

**EXAMEN**

Parcours SPRINT &amp; Double Majeure PM — Année Universitaire 2023–2024

8 janvier 2024 – 11h-13h

*Documents, ordinateurs, tablettes et téléphones sont interdits.**Les calculatrices (basiques, type baccalauréat) sont autorisées.*

*Soyez rigoureux dans vos calculs et vos notations; en particulier, distinguez bien les grandeurs scalaires, vectorielles et quadri-vectorielles. Comme vous ne pouvez pas noter les vecteurs en gras comme dans l'énoncé, vous les noterez avec une flèche. Veillez à l'homogénéité de vos expressions.*

**1. Désintégration du pion neutre  $\pi^0$** 

Le pion<sup>1</sup> neutre  $\pi^0$  est une particule élémentaire de la famille des mésons, apparenté aux pions  $\pi^+$  et  $\pi^-$ , mais dont la durée de vie moyenne est très faible. Étant neutre électriquement, il ne laisse pas de trace dans les émulsions photographiques ou dans les détecteurs de type chambre à bulles/chambre à brouillard; il n'a été découvert vers 1950 que via ses produits de désintégration.

**Quadri-vitesse et quadrivecteur énergie-impulsion**

**1.1** — Rappelez la définition et l'expression du quadrivecteur vitesse  $\tilde{U}$  d'un point matériel M. Comment ses composantes  $U^\mu$  se transforment-elles lorsqu'on passe d'un référentiel inertiel (ou galiléen)  $\mathcal{R}$  à un autre référentiel  $\mathcal{R}'$ , avec  $\mathcal{R}'$  en translation uniforme à la vitesse  $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$  par rapport à  $\mathcal{R}$ ? Que vaut la pseudo-norme carrée de  $\tilde{U}$ ? Est-ce un invariant?

**1.2** — Rappelez la définition du quadrivecteur énergie-impulsion  $\tilde{\mathbf{p}}$  du point matériel M de masse au repos  $m$  se déplaçant dans  $\mathcal{R}$  à la vitesse  $\mathbf{u}$ . Retrouvez l'expression de ses composantes  $p^\mu$  et les identités remarquables associées : l'expression de sa pseudo-norme  $\tilde{\mathbf{p}}^2$ , la relation entre énergie totale  $E$ , quantité de mouvement  $\mathbf{p}$  et masse (*relation d'Einstein*), et l'expression de  $\gamma$  en fonction des composantes  $p^\mu$  de  $\tilde{\mathbf{p}}$ .

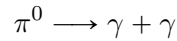
**1.3** — Donnez l'expression des composantes du quadrivecteur énergie-impulsion  $\tilde{\mathbf{q}}$  d'un photon de fréquence  $\nu$  et de longueur d'onde dans le vide  $\lambda$ . Que vaut  $\tilde{\mathbf{q}}^2$ ?

---

1. Aussi appelé "méson pi".

### Désintégration du pion $\pi^0$

Dans 98.82% des cas, le pion neutre  $\pi^0$  se désintègre en une paire de photons gamma selon la réaction :



**1.4** — Exprimez la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total avant et après la désintégration du pion neutre  $\pi^0$ . On notera  $\tilde{\mathbf{p}}_\pi$  le quadrivecteur énergie-impulsion du pion, et  $\tilde{\mathbf{q}}_1, \tilde{\mathbf{q}}_2$  les quadrivecteurs énergie-impulsion des deux photons issus de la désintégration du  $\pi^0$ .

**1.5** — Dans le référentiel  $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}_\pi$  du pion avant la désintégration (*i.e.* dans le *référentiel propre* du pion), Exprimez les énergies  $E_1^*$  et  $E_2^*$  des deux photons produits. Que vaut nécessairement l'angle  $\theta_{12}^*$  entre les deux photons ?

**1.6** — Que vaut la masse invariante  $m_{\gamma\gamma}$  du système formé par les deux photons issus de la désintégration du pion ?

**1.7** — Écrivez maintenant le bilan de la désintégration du pion en deux photons dans le référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}$ . Exprimez la masse invariante  $m_{\gamma\gamma}$  en fonction des énergies  $E_1$  et  $E_2$  de chacun des deux photons et de l'angle  $\theta_{12}$  entre les deux photons. Exprimez la masse  $m_\pi$  du pion  $\pi^0$  en fonction de  $E_1, E_2$  et  $\theta_{12}$ .

