Licence de Physique — Relativité Restreinte

Interrogation Écrite — Corrigé

Parcours SPRINT & Double Majeure PM — Année Universitaire 2023–2024

Interrogation n°1 : durée 15 minutes

[Total : 10 pts]

1. Voyage spatial et gravité artificielle

On considère un vaisseau spatial cylindrique, de rayon $R = 40\,\mathrm{m}$, dont le centre de gravité se déplace dans l'espace selon l'axe du vaisseau à vitesse constante par rapport au système solaire, loin de tout astre massif. On appellera $\mathcal{R}$ le référentiel fixé au centre O du vaisseau et dont les axes sont orientés vers les étoiles lointaines.

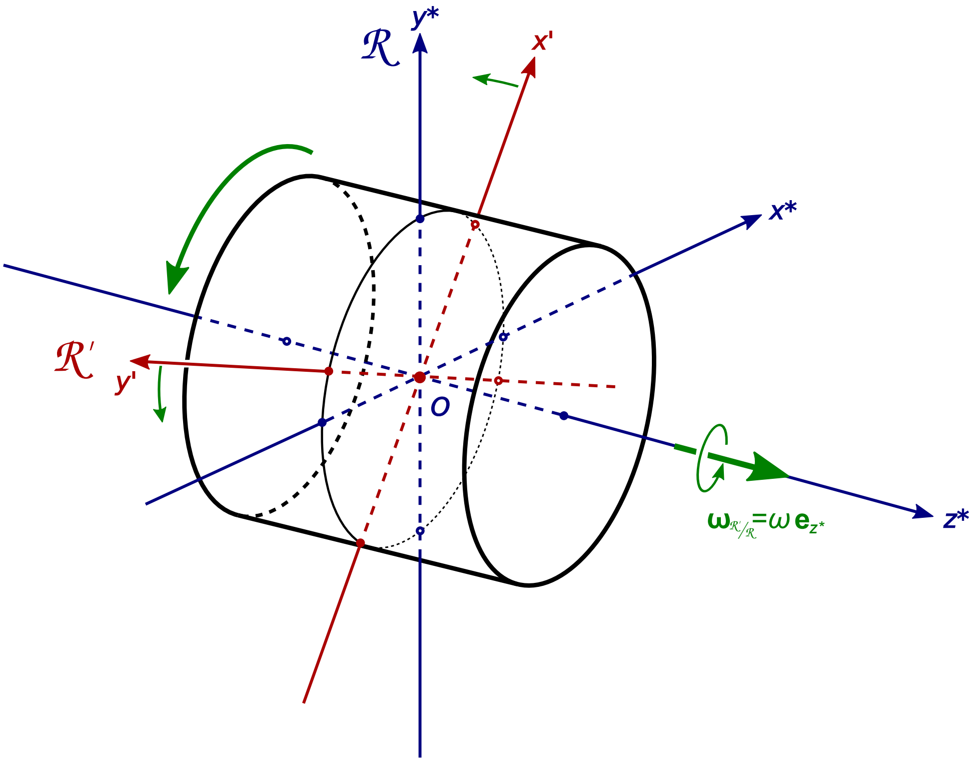

Figure 1 – *Schéma du vaisseau en rotation sur lui-même, afin de maintenir une "gravité artificielle" pour les passagers.*

Afin de limiter les soucis de santé liés à de longs séjours en apesanteur, le vaisseau tourne sur lui-même à la vitesse angulaire $\omega = \omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$, constante, mesurée par rapport au référentiel $\mathcal{R}$: de cette manière, la force centrifuge ressentie par les passagers simulera une gravité artificielle. On appellera $\mathcal{R}'$ le référentiel solidaire du vaisseau : on fixera son origine en $O' = O$.

1 pt **1.1 —** Le référentiel $\mathcal{R}$ est-il galiléen ? Qu'en est-il du référentiel $\mathcal{R}'$ solidaire du vaisseau ? Justifiez vos réponses.

Le référentiel $\mathcal{R}$ est en translation uniforme par rapport au référentiel du système solaire (référentiel de Copernic, galiléen) : $\mathcal{R}$ est donc galiléen/inertiel. Le référentiel $\mathcal{R}'$ est en rotation par rapport à $\mathcal{R}$ galiléen : $\mathcal{R}'$ n'est donc pas un référentiel galiléen/inertiel.

