

EXAMEN — CORRIGÉ

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2023–2024

8 janvier 2024 – 11h-13h

[Total : 40 pts]

1. Désintégration du pion neutre  $\pi^0$

[12 pts]

Le pion<sup>1</sup> neutre  $\pi^0$  est une particule élémentaire de la famille des *mésons*, apparenté aux pions  $\pi^+$  et  $\pi^-$ , mais dont la durée de vie moyenne est très faible. Étant neutre électriquement, il ne laisse pas de trace dans les émulsions photographiques ou dans les détecteurs de type chambre à bulles/chambre à brouillard ; il n'a été découvert vers 1950 que via ses produits de désintégration.

Quadri-vitesse et quadrivecteur énergie-impulsion

2 pts

1.1 — Rappelez la définition et l'expression du quadrivecteur vitesse  $\tilde{U}$  d'un point matériel M. Comment ses composantes  $U^\mu$  se transforment-elles lorsqu'on passe d'un référentiel inertiel (ou galiléen)  $\mathcal{R}$  à un autre référentiel  $\mathcal{R}'$ , avec  $\mathcal{R}'$  en translation uniforme à la vitesse  $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$  par rapport à  $\mathcal{R}$ ? Que vaut la pseudo-norme carrée de  $\tilde{U}$ ? Est-ce un invariant?

Par définition, pour un objet mobile, son quadrivecteur vitesse  $\tilde{U}$  est la dérivée de son quadrivecteur position  $\tilde{r} : r^\mu = (ct, \mathbf{r})$  par rapport à **son temps propre**  $\tau$  :

$$\tilde{U} = \frac{d\tilde{r}}{d\tau} \quad U^\mu = \frac{dr^\mu}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dr^\mu}{dt} = \begin{pmatrix} \gamma(u)c \\ \gamma(u)\mathbf{u} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

où  $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$  est la vitesse de l'objet dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

Comme l'intervalle élémentaire  $d\tilde{r} : dr^\mu$  est un quadrivecteur, et que l'intervalle de temps propre  $d\tau$  est un invariant de Lorentz,  $\tilde{U}$  est aussi un quadrivecteur, et ses composantes contravariantes  $U^\mu$  se transforment selon les équations de la transformation de Lorentz quand on passe de  $\mathcal{R}$  à  $\mathcal{R}'$  :

$$\begin{cases} U'^0 &= \gamma(v) (U^0 - \beta(v)U^1) \\ U'^1 &= \gamma(v) (U^1 - \beta(v)U^0) \\ U'^2 &= U^2 \\ U'^3 &= U^3 \end{cases} \quad \text{et réciproquement} \quad \begin{cases} U^0 &= \gamma(v) (U'^0 + \beta(v)U'^1) \\ U^1 &= \gamma(v) (U'^1 + \beta(v)U'^0) \\ U^2 &= U'^2 \\ U^3 &= U'^3 \end{cases}$$

1. Aussi appelé "méson pi".

Où  $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$  est la vitesse relative de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ , et où on pose :

$$\beta(v) = \frac{v}{c} \quad \text{et} \quad \gamma(v) = \gamma(\mathbf{v}) = (1 - \beta^2(v))^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

On peut mettre ces équations sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} U'^0 \\ U'^1 \\ U'^2 \\ U'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -\beta(v)\gamma(v) & 0 & 0 \\ -\beta(v)\gamma(v) & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^0 \\ U^1 \\ U^2 \\ U^3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} U^0 \\ U^1 \\ U^2 \\ U^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v) & +\beta(v)\gamma(v) & 0 & 0 \\ +\beta(v)\gamma(v) & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U'^0 \\ U'^1 \\ U'^2 \\ U'^3 \end{pmatrix}$$

La pseudo-norme carrée du quadrivecteur vitesse  $\tilde{\mathbf{U}}$  s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{U}}^2 = \tilde{\mathbf{U}} \cdot \tilde{\mathbf{U}} = (U^0)^2 - (\mathbf{U})^2 = \gamma^2(u)c^2 - \gamma^2(u)\mathbf{u}^2 = c^2 \gamma^2(u) \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = c^2.$$

Comme il s'agit d'une pseudo-norme, c'est par conséquent un invariant de Lorentz (ce qui est cohérent car  $c$  est un invariant, c'est un des postulats de la relativité restreinte). De plus, c'est aussi une grandeur constante.

**2 pts** 1.2 — Rappelez la définition du quadrivecteur énergie-impulsion  $\tilde{\mathbf{p}}$  du point matériel  $M$  de masse au repos  $m$  se déplaçant dans  $\mathcal{R}$  à la vitesse  $\mathbf{u}$ . Retrouvez l'expression de ses composantes  $p^\mu$  et les identités remarquables associées : l'expression de sa pseudo-norme  $\tilde{\mathbf{p}}^2$ , la relation entre énergie totale  $E$ , quantité de mouvement  $\mathbf{p}$  et masse (*relation d'Einstein*), et l'expression de  $\gamma$  en fonction des composantes  $p^\mu$  de  $\tilde{\mathbf{p}}$ .

À partir du quadrivecteur vitesse, on construit le quadrivecteur énergie-impulsion (ou quadri-impulsion)  $\tilde{\mathbf{p}}$  par analogie avec la mécanique classique, en multipliant la quadri-vitesse par la masse au repos de l'objet :

$$\tilde{\mathbf{p}} = m \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\tau} = m\tilde{\mathbf{U}} \quad p^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(u)mc \\ \gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c = \gamma(u)mc \\ \mathbf{p} = \gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix}$$

Dans cette relation,  $m$  est la masse propre de l'objet (c'est à dire sa masse au repos, qui est un invariant),  $E = \gamma(u)mc^2$  son énergie totale, somme de son énergie de masse  $E_0 = mc^2$  et de son énergie cinétique  $T = E - mc^2 = (\gamma(u) - 1)mc^2$ . Enfin,  $\mathbf{p} = \gamma(u)m\mathbf{u}$  est son vecteur quantité de mouvement relativiste (abusivement aussi appelé "*impulsion*").

La pseudo-norme carrée de  $\tilde{\mathbf{p}}$  vaut  $\tilde{\mathbf{p}}^2 = m^2c^2 = (mc^2)^2/c^2$ .

Les composantes de  $\tilde{\mathbf{p}}$  vérifient les relations suivantes :

$$\tilde{\mathbf{p}}^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 = (p^0)^2 - (\mathbf{p})^2 = (mc^2)^2/c^2 \quad \text{i.e.} \quad E^2 = \mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4 \quad (\text{"relation d'Einstein"})$$

$$\frac{\mathbf{u}}{c} = \frac{\mathbf{p}}{p^0} = \frac{\mathbf{p}c}{E} \quad \text{et} \quad \gamma(u) = \frac{E}{mc^2}.$$

**2 pts** 1.3 — Donnez l'expression des composantes du quadrivecteur énergie-impulsion  $\tilde{\mathbf{q}}$  d'un photon de fréquence  $\nu$  et de longueur d'onde dans le vide  $\lambda$ . Que vaut  $\tilde{\mathbf{q}}^2$ ?

Pour un photon de fréquence  $\nu$  et de longueur d'onde  $\lambda = c/\nu$  dans le vide, son énergie s'écrit :

$$E = h\nu = \hbar\omega$$

où  $\omega = 2\pi\nu$  est la pulsation du photon,  $h = 6.626070 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  la constante de Planck et  $\hbar = h/2\pi$ .

De plus, le photon transporte aussi une quantité de mouvement relativiste qui vaut  $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ , où  $\mathbf{k}$  est le vecteur d'onde du photon : c'est un vecteur dont la direction et le sens correspondent à la direction de propagation du photon, et dont la norme  $k = |\mathbf{k}|$  vaut :

$$k = |\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c}$$

Pour un photon, on peut construire son quadrivecteur d'onde  $\tilde{\mathbf{k}}$  selon :

$$\tilde{\mathbf{k}} : k^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\pi\nu}{c} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}.$$

Et, de la même manière, son quadrivecteur énergie-impulsion  $\tilde{\mathbf{q}}$ ,

$$\tilde{\mathbf{q}} = \hbar \tilde{\mathbf{k}} \quad \text{de composantes} \quad q^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\hbar\omega}{c} \\ \hbar \mathbf{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h\nu}{c} \\ \hbar \mathbf{k} \end{pmatrix}.$$

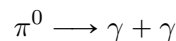
Pour un photon, la pseudo-norme carrée de son quadrivecteur énergie-impulsion est toujours nulle :

$$\tilde{\mathbf{q}}^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 - \hbar^2 \mathbf{k}^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 - \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 = 0,$$

ce qui est logique : pour une particule massive de masse  $m$ , la pseudo-norme carrée de son quadrivecteur énergie-impulsion vaut  $m^2 c^2$ ; comme la masse au repos du photon est nulle, on trouve naturellement ici que  $\tilde{\mathbf{q}}^2 = 0$ .

### Désintégration du pion $\pi^0$

Dans 98.82% des cas, le pion neutre  $\pi^0$  se désintègre en une paire de photons gamma selon la réaction :



**1 pt** 1.4 — Exprimez la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total avant et après la désintégration du pion neutre  $\pi^0$ . On notera  $\tilde{\mathbf{p}}_\pi$  le quadrivecteur énergie-impulsion du pion, et  $\tilde{\mathbf{q}}_1, \tilde{\mathbf{q}}_2$  les quadrivecteurs énergie-impulsion des deux photons issus de la désintégration du  $\pi^0$ .