#### Données :

masse du proton :  $m_p = 938.272 \text{ MeV}/c^2$

masse du pion neutre  $\pi^0$  :  $m_\pi = 134.977 \text{ MeV}/c^2$

$c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

## 2. Voiles solaires, propulsion laser et voyage intersidéral

*La plupart des questions concernant la trajectoire de la sonde (partie 2.2) peuvent être traitées indépendamment de la première partie de l'exercice.*

En 2016, plusieurs milliardaires (dont Yuri Milner et Mark Zuckerberg) et Stephen Hawking ont lancé le projet "Breakthrough Starshot"<sup>2</sup> dont l'objectif est de concevoir, construire et lancer plusieurs milliers de sondes spatiales miniaturisées équipées de voiles solaires vers le système stellaire le plus proche de nous, Alpha Centauri<sup>3</sup>, situé à  $D = 4.37$  années-lumière du Soleil. Chaque sonde serait constituée d'une voile légère et réfléchissante d'environ  $4\text{ m} \times 4\text{ m}$ , à la manière d'un cerf-volant, et d'un petit module intégré comportant notamment un système de communication et une ou plusieurs caméras miniaturisées, le tout d'une masse d'environ 1 gramme. La propulsion serait assurée par le tir de très puissants lasers basés sur Terre : l'impact des photons se réfléchissant sur la voile ("pression de radiation") fournirait l'accélération nécessaire, permettant à ces sondes miniatures d'obtenir des vitesses entre  $0.2c$  et  $0.5c$ , et d'atteindre les étoiles les plus proches comme Alpha Centauri en quelques décennies.

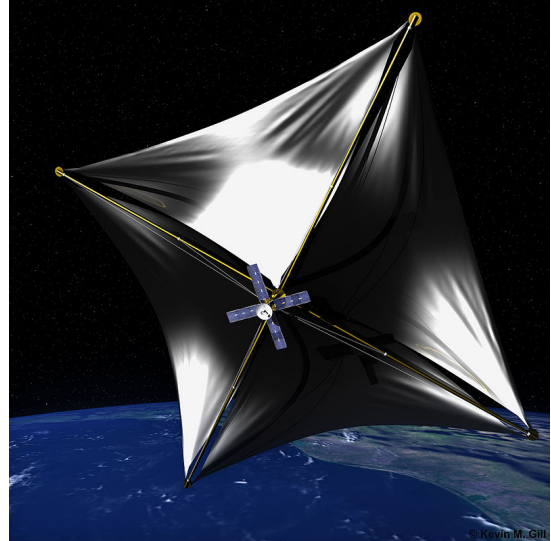


FIGURE 1 – Sonde spatiale munie d'une voile solaire (vue d'artiste).

### 2.1. Propulsion par laser

Afin de comprendre le fonctionnement de ces sondes, on se propose d'analyser le principe de la propulsion d'une voile sur laquelle on envoie un faisceau intense de lumière monochromatique.

On rappelle qu'un photon de fréquence  $\nu$  et de longueur d'onde  $\lambda$  transporte une énergie  $E = h\nu$  et une quantité de mouvement  $\hbar \mathbf{k}$ , avec  $\mathbf{k}$  le vecteur d'onde du photon de norme  $k = 2\pi/\lambda = 2\pi\nu/c$ .

**2.1** — Écrivez le quadrivecteur énergie-impulsion  $\tilde{q}$  d'un tel photon, ainsi que ses composantes  $q^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ). On suppose que ce photon se propage selon  $\mathbf{e}_x$  dans le référentiel considéré.

**2.2** — De même, écrivez le quadrivecteur énergie-impulsion  $\tilde{p}$  de la sonde de masse  $m$ , ainsi que ses composantes  $p^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ). On suppose que la sonde voyage selon  $\mathbf{e}_x$  dans le référentiel considéré, avec une vitesse  $v(t)$ .

Considérons un photon de fréquence  $\nu_i$  en provenance de la Terre qui se propage selon  $\mathbf{e}_x$  et qui se réfléchit en incidence normale sur la surface parfaitement réfléchissante de la voile solaire de la sonde. Le photon repart avec une fréquence  $\nu_f$  en sens opposé. On notera  $E_i$  et  $\mathbf{p}_i$  respectivement l'énergie totale et la quantité de mouvement de la sonde avant l'impact du photon, et  $E_f$  et  $\mathbf{p}_f$  son énergie totale et sa quantité de mouvement après le rebond du photon.

2. "Reaching for the Stars, Across 4.37 Light-Years", New York Times, 13 avril 2016, [https://www.nytimes.com/2016/04/13/science/alpha-centauri-breakthrough-starshot-yuri-milner-stephen-hawking.html?\\_r=0](https://www.nytimes.com/2016/04/13/science/alpha-centauri-breakthrough-starshot-yuri-milner-stephen-hawking.html?_r=0)

3. Alpha Centauri est un système de trois étoiles liées gravitationnellement, deux étoiles similaires au Soleil baptisées Alpha Centauri A ("Rigil Kentaurus"), Alpha Centauri B ("Toliman"), et une naine rouge, Alpha Centauri C, aussi connue comme "Proxima Centauri". À l'heure actuelle (2023) cinq planètes ont été détectées dans le système d'Alpha Centauri : trois orbitant autour de Proxima Centauri et deux autour de Toliman. Toutefois, l'existence de certaines de ces planètes ne fait pas encore consensus.