2 pts **1.2 —** Donnez l'expression de l'accélération d'entraînement $\mathbf{a}_\mathrm{e}$ à la distance $r = R$ de l'axe de rotation du vaisseau, en fonction de R et ω. Donnez de même l'expression de la force inertielle résultante $\mathbf{F}_\mathrm{e}$. Quelle force reconnaissez-vous ? Sur la figure 2, représentez $\mathbf{a}_\mathrm{e}$ et $\mathbf{F}_\mathrm{e}$ ressentie par chacun des trois passagers.

Les origines O et O' étant confondues, et la vitesse angulaire de rotation ω uniforme, les expressions de l'accélération $\mathbf{a}_\mathrm{e}$ et de la force d'entraînement $\mathbf{F}_\mathrm{e}$ pour un mobile M de masse m situé à la position $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ se réduisent à :

$$\mathbf{a}_\mathrm{e} = \boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O'M}\right) = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OM}) = -\omega^2 \mathbf{OM} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{F}_\mathrm{e} = -m\,\mathbf{a}_\mathrm{e} = +m\omega^2 \mathbf{OM}.$$

En $r = R$, on obtient (avec $\mathbf{e}_r$ le vecteur unitaire radial) :

$$\mathbf{a}_\mathrm{e} = -\omega^2 R\,\mathbf{e}_r \quad \text{et} \qquad \mathbf{F}_\mathrm{e} = +m\omega^2 R\,\mathbf{e}_r.$$

On reconnaît l'expression de la force centrifuge (fig. 2).

3 pts **1.3 —** À quelle vitesse angulaire ω le vaisseau doit-il tourner sur lui-même pour générer l'équivalent de la pesanteur terrestre g à la distance R de l'axe du vaisseau ? Donnez l'expression de ω en fonction de g et R. À combien de tours par minute cela correspond-il ? Applications numériques ($g \simeq 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, $R = 40\,\mathrm{m}$).

Pour qu'on ait la sensation du poids sur Terre à la distance $r = R$ de l'axe du vaisseau, il faut que l'intensité de la force centrifuge en $r = R$ soit égale à celle du poids à la surface terrestre :

$$F_\mathrm{e} = P \quad \textit{i.e.} \quad m\omega^2 R = mg \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{R}} \quad \textit{i.e.} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{R}} \simeq \sqrt{\frac{10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}}{40\,\mathrm{m}}} = 0.5\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}.$$

En une minute, soit $60\,\mathrm{s}$, le vaisseau tourne donc sur lui même de $60\,\mathrm{s} \times 0.5\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}} \simeq 30\,\mathrm{rad}$ soit environ 4.77 tours par minute.

À l'instant $t = 0$, le cosmonaute A lance sa clef à molette dans la direction de sa collègue B, à travers le vaisseau (fig. 2), à la vitesse $\mathbf{u'}$ (fig. 2), avec $u'(t=0) = 5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. On souhaite prédire la trajectoire de la clef à molette dans le référentiel $\mathcal{R}'$ solidaire du vaisseau.

2 pts **1.4 —** Donnez les expressions de l'accélération $\mathbf{a}_\mathrm{c}$ et de la force de Coriolis $\mathbf{F}_\mathrm{c}$ pour la clef à molette (supposée ponctuelle) dans le référentiel $\mathcal{R}'$ solidaire du vaisseau ; calculez numériquement la norme a_c de l'accélération de Coriolis à $t = 0$.

L'accélération de Coriolis $\mathbf{a}_\mathrm{c}$ et la force de Coriolis $\mathbf{F}_\mathrm{c}$ s'écrivent :

$$\mathbf{a}_\mathrm{c} = 2\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}' \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_\mathrm{c} = -m\,\mathbf{a}_\mathrm{c} = -2m\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}'.$$

À $t = 0$, la vitesse $\mathbf{u}'$ de la clef à molette dans $\mathcal{R}'$ vaut $\mathbf{u}'(t=0) = u'(t=0)\,\mathbf{e}'_y = -u'(t=0)\,\mathbf{e}_r$ avec $u'(t=0) = 5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Par conséquent, l'accélération de Coriolis $\mathbf{a}_\mathrm{c}(t=0)$ que subit la clef à molette vaut, à $t = 0$,

$$\mathbf{a}_\mathrm{c}(t=0) = 2\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}'(t=0) = 2\omega\,\mathbf{e}'_z \times u'(t=0)\,\mathbf{e}'_y = -2\omega u'(t=0)\,\mathbf{e}'_x$$

