregistrée avec celle qu'indiquent les horloges atomiques de référence restées à l'US Naval Observatory (USNO)¹.



FIGURE 6 – Joseph C. Hafele (1933–2014) et Richard E. Keating (1941–2006) accompagnant "*Mister Clock*", les 4 horloges atomiques au césium qui occupaient deux sièges dans l'avion. Photo prise un peu avant le départ du vol Pan American 106 de Washington à Londres [Source : *Time Magazine*, 18 octobre 1971].

1. C'est probablement l'une des expériences les moins chères jamais réalisées pour tester la théorie de la Relativité : les horloges atomiques ayant été empruntées à l'USNO, l'ensemble de l'expérience n'a coûté que 8000 dollars de l'époque, dépensés principalement en billets d'avion pour deux tours du monde avec 4 "passagers", *Mr. Clock* occupant deux fauteuils.

Préambule : temps propre d'une horloge en mouvement

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R} , considérons une horloge parfaite en mouvement, selon une trajectoire quelconque, à une vitesse $\mathbf{u}(t)$ (non nécessairement constante). À un instant t donné, on considère le référentiel \mathcal{R}' qui se confond à cet instant précis t avec le référentiel propre de l'horloge. Autrement dit, la vitesse $\mathbf{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} est égale, à cet instant t particulier, à $\mathbf{u}(t)$.

3.1 — En utilisant l'invariance de l'intervalle d'espace-temps, montrez que deux événements de la trajectoire de l'horloge séparés par $(dt, d\mathbf{r})$ dans le référentiel inertiel \mathcal{R} , sont séparés dans le référentiel inertiel tangent \mathcal{R}' par $(d\tau, \mathbf{0})$, avec

$$d\tau = \frac{1}{\gamma(\mathbf{u})} dt = \left(1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} dt = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} dt$$

où τ est le *temps propre* de l'horloge, c'est à dire le temps que l'horloge affiche.

Considérons deux événements infiniment proches de la trajectoire de l'horloge : ces deux événements sont séparés par l'intervalle $(dt, d\mathbf{r})$, et par $(d\tau, \mathbf{0})$ dans le référentiel inertiel tangent \mathcal{R}' , qui se confond avec le référentiel propre de l'horloge à cet instant t . Par invariance du carré de l'intervalle d'espace-temps, on aura donc,

$$ds^2 = c^2(dt)^2 - (d\mathbf{r})^2 = c^2(d\tau)^2$$

En factorisant par $c^2(dt)^2$, on obtient :

$$c^2(d\tau)^2 = c^2(dt)^2 \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2\right] = c^2(dt)^2 \left[1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}\right]$$

où on reconnaît l'expression de la vitesse instantanée de l'horloge dans le référentiel \mathcal{R} , $\mathbf{u}(t) = d\mathbf{r}/dt$. On obtient finalement :

$$d\tau = \left(1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} dt = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{\gamma(\mathbf{u})} dt.$$

3.2 — Pour des vitesses u faibles devant la vitesse de la lumière, développez l'expression précédente en ne conservant que les termes de premier ordre en u^2/c^2 .

En développant le résultat précédent on obtient :

$$d\tau = \frac{1}{\gamma(\mathbf{u})} dt = \left[1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}\right]^{\frac{1}{2}} dt = \left[1 - \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \dots\right] dt \approx \left[1 - \frac{u^2}{2c^2}\right] dt$$

en ne conservant que le terme de premier ordre en u^2/c^2 .

Dilatation cinématique du temps

Afin de modéliser l'expérience de Hafele et Keating, on se placera dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_g , à savoir le référentiel dont l'origine est le centre de la Terre, et dont les trois axes pointent vers des étoiles lointaines (fig. 7). Comme les expériences considérées ne durent que quelques jours, on assimilera le référentiel géocentrique \mathcal{R}_g à un référentiel galiléen.

On considère de plus que ce référentiel \mathcal{R}_g est muni d'une horloge idéale et parfaite, qui fournit le temps t : cette horloge, solidaire de \mathcal{R}_g , ne subit ni la rotation de la Terre, ni le champ de gravité terrestre (elle pourrait par exemple être placée en son centre).