**2.3** — Écrivez la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement pour le système constitué du photon et de la sonde. Même si cela n'est pas indispensable (on peut effectuer ce calcul sans), on aura avantage à utiliser le formalisme des quadrivecteurs : on notera  $\tilde{\mathbf{q}}_i$  et  $\tilde{\mathbf{q}}_f$  les quadrivecteurs énergie-impulsion du photon avant et après le rebond du photon sur la sonde respectivement. De même, on notera  $\tilde{\mathbf{p}}_i$  et  $\tilde{\mathbf{p}}_f$  les quadrivecteurs énergie-impulsion de la sonde avant et après l'interaction avec le photon incident.

**2.4** — En utilisant le résultat précédent, et en raisonnant dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}'$  tangent à la sonde (autrement dit, le référentiel galiléen ou inertiel qui se confond avec le référentiel de la sonde à l'instant considéré), établissez dans le référentiel inertiel tangent  $\mathcal{R}'$  l'expression de la variation  $\Delta\lambda' = \lambda'_f - \lambda'_i$  de la longueur d'onde du photon après qu'il se soit réfléchi sur la voile de la sonde. Application numérique : Exprimez  $\Delta\lambda'$  en nanomètres. On supposera que la masse totale de la sonde (voile comprise) est  $m = 1$  gramme. Commentez.

Pour la suite de l'exercice, on négligera la variation de longueur d'onde du photon avant et après réflexion, et on prendra :

$$\lambda_f \approx \lambda_i = \lambda \quad \text{et} \quad \nu_f \approx \nu_i = \nu$$

**2.5** — En raisonnant dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du système solaire, supposé galiléen, dans l'approximation  $\nu_f \approx \nu_i = \nu$  (qu'on supposera aussi valide dans  $\mathcal{R}$ ), et en utilisant la conservation de la quantité de mouvement, montrez que l'impact du photon de fréquence  $\nu_i = \nu$  provoque une augmentation de la quantité de mouvement de la sonde d'une quantité :

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i \approx \frac{2h\nu}{c} \mathbf{e}_x$$

**2.6** — Pour le projet "Breakthrough Starshot", la puissance lumineuse cumulée des lasers nécessaire pour propulser la sonde est estimée à  $\mathcal{P} = 100$  GigaWatts (Rappel : 1 Watt = 1 Joule / seconde). En supposant que la totalité du faisceau de lumière émis sur Terre soit capté par la voile réfléchissante de la sonde, exprimez le nombre de photons  $dN$  qui frappent la voile pendant un temps élémentaire  $dt$ , et déduisez-en le nombre  $dN/dt$  d'impacts de photons par unité de temps. Application numérique.

**2.7** — Exprimez la variation  $d\mathbf{p}$  de la quantité de mouvement de la sonde pendant un intervalle de temps  $dt$  en fonction de la masse de la sonde et de la puissance laser  $\mathcal{P}$  reçue. Montrez que la quantité de mouvement  $\mathbf{p}$  de la sonde vérifie l'équation :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{2\mathcal{P}}{c} \mathbf{e}_x \quad \text{avec} \quad \mathbf{p} = \gamma(v)m \mathbf{v}. \quad (1)$$

où  $\mathbf{v}(t) = v(t) \mathbf{e}_x$  est la vitesse de la sonde mesurée dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du système solaire.

**2.8** — En supposant constantes la fréquence  $\nu$  des photons reçus par la sonde et la puissance laser reçue  $\mathcal{P}$ , résolvez l'équation (1) et donnez l'expression de la vitesse  $v(t)$  de la sonde en fonction du temps dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Pour la résolution de (1), on supposera que la vitesse de la sonde est nulle à  $t = 0$ . On posera  $a = 2\mathcal{P}/mc$  : donnez sa valeur numérique. Quel type de mouvement reconnaît-on ?

On suppose qu'il est possible de maintenir en fonctionnement le faisceau laser de telle sorte que la puissance laser reçue  $\mathcal{P}$  par la sonde soit constante, aussi longtemps que possible.

**2.9** — Vers quelle vitesse limite tend la vitesse de la sonde ?

## 2.2. Trajectoire de la sonde

**2.10** — On prendra comme origine du référentiel  $\mathcal{R}$  la position initiale de la sonde :  $x(t = 0) = 0$ . En intégrant l'expression de la vitesse  $v(t)$ , montrez que la position  $x(t)$  de la sonde en fonction du

temps vérifie :

$$x(t) = \frac{c^2}{a} \left[ \sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right] \tag{2}$$

2.11 — Montrez que dans l’espace-temps, la trajectoire de la sonde est une hyperbole d’équation :

$$(Ax + B)^2 - (Dct)^2 = 1$$

Donnez l’expression des coefficients  $A$ ,  $B$  et  $D$ .

2.12 — Représentez la trajectoire de la sonde du point de vue du référentiel du système solaire dans un diagramme d’espace-temps (diagramme de Minkowski). **Par souci de lisibilité, vous consacrerez une page entière à ce diagramme d’espace-temps.** Montrez que l’hyperbole présente deux asymptotes obliques, d’équations :

$$ct = \frac{A}{D}x + \frac{B}{D} \quad (\text{branche positive}) \quad ct = -\frac{A}{D}x - \frac{B}{D} \quad (\text{branche négative})$$

Explicitez ces deux équations, et dessinez l’asymptote à la branche positive de l’hyperbole sur votre diagramme. Quelle est la pente de cette asymptote ?

2.13 — À quelle coordonnée  $t_{\text{limite}}$  l’asymptote de la branche positive coupe-t-elle l’axe des temps ?

2.14 — Dessinez sur votre diagramme la ligne d’univers d’un photon émis depuis la Terre en direction de la sonde, dans les trois cas suivants :

1. Le photon est émis sur Terre à un instant  $t \in [0, t_{\text{limite}}[$ .
2. Le photon est émis sur Terre à un instant  $t > t_{\text{limite}}$ .
3. Le photon est émis à  $t = t_{\text{limite}}$ .

Concluez : d’après votre diagramme, est-il possible à un photon émis sur Terre à  $t \geq t_{\text{limite}}$  d’atteindre la sonde ? Commentez quant à la possibilité d’envoyer à la sonde des messages émis depuis la Terre après  $t_{\text{limite}}$ . Est-il utile de maintenir le laser de propulsion allumé sur Terre au-delà de  $t = t_{\text{limite}}$  ?

2.15 — En pratique, on souhaite atteindre une vitesse de croisière de  $v_c = 0.2c$ . Exprimez le temps nécessaire  $\Delta t_{\text{laser}}$  pendant lequel il faut illuminer la voile à l’aide du faisceau laser pour atteindre cette vitesse. Application numérique.

2.16 — Avec une telle vitesse de croisière, en négligeant la phase d’accélération, en combien de temps la sonde attendra-t-elle Alpha Centauri ? Application numérique.

**Données :**

Distance Soleil - Alpha Centauri :  $D = 4.37$  années-lumière =  $1.34$  parsec

Masse de la sonde (voile comprise) :  $m = 1$  gramme

Puissance et longueur d’onde du laser :  $\mathcal{P} = 100$  GW      $\lambda = 632.8$  nm

$h = 6.626070 \times 10^{-34}$  kg · m<sup>2</sup> · s<sup>-1</sup>      $\hbar = h/2\pi$       $c = 299792458$  m · s<sup>-1</sup>.

Remarque : Le calcul que nous venons d’effectuer n’est pas tout à fait correct, car nous avons négligé deux effets importants : d’une part, si le laser émet ses photons avec une fréquence  $\nu$  constante sur Terre, ces photons sont reçus avec une fréquence inférieure  $\nu' < \nu$  par la sonde dans son référentiel propre, du fait de l’effet Doppler ; cette fréquence  $\nu'$  décroît au fur et à mesure que la sonde accélère, et tend vers zéro quand  $v$  tend vers  $c$ . D’autre part, si la puissance laser émise sur Terre est constante (nombre constant de photons émis par unité de temps sur Terre), le nombre de photons reçus par unité de temps par la sonde diminue progressivement, du fait de l’augmentation de la vitesse de la sonde et des effets de dilatation du temps. Par ailleurs, on néglige ici la divergence du faisceau laser utilisé.



FIGURE 2 – Le système d'Alpha Centauri ( $\alpha$  Cen) constitué des étoiles Alpha Centauri A (“Rigel Kentaurus”), Alpha Centauri B (“Tolliman”), et Alpha Centauri C (“Proxima Centauri”), qui constitue l’objet le plus brillant de la constellation du Centaure. La constellation du Centaure, ainsi que les constellations qui constituent ou accompagnent le grand navire austral Argo : la Carène (Carina), les Voiles (Vela), la Poupe (Puppis), le Poisson Volant (Volans), etc., sont visibles depuis l’hémisphère Sud (figure produite avec Stellarium, pour un point de vue calculé pour l’observatoire ESO de La Silla, Chili).