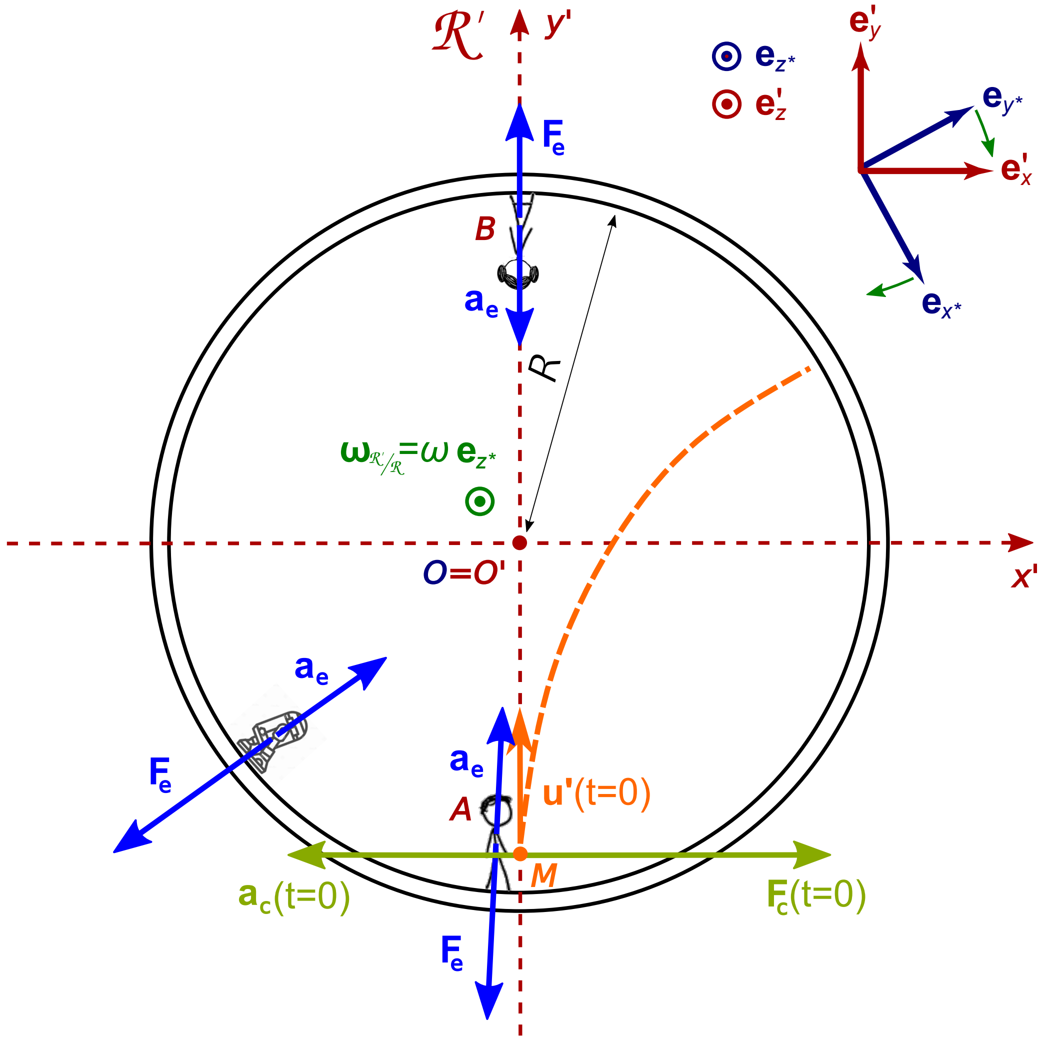

FIGURE 2 – *Schéma du vaisseau en rotation sur lui-même, dans le référentiel $\mathcal{R}'$ solidaire du vaisseau. Les différents vecteurs ne sont pas représentés à l'échelle.*

Et la force de Coriolis correspondante s'écrit alors :

$$\mathbf{F}_c(t=0) = -m\,\mathbf{a}_c(t=0) = +2m\omega u'(t=0)\,\mathbf{e}'_x.$$

À $t=0$, la norme de $\mathbf{a}_c$ vaut $a_c = 2\omega u'(t=0) = 2\times 0.5\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}\times 5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} = 5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ (fig. 2).