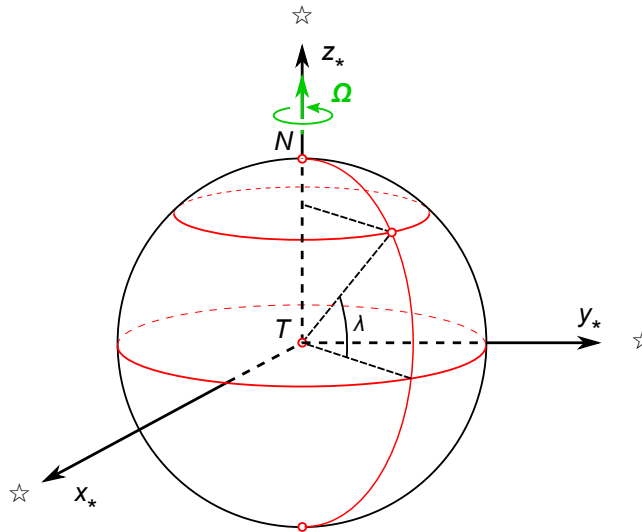


FIGURE 7 – Référentiel géocentrique \mathcal{R}_g muni du repère (T, x_*, y_*, z_*) , dont l’origine est le centre T de la terre, et dont les axes sont définis par les étoiles. Pour une expérience de courte durée (comparée à la période de révolution de la Terre autour du Soleil), le référentiel géocentrique peut être considéré comme galiléen; le référentiel de Copernic (système solaire) est une meilleure approximation d’un référentiel galiléen.

Pour comprendre l’expérience de Hafele et Keating, on s’intéressera à la trajectoire de trois horloges particulières : une horloge atomique placée en un lieu donné à la surface terrestre, immobile par rapport au sol; et deux horloges qui font chacune un tour du monde en avion, l’une vers l’Est, et l’autre vers l’Ouest.

3.3 — Faites un dessin, du point de vue d’un observateur placé au pôle Nord, à très haute altitude, et qui regarde la Terre tourner au dessous de lui. Indiquez le sens de rotation de la Terre. Schématisez l’horloge immobile au sol, et les horloges qui font un tour du monde vers l’Est et vers l’Ouest en volant au-dessus de l’équateur.

Voir figure 8.

On notera R_\oplus le rayon de la Terre, Ω_\oplus sa vitesse angulaire de rotation dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_g , et M_\oplus la masse de la Terre.

3.4 — Connaissant la durée d’une révolution terrestre par rapport aux étoiles lointaines (jour sidéral), déduisez-en la vitesse angulaire Ω_\oplus de rotation de la Terre dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_g . Donnez son expression et sa valeur numérique.

Dans le référentiel géocentrique, la Terre effectue un tour sur elle-même en une période d’un jour sidéral, soit $T_\oplus = 23\text{ h }56\text{ m }4\text{ s}$. On en déduit sa vitesse angulaire de rotation :

$$\Omega_\oplus = \frac{2\pi}{23\text{ h }56\text{ m }4\text{ s}} = \frac{2\pi}{86164\text{ s}} = 7.292 \times 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3.5 — Supposons, pour simplifier, que l’horloge immobile par rapport au sol soit placée en un point de la surface terrestre à l’équateur. Donnez l’expression littérale et la valeur numérique de la vitesse instantanée (en m/s) de cette horloge dans le référentiel géocentrique.

Comme la Terre tourne, la vitesse de l’horloge immobile dans le référentiel local vaut, dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_g ,

$$\mathbf{u}_{\text{fixe}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_{\text{local}}/\mathcal{R}_g} \times \mathbf{TM}$$

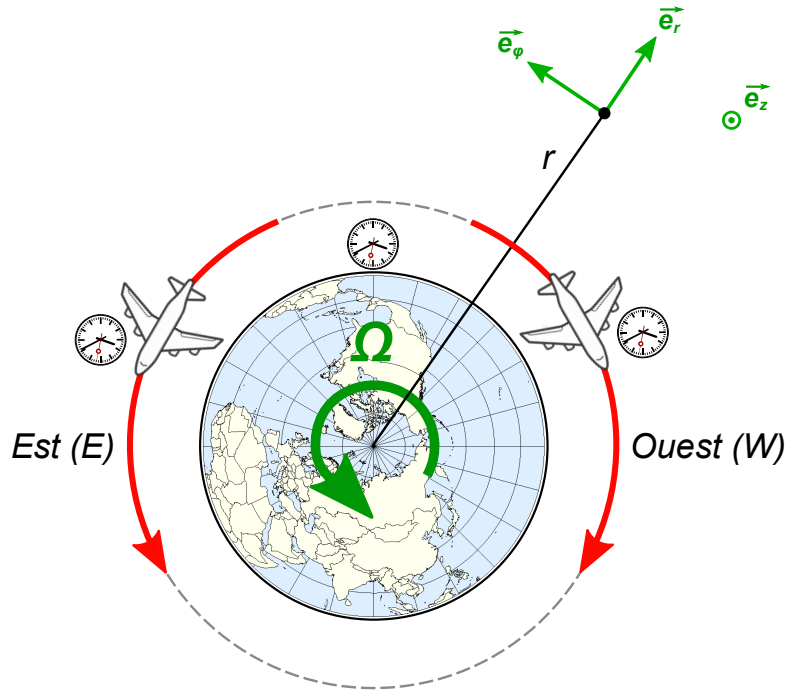


FIGURE 8 – Schéma de l’expérience de Hafele et Keating. Une horloge atomique choisie comme référence demeure au point de départ; une seconde horloge atomique fait un tour du monde vers l’Est, tandis que la troisième effectue un tour du globe vers l’Ouest. Lorsque les horloges voyageuses sont de retour, on compare le temps qu’elles affichent avec celui de l’horloge atomique de référence.

où M est la position de l’horloge, et T le centre de la Terre. Comme on suppose ici que l’horloge est placée sur un point à l’équateur,

$$\mathbf{u}_{\text{fixe}} = \Omega_{\oplus} \mathbf{e}_z \times R_{\oplus} \mathbf{e}_r = R_{\oplus} \Omega_{\oplus} \mathbf{e}_{\phi} \quad \text{et} \quad u_{\text{fixe}} = R_{\oplus} \Omega_{\oplus}.$$

Numériquement, on obtient $u_{\text{fixe}} \approx 465.1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 1674 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

3.6 — Déduisez-en le facteur γ associé, et l’expression de l’intervalle de temps propre $d\tau_{\text{fixe}}$ pour cette horloge fixe par rapport en sol en fonction de dt . Estimez numériquement le facteur β . En considérant que les vitesses ici sont faibles devant c , déduisez-en une expression approchée de $d\tau_{\text{fixe}}$, de la forme :

$$d\tau_{\text{fixe}} \approx \left(1 - \frac{P}{2c^2} \right) dt \tag{1}$$

Donnez l’expression de P en fonction de R_{\oplus} et Ω_{\oplus} .

Le facteur γ associé s’écrit :

$$\gamma(u_{\text{fixe}}) = \left[1 - \frac{u_{\text{fixe}}^2}{c^2} \right]^{-1/2} = \left[1 - \frac{R_{\oplus}^2 \Omega_{\oplus}^2}{c^2} \right]^{-1/2}$$

Comme $\beta = u_{\text{fixe}}/c = R_{\oplus} \Omega_{\oplus}/c \approx 1.55 \times 10^{-6} \ll 1$, on peut se permettre de développer l’expression au premier ordre en β^2 ,

$$\gamma(u_{\text{fixe}}) = \left[1 - \frac{R_{\oplus}^2 \Omega_{\oplus}^2}{c^2} \right]^{-1/2} \approx 1 + \frac{R_{\oplus}^2 \Omega_{\oplus}^2}{2c^2}$$

De ce qui précède, on en déduit la relation entre l'intervalle de temps $d\tau_{\text{fixe}}$ qui sépare deux événements de la trajectoire de cette horloge dans son propre référentiel, et l'intervalle de temps correspondant dt mesuré dans le référentiel géocentrique,

$$d\tau_{\text{fixe}} = \frac{1}{\gamma(u_{\text{fixe}})} dt = \left[1 - \frac{R_{\oplus}^2 \Omega_{\oplus}^2}{c^2} \right]^{1/2} dt \approx \left(1 - \frac{R_{\oplus}^2 \Omega_{\oplus}^2}{2c^2} \right) dt. \quad (2)$$

Le terme P vaut ainsi $P = R_{\oplus}^2 \Omega_{\oplus}^2$.

On s'intéresse maintenant à une horloge qui fait le tour du monde à bord d'un avion. L'avion vole à l'altitude h et à la vitesse v par rapport au sol, en longeant l'équateur terrestre. On comptera v positivement si l'avion vole vers l'Est, et négativement s'il vole vers l'Ouest.

3.7 — En utilisant la loi relativiste de composition des vitesses, donnez l'expression de la vitesse instantanée de l'avion volant au-dessus de l'équateur à l'altitude h dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_g . Montrez que vu les faibles vitesses considérées ici par rapport à c , l'expression peut se réduire à la loi classique de composition des vitesses.

Pour l'avion qui vole à l'altitude h la vitesse v par rapport au sol, la vitesse d'entraînement vaut cette fois, à l'altitude h :

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_{\text{local}}/\mathcal{R}_g} \times \mathbf{TM} = \Omega_{\oplus} \mathbf{e}_z \times (R_{\oplus} + h) \mathbf{e}_r = (R_{\oplus} + h) \Omega_{\oplus} \mathbf{e}_{\phi}$$

où T est le centre de la Terre, et M la position de l'horloge dans l'avion.

Comme l'avion se déplace à la vitesse $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_{\phi}$ par rapport au sol, il nous faut normalement utiliser la loi relativiste de composition des vitesses pour en établir la vitesse u_{vol} de l'avion dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_g :

$$u_{\text{vol}} = \frac{v + (R_{\oplus} + h)\Omega}{1 + \frac{v(R_{\oplus} + h)\Omega}{c^2}}$$

Cependant, comme les vitesses considérées sont faibles devant c , on pourra utiliser l'addition classique des vitesses sans commettre une grande erreur :

$$u_{\text{vol}} = \frac{v + (R_{\oplus} + h)\Omega}{1 + \frac{v(R_{\oplus} + h)\Omega}{c^2}} \approx v + (R_{\oplus} + h)\Omega.$$

3.8 — Déduisez-en le facteur γ correspondant, et l'expression de l'intervalle de temps propre $d\tau_{\text{vol}}$ en fonction de dt et de la vitesse v de l'avion. Montrez qu'en développant au premier ordre, $d\tau_{\text{vol}}$ peut se mettre sous la forme :

$$d\tau_{\text{vol}} \approx \left(1 - \frac{Q}{2c^2} \right) dt \quad (3)$$

et donnez l'expression de Q en fonction de v , R_{\oplus} , h et Ω_{\oplus} .

Le facteur γ pour l'horloge à bord de l'avion s'écrit :

$$\gamma(u_{\text{vol}}) = \left[1 - \frac{u_{\text{vol}}^2}{c^2} \right]^{-1/2} = \left[1 - \frac{(v + (R_{\oplus} + h)\Omega_{\oplus})^2}{c^2} \right]^{-1/2}$$

Comme précédemment, on peut se permettre de développer l'expression au premier ordre en $\beta^2 = u_{\text{vol}}^2/c^2$,

$$\gamma(u_{\text{vol}}) = \left[1 - \frac{(v + (R_{\oplus} + h)\Omega_{\oplus})^2}{c^2} \right]^{-1/2} \approx 1 + \frac{(v + (R_{\oplus} + h)\Omega_{\oplus})^2}{2c^2}$$

De ce qui précède, on en déduit la relation entre l'intervalle de temps $d\tau_{\text{vol}}$ qui sépare deux événements de la trajectoire de l'horloge embarquée dans son propre référentiel, et l'intervalle de temps correspondant dt mesuré dans le référentiel géocentrique,

$$d\tau_{\text{vol}} = \frac{1}{\gamma(u_{\text{vol}})} dt = \left[1 - \frac{(v + (R_{\oplus} + h)\Omega_{\oplus})^2}{c^2} \right]^{1/2} dt \approx \left(1 - \frac{(v + (R_{\oplus} + h)\Omega_{\oplus})^2}{2c^2} \right) dt. \quad (4)$$

Le terme Q vaut donc $Q = (v + (R_{\oplus} + h)\Omega_{\oplus})^2$.

Effet supplémentaire de la gravitation sur l'écoulement du temps

Comme l'expérience est menée sur Terre, les horloges sont plongées dans le champ gravitationnel terrestre. La Relativité Générale prédit que des horloges parfaites se comportent différemment selon l'intensité du champ gravitationnel qu'elles subissent : plus le champ est intense, et plus l'écoulement du temps ralentit. Le traitement complet nécessiterait d'utiliser le formalisme de la Relativité Générale ; cependant, du fait de la faible intensité du champ terrestre, on pourra se permettre ici d'ajouter un simple terme correctif gravitationnel dans les équations (1) et (3). Ces équations deviennent ainsi : pour l'horloge fixe,

$$d\tau_{\text{fixe}} \approx \left(1 - \frac{P}{2c^2} \right) dt \quad \longrightarrow \quad d\tau_{\text{fixe}} \approx \left(1 + \frac{\Phi(r_{\text{fixe}})}{c^2} - \frac{P}{2c^2} \right) dt \quad (5)$$

et, pour l'horloge à bord de l'avion,

$$d\tau_{\text{vol}} \approx \left(1 - \frac{Q}{2c^2} \right) dt \quad \longrightarrow \quad d\tau_{\text{vol}} \approx \left(1 + \frac{\Phi(r_{\text{vol}})}{c^2} - \frac{Q}{2c^2} \right) dt \quad (6)$$

où $\Phi(r)$ est l'intensité du potentiel gravitationnel que subit un objet à la distance $r \geq R_{\oplus}$ du centre de la Terre :

$$\Phi(r) = -\frac{GM_{\oplus}}{r}$$

avec R_{\oplus} le rayon de la Terre, et M_{\oplus} sa masse (Le champ gravitationnel dérive de ce potentiel Φ).

3.9 — Explicitez les équations (5) et (6) respectivement pour l'horloge fixe au sol, et pour l'horloge qui vole à l'altitude h ; en particulier, explicitez r_{fixe} et r_{vol} .

Pour l'horloge restée fixe à l'équateur, on aura $r_{\text{fixe}} = R_{\oplus}$; pour l'horloge à bord de l'avion, la distance au centre de la Terre sera $r_{\text{vol}} = R_{\oplus} + h$.

En substituant dans les équations (5) et (6), on obtient, pour l'horloge fixe,

$$d\tau_{\text{fixe}} \approx \left(1 + \frac{\Phi(R_{\oplus})}{c^2} - \frac{R_{\oplus}^2\Omega_{\oplus}^2}{2c^2} \right) dt = \left(1 - \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}c^2} - \frac{R_{\oplus}^2\Omega_{\oplus}^2}{2c^2} \right) dt$$

et pour l'horloge qui vole,

$$d\tau_{\text{vol}} \approx \left(1 + \frac{\Phi(R_{\oplus} + h)}{c^2} - \frac{(v + (R_{\oplus} + h)\Omega_{\oplus})^2}{2c^2} \right) dt = \left(1 - \frac{GM_{\oplus}}{(R_{\oplus} + h)c^2} - \frac{(v + (R_{\oplus} + h)\Omega_{\oplus})^2}{2c^2} \right) dt.$$

Calcul approché du décalage des horloges

3.10 — En intégrant $d\tau_{\text{fixe}}$ et $d\tau_{\text{vol}}$ sur tout le parcours, entre l’instant où l’horloge qui voyage quitte l’horloge fixe (événement A), et celui où les deux horloges se retrouvent au point de départ à la fin du voyage (événement B), calculez les durées $\Delta\tau_{\text{fixe}}$ et $\Delta\tau_{\text{vol}}$ mesurées pendant l’ensemble du voyage en fonction de Δt , le temps écoulé entre les événements A et B dans le référentiel géocentrique. Pour simplifier, on supposera que l’avion vole à vitesse et à altitude constantes, au dessus de l’équateur terrestre, et on négligera les phases d’atterrissage et de décollage de l’avion.

En intégrant entre les événements A (départ de l’horloge en avion) et B (retour de l’horloge au point de départ sur Terre, là où est restée l’horloge fixe), on obtient, d’une part, pour l’horloge restée au sol,

$$\Delta\tau_{\text{fixe}} = \int_A^B \left(1 + \frac{\Phi(r)}{c^2} - \frac{R_{\oplus}^2 \Omega_{\oplus}^2}{2c^2} \right) dt = \int_A^B \left(1 - \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus} c^2} - \frac{R_{\oplus}^2 \Omega_{\oplus}^2}{2c^2} \right) dt = \left(1 - \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus} c^2} - \frac{R_{\oplus}^2 \Omega_{\oplus}^2}{2c^2} \right) \Delta t$$

et d’autre part, pour l’horloge qui a fait le tour du monde à bord de l’avion,

$$\Delta\tau_{\text{vol}} = \int_A^B \left(1 + \frac{\Phi(r)}{c^2} - \frac{(v + (R_{\oplus} + h)\Omega_{\oplus})^2}{2c^2} \right) dt = \int_A^B \left(1 - \frac{GM_{\oplus}}{(R_{\oplus} + h)c^2} - \frac{(v + (R_{\oplus} + h)\Omega_{\oplus})^2}{2c^2} \right) dt$$

$$\Delta\tau_{\text{vol}} = \left(1 - \frac{GM_{\oplus}}{(R_{\oplus} + h)c^2} - \frac{(v + (R_{\oplus} + h)\Omega_{\oplus})^2}{2c^2} \right) \Delta t$$

en négligeant les phases d’atterrissage et de décollage de l’avion.

3.11 — Exprimez le rapport $\Delta\tau_{\text{vol}}/\Delta\tau_{\text{fixe}}$. Pour l’instant, ne poussez pas plus loin le calcul.

Comme vu précédemment, $r_{\text{fixe}} = R_{\oplus}$ et $r_{\text{vol}} = R_{\oplus} + h$. Le rapport $\Delta\tau_{\text{vol}}/\Delta\tau_{\text{fixe}}$ s’écrit simplement,

$$\frac{\Delta\tau_{\text{vol}}}{\Delta\tau_{\text{fixe}}} = \left[1 - \frac{GM_{\oplus}}{(R_{\oplus} + h)c^2} - \frac{(v + (R_{\oplus} + h)\Omega_{\oplus})^2}{2c^2} \right] \times \left[1 - \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus} c^2} - \frac{R_{\oplus}^2 \Omega_{\oplus}^2}{2c^2} \right]^{-1}.$$

3.12 — L’effet que l’on cherche à mesurer est très faible. On pourra considérer que les vitesses en jeu sont faibles devant c , et que, de plus, l’altitude de l’avion est petite devant le rayon terrestre : $h \ll R_{\oplus}$. Pour notre calcul, afin de ne conserver que les termes significatifs dans le développement, estimez numériquement les termes suivants :

$$\frac{GM_{\oplus}h}{R_{\oplus}^2 c^2} \quad \frac{v^2}{2c^2} \quad \frac{R_{\oplus} \Omega_{\oplus} v}{c^2} \quad \frac{h^2 \Omega_{\oplus}^2}{2c^2} \quad \frac{h \Omega_{\oplus} v}{c^2}$$

On trouve :

$$\frac{GM_{\oplus}h}{R_{\oplus}^2 c^2} \approx 1.09 \times 10^{-12} \quad \frac{R_{\oplus} \Omega_{\oplus} v}{c^2} \approx 1.03 \times 10^{-12} \quad \frac{v^2}{2c^2} \approx 0.22 \times 10^{-12}$$

$$\frac{h^2 \Omega_{\oplus}^2}{2c^2} \approx 2.96 \times 10^{-18} \quad \frac{h \Omega_{\oplus} v}{c^2} \approx 1.62 \times 10^{-15}.$$

Il apparaît que les deux derniers termes pourront être négligés.

3.13 — En faisant un développement limité au premier ordre de l’expression de $\Delta\tau_{\text{vol}}/\Delta\tau_{\text{fixe}}$, i.e. en négligeant les termes d’ordre supérieur en c^{-4} , c^{-6} , etc, et en ne conservant que les termes significatifs, montrez que

$$\frac{\Delta\tau_{\text{vol}}}{\Delta\tau_{\text{fixe}}} \approx 1 + \frac{GM_{\oplus}h}{R_{\oplus}^2 c^2} - \frac{R_{\oplus} \Omega_{\oplus}^2 h}{c^2} - \frac{R_{\oplus} \Omega_{\oplus} v}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} \tag{7}$$

Comme l'altitude h est faible devant le rayon R_{\oplus} de la Terre, on pourra développer au premier ordre les termes en $(R_{\oplus} + h)$:

$$\frac{GM_{\oplus}}{(R_{\oplus} + h)c^2} = \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}c^2} \left(1 + \frac{h}{R_{\oplus}}\right)^{-1} \approx \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}c^2} \left(1 - \frac{h}{R_{\oplus}}\right).$$

De même,

$$(R_{\oplus} + h)^2 = R_{\oplus}^2 \left(1 + \frac{h}{R_{\oplus}}\right)^2 \approx R_{\oplus}^2 \left(1 + \frac{2h}{R_{\oplus}}\right).$$

Développons l'expression du rapport $\Delta\tau_{\text{vol}}/\Delta\tau_{\text{fixe}}$ au premier ordre :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\tau_{\text{vol}}}{\Delta\tau_{\text{fixe}}} &= \left[1 - \frac{GM_{\oplus}}{(R_{\oplus} + h)c^2} - \frac{(v + (R_{\oplus} + h)\Omega_{\oplus})^2}{2c^2}\right] \times \left[1 - \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}c^2} - \frac{R_{\oplus}^2\Omega_{\oplus}^2}{2c^2}\right]^{-1} \\ &\approx \left[1 - \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}c^2} + \frac{GM_{\oplus}h}{R_{\oplus}^2c^2} - \frac{v^2}{2c^2} - \frac{R_{\oplus}^2\Omega_{\oplus}^2}{2c^2} - \frac{R_{\oplus}h\Omega_{\oplus}^2}{c^2} - \frac{vR_{\oplus}\Omega_{\oplus}}{c^2} - \frac{vh\Omega_{\oplus}}{2c^2}\right] \times \\ &\quad \left[1 + \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}c^2} + \frac{R_{\oplus}^2\Omega_{\oplus}^2}{2c^2}\right] \\ &\approx 1 - \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}c^2} + \frac{GM_{\oplus}h}{R_{\oplus}^2c^2} - \frac{v^2}{2c^2} - \frac{R_{\oplus}^2\Omega_{\oplus}^2}{2c^2} - \frac{R_{\oplus}h\Omega_{\oplus}^2}{c^2} - \frac{vR_{\oplus}\Omega_{\oplus}}{c^2} + \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}c^2} + \frac{R_{\oplus}^2\Omega_{\oplus}^2}{2c^2} \end{aligned}$$

où on a négligé les termes d'ordre supérieur en c^{-4} , c^{-6} , etc, les termes d'ordre supérieurs du développement, ainsi que les termes identifiés précédemment comme négligeables.

En simplifiant, on obtient ainsi,

$$\frac{\Delta\tau_{\text{vol}}}{\Delta\tau_{\text{fixe}}} \approx 1 + \frac{GM_{\oplus}h}{R_{\oplus}^2c^2} - \frac{R_{\oplus}h\Omega_{\oplus}^2}{c^2} - \frac{vR_{\oplus}\Omega_{\oplus}}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}.$$

3.14 — Exprimez l'accélération de pesanteur g à l'équateur, en fonction de G , M_{\oplus} , R_{\oplus} et Ω_{\oplus} . Rappelez-vous de la définition du poids, et n'oubliez pas que la Terre tourne sur elle-même...

Le poids $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ d'un objet de masse m est la somme de la force d'accélération gravitationnelle de la Terre, et de la force inertielle d'entraînement due à la rotation de la planète, i.e. la force centrifuge. En un point à la surface de la Terre à l'équateur, on obtient :

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g} = -m\mathbf{g}\mathbf{e}_r = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_e = -\frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}^2}\mathbf{e}_r + mR_{\oplus}\Omega_{\oplus}^2\mathbf{e}_r.$$

On en déduit l'expression de l'intensité du champ de pesanteur à l'équateur,

$$g = \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} - R_{\oplus}\Omega_{\oplus}^2.$$

3.15 — En utilisant ce qui précède, montrez que l'équation (7) peut se ré-écrire :

$$\frac{\Delta\tau_{\text{vol}}}{\Delta\tau_{\text{fixe}}} \approx 1 + \frac{gh}{c^2} - \frac{R_{\oplus}\Omega_{\oplus}v}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}$$

Le résultat est immédiat :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\tau_{\text{vol}}}{\Delta\tau_{\text{fixe}}} &\approx 1 + \frac{GM_{\oplus}h}{R_{\oplus}^2c^2} - \frac{R_{\oplus}\Omega_{\oplus}^2h}{c^2} - \frac{R_{\oplus}\Omega_{\oplus}v}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} = 1 + \frac{h}{c^2} \left[\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} - R_{\oplus}\Omega_{\oplus}^2 \right] - \frac{R_{\oplus}\Omega_{\oplus}v}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} \\ &= 1 + \frac{gh}{c^2} - \frac{R_{\oplus}\Omega_{\oplus}v}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}.\end{aligned}$$

3.16 — Déduisez-en l'expression de l'écart relatif $\delta(v)$ entre l'horloge qui a volé et l'horloge restée au sol :

$$\delta(v) = \frac{\Delta\tau_{\text{vol}}(v) - \Delta\tau_{\text{fixe}}}{\Delta\tau_{\text{fixe}}}.$$

D'après ce qui précède,

$$\delta(v) = \frac{\Delta\tau_{\text{vol}}(v) - \Delta\tau_{\text{fixe}}}{\Delta\tau_{\text{fixe}}} = \frac{\Delta\tau_{\text{vol}}(v)}{\Delta\tau_{\text{fixe}}} - 1 \approx \frac{gh}{c^2} - \frac{R_{\oplus}\Omega_{\oplus}v}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}.$$

3.17 — Estimez numériquement le décalage relatif δ_E attendu pour l'horloge qui a fait le tour de monde vers l'Est; calculez de même δ_W pour l'horloge qui est partie vers l'Ouest.

Pour l'horloge à bord de l'avion qui vole vers l'Est, sa vitesse est $+v$ par rapport au sol,

$$\delta_E \approx \frac{gh}{c^2} - \frac{R_{\oplus}\Omega_{\oplus}v}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} \approx 1.09 \times 10^{-12} - 1.03 \times 10^{-12} - 0.22 \times 10^{-12} \approx -0.16 \times 10^{-12}.$$

Tandis que pour l'horloge qui voyage vers l'Ouest, sa vitesse vaut $-v$ par rapport au sol, et on a alors :

$$\delta_W \approx \frac{gh}{c^2} + \frac{R_{\oplus}\Omega_{\oplus}v}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} \approx 1.09 \times 10^{-12} + 1.03 \times 10^{-12} - 0.22 \times 10^{-12} \approx +1.90 \times 10^{-12}.$$

3.18 — Pour le tour du monde effectué vers l'Est (commencé le 4 octobre 1971), les phases de vol ont duré 41.2 heures au total; pour le tour de monde vers l'Ouest (démarré le 13 octobre 1971), la durée cumulée de vol a été de 48.6 heures. Déduisez-en les décalages attendus $\Delta\tau_E$ et $\Delta\tau_W$ par rapport à l'horloge restée fixe, et donnez leurs valeurs en nanosecondes. Comparez avec les mesures effectuées par Hafele et Keating (table 1).

Pour le premier tour du monde effectué en allant vers l'Est, la durée cumulée des phases de vol est $\Delta T_E = 41.2$ h (les moments passés au sol entre les vols successifs n'ont pas d'effet sur le décalage avec l'horloge de référence, car pendant les escales l'horloge qui voyage est immobile par rapport à l'horloge de l'USNO). À la fin du tour du monde, le décalage attendu avec l'horloge de référence est par conséquent :

$$\Delta\tau_E = \delta_E \Delta T_E \approx -24 \times 10^{-9} \text{ s} = -24 \text{ ns}.$$

Pour l'horloge qui a voyagé vers l'Ouest, la durée cumulée des vols successifs est de $\Delta T_W = 48.6$ h; le décalage attendu avec l'horloge de référence est :

$$\Delta\tau_W = \delta_W \Delta T_W \approx +332 \times 10^{-9} \text{ s} = +332 \text{ ns}.$$

Les valeurs obtenues par notre calcul grossier sont du bon ordre de grandeur, comparées aux mesures effectuées par Hafele et Keating lors de leur célèbre expérience. Avec un calcul plus précis tenant

compte de la latitude de l'horloge fixe (voir remarque ci-dessous), et de la trajectoire précise des deux avions, Hafele et Keating obtiennent :

$$\Delta\tau_E = -40 \pm 23 \text{ ns} \quad \text{et} \quad \Delta\tau_W = +275 \pm 21 \text{ ns}$$

ce qui est compatible avec leurs mesures (table 1).

Remarque : on a ici grandement simplifié la trajectoire des avions, en supposant un vol circumterrestre au-dessus de l'équateur, à vitesse et altitude constantes. En pratique, Hafele et Keating ont emprunté des vols commerciaux ordinaires : pour obtenir un calcul théorique plus précis, il faut tenir compte de la latitude du lieu dans l'équation (5), et il faut intégrer l'équation (6) le long des véritables trajets des avions de ligne utilisés, en tenant compte des variations de la latitude, de la vitesse de vol et de l'altitude. Hafele et Keating ont pu effectuer ces calculs à partir des données de vol obtenues auprès des équipages de chacun des avions empruntés lors de l'expérience.

Horloge (numéro de série)	$\Delta\tau_E$	$\Delta\tau_W$
#120	-57 ns	+277 ns
#361	-74 ns	+284 ns
#408	-55 ns	+266 ns
#447	-51 ns	+266 ns
Moyenne	$-59 \pm 10 \text{ ns}$	$+275 \pm 7 \text{ ns}$

TABLE 1 – Différences de temps observées entre les 4 horloges atomiques utilisées et l'horloge atomique de référence de l'USNO. [Source : Joseph C. Hafele et Richard E. Keating, "Around-the-world atomic clocks : observed relativistic time gains", *Science*, vol. 177, n°4044 (1972), p. 168-170.]

Données :

$$G = 6.67430(15) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \quad c = 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$M_{\oplus} = 5.9722 \times 10^{24} \text{ kg} \quad R_{\oplus} = 6378 \text{ km} \quad g \approx 9.80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$1 \text{ jour sidéral} : T_{\oplus} = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4 \text{ s.}$$

$$\text{Avion : altitude de vol } h = 10 \text{ km ; vitesse par rapport au sol } v = 200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

L'expérience de Hafele et Keating a été reproduite à de nombreuses reprises, ainsi que différentes variantes : toutes confirment les prédictions de la Relativité.

De fait, le déploiement des systèmes de positionnement global (GPS, GLONASS, Beidou, Galileo) a rendu indispensable de tenir compte de ces effets temporels pour assurer le bon fonctionnement des constellations de satellites "GPS". Dans ces constellations, chaque satellite transporte plusieurs horloges atomiques afin de générer un signal modulé temporellement, et la réception de signaux de plusieurs satellites permet de déterminer sa propre position par triangulation. Il est impératif de tenir compte et de corriger les effets relativistes, à la fois cinématiques et gravitationnels, pour obtenir un positionnement correct : sans ces corrections relativistes, les performances des systèmes de positionnement global seraient très dégradées.