Du fait de la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total, on aura :

$$\tilde{\mathbf{p}}_\pi = \tilde{\mathbf{q}}_1 + \tilde{\mathbf{q}}_2$$

où  $\tilde{\mathbf{p}}_\pi, \tilde{\mathbf{q}}_1$  et  $\tilde{\mathbf{q}}_2$  sont respectivement les quadrivecteurs énergie-impulsion du pion  $\pi^0$  avant sa désintégration, et des deux photons issus de sa désintégration.

**2 pts** 1.5 — Dans le référentiel  $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}_\pi$  du pion avant la désintégration (i.e. dans le référentiel propre du pion), Exprimez les énergies  $E_1^*$  et  $E_2^*$  des deux photons produits. Que vaut nécessairement l'angle  $\theta_{12}^*$  entre les deux photons ?

Du fait de la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total, on aura :

$$\tilde{\mathbf{p}}_\pi = \tilde{\mathbf{q}}_1 + \tilde{\mathbf{q}}_2$$

où  $\tilde{\mathbf{p}}_\pi$ ,  $\tilde{\mathbf{q}}_1$  et  $\tilde{\mathbf{q}}_2$  sont respectivement les quadrivecteurs énergie-impulsion du pion  $\pi^0$  avant sa désintégration, et des deux photons issus de la désintégration.

Dans le référentiel propre du pion  $\mathcal{R}_\pi$ , leurs composantes contravariantes sont :

$$\tilde{\mathbf{p}}_\pi : p_\pi^\mu = \begin{pmatrix} m_\pi c \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{q}}_1 : q_1^\mu = \begin{pmatrix} E_1^*/c = h\nu_1^*/c \\ \hbar \mathbf{k}_1^* \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{q}}_2 : q_2^\mu = \begin{pmatrix} E_2^*/c = h\nu_2^*/c \\ \hbar \mathbf{k}_2^* \end{pmatrix}$$

Par conservation du vecteur quantité de mouvement, on a nécessairement

$$\hbar \mathbf{k}_1^* + \hbar \mathbf{k}_2^* = \mathbf{0} \quad \text{soit} \quad \hbar \mathbf{k}_2^* = -\hbar \mathbf{k}_1^*.$$

On en déduit que les deux photons sont émis dos à dos dans le référentiel  $\mathcal{R}_\pi$ , avec des impulsions égales en norme mais opposées; ils ont par conséquent la même énergie  $E_\gamma^* = E_1^* = E_2^*$ , et par conservation de l'énergie totale, on aura dans  $\mathcal{R}_\pi$  :

$$m_\pi c^2 = E_1^* + E_2^* = 2E_\gamma^* \quad \text{d'où} \quad E_1^* = E_2^* = E_\gamma^* = \frac{m_\pi c^2}{2},$$

et l'angle  $\theta_{12}^*$  entre leurs vecteurs quantité de mouvement vaut nécessairement  $\theta_{12}^* = \pi = 180^\circ$ .

**1 pt** 1.6 — Que vaut la masse invariante  $m_{\gamma\gamma}$  du système formé par les deux photons issus de la désintégration du pion ?

La masse invariante du système constitué des deux photons s'écrit dans  $\mathcal{R}_\pi$  :

$$m_{\gamma\gamma}^2 c^2 = (\tilde{\mathbf{q}}_1 + \tilde{\mathbf{q}}_2)^2 = \left( \frac{E_1^*}{c} + \frac{E_2^*}{c} \right)^2 = 4 \frac{E_\gamma^{*2}}{c^2}$$

Soit,

$$m_{\gamma\gamma}^2 = 4 \frac{E_\gamma^{*2}}{c^4} \quad m_{\gamma\gamma} = 2 \frac{E_\gamma^*}{c^2} = m_\pi,$$

ce qu'on pouvait établir de manière immédiate en se souvenant que la masse invariante du système est une grandeur conservée : la masse invariante du pion avant désintégration étant sa masse propre (masse au repos), on a nécessairement  $m_{\gamma\gamma} = m_\pi$ .

**2 pts** 1.7 — Écrivez maintenant le bilan de la désintégration du pion en deux photons dans le référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}$ . Exprimez la masse invariante  $m_{\gamma\gamma}$  en fonction des énergies  $E_1$  et  $E_2$  de chacun des deux photons et de l'angle  $\theta_{12}$  entre les deux photons. Exprimez la masse  $m_\pi$  du pion  $\pi^0$  en fonction de  $E_1$ ,  $E_2$  et  $\theta_{12}$ .

Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire, on a cette fois :

$$\tilde{\mathbf{p}}_\pi : p_\pi^\mu = \begin{pmatrix} E_\pi/c \\ \mathbf{p}_\pi \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{q}}_{\gamma 1} : q_{\gamma 1}^\mu = \begin{pmatrix} E_1/c = h\nu_1/c \\ \hbar \mathbf{k}_1 \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{q}}_{\gamma 2} : q_{\gamma 2}^\mu = \begin{pmatrix} E_2/c = h\nu_2/c \\ \hbar \mathbf{k}_2 \end{pmatrix}$$

où  $E_\pi$ ,  $E_1$  et  $E_2$  sont cette fois les énergies du pion  $\pi^0$  et des deux photons dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , et  $\mathbf{p}_\pi$ ,  $\hbar \mathbf{k}_1$  et  $\hbar \mathbf{k}_2$  les quantités de mouvement du pion et des deux photons.

La masse invariante du système constitué des deux photons s'écrit alors :

$$\begin{aligned} m_{\gamma\gamma}^2 c^2 &= (\tilde{\mathbf{q}}_1 + \tilde{\mathbf{q}}_2)^2 = \tilde{\mathbf{q}}_1^2 + \tilde{\mathbf{q}}_2^2 + 2\tilde{\mathbf{q}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{q}}_2 = 2\tilde{\mathbf{q}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{q}}_2 \\ &= 2 \frac{E_1 E_2}{c^2} - 2\hbar^2 \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 = 2 \frac{E_1 E_2}{c^2} - 2 \frac{\hbar^2}{\lambda_1 \lambda_2} \cos \theta_{12} \\ &= 2 \frac{E_1 E_2}{c^2} - 2 \frac{\hbar^2 \nu_1 \nu_2}{c^2} \cos \theta_{12} = 2 \frac{E_1 E_2}{c^2} [1 - \cos \theta_{12}] \\ m_{\gamma\gamma} &= \sqrt{\frac{2E_1 E_2}{c^4} (1 - \cos \theta_{12})} \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme d'une part le quadrivecteur énergie-impulsion total est conservé (et donc sa pseudo-norme carrée), et que d'autre part la pseudo-norme carrée est un invariant de Lorentz, on a :

$$m_{\gamma\gamma}^2 c^2 = (\tilde{\mathbf{q}}_1 + \tilde{\mathbf{q}}_2)^2 = \tilde{\mathbf{p}}_\pi^2 = m_\pi^2 c^2 \quad \text{soit} \quad m_\pi = m_{\gamma\gamma}$$

La masse invariante du système constitué des deux photons est donc toujours égale à la masse du pion avant désintégration, quel que soit le référentiel dans lequel on mesure l'énergie des deux photons.

**Données :**

masse du proton :  $m_p = 938.272 \text{ MeV}/c^2$

masse du pion neutre  $\pi^0$  :  $m_\pi = 134.977 \text{ MeV}/c^2$

$c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

## 2. Voiles solaires, propulsion laser et voyage intersidéral

[28 pts]

*La plupart des questions concernant la trajectoire de la sonde (partie 2.2) peuvent être traitées indépendamment de la première partie de l'exercice.*

En 2016, plusieurs milliardaires (dont Yuri Milner et Mark Zuckerberg) et Stephen Hawking ont lancé le projet "Breakthrough Starshot"<sup>2</sup> dont l'objectif est de concevoir, construire et lancer plusieurs milliers de sondes spatiales miniaturisées équipées de voiles solaires vers le système stellaire le plus proche de nous, Alpha Centauri<sup>3</sup>, situé à  $D = 4.37$  années-lumière du Soleil. Chaque sonde serait constituée d'une voile légère et réfléchissante d'environ  $4\text{ m} \times 4\text{ m}$ , à la manière d'un cerf-volant, et d'un petit module intégré comportant notamment un système de communication et une ou plusieurs caméras miniaturisées, le tout d'une masse d'environ 1 gramme. La propulsion serait assurée par le tir de très puissants lasers basés sur Terre : l'impact des photons se réfléchissant sur la voile ("pression de radiation") fournirait l'accélération nécessaire, permettant à ces sondes miniatures d'obtenir des vitesses entre  $0.2c$  et  $0.5c$ , et d'atteindre les étoiles les plus proches comme Alpha Centauri en quelques décennies.

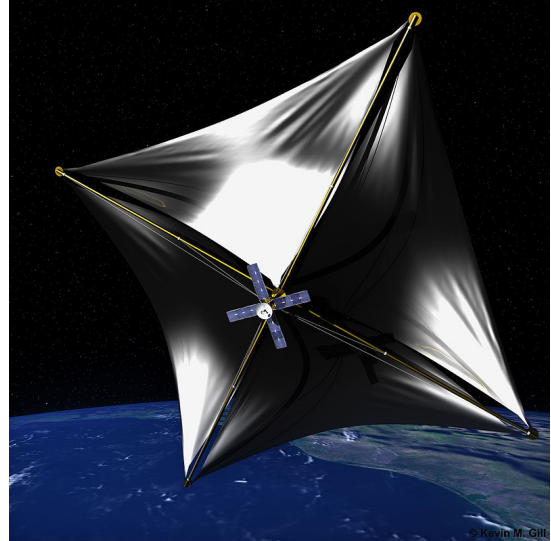


FIGURE 1 – Sonde spatiale munie d'une voile solaire (vue d'artiste).

### 2.1. Propulsion par laser

Afin de comprendre le fonctionnement de ces sondes, on se propose d'analyser le principe de la propulsion d'une voile sur laquelle on envoie un faisceau intense de lumière monochromatique.

On rappelle qu'un photon de fréquence  $\nu$  et de longueur d'onde  $\lambda$  transporte une énergie  $E = h\nu$  et une quantité de mouvement  $\hbar \mathbf{k}$ , avec  $\mathbf{k}$  le vecteur d'onde du photon de norme  $k = 2\pi/\lambda = 2\pi\nu/c$ .

1 pt

2.1 — Écrivez le quadrivecteur énergie-impulsion  $\tilde{\mathbf{q}}$  d'un tel photon, ainsi que ses composantes  $q^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ). On suppose que ce photon se propage selon  $\mathbf{e}_x$  dans le référentiel considéré.

Les composantes  $q^\mu$  du quadrivecteur énergie-impulsion  $\tilde{\mathbf{q}}$  d'un photon de fréquence  $\nu$  et de longueur d'onde  $\lambda$  s'écrivent :

$$\tilde{\mathbf{q}} : q^\mu = \begin{pmatrix} E \\ c \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h\nu \\ c \\ \hbar \mathbf{k} \end{pmatrix}$$

où  $\mathbf{q} = \hbar \mathbf{k}$  est la quantité de mouvement transportée par le photon;  $\mathbf{k}$  est le vecteur d'onde du photon, de norme  $|\mathbf{k}| = k = 2\pi/\lambda = 2\pi\nu/c$ , et dont la direction est celle de la propagation du photon.

La masse au repos du photon étant nulle, on aura  $\tilde{\mathbf{q}}^2 = 0$ .

2. "Reaching for the Stars, Across 4.37 Light-Years", New York Times, 13 avril 2016, [https://www.nytimes.com/2016/04/13/science/alpha-centauri-breakthrough-starshot-yuri-milner-stephen-hawking.html?\\_r=0](https://www.nytimes.com/2016/04/13/science/alpha-centauri-breakthrough-starshot-yuri-milner-stephen-hawking.html?_r=0)

3. Alpha Centauri est un système de trois étoiles liées gravitationnellement, deux étoiles similaires au Soleil baptisées Alpha Centauri A ("Rigil Kentaurus"), Alpha Centauri B ("Toliman"), et une naine rouge, Alpha Centauri C, aussi connue comme "Proxima Centauri". À l'heure actuelle (2023) cinq planètes ont été détectées dans le système d'Alpha Centauri : trois orbitant autour de Proxima Centauri et deux autour de Toliman. Toutefois, l'existence de certaines de ces planètes ne fait pas encore consensus.

**1 pt** 2.2 — De même, écrivez le quadrivecteur énergie-impulsion  $\tilde{\mathbf{p}}$  de la sonde de masse  $m$ , ainsi que ses composantes  $p^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ). On suppose que la sonde voyage selon  $\mathbf{e}_x$  dans le référentiel considéré, avec une vitesse  $v(t)$ .

Pour la sonde qui se déplace à la vitesse  $\mathbf{v}(t) = v(t) \mathbf{e}_x$ , son énergie  $E$  et sa quantité de mouvement  $\mathbf{p}$  s'écrivent :

$$E = \gamma(v)mc^2 \quad \mathbf{p} = \gamma(v)m \mathbf{v}.$$

Son quadrivecteur énergie-impulsion s'écrit ainsi :

$$\tilde{\mathbf{p}} = m \tilde{\mathbf{U}} = m \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\tau} \quad \text{avec } \tilde{\mathbf{U}} \text{ la quadrivitesse de composantes } U^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(v)c \\ \gamma(v)\mathbf{v} \end{pmatrix}$$

et ses composantes contravariantes  $p^\mu$  sont :

$$p^\mu = mU^\mu = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v)mc \\ \gamma(v)m \mathbf{v} \end{pmatrix}$$

Elles vérifient :

$$\tilde{\mathbf{p}}^2 = (p^0)^2 - (\mathbf{p})^2 = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2c^2 \quad \text{soit} \quad E = \sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2}.$$

Ici, la vitesse  $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$  de la sonde est selon  $\mathbf{e}_x$ , et les composantes  $p^\mu$  du quadrivecteur énergie-impulsion  $\tilde{\mathbf{p}}$  de la sonde se réduisent à :

$$p^\mu = mU^\mu = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v)mc \\ \gamma(v)m \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v)mc \\ \gamma(v)mv \mathbf{e}_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v)mc \\ \gamma(v)mv \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Considérons un photon de fréquence  $\nu_i$  en provenance de la Terre qui se propage selon  $\mathbf{e}_x$  et qui se réfléchit en incidence normale sur la surface parfaitement réfléchissante de la voile solaire de la sonde. Le photon repart avec une fréquence  $\nu_f$  en sens opposé. On notera  $E_i$  et  $\mathbf{p}_i$  respectivement l'énergie totale et la quantité de mouvement de la sonde avant l'impact du photon, et  $E_f$  et  $\mathbf{p}_f$  son énergie totale et sa quantité de mouvement après le rebond du photon.

**1 pt** 2.3 — Écrivez la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement pour le système constitué du photon et de la sonde. Même si cela n'est pas indispensable (on peut effectuer ce calcul sans), on aura avantage à utiliser le formalisme des quadrivecteurs : on notera  $\tilde{\mathbf{q}}_i$  et  $\tilde{\mathbf{q}}_f$  les quadrivecteurs énergie-impulsion du photon avant et après le rebond du photon sur la sonde respectivement. De même, on notera  $\tilde{\mathbf{p}}_i$  et  $\tilde{\mathbf{p}}_f$  les quadrivecteurs énergie-impulsion de la sonde avant et après l'interaction avec le photon incident.

La conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total pour le système constitué du photon et de la sonde, considéré avant et après le rebond du photon sur la voile de la sonde, s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{p}}_i + \tilde{\mathbf{q}}_i = \tilde{\mathbf{p}}_f + \tilde{\mathbf{q}}_f \quad \text{soit, en composantes} \quad p_i^\mu + q_i^\mu = p_f^\mu + q_f^\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (1)$$

Or, les composantes respectives des quadrivecteurs énergie-impulsion s'écrivent :

$$p_i^\mu = \begin{pmatrix} E_i/c \\ \mathbf{p}_i = p_i \mathbf{e}_x \end{pmatrix} \quad q_i^\mu = \begin{pmatrix} \frac{h\nu_i}{c} \\ \hbar \mathbf{k}_i = +\hbar k_i \mathbf{e}_x \end{pmatrix} \quad p_f^\mu = \begin{pmatrix} E_f/c \\ \mathbf{p}_f = p_f \mathbf{e}_x \end{pmatrix} \quad q_f^\mu = \begin{pmatrix} \frac{h\nu_f}{c} \\ \hbar \mathbf{k}_f = -\hbar k_f \mathbf{e}_x \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total du système (équation (1)) équivaut aux deux équations suivantes, qui décrivent la conservation de l'énergie totale et de la quantité de mouvement totale du système { sonde + photon } :

$$E_i + h\nu_i = E_f + h\nu_f \quad (2)$$

$$\mathbf{p}_i + \hbar \mathbf{k}_i = \mathbf{p}_f + \hbar \mathbf{k}_f. \quad (3)$$

**3 pts** **2.4** — En utilisant le résultat précédent, et en raisonnant dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}'$  tangent à la sonde (autrement dit, le référentiel galiléen ou inertiel qui se confond avec le référentiel de la sonde à l'instant considéré), établissez dans le référentiel inertiel tangent  $\mathcal{R}'$  l'expression de la variation  $\Delta\lambda' = \lambda'_f - \lambda'_i$  de la longueur d'onde du photon après qu'il se soit réfléchi sur la voile de la sonde. Application numérique : Exprimez  $\Delta\lambda'$  en nanomètres. On supposera que la masse totale de la sonde (voile comprise) est  $m = 1$  gramme. Commentez.

Le calcul est analogue à celui de l'effet Compton, avec la sonde dans le rôle de l'électron, pour une diffusion du photon avec un angle de diffusion  $\theta = \pi$  (rétro-diffusion).

À l'instant considéré, on se place dans le référentiel inertiel tangent à la sonde : avant l'impact du photon, la sonde y est donc immobile, et  $\mathbf{p}'_i = \mathbf{0}$  dans ce référentiel. En conservant les mêmes notations que précédemment mais primées, car on se place dans le référentiel inertiel tangent  $\mathcal{R}'$ , on trouve :

$$\tilde{\mathbf{p}}'_i + \tilde{\mathbf{q}}'_i = \tilde{\mathbf{p}}'_f + \tilde{\mathbf{q}}'_f \quad \text{soit} \quad \tilde{\mathbf{p}}'_f = \tilde{\mathbf{p}}'_i + \tilde{\mathbf{q}}'_i - \tilde{\mathbf{q}}'_f.$$

En élevant le tout au carré, on obtient :

$$(\tilde{\mathbf{p}}'_f)^2 = (\tilde{\mathbf{p}}'_i)^2 + (\tilde{\mathbf{q}}'_i)^2 + (\tilde{\mathbf{q}}'_f)^2 + 2\tilde{\mathbf{p}}'_i \cdot \tilde{\mathbf{q}}'_i - 2\tilde{\mathbf{p}}'_i \cdot \tilde{\mathbf{q}}'_f - 2\tilde{\mathbf{q}}'_i \cdot \tilde{\mathbf{q}}'_f \quad \text{i.e.} \quad \tilde{\mathbf{q}}'_i \cdot \tilde{\mathbf{q}}'_f = \tilde{\mathbf{p}}'_i \cdot (\tilde{\mathbf{q}}'_i - \tilde{\mathbf{q}}'_f) \quad (4)$$

car  $(\tilde{\mathbf{p}}'_i)^2 = (\tilde{\mathbf{p}}'_f)^2 = m^2 c^2$  où  $m$  est la masse au repos de la sonde, et  $(\tilde{\mathbf{q}}'_i)^2 = (\tilde{\mathbf{q}}'_f)^2 = 0$  (la masse au repos du photon est nulle).

En exprimant cette dernière équation à l'aide des composantes dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , on trouve :

$$\frac{h^2 \nu'_i \nu'_f}{c^2} - \hbar^2 \mathbf{k}'_i \cdot \mathbf{k}'_f = mc \left[ \frac{h\nu'_i}{c} - \frac{h\nu'_f}{c} \right]. \quad (5)$$

Comme le photon rebondit et repart selon  $(-\mathbf{e}_x)$ , le produit scalaire  $\mathbf{k}'_i \cdot \mathbf{k}'_f$  des vecteurs d'onde du photon avant et après l'impact vaut simplement :

$$\mathbf{k}'_i \cdot \mathbf{k}'_f = (k'_i \mathbf{e}_x) \cdot (-k'_f \mathbf{e}_x) = -k'_i k'_f = -\frac{2\pi}{\lambda'_i} \frac{2\pi}{\lambda'_f} = -\frac{4\pi^2}{\lambda'_i \lambda'_f}$$

L'équation (5) devient ainsi :

$$\frac{h^2 \nu'_i \nu'_f}{c^2} + \frac{h^2}{\lambda'_i \lambda'_f} = mc \left[ \frac{h\nu'_i}{c} - \frac{h\nu'_f}{c} \right] \quad \text{soit} \quad \frac{2h^2}{\lambda'_i \lambda'_f} = mc \left[ \frac{h}{\lambda'_i} - \frac{h}{\lambda'_f} \right]$$

en utilisant la relation  $\lambda = c/\nu$ . En multipliant le tout par  $\lambda'_i \lambda'_f$  et en simplifiant, on obtient :

$$\Delta\lambda' = \lambda'_f - \lambda'_i = \frac{2h}{mc}$$

On remarque qu'on retrouve une formule analogue à celle de l'effet Compton, avec la sonde dans le rôle de l'électron et pour un angle de diffusion du photon  $\theta = \pi$  (rétro-diffusion).



Numériquement, pour une sonde de masse  $m = 1$  gramme, on trouve :

$$\Delta\lambda' = \frac{2 \times 6.626070 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}}{10^{-3} \text{ kg} \times 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} \approx 4.42 \times 10^{-39} \text{ m} = 4.42 \times 10^{-30} \text{ nm}$$

Du fait de la masse macroscopique de la sonde, le changement de longueur d'onde dans le référentiel de la sonde est extrêmement faible : on pourra le négliger.

Pour la suite de l'exercice, on négligera la variation de longueur d'onde du photon avant et après réflexion, et on prendra :

$$\lambda_f \approx \lambda_i = \lambda \quad \text{et} \quad \nu_f \approx \nu_i = \nu$$

**2 pts** 2.5 — En raisonnant dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du système solaire, supposé galiléen, dans l'approximation  $\nu_f \approx \nu_i = \nu$  (qu'on supposera aussi valide dans  $\mathcal{R}$ ), et en utilisant la conservation de la quantité de mouvement, montrez que l'impact du photon de fréquence  $\nu_i = \nu$  provoque une augmentation de la quantité de mouvement de la sonde d'une quantité :

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i \approx \frac{2h\nu}{c} \mathbf{e}_x$$

Si on fait l'approximation que la fréquence des photons n'est pas modifiée par l'impact dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du système solaire, considéré comme galiléen, le résultat est alors immédiat : en appliquant la conservation de la quantité de mouvement totale pour le système { sonde + photon } donnée par l'équation (3), on a directement :

$$\mathbf{p}_i + \hbar \mathbf{k}_i = \mathbf{p}_f + \hbar \mathbf{k}_f.$$

Ce qui donne :

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \hbar \mathbf{k}_i - \hbar \mathbf{k}_f = \hbar k_i \mathbf{e}_x - (-\hbar k_f \mathbf{e}_x) = 2\pi\hbar \left[ \frac{1}{\lambda_i} + \frac{1}{\lambda_f} \right] \mathbf{e}_x = \frac{h}{c} (\nu_i + \nu_f) \mathbf{e}_x \approx \frac{2h\nu}{c} \mathbf{e}_x.$$

L'impact de chaque photon d'énergie  $h\nu$  fournit ainsi une quantité de mouvement  $(2h\nu/c) \mathbf{e}_x$  à la sonde.

**1 pt** 2.6 — Pour le projet "Breakthrough Starshot", la puissance lumineuse cumulée des lasers nécessaire pour propulser la sonde est estimée à  $\mathcal{P} = 100$  GigaWatts (Rappel : 1 Watt = 1 Joule / seconde). En supposant que la totalité du faisceau de lumière émis sur Terre soit capté par la voile réfléchissante de la sonde, exprimez le nombre de photons  $dN$  qui frappent la voile pendant un temps élémentaire  $dt$ , et déduisez-en le nombre  $dN/dt$  d'impacts de photons par unité de temps. Application numérique.

En supposant que tout le faisceau frappe la voile, la puissance lumineuse reçue par la voile de la sonde est donc  $\mathcal{P} = 100$  GigaWatts. L'énergie lumineuse qui vient frapper la voile pendant un instant  $dt$  vaut ainsi  $\mathcal{P}dt$ . Dans ce flux de lumière, chaque photon transporte une énergie  $h\nu$ ; comme on suppose le faisceau monochromatique, le nombre  $dN$  de photons reçus pendant un instant  $dt$  élémentaire vaut donc :

$$dN = \frac{\mathcal{P}dt}{h\nu} = \frac{\mathcal{P}}{h\nu} dt$$

On en déduit le nombre d'impacts de photons par unité de temps,

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\mathcal{P}}{h\nu} = \frac{\mathcal{P}\lambda}{hc}$$

Numériquement, cela donne :

$$\frac{dN}{dt} = \frac{10^{11} \text{ W} \times 632.8 \times 10^{-9} \text{ m}}{6.626070 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \times 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} \approx 3.19 \times 10^{29} \text{ photons/s.}$$

- 2 pts** 2.7 — Exprimez la variation  $d\mathbf{p}$  de la quantité de mouvement de la sonde pendant un intervalle de temps  $dt$  en fonction de la masse de la sonde et de la puissance laser  $\mathcal{P}$  reçue. Montrez que la quantité de mouvement  $\mathbf{p}$  de la sonde vérifie l'équation :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{2\mathcal{P}}{c} \mathbf{e}_x \quad \text{avec} \quad \mathbf{p} = \gamma(v)m \mathbf{v}. \quad (6)$$

où  $\mathbf{v}(t) = v(t) \mathbf{e}_x$  est la vitesse de la sonde mesurée dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du système solaire.

Pendant un instant  $dt$ , chaque photon d'énergie  $h\nu$  transfère à la sonde une quantité de mouvement  $(2h\nu/c) \mathbf{e}_x$  : or, pendant un instant  $dt$ ,  $dN$  photons frappent la sonde. La quantité de mouvement de la sonde augmente donc d'une quantité  $d\mathbf{p}$  (dans le référentiel  $\mathcal{R}$ ), qui s'écrit :

$$d\mathbf{p} = \frac{2h\nu}{c} dN \mathbf{e}_x = \frac{2h\nu}{c} \frac{\mathcal{P}}{h\nu} \mathbf{e}_x dt = \frac{2\mathcal{P}}{c} \mathbf{e}_x dt.$$

À partir de l'équation précédente, on obtient le résultat :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{2\mathcal{P}}{c} \mathbf{e}_x.$$

- 3 pts** 2.8 — En supposant constantes la fréquence  $\nu$  des photons reçus par la sonde et la puissance laser reçue  $\mathcal{P}$ , résolvez l'équation (6) et donnez l'expression de la vitesse  $v(t)$  de la sonde en fonction du temps dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Pour la résolution de (6), on supposera que la vitesse de la sonde est nulle à  $t = 0$ . On posera  $a = 2\mathcal{P}/mc$  : donnez sa valeur numérique. Quel type de mouvement reconnaît-on ?

En remplaçant dans l'équation (6) la quantité de mouvement  $\mathbf{p}$  par son expression,  $\mathbf{p} = \gamma(v)m\mathbf{v}$ , on trouve :

$$\frac{d}{dt} (\gamma(v)m\mathbf{v}) = \frac{2\mathcal{P}}{c} \mathbf{e}_x \quad \text{i.e.} \quad \frac{d(\gamma(v)\mathbf{v})}{dt} = \frac{2\mathcal{P}}{mc} \mathbf{e}_x = a \mathbf{e}_x. \quad (7)$$

où  $a$  a la dimension d'une accélération et vaut numériquement :

$$a = \frac{2\mathcal{P}}{mc} \approx \frac{2 \times 10^{11} \text{ W}}{10^{-3} \text{ kg} \times 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} \approx 6.67 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Si on suppose que la puissance lumineuse  $\mathcal{P}$  reçue par la sonde est maintenue constante, alors  $a$  est constante et on peut intégrer l'équation (7). En séparant les variables, l'équation différentielle (7) devient :

$$d(\gamma(v)\mathbf{v}) = a \mathbf{e}_x dt.$$

De manière évidente, si on suppose la vitesse nulle au départ, la vitesse  $\mathbf{v}(t)$  de la sonde est selon  $\mathbf{e}_x$  et on a  $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$ . L'intégration est immédiate,

$$\left[ \gamma(v)v \right]_{v(0)}^{v(t)} = \int_0^t a dt = at$$

Et, en prenant  $v(0) = 0$ ,

$$\gamma(v(t))v(t) = at \quad \text{i.e.} \quad \frac{v(t)}{\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}} = at.$$

On obtient alors l’expression de la vitesse de la sonde en élevant le tout au carré et en extrayant  $v(t)$ ,

$$\frac{v^2(t)}{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} = a^2 t^2 \quad \text{soit} \quad v(t) = \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}(t) = v(t) \mathbf{e}_x.$$

On reconnaît l’expression de la vitesse du mouvement dit “hyperbolique”.

On suppose qu’il est possible de maintenir en fonctionnement le faisceau laser de telle sorte que la puissance laser reçue  $\mathcal{P}$  par la sonde soit constante, aussi longtemps que possible.

**1 pt** 2.9 — Vers quelle vitesse limite tend la vitesse de la sonde ?

D’après l’expression de la vitesse de la sonde, la vitesse limite pour  $at \gg c$  soit  $t \gg c/a$  vaut :

$$v(t) = \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}} \xrightarrow{t \gg c/a} \frac{at}{\sqrt{\frac{a^2 t^2}{c^2}}} = \frac{at}{at} c = c.$$

La vitesse limite de la sonde est la vitesse  $c$  de la lumière dans le vide.

## 2.2. Trajectoire de la sonde

**2 pts** 2.10 — On prendra comme origine du référentiel  $\mathcal{R}$  la position initiale de la sonde :  $x(t = 0) = 0$ . En intégrant l’expression de la vitesse  $v(t)$ , montrez que la position  $x(t)$  de la sonde en fonction du temps vérifie :

$$x(t) = \frac{c^2}{a} \left[ \sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right] \tag{8}$$

En intégrant l’expression de la vitesse, on obtient la position de la sonde dans le référentiel  $\mathcal{R}$  en fonction du temps :

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t) dt = \int_0^t \left( 1 + \frac{a^2 t^2}{c^2} \right)^{-1/2} at dt = \left[ \frac{c^2}{a} \left( 1 + \frac{a^2 t^2}{c^2} \right)^{1/2} \right]_0^t = \frac{c^2}{a} \left[ \sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right].$$

**2 pts** 2.11 — Montrez que dans l’espace-temps, la trajectoire de la sonde est une hyperbole d’équation :

$$(Ax + B)^2 - (Dct)^2 = 1$$

Donnez l’expression des coefficients  $A$ ,  $B$  et  $D$ .

À partir de l’expression (8) de  $x(t)$ , on montre qu’on a :

$$\frac{a}{c^2} x + 1 = \sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} \quad \text{soit} \quad \left( \frac{a}{c^2} x + 1 \right)^2 = 1 + \frac{a^2 t^2}{c^2} \quad \text{i.e.} \quad \left( \frac{a}{c^2} x + 1 \right)^2 - \left( \frac{a}{c^2} ct \right)^2 = 1$$

où on reconnaît l’équation  $(Ax + B)^2 - (Dct)^2 = 1$  d’une hyperbole avec

$$A = \frac{a}{c^2} \quad B = 1 \quad D = \frac{a}{c^2}.$$

L’équation obtenue est celle d’une hyperbole dans le plan  $(x, ct)$ . La ligne d’univers de la sonde est ainsi une branche d’hyperbole dans l’espace-temps (d’où l’appellation de “mouvement hyperbolique” pour ce mouvement particulier).

**2 pts** 2.12 — Représentez la trajectoire de la sonde du point de vue du référentiel du système solaire dans un diagramme d'espace-temps (diagramme de Minkowski). **Par souci de lisibilité, vous consacrez une page entière à ce diagramme d'espace-temps.** Montrez que l'hyperbole présente deux asymptotes obliques, d'équations :

$$ct = \frac{A}{D}x + \frac{B}{D} \quad (\text{branche positive}) \quad ct = -\frac{A}{D}x - \frac{B}{D} \quad (\text{branche négative})$$

Explicitez ces deux équations, et dessinez l'asymptote à la branche positive de l'hyperbole sur votre diagramme. Quelle est la pente de cette asymptote ?

À partir de l'équation donnant la trajectoire  $x(t)$ , on peut exprimer  $ct$  en fonction de  $x$ ,

$$x(t) = \frac{c^2}{a} \left[ \sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right] \quad \text{soit} \quad \frac{a}{c^2}x + 1 = \sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} \quad \text{i.e.} \quad \left( \frac{a}{c^2}x + 1 \right)^2 = 1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}$$

Ce qui donne :

$$\frac{at}{c} = \pm \sqrt{\left( \frac{a}{c^2}x + 1 \right)^2 - 1} = \pm \left( \frac{a}{c^2}x + 1 \right) \sqrt{1 - \left( \frac{a}{c^2}x + 1 \right)^{-2}}$$

Pour obtenir l'équation des asymptotes, on peut linéariser cette dernière expression pour des  $x$  et des  $t$  grands, ce qui donne les équations des asymptotes recherchées :

$$\frac{at}{c} \approx \pm \left( \frac{a}{c^2}x + 1 \right) \quad ct \approx \pm \left( x + \frac{c^2}{a} \right)$$

L'hyperbole considéré présente ainsi deux asymptotes obliques, d'équations :

$$ct = x + \frac{c^2}{a} \quad \text{et} \quad ct = -x - \frac{c^2}{a}$$

On remarque que la pente de ces droites est  $\pm 1$  (même pente que la ligne d'univers d'un photon).

**1 pt** 2.13 — À quelle coordonnée  $t_{\text{limite}}$  l'asymptote de la branche positive coupe-t-elle l'axe des temps ?

D'après ce qui précède, l'équation de l'asymptote à la branche de l'hyperbole dans le cadran positif ( $x > 0, ct > 0$ ) est :

$$ct = x + \frac{c^2}{a}.$$

Cette droite coupe l'axe des temps en  $x = 0$ , ce qui correspond à

$$ct = \frac{c^2}{a} \quad \text{soit} \quad t = t_{\text{limite}} = \frac{c}{a}$$

Numériquement, on trouve  $t_{\text{limite}} \approx 449$  s.

**3 pts** 2.14 — Dessinez sur votre diagramme la ligne d'univers d'un photon émis depuis la Terre en direction de la sonde, dans les trois cas suivants :

1. Le photon est émis sur Terre à un instant  $t \in [0, t_{\text{limite}}[$ .
2. Le photon est émis sur Terre à un instant  $t > t_{\text{limite}}$ .
3. Le photon est émis à  $t = t_{\text{limite}}$ .

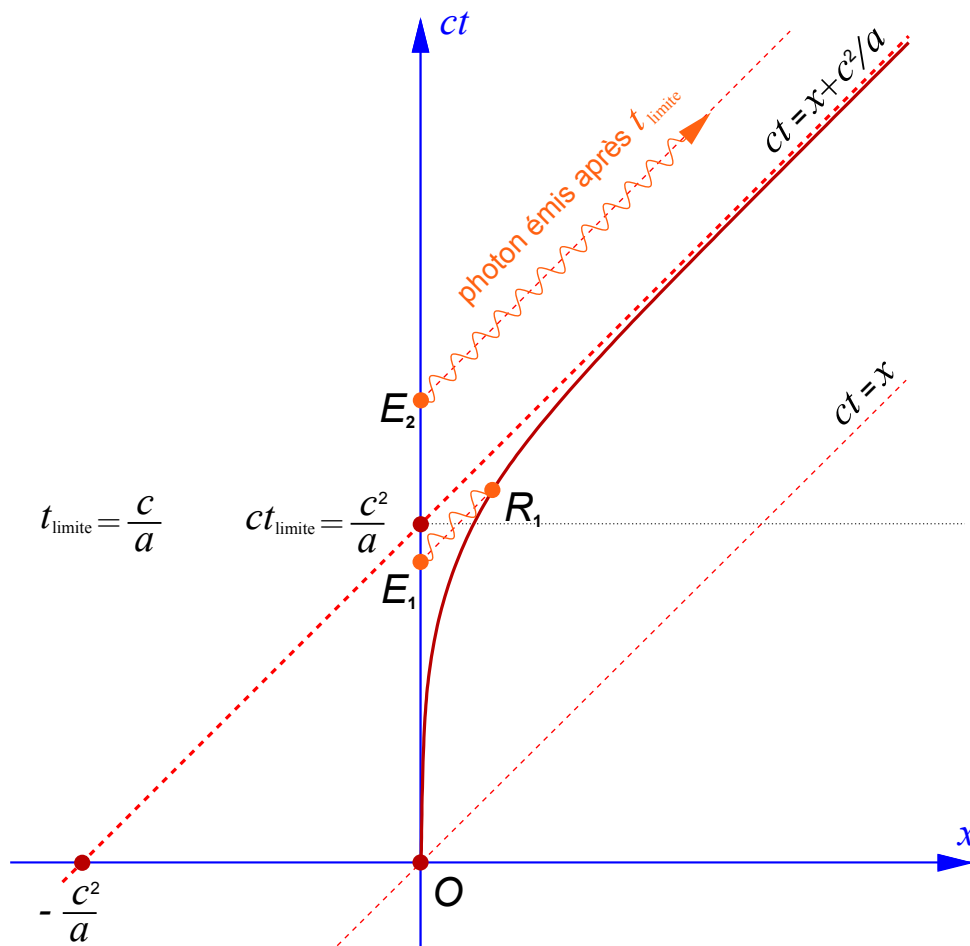


FIGURE 2 – Ligne d’univers de la sonde (en rouge), avec son asymptote d’équation  $ct = x + c^2/a$  qui coupe l’axe des temps en  $ct_{\text{limite}}$  avec  $t_{\text{limite}} = c/a$ . On a aussi représenté la ligne d’univers d’un photon émis depuis la Terre dans la direction de la sonde à  $t < t_{\text{limite}}$  : ce photon est émis en  $E_1$  et atteint la sonde en  $R_1$ . Enfin, un photon émis à  $t \geq t_{\text{limite}}$  (événement  $E_2$ ) ne pourra jamais rattraper la sonde.

Concluez : d'après votre diagramme, est-il possible à un photon émis sur Terre à  $t \geq t_{\text{limite}}$  d'atteindre la sonde? Commentez quant à la possibilité d'envoyer à la sonde des messages émis depuis la Terre après  $t_{\text{limite}}$ . Est-il utile de maintenir le laser de propulsion allumé sur Terre au-delà de  $t = t_{\text{limite}}$ ?

La ligne d'univers de la sonde, son asymptote et les trajectoires d'un photon émis à  $t < t_{\text{limite}}$  (événement  $E_1$ ) et d'un photon émis à  $t > t_{\text{limite}}$  (événement  $E_2$ ) sont représentées sur la figure 2.

Comme la pente de l'asymptote de la ligne d'univers est la même que celle de la trajectoire d'un photon, il apparaît clairement qu'un photon émis depuis la Terre à un instant  $t \geq t_{\text{limite}} = c/a$  ne pourra jamais rejoindre la sonde (deux droites parallèles dans le plan ne se coupent jamais). Tout message émis depuis la Terre après  $t_{\text{limite}}$  ne pourra donc jamais atteindre la sonde (par contre, il est possible à la sonde d'envoyer des messages vers la Terre). De même, il est inutile de maintenir le laser de propulsion allumé au-delà de  $t = t_{\text{limite}}$  car les photons émis sur Terre après cet instant ne pourront pas rejoindre la sonde et lui donner un supplément de quantité de mouvement.

**2 pts** 2.15 — En pratique, on souhaite atteindre une vitesse de croisière de  $v_c = 0.2c$ . Exprimez le temps nécessaire  $\Delta t_{\text{laser}}$  pendant lequel il faut illuminer la voile à l'aide du faisceau laser pour atteindre cette vitesse. Application numérique.

À partir de l'expression de la vitesse  $v(t)$ , on établit la relation inverse (déjà rencontrée plus haut lors de la résolution des équations du mouvement),

$$v(t) = \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}} \quad \text{d'où} \quad at = \frac{v(t)}{\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}}.$$

Le temps  $\Delta t_{\text{laser}}$  pendant lequel il faut maintenir le laser de propulsion allumé est donc :

$$\Delta t_{\text{laser}} = \frac{v_c}{a\sqrt{1 - \frac{v_c^2}{c^2}}} \approx 91.7 \text{ s.}$$

**1 pt** 2.16 — Avec une telle vitesse de croisière, en négligeant la phase d'accélération, en combien de temps la sonde attendra-t-elle Alpha Centauri? Application numérique.

Si on néglige la phase d'accélération et qu'on considère que l'essentiel du voyage s'effectue à la vitesse constante  $v_c = 0.2c$ , le temps de parcours  $\Delta t_{\text{parcours}}$  s'écrit simplement :

$$\Delta t_{\text{parcours}} = \frac{D}{v_c} = \frac{4.37 \text{ années-lumière}}{0.2c} \approx 21.8 \text{ années.}$$

#### Données :

Distance Soleil - Alpha Centauri :  $D = 4.37$  années-lumière = 1.34 parsec

Masse de la sonde (voile comprise) :  $m = 1$  gramme

Puissance et longueur d'onde du laser :  $\mathcal{P} = 100$  GW       $\lambda = 632.8$  nm

$h = 6.626070 \times 10^{-34}$  kg · m<sup>2</sup> · s<sup>-1</sup>       $\hbar = h/2\pi$        $c = 299792458$  m · s<sup>-1</sup>.

Remarque : Le calcul que nous venons d'effectuer n'est pas tout à fait correct, car nous avons négligé deux effets importants : d'une part, si le laser émet ses photons avec une fréquence  $\nu$  constante sur Terre, ces photons sont reçus avec une fréquence inférieure  $\nu' < \nu$  par la sonde dans son référentiel propre, du fait de l'effet Doppler ; cette fréquence  $\nu'$  décroît au fur et à mesure que la sonde accélère,

et tend vers zéro quand  $v$  tend vers  $c$ . D'autre part, si la puissance laser émise sur Terre est constante (nombre constant de photons émis par unité de temps sur Terre), le nombre de photons reçus par unité de temps par la sonde diminue progressivement, du fait de l'augmentation de la vitesse de la sonde et des effets de dilatation du temps. Par ailleurs, on néglige ici la divergence du faisceau laser utilisé.

## Compléments

*Ce qui suit n'était pas attendu lors de l'épreuve : il s'agit seulement d'un complément au corrigé pour les plus curieux.*

Comme indiqué ci-dessus, nous avons négligé plusieurs effets importants dans notre calcul. Nous allons les discuter brièvement et indiquer les grandes lignes d'un traitement complet du problème de la propulsion de ces sondes intersidérales.

**Photon incident et photon réfléchi.** Le raisonnement que nous avons effectué sur la différence (négligeable) de longueur d'onde entre photon incident et photon réfléchi n'est en réalité exact que dans le référentiel inertiel tangent  $\mathcal{R}'$  à la sonde. Ce résultat n'est plus valide lorsqu'on raisonne dans le référentiel de départ  $\mathcal{R}$ , celui du système solaire. Vu dans  $\mathcal{R}$ , le photon incident qui frappe la voile a bien la même longueur d'onde que lorsqu'il est émis sur Terre, mais le photon réfléchi est *redshifté* par effet Doppler, et l'approximation  $\lambda_i \approx \lambda_f$  n'est plus légitime, particulièrement lorsque la vitesse de la sonde est grande.

**Effet Doppler.** Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  (on confond ici allègrement référentiel terrestre et référentiel du système solaire sans commettre une grande erreur, car les vitesses des sondes sont sans commune mesure avec la vitesse de rotation de la Terre autour du soleil), les photons du laser de propulsion sont émis à la fréquence  $\nu$  et à la longueur d'onde  $\lambda = c/\nu$ ; du fait du mouvement de la sonde, ils sont reçus par la sonde dans son référentiel (ou plutôt, dans le référentiel galiléen tangent  $\mathcal{R}'$ ) avec une fréquence plus faible  $\nu'$  et une longueur d'onde plus grande  $\lambda'$ ,

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad \text{et} \quad \lambda' = \lambda \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad (9)$$

où  $\beta = v(t)/c$  et  $v(t)$  est la vitesse de la sonde dans  $\mathcal{R}$  à l'instant  $t$ .

Si on fait apparaître la rapidité  $\varphi = \operatorname{arctanh} \beta$  de la sonde ( $\beta = \tanh \varphi$ ), les expressions précédentes prennent une forme élégante :

$$\nu' = \nu e^{-\varphi} \quad \text{et} \quad \lambda' = \lambda e^{+\varphi}. \quad (10)$$

Par conséquent, si on raisonne dans le référentiel inertiel tangent  $\mathcal{R}'$ , la quantité de mouvement transférée par un photon à la sonde s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{p}' &= \mathbf{p}'_f - \mathbf{p}'_i = \hbar \mathbf{k}'_i - \hbar \mathbf{k}'_f = \hbar k'_i \mathbf{e}_x - (-\hbar k'_f \mathbf{e}_x) \\ \Delta \mathbf{p}' &= 2\pi \hbar \left[ \frac{1}{\lambda'_i} + \frac{1}{\lambda'_f} \right] \mathbf{e}_x = \frac{h}{c} (\nu'_i + \nu'_f) \mathbf{e}_x \approx \frac{2h\nu'}{c} \mathbf{e}_x \\ \Delta \mathbf{p}' &\approx \frac{2h\nu}{c} \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \mathbf{e}_x = \frac{2h\nu}{c} e^{-\varphi} \mathbf{e}_x \end{aligned}$$

Car dans le référentiel tangent, comme vu précédemment, on a bien  $\lambda'_i \approx \lambda'_f$ . L'impact de chaque photon émis sur Terre avec l'énergie  $h\nu$  (dans le référentiel  $\mathcal{R}$ ) fournit ainsi une quantité de mouvement  $(2h\nu'/c) \mathbf{e}_x = (2h\nu/c) e^{-\varphi} \mathbf{e}_x$  à la sonde.

**Intensité émise et reçue.** Non seulement la fréquence des photons est affectée, mais le nombre de photons reçus par unité de temps l'est aussi. En tenant un raisonnement analogue à celui effectué en TD pour démontrer l'effet Doppler (on peut par exemple considérer l'émission et la réception de deux photons successifs), on peut montrer que le nombre  $dN'/dt'$  de photons reçus par unité de temps par la sonde est relié au nombre  $dN/dt$  de photons émis par unité de temps sur Terre par le même coefficient que celui de l'effet Doppler,

$$\frac{dN'}{dt'} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \frac{dN}{dt} = e^{-\varphi} \frac{dN}{dt}. \quad (11)$$

Et, en faisant apparaître la puissance lumineuse  $\mathcal{P}$  émise sur Terre,

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\mathcal{P}}{h\nu}$$

on trouve alors

$$\frac{dN'}{dt'} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \frac{\mathcal{P}}{h\nu} = e^{-\varphi} \frac{\mathcal{P}}{h\nu}$$

**Équation du mouvement.** Vu dans le référentiel tangent  $\mathcal{R}'$ , chaque photon reçu, d'énergie  $h\nu'$  transmet à la sonde une quantité de mouvement  $2h\nu' \mathbf{e}_x/c$ ; on aura ainsi :

$$\frac{d\mathbf{p}'}{dt'} = \frac{2h\nu'}{c} \frac{dN'}{dt'} \mathbf{e}_x = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \frac{2h\nu}{c} \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \frac{dN}{dt} \mathbf{e}_x = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right) \frac{2h\nu}{c} \frac{\mathcal{P}}{h\nu} \mathbf{e}_x = e^{-2\varphi} \frac{2\mathcal{P}}{c} \mathbf{e}_x$$

On aboutit ainsi à une équation différentielle de la forme

$$d\mathbf{p}' = e^{-2\varphi} \frac{2\mathcal{P}}{c} dt' \mathbf{e}_x = e^{-2\varphi} ma dt' \mathbf{e}_x \quad (12)$$

en posant  $a = 2\mathcal{P}/mc$  comme précédemment. Dans le référentiel tangent, la sonde n'a pas de vitesse (ni de quantité de mouvement) avant l'impact des  $dN'$  photons, et sa vitesse devient  $d\mathbf{v}' = dv' \mathbf{e}_x$  après l'impact des  $dN'$  photons reçus pendant un temps élémentaire  $dt'$ ; l'incrément  $d\mathbf{p}'$  de quantité de mouvement correspondant s'écrit :

$$d\mathbf{p}' = m\gamma(dv')dv' \mathbf{e}_x = mdv' \mathbf{e}_x$$

car  $\gamma(dv') \approx 1$ . En substituant, l'équation (12) devient :

$$dv' = e^{-2\varphi} a dt' \quad \text{i.e.} \quad e^{2\varphi} dv' = a dt'.$$

**Résolution.** En utilisant les résultats déjà établis précédemment lors de l'étude des mouvements accélérés, on peut tout exprimer en fonction de la rapidité  $\varphi$  de la sonde :

$$dv' = \gamma^2(v)dv = c \cosh^2 \varphi \frac{1}{\cosh^2 \varphi} d\varphi = c d\varphi \quad dt' = \frac{dt}{\gamma(v)} = \frac{dt}{\cosh \varphi}.$$

Ce qui donne, en substituant,

$$e^{2\varphi} \cosh \varphi d\varphi = \frac{a}{c} dt \quad \text{soit} \quad (e^{3\varphi} + e^\varphi) d\varphi = \frac{2a}{c} dt. \quad (13)$$



En intégrant entre l'instant du départ et un instant  $t$  quelconque, et en supposant que la vitesse initiale est nulle, et par conséquent que la rapidité initiale l'est aussi ( $\varphi(0) = 0$ ), on obtient :

$$\left[ \frac{e^{3\varphi}}{3} + e^\varphi \right]_0^{\varphi(t)} = \frac{2at}{c} \quad \text{soit} \quad \frac{e^{3\varphi}}{3} + e^\varphi - \frac{4}{3} = \frac{2at}{c}$$

ce qui donne une équation de la forme :

$$e^{3\varphi} + 3e^\varphi - \frac{6at}{c} - 4 = 0$$

où, en posant  $\xi = e^\varphi$ , on reconnaît une équation polynomiale cubique en  $\xi$ ,

$$\xi^3 + 3\xi - \frac{6at}{c} - 4 = 0.$$

Cette équation polynomiale de degré 3 possède une solution réelle,

$$e^\varphi = \xi = \sqrt[3]{\sqrt{\Delta} + \frac{3at}{c} + 2} - \frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{\Delta} + \frac{3at}{c} + 2}} \quad \text{avec} \quad \Delta = \frac{9a^2t^2}{c^2} + \frac{12at}{c} + 5.$$

Une fois  $\xi(t) = e^{\varphi(t)}$  connu, on obtient la rapidité et la vitesse  $v(t)$  de la sonde :

$$\frac{v(t)}{c} = \beta(t) = \tanh \varphi(t) = \frac{e^{\varphi(t)} - e^{-\varphi(t)}}{e^{\varphi(t)} + e^{-\varphi(t)}} = \frac{\xi(t) - 1/\xi(t)}{\xi(t) + 1/\xi(t)}.$$

L'évolution de la vitesse est représentée sur la figure 3; on y a aussi dessiné la vitesse calculée précédemment pour un mouvement hyperbolique. On constate que, comme précédemment, la vitesse tend vers  $c$  si on maintient les lasers de propulsion allumés suffisamment longtemps. Pour obtenir une vitesse de croisière de  $v_c = 0.2c$ , il faudra maintenir actifs les lasers de propulsion un peu plus longtemps pour compenser l'effet Doppler et la diminution de la puissance effective reçue par la sonde. On trouve  $\Delta t_{\text{laser}} \approx 113$  s au lieu de 91.7 s pour le mouvement hyperbolique.

**Trajectoire et ligne d'univers de la sonde.** Connaissant l'expression de la vitesse de la sonde dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du système solaire, on peut en déduire sa trajectoire.

En partant de l'équation différentielle (13), on peut exprimer  $dt$  en fonction de  $d\varphi$ ,

$$e^{2\varphi} \cosh \varphi d\varphi = \frac{a}{c} dt \quad \text{d'où} \quad dt = \frac{c}{a} e^{2\varphi} \cosh \varphi d\varphi$$

et en utilisant

$$dx = v(t) dt = c \tanh \varphi dt$$

on en déduit une équation différentielle liant la rapidité et la position :

$$dx = \frac{c^2}{a} e^{2\varphi} \cosh \varphi \tanh \varphi d\varphi = \frac{c^2}{a} e^{2\varphi} \sinh \varphi d\varphi \quad \text{i.e.} \quad dx = \frac{c^2}{2a} (e^{3\varphi} - e^\varphi) d\varphi.$$

En intégrant entre le point de départ ( $t = 0, x = 0, v = 0$  et  $\varphi = 0$ ) et un point quelconque de la trajectoire  $(ct, x)$ , on trouve :

$$\begin{aligned} x(t) - x(0) = x(t) &= \frac{c^2}{2a} \left[ \frac{e^{3\varphi}}{3} - e^\varphi \right]_0^{\varphi(t)} = \frac{c^2}{6a} (e^{3\varphi(t)} - 3e^{\varphi(t)} + 2) \\ &= \frac{c^2}{6a} (e^{3\varphi(t)} - 3e^{\varphi(t)}) + \frac{c^2}{3a} = \frac{c^2}{6a} \left( (e^{\varphi(t)})^3 - 3e^{\varphi(t)} \right) + \frac{c^2}{3a}. \end{aligned}$$

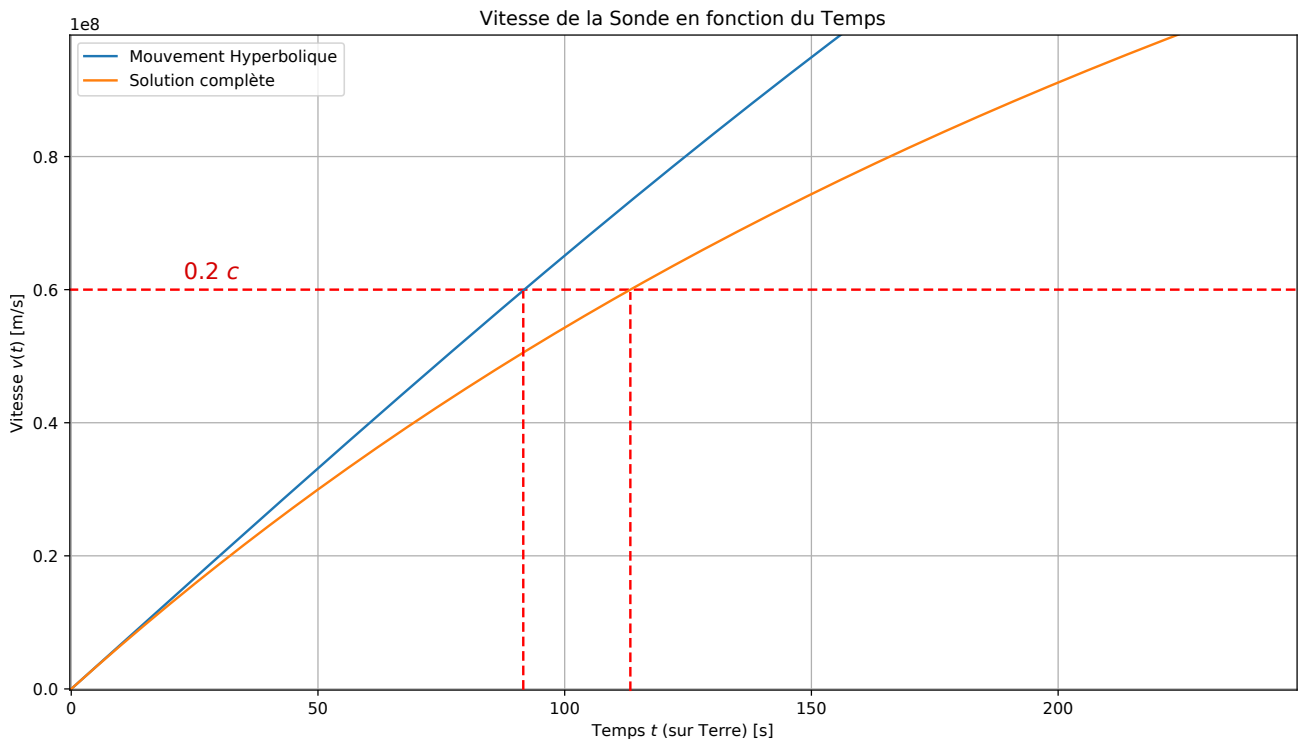
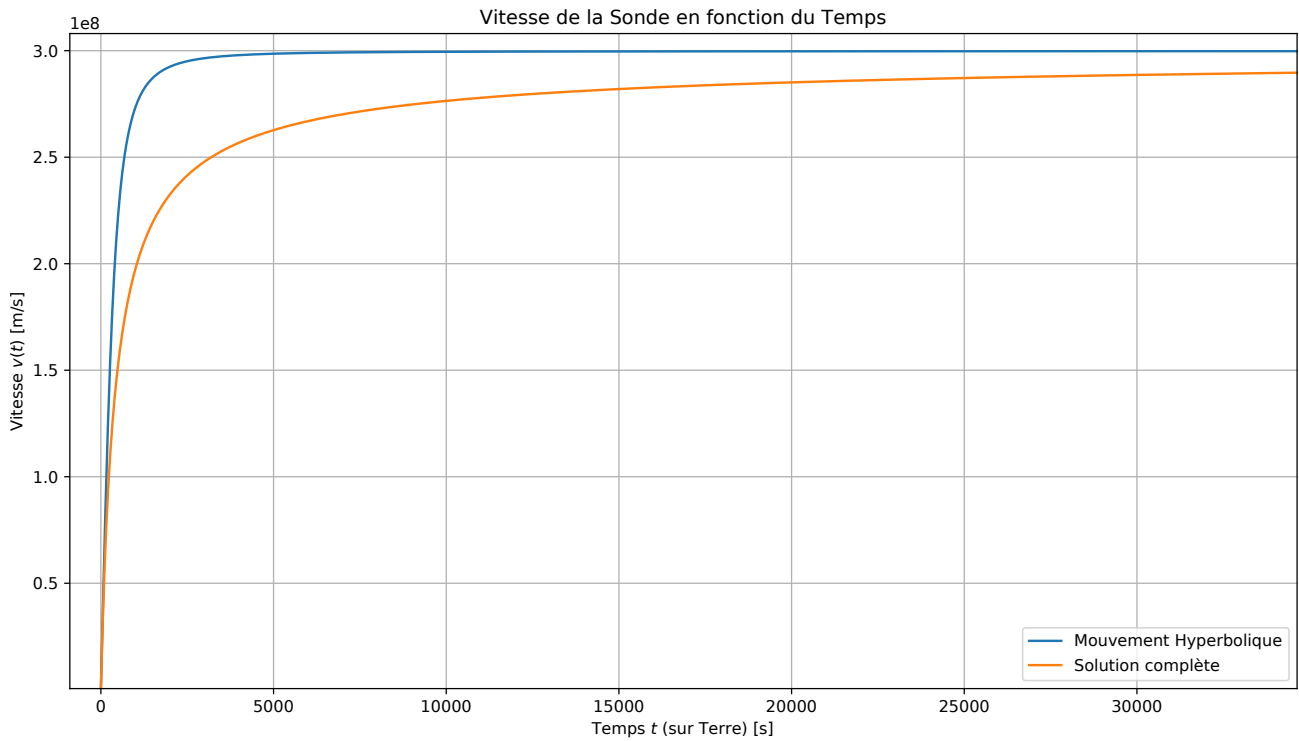


FIGURE 3 – Évolution de la vitesse de la sonde, en supposant qu’on maintienne le laser allumé aussi longtemps que possible. En bleu,  $v(t)$  calculée en ignorant l’effet Doppler et la diminution progressive de la puissance effective reçue (mouvement “hyperbolique”); en orange,  $v(t)$  calculée en tenant compte de ces deux effets.

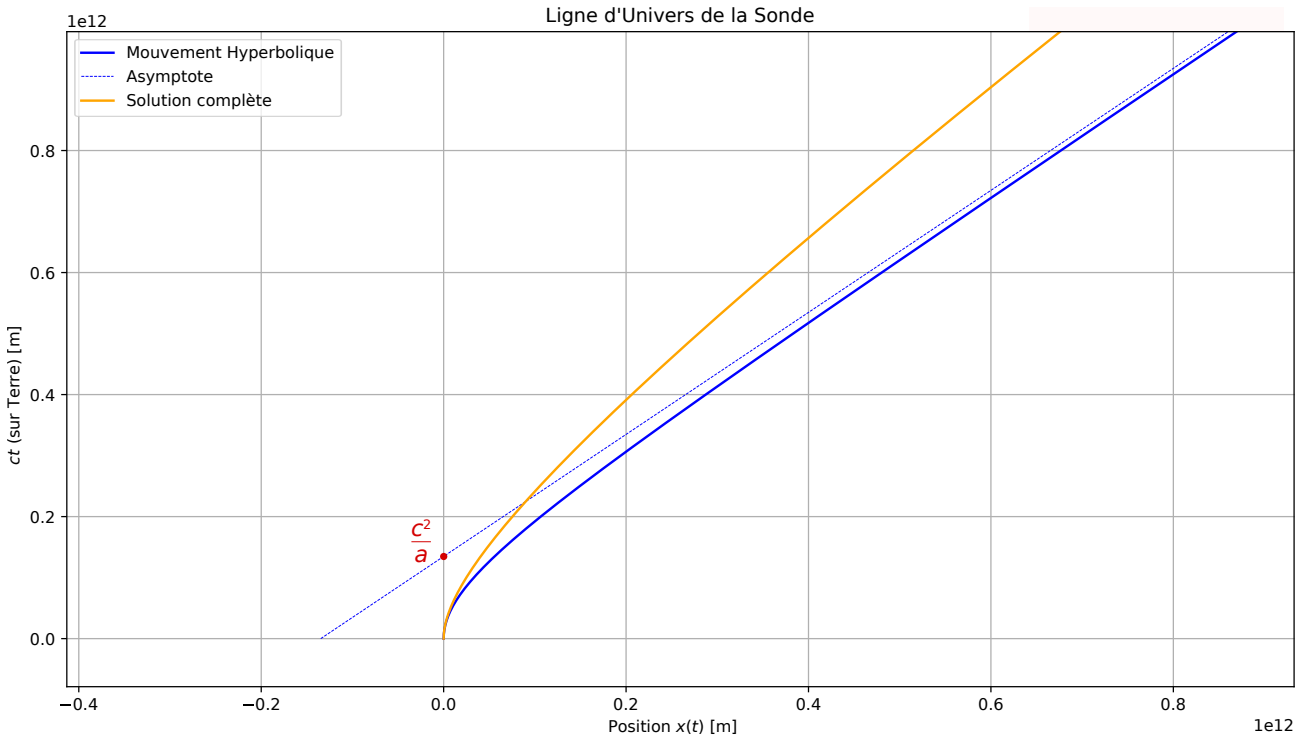


FIGURE 4 – Ligne d’univers de la sonde, en supposant qu’on maintienne le laser allumé aussi longtemps que possible. En bleu, ligne d’univers calculée en ignorant l’effet Doppler et la diminution progressive de la puissance effective reçue (mouvement “hyperbolique”); en orange, ligne d’univers calculée en tenant compte de ces deux effets.

En utilisant l’expression de  $e^{\varphi(t)}$  établie précédemment, on obtient la trajectoire de la sonde. Cette fois la ligne d’univers de la sonde n’est plus une hyperbole. La ligne d’univers de la sonde est représentée sur la figure 4.

Dans ce calcul un peu plus complet, on a bien sûr ignoré de nombreux autres effets et problèmes pratiques : le faisceau laser diverge et il n’est pas évident que la voile puisse en capter la totalité pendant la phase d’accélération ; l’espace n’est pas vide et contient des poussières interstellaires qui peuvent ralentir les sondes, voir même les endommager pendant leur trajet ; la puissance du faisceau laser est telle que les contraintes mécaniques et thermiques exercées sur la voile et sa structure sont considérables : en particulier, il faut concevoir une voile très fine et très légère, mais qui ne s’évapore pas instantanément sous l’échauffement produit par l’impact du faisceau laser. Il faudra que le projet “Breakthrough Starshot” réussisse à s’affranchir de nombreux verrous technologiques avant qu’il ne soit effectivement envisageable de lancer des sondes vers Alpha Centauri de cette manière.



FIGURE 5 – Le système d’Alpha Centauri ( $\alpha$  Cen) constitué des étoiles Alpha Centauri A (“Rigel Kentaurus”), Alpha Centauri B (“Tolliman”), et Alpha Centauri C (“Proxima Centauri”), est l’astre le plus brillant de la constellation du Centaure. La constellation du Centaure, ainsi que les constellations qui forment ou accompagnent le grand navire austral Argo : la Carène (Carina), les Voiles (Vela), la Poupe (Puppis), le Poisson Volant (Volans), etc., sont visibles depuis l’hémisphère Sud (figure produite avec Stellarium, pour un point de vue calculé pour l’observatoire ESO de La Silla, Chili).