1 pt **1.5 —** Sur la figure 2, représentez l'accélération de Coriolis, puis la force de Coriolis associée que subit la clef à molette.

Voir figure 2. Au fur et à mesure du mouvement, l'accélération et la force de Coriolis resteront orthogonales à la vitesse $\mathbf{u}'$ de la clef à molette, et au vecteur $\boldsymbol{\omega}$.

1 pt **1.6 —** Complétez la figure 2 en y dessinant l'allure de la trajectoire de la clef à molette vue dans le référentiel tournant $\mathcal{R}'$ solidaire du vaisseau.

Voir figure 2 (courbe orange pointillée). Il faut garder en tête que la trajectoire de la clef à molette est rectiligne dans le référentiel inertiel $\mathcal{R}$ car elle n'y subit aucune force.

Rappels : transformation de la vitesse et de l'accélération entre un référentiel galiléen et un référentiel non-galiléen. Généralisation de la deuxième loi de Newton (RFD). Forces inertielles. Soient deux référentiels : un premier référentiel $\mathcal{R}$, galiléen (ou inertiel), et un second référentiel $\mathcal{R}'$, animé d'un mouvement quelconque par rapport à $\mathcal{R}$ et par conséquent non galiléen. On appelle O et O' les origines choisies dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, respectivement. De plus, on note $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ le vecteur vitesse angulaire instantané de rotation du référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$.

Considérons un point matériel M en mouvement quelconque, dont la position à chaque instant dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ est repérée par les vecteurs positions $\mathbf{r}(t) = \mathbf{OM}(t)$ et $\mathbf{r'}(t) = \mathbf{O'M}(t)$ respectivement.

Si on note $\mathbf{u}(t)$ la vitesse instantanée de M mesurée dans le référentiel $\mathcal{R}$, et $\mathbf{u}'(t)$ sa vitesse instantanée mesurée cette fois dans $\mathcal{R}'$, ces deux vitesses se déduisent l'une de l'autre par la relation :

$$\mathbf{u}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} \qquad \mathbf{u}'(t) = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{O'M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'}$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}_{O'/\mathcal{R}} + \mathbf{u}'(t) + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{O'M}.$$

Si on note $\mathbf{a}(t)$ l'accélération de M dans le référentiel $\mathcal{R}$, et $\mathbf{a}'(t)$ son accélération dans $\mathcal{R}'$, on aura, en dérivant la relation précédente (et en utilisant la relation de Varignon),

$$\mathbf{a}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}} \qquad \mathbf{a}'(t) = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{O'M}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}'} \qquad \mathbf{a}(t) = \mathbf{a}'(t) + \mathbf{a}_\mathrm{e} + \mathbf{a}_\mathrm{c}$$

où les termes d'accélération supplémentaires sont ***l'accélération d'entraînement*** $\mathbf{a}_\mathrm{e}$ et ***l'accélération de Coriolis*** $\mathbf{a}_\mathrm{c}$ qui s'écrivent respectivement :

$$\mathbf{a}_\mathrm{e} = \mathbf{a}_{\mathrm{e}/\mathcal{R}} = \mathbf{a}(O'/\mathcal{R}) + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \left(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{O'M}\right) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{O'M} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{a}_\mathrm{c} = 2\,\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{u}'$$

Si on considère un mobile M de masse m dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$, la deuxième loi de Newton (RFD) se généralise sous la forme :

$$m\mathbf{a}' = \sum \mathbf{F}_\mathrm{ext} - m\,\mathbf{a}_\mathrm{e} - m\,\mathbf{a}_\mathrm{c} = \sum \mathbf{F}_\mathrm{ext} + \mathbf{F}_\mathrm{e} + \mathbf{F}_\mathrm{c}$$

avec $\mathbf{F}_\mathrm{e} = -m\,\mathbf{a}_\mathrm{e}$ la force inertielle d'entraînement et $\mathbf{F}_\mathrm{c} = -m\,\mathbf{a}_\mathrm{c}$ la force inertielle de Coriolis.

Double produit vectoriel. Une relation utile, notamment en physique, est la formule du double produit vectoriel : si $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ sont trois vecteurs quelconques, alors :

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\ \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\ \mathbf{C}